

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт  
теоретической физики им. Л.Д. Ландау Российской академии наук «ИТФ им.  
Л.Д. Ландау РАН»

На правах рукописи

Ивченко Николай Александрович

**Перенос полей в турбулентном течении  
когерентного вихря**

Специальность 1.3.3 —  
«Теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук  
Вергелес Сергей Сергеевич

Черноголовка — 2026

## Оглавление

|                                                                                               | Стр.      |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Введение</b> . . . . .                                                                     | <b>5</b>  |
| <b>Глава 1. Литературный обзор</b> . . . . .                                                  | <b>18</b> |
| 1.1 Динамика быстро вращающейся жидкости . . . . .                                            | 18        |
| 1.2 Турбулентность во вращающейся системе . . . . .                                           | 21        |
| 1.2.1 Каскады волновой турбулентности . . . . .                                               | 23        |
| 1.2.2 Геострофические течения в турбулентности . . . . .                                      | 25        |
| 1.2.3 Влияние трения о стенки на геострофическое течение . . .                                | 28        |
| 1.3 Модель столбового когерентного вихря с мелкомасштабной<br>случайной накачкой . . . . .    | 32        |
| 1.3.1 Мелкомасштабная динамика инерционных волн на фоне<br>сдвигового течения вихря . . . . . | 34        |
| 1.3.2 Статистика взаимодействия пульсаций со средним течением                                 | 38        |
| 1.3.3 Среднее течение столбового вихря . . . . .                                              | 41        |
| 1.4 Пассивная скалярная примесь в турбулентности . . . . .                                    | 44        |
| 1.4.1 Каскад флуктуаций скаляра . . . . .                                                     | 46        |
| 1.4.2 Перемешивание в бэтчелоровском режиме и модель<br>Крайчнана . . . . .                   | 47        |
| <b>Глава 2. Мелкомасштабное перемешивание пассивного скаляра</b>                              | <b>56</b> |
| 2.1 Введение . . . . .                                                                        | 56        |
| 2.2 Модель случайного течения с сильным сдвигом . . . . .                                     | 58        |
| 2.3 Статистика лагранжевых траекторий в сдвиговом потоке . . . . .                            | 63        |
| 2.3.1 Общие соотношения . . . . .                                                             | 63        |
| 2.3.2 Модель с белым шумом . . . . .                                                          | 65        |
| 2.4 Распад скаляра . . . . .                                                                  | 68        |
| 2.4.1 Одноточечная статистика . . . . .                                                       | 72        |
| 2.4.2 Парная корреляционная функция . . . . .                                                 | 75        |
| 2.4.3 Корреляционные функции высоких порядков . . . . .                                       | 78        |
| 2.5 Непрерывная накачка скаляра . . . . .                                                     | 79        |
| 2.5.1 Одноточечная статистика . . . . .                                                       | 80        |
| 2.5.2 Парная корреляционная функция . . . . .                                                 | 81        |
| 2.5.3 Корреляционные функции высоких порядков . . . . .                                       | 83        |

|                                                                |                                                         |            |
|----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|------------|
| 2.6                                                            | Заключение главы . . . . .                              | 84         |
| <b>Глава 3. Распространение инерционных волн в течении</b>     |                                                         |            |
|                                                                | <b>геострофического вихря . . . . .</b>                 | <b>87</b>  |
| 3.1                                                            | Введение . . . . .                                      | 87         |
| 3.2                                                            | Распространение волны в геострофическом вихре . . . . . | 89         |
| 3.2.1                                                          | Модель цилиндрического вихря . . . . .                  | 90         |
| 3.2.2                                                          | Коротковолновый предел цилиндрических волн . . . . .    | 93         |
| 3.3                                                            | Модель с прямыми линиями тока . . . . .                 | 95         |
| 3.4                                                            | Отражение и поглощение волны в точке поворота . . . . . | 99         |
| 3.4.1                                                          | Отражение волны в точке поворота . . . . .              | 99         |
| 3.4.2                                                          | Поглощение в критическом слое . . . . .                 | 100        |
| 3.5                                                            | Окрестность критического слоя с вязкостью . . . . .     | 103        |
| 3.5.1                                                          | Поглощение монохроматической волны . . . . .            | 104        |
| 3.5.2                                                          | Поглощение волнового пакета . . . . .                   | 106        |
| 3.6                                                            | Заключение главы . . . . .                              | 110        |
| <b>Глава 4. Поддержание геострофического вихря посредством</b> |                                                         |            |
|                                                                | <b>поглощения инерционных волн . . . . .</b>            | <b>113</b> |
| 4.1                                                            | Введение . . . . .                                      | 113        |
| 4.2                                                            | Квазилинейная модель когерентного вихря . . . . .       | 115        |
| 4.2.1                                                          | Инерционная волна в течении вихря . . . . .             | 117        |
| 4.3                                                            | Ансамбль волн на периферии . . . . .                    | 121        |
| 4.4                                                            | Касательное напряжение Рейнольдса . . . . .             | 124        |
| 4.5                                                            | Профиль когерентного циклона . . . . .                  | 126        |
| 4.6                                                            | Заключение главы . . . . .                              | 130        |
|                                                                | <b>Заключение . . . . .</b>                             | <b>132</b> |
|                                                                | <b>Публикации автора по теме диссертации . . . . .</b>  | <b>134</b> |
|                                                                | <b>Список литературы . . . . .</b>                      | <b>135</b> |
|                                                                | <b>Список рисунков . . . . .</b>                        | <b>152</b> |

|                                                                                                                 |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Приложение А. Симметрия PDF для показателя растяжения в<br>случайном гладком потоке . . . . .                   | 156 |
| Приложение Б. Преобразование Фурье совместной PDF в<br>модели с белым шумом . . . . .                           | 159 |
| Приложение В. Уравнения инерционной волны в плоскости<br>геострофического течения . . . . .                     | 163 |
| Приложение Г. Вязкий профиль монохроматической волны в<br>окрестности критического слоя . . . . .               | 166 |
| Приложение Д. Подробный анализ зависимости экстремума<br>$\xi_*(r)$ и обрезки $m_*(r)$ по азимутальным числам . | 170 |

## Введение

Классические результаты теории развитой турбулентности традиционно описывают однородную изотропную картину каскадного процесса [1]. В теории Колмогорова 1941 года предполагается широкий инерционный интервал между крупным масштабом возбуждения вынуждающей силой и малым масштабом диссипации течений. Энергия, вводимая на масштабе накачки, переносится нелинейным взаимодействием потоков вперед по инерционному интервалу к диссипационному масштабу, а статистика взаимодействующих турбулентных пульсаций локальна (в волновом пространстве) и не чувствительна к деталям накачки [2].

**Актуальность темы исследования.** Существует, однако, широкий класс течений, где эта картина оказывается неполной: наряду с каскадом в системе спонтанно возникает течение с масштабом порядка размера самой системы, амплитуда которого значительно превосходит характерную скорость пульсаций. Такие течения оказываются статистически устойчивыми во времени — по этой причине их называют когерентными. В первую очередь это явление связано с двумерной гидродинамикой в тонких слоях жидкости, в которой исторически возникло понятие “турбулентный конденсат”. Совместное сохранение интегралов энергии и энстрофии (квадрата завихренности) в невязком пределе приводит к тому, что эти величины переносятся в противоположных направлениях (формируется расщепленный каскад), так что энергия передается в сторону больших масштабов, а энстрофия — меньших [3–5]. Обратный каскад энергии останавливается на масштабе, который определяется придонным трением слоя жидкости [6]. Если ограничить систему меньшим размером, то энергия, перенесенная обратным каскадом, станет накапливаться в самых крупных модах. Это состояние Р. Крайчнан назвал спектральной конденсацией по прямой аналогии с бозе-конденсацией: макроскопически заселенной оказывается “основная мода” [3].

Подтверждение конденсации прямым численным счетом и наблюдение конденсата проводились уже в работах XX века, см. [7], где образовались крупномасштабные вихри, а следующим шагом в XXI веке был переход к описанию и исследованию структуры возникающих когерентных течений. Среди основных типов конденсатных течений стоит выделить крупномасштабные вихри и

когерентные струи. Формирование той или иной конфигурации когерентного потока в системе зависит от ее геометрии и характеристик накачки, в том числе симметрии. Например, в численном счете с периодическими граничными условиями в случае квадратной ячейки образуется вихревой диполь (два противоположно вращающихся вихря) [8], занимающий всю систему, а при вытянутой в прямоугольник ячейке его сменяют струи [9]. В экспериментах по двумерной турбулентности когерентный вихрь наблюдался в тонких слоях жидкости с электромагнитной накачкой впервые в опыте [10]. Из современных лабораторных исследований стоит отметить [11; 12], где изучались профиль установившегося вихревого течения и спектры энергии в системе в его присутствии.

Двумерная гидродинамика является идеализацией реальных потоков, однако свойства трехмерных турбулентных течений значительно изменяются при включении вращения и качественно воспроизводят описанную картину. В случае быстро вращающейся системы появляется направление, выделенное вектором угловой скорости  $\Omega$ , а действие силы Кориолиса приводит к эффективной двумеризации течения в перпендикулярной плоскости [13]. Как и в двумерной турбулентности формируется обратный каскад энергии — ее перенос к крупномасштабным вертикально-однородным вихрям во вращающейся турбулентности был продемонстрирован на численном счете в [14]. Квазидвумерные течения такого рода еще называют геострофическими [15], поскольку для них достигается баланс силы Кориолиса и давления. Описание перехода в режиме турбулентности от классической трехмерной к вращающейся при уменьшении числа Россби  $Ro$ , которое характеризует силу вращения системы, проводилось в численных экспериментах [16; 17], см. также обзор [18]. Компонента поля скорости, существенно зависящая от координаты вдоль  $\Omega$ , во вращающейся турбулентности обладает быстрой волновой динамикой, определяющейся силой Кориолиса: в линейном приближении это отдельные инерционные волны, а темп их нелинейного взаимодействия друг с другом подавляется вместе с уменьшением числа  $Ro$ . Закон дисперсии инерционных волн определяется направлением волнового вектора, а не его модулем.

Таким образом, в турбулентном потоке вращающейся жидкости можно выделить квазидвумерное геострофическое течение и трехмерное поле инерционных волн, распространяющихся на его фоне. Динамика когерентного геострофического конденсата медленная по сравнению с вращением системы,

а его крупномасштабная структура определяется взаимодействием с турбулентной волновой средой. Задача о взаимодействии волн со средним течением занимает центральное место в геофизической гидродинамике, где перенос импульса волнами в ряде случаев оказывается ведущим механизмом формирования долгоживущих зональных и вихревых структур [19] — как, например, для квазидвухлетней осцилляции ветра в стратосфере [20]. Разделение времен обуславливает адиабатическое приближение динамики, возникающее в данной задаче: сначала находится быстрая динамика волн на фоне заданного среднего течения, затем усредненное по их статистике квадратичное напряжение Рейнольдса определяет медленную динамику скорости геострофического потока [21]. При этом внутри сформировавшегося когерентного вихря возникает естественное разделение масштабов и амплитуд: скорость крупномасштабного течения конденсата много больше уровня волновых пульсаций. В таком режиме последние быстро деформируются и переносятся средним потоком — вместе с подавлением межволнового взаимодействия при быстром вращении это оправдывает квазилинейное приближение: в динамике волн ведущая роль отведена линейному взаимодействию с заданным средним течением, тогда как обратное влияние пульсаций на средний поток удерживается через рейнольдсовы напряжения [22]. Родственная теория взаимодействия волн с крупномасштабным средним течением детально разработана для стратифицированной жидкости, где внутренние гравитационные волны обладают дисперсионным законом того же типа [23], а роль медленной моды играет горизонтальное течение с преимущественно вертикальным сдвигом. В результате от волн медленному течению может передаваться энергия [24; 25] — в настоящей работе исследуется аналогичный эффект во вращающейся жидкости.

Уравнения активного/пассивного переноса-диффузии описывают огромное количество природных явлений, начиная от физики атмосферы, горения [26] и заканчивая переносом плотности в стратифицированных системах [27]. Задача о статистике пассивного скалярного поля исторически выросла из прикладных нужд — переноса течением примесей, тепла и влаги в атмосфере и океане — но ее теоретическое значение оказалось шире. После выяснения статистических свойств развитой изотропной трехмерной и двумерной турбулентности естественным развитием стала теория пассивного перемешивания скалярного поля в статистически изотропном течении в инерционном интервале [28; 29] и на масштабах ниже колмогоровского [30]. В изучении

турбулентности перенос пассивной примеси представляет интерес, поскольку статистика ее перемешивания очень чувствительна к характеру гидродинамического движения. Именно на пассивном скаляре впервые удалось получить аномальный скейлинг структурных функций непосредственно из уравнений движения [31]. Тем самым для скалярной турбулентности была разработана последовательная теория перемежаемости, в отличие от статистики самого поля скорости [1; 32]. Отдельное направление в турбулентности пассивного скаляра образует бэтчелоровский режим, когда перемешивание происходит на масштабах, где поле скорости уже гладкое: здесь вся статистика скаляра определяется лагранжевой статистикой растяжения жидкого элемента в турбулентном потоке [33–35]. Эта теория, в частности, изучает, каким образом проходит процесс гомогенизации пространственного распределения скаляра за счет размешивания в неоднородном течении, которое существенно ускоряется за счет случайных турбулентных пульсаций [36]. Неоднородное течение оказывает схожее действие и на другие поля — в квазилинейном приближении роль пассивно перемешиваемого средним потоком поля играет вектор скорости волны.

### **Степень разработанности темы исследования.**

Реализация квазилинейной теории, описывающей когерентный вихрь в двумерной турбулентности, в работах [37; 38], где возбуждение турбулентных пульсаций происходит равномерно по объему, дает опорный результат в этой области: средний азимутальный профиль скорости в широком диапазоне выходит на постоянное значение, определяемое мощностью накачки и трением о дно. В “универсальном пределе”, соответствующем слабой диссипации у возбуждаемых мелкомасштабных пульсаций, профиль не зависел от ее типа (вязкости/гипервязкости) и граничных условий, а теория предсказывала величину скорости. Такие условия возбуждения течений были реализованы в эксперименте по двумерной турбулентности, в котором наблюдался сформировавшийся вихрь с плоским профилем скорости [12]. Развитие этого подхода позволило описать статистику пульсаций внутри конденсата [39], установить условия формирования когерентного вихря за рамками универсального предела (при учете роли вязкости наряду с трением о дно) [40], а также изучить отклонение в профиле скорости среднего течения [41]. В работе [42] был предсказан линейно-логарифмический профиль скорости в вихре при подавлении эффектов трения о дно (обусловленный вязкой диссипацией), который воспроизвелся в численном моделировании.

Геострофические вихри, возникающие во вращающейся турбулентности, наблюдались в экспериментах с различающимися способами возбуждения течений [43–47]; способ накачки определял время жизни вихрей. Характерным образом проявляется циклон-антициклонная асимметрия, связанная с несимметричным влиянием вращения системы на динамику вихревого течения. Численное моделирование вращающейся турбулентности приводит к той же картине и дополнительно позволяет разделить вклады геострофической и волновой компонент в поле скорости, а также изучать перенос энергии к квазидвумерному конденсату [48; 49]. Отдельную линию составляет изучение обратного влияния вихрей на волновое поле, см. опыт [50], и поглощения инерционных волн средним геострофическим течением, которое исследовалось в численном моделировании [51].

Схема квазилинейной теории была перенесена на случай столбового геострофического вихря при формально той же постановке задачи: изучалось осесимметричное сформировавшееся когерентное течение, которое поддерживается случайной мелкомасштабной накачкой с однородной статистикой в пространстве. В ней было рассчитано касательное напряжение, созданное ансамблем возбужденных инерционных волн. Оно дает замкнутое уравнение для профиля средней азимутальной скорости; в отсутствие трения о горизонтальные границы его решение воспроизводит линейно-логарифмическую радиальную зависимость профиля скорости [52], являющуюся аналогом результата [42] для двумерного когерентного вихря. Учет конечности числа Россби нарушает симметрию между вихрями разной завихренности: собственное вращение антициклона подавляет глобальное вращение жидкости, так что максимум скорости в антициклоне смещается от его оси наружу по сравнению с профилем циклона [53]. Развитие теории на случай когерентного течения в форме крупномасштабных струй, реализующихся в численном моделировании внутри ячейки с неравными горизонтальными сторонами, представлено в недавней работе [49]. Наконец, как и в двумерном случае, теория была распространена на изучение статистики турбулентных пульсаций, пассивно переносимых и деформируемых течением столбового вихря [54; 55].

Классической моделью перемешивания пассивной примеси турбулентным гладким полем скорости служит случайное статистически изотропное течение. Одноточечные моменты пассивного скаляра, переносимого таким потоком, были найдены аналитически в [34; 56]; численные моделирования [57; 58] и опыты

в трехмерном изотропном потоке [59] проводили проверку этих предсказаний. В случае, когда мелкомасштабные пульсации находятся в потоке крупномасштабного среднего течения, его градиент формирует выделенное направление и тем самым меняет статистику как самих пульсаций, так и перемешивания, по сравнению с изотропным случаем. Для потока с выраженной сдвиговой компонентой перемешивание скаляра исследовалось в численном счете в работе [60].

**Целью** данной работы является изучение характеристик адвекции когерентным вихревым течением полей различной природы, включая скалярное поле и поле инерционной волны. Для инерционных волн произведено построение статистической теории их взаимодействия с геострофическим вихрем во вращающейся турбулентности.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Исследовать статистические свойства пассивного скаляра — анизотропию, одноточечные моменты и корреляционные функции — при его перемешивании течением, которое состоит из сильной сдвиговой компоненты и случайных во времени флуктуаций с гладким пространственным профилем.
2. Провести анализ статистики эволюции близких лагранжевых траекторий в таком потоке с модельными флуктуациями, коротко коррелированными во времени. Исследовать связь статистических характеристик потока с корреляционными функциями в задаче пассивного скаляра при малой диффузии.
3. Вывести уравнения динамики инерционной волны на фоне осесимметричного столбового вихря в цилиндрической системе координат. Проанализировать их и выяснить, какие особенности возникают у волны в теле вихря и как неоднородность вихревого течения влияет на ее распространение.
4. Изучить взаимодействие инерционной волны со средним течением с точки зрения обмена импульсом и энергией между ними. В случае осесимметричного вихря определить условия, необходимые для поглощения волны и передачи ею энергии и момента импульса, а также эффективность этого процесса.
5. Рассмотреть коротковолновый предел задачи и определить потоки энергии и момента импульса поглощаемой волны — основу для построения

статистической теории поддержания течения вихря ансамблем коротких волн. Изучить в этом пределе распространение волны вблизи критического слоя с учетом вязкости, как для монохроматической волны, так и для динамики квазимонохроматического волнового пакета.

**Научная новизна:** Результаты диссертации, выносимые на защиту, являются оригинальными и впервые получены автором в сотрудничестве с научным руководителем и коллегами.

В частности, впервые исследованы корреляционные функции пассивной примеси при ее перемешивании в анизотропном гладком течении — сдвиговом потоке с добавлением относительно слабой гладкой случайной компоненты. Для такого течения установлена также связь парной корреляционной функции скаляра со статистикой градиентов поля скорости. Нам не известны теоретические работы других авторов, в которых исследовалась бы статистика перемешивания и распада скаляра в анизотропном гладком течении такого типа либо устанавливалась описанная связь. Подробный обзор литературы по перемешиванию пассивной примеси гладким потоком дан в Подразделе 1.4.2.

Другим оригинальным исследованием, представленным в работе, является квазилинейное описание взаимодействия инерционных волн с геострофическим течением когерентного вихря в трехмерной вращающейся турбулентности, происходящего в критических слоях. Впервые изучено поглощение трехмерной инерционной волны вихрем конечного размера и дано детальное описание динамики волнового пакета вблизи критического слоя. Нам не известны работы других авторов, в которых поглощение инерционных волн в критическом слое геострофического вихря рассматривалось бы вне рамок локальной модели неограниченного однородного сдвигового течения. Обзор работ, использующих эту модель, приведен в Разделе 1.3.

### **Теоретическая и практическая значимость.**

Работа имеет теоретический характер. Установленный механизм передачи момента импульса и энергии от инерционной волны геострофическому вихрю уточняет и расширяет картину, следующую из локальной модели однородного сдвига. Центральное значение имеет выявленный вклад инерционных волн в касательное напряжение Рейнольдса: именно он замыкает уравнение для среднего течения и определяет радиальный профиль скорости геострофического вихря. Полученное описание динамики волнового пакета вблизи критического слоя уточняет общую теорию волновых пакетов и применимо к волнам иной приро-

ды, для которых существует критический слой, — прежде всего к внутренним гравитационным волнам в стратифицированной жидкости.

Практическая значимость определяется применимостью построенной теории к интерпретации экспериментальных данных и данных прямого численного моделирования вращающейся турбулентности. Развитая квазилинейная теория связывает наблюдаемый профиль скорости вихря с параметрами накачки и скоростью вращения системы, что позволяет планировать эксперименты по когерентным вихрям и выбирать оптимальный способ обработки и представления их измерений.

Результаты построенной теории перемешивания пассивного скаляра применимы к обработке экспериментальных данных по перемешиванию в течениях с выраженной сдвиговой компонентой — внутри крупномасштабного когерентного вихря в двумерной турбулентности, в течениях эластической турбулентности [61; 62] в микроканале или двумерном течении [63], реализующемся в тонких слоях. Установленная связь парной корреляционной функции скаляра со статистикой потока открывает при этом возможность решать обратную задачу — извлекать из измерений структуры примеси статистические характеристики самого течения.

### **Методология и методы исследования.**

Методология работы опирается на анализ уравнений Навье—Стокса и переноса-диффузии скаляра. Течение представляется суперпозицией быстрой и медленной компонент по их динамике во времени. Исследуемое среднее течение вихря сильно по сравнению с волновым полем, что позволяет развить квазилинейное приближение: быстрая динамика волны описывается линеаризованным уравнением в присутствии вихревого потока, а нелинейным взаимодействием волн друг с другом пренебрегается. Для медленной динамики когерентного вихря усреднение уравнения Навье—Стокса по времени дает уравнение Рейнольдса на среднее течение с квадратичным по амплитуде волн вкладом (напряжением Рейнольдса). Он определяется усреднением по ансамблю возбуждаемых волн — в случае, если в модели известны статистические свойства волн или возбуждающей их силы, уравнение Рейнольдса оказывается замкнутым.

Исследование перемешивания пассивного скаляра в гладком поле со случайными флуктуациями опирается на теорию лагранжевых растяжений и не ограничивается предположением о короткой корреляции во времени случайной компоненты скорости. Разбегание близких лагранжевых траекторий на

больших временах описывается функцией Крамера, учитывающей и большие отклонения от среднего; корреляционные функции скаляра вычисляются методом оптимальной флуктуации — по реализации случайного процесса, дающей наибольший вклад с учетом ее вероятности. Учитываются эффекты малой, но конечной диффузии. Для анализа статистики лагранжевых траекторий в модели, где флуктуации были коротко коррелированы, были выполнены анализ линейного дифференциального оператора Фоккера-Планка и численное моделирование соответствующих стохастических дифференциальных уравнений средствами системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica.

### **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Для статистики перемешивания пассивного скалярного поля в двумерном течении с сильной сдвиговой компонентой и гладкими флуктуациями вычислены моменты, установлены пространственная зависимость парной корреляционной функции и характеристики корреляционных функций высокого порядка вблизи максимума. Были рассмотрены как задача распада, так и задача непрерывного возбуждения флуктуаций скаляра. Результаты выражены через функцию Крамера, для которой установлена общая симметрия, определяющая статистические свойства скаляра. Приведено явное описание функции в модели с коротко коррелированными во времени флуктуациями.
2. Установлена пропорциональность между парной корреляционной функцией пассивного скаляра в задаче распада и плотностью вероятности расстояния между близкими лагранжевыми траекториями в гладком поле скорости с сильным сдвигом и случайными флуктуациями.
3. Установлено, что в пределе малой вязкости ведущим механизмом передачи момента импульса и энергии от инерционной волны геострофическому вихрю является поглощение волны в ее критическом слое, тогда как волна с противоположным знаком момента импульса отражается от вихря без передачи. Определены условия существования критического слоя и эффективность поглощения в нем.
4. Описана динамика инерционной волны вблизи критического слоя с учетом вязкости. Для монохроматической волны найдено решение во внутреннем вязком слое и определен коэффициент прохождения, для

квазимонохроматического волнового пакета получено описание его расплывания и поглощения.

**Достоверность** полученных результатов обеспечивается надежностью примененных аналитических и численных методов. Часть из полученных результатов получила непосредственное подтверждение в экспериментах или численном моделировании, для других известны аналоги, проверенные в смежных физических задачах. Выводы работы согласуются с результатами более ранних исследований других авторов.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на следующих научных мероприятиях:

- «XXIII Зимняя школа по механике сплошных сред» (г. Пермь, Россия, 13–17 февраля 2023 г.), устный доклад «Пространственное распределение пассивного скаляра в двумерном сдвиговом течении с флуктуациями»
- школа-конференция «Современная гидродинамика 2023» (г. Черноголовка, Россия, 29–31 августа 2023 г.), постерный доклад «Поглощение инерционных волн геострофическим течением в случае их неоднородного возбуждения в пространстве»
- школа-конференция «Современная гидродинамика 2024» (г. Черноголовка, Россия, 28–30 августа 2024 г.), устный доклад «Захват инерционных волн геострофическим течением»
- XXI научная школа «Нелинейные волны — 2024» (г. Нижний Новгород, Россия, 5–11 ноября 2024 г.), устный доклад «Поглощение инерционных волн в критическом слое геострофического течения»
- школа-конференция «Современная гидродинамика 2026» (г. Черноголовка, Россия, 28–30 августа 2026 г.), устный доклад «Поддержание инерционными волнами столбового вихря в турбулентном течении вращающейся жидкости»

Кроме того, все результаты докладывались на научных семинарах ученого совета ИТФ им. Л.Д. Ландау РАН.

**Личный вклад.** Все результаты, приведенные в данной диссертационной работе, получены лично автором или при его непосредственном участии.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в следующих работах:

- A1. *Н.А. Ивченко, С.С. Вергелес* Статистика пассивного скаляра в двумерном сдвиговом течении с флуктуациями // *ЖЭТФ*. — 2023. — Т. 163, вып. 5. — С. 724—733.
- A2. *N.A. Ivchenko, V.V. Lebedev, S.S. Vergeles* Mixing in two-dimensional shear flow with smooth fluctuations // *Physical Review E*. — 2024. — Vol. 110, no. 1. — P. 015102.
- A3. *N.A. Ivchenko, S.S. Vergeles* Absorption and reflection of inertial waves by a geostrophic vortex // *Physics of Fluids*. — 2025. — Vol. 37, no. 12. — P. 126605.

Работы изданы в 3 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК.

**Объём и структура работы.** Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и 5 приложений. Полный объём диссертации составляет 171 страницу, включая 20 рисунков и 1 таблицу. Список литературы содержит 170 наименований.

В **Первой главе** диссертации приводится обзор литературы по темам исследования. Излагаются характерные черты гидродинамики во вращающейся системе отсчета: с теоретической стороны рассматриваются такие явления, как вихревые колонны, инерционные волны и эффект Экмана, которые непосредственно связаны с содержанием работы. Рассматриваются различные течения, реализующиеся во вращающейся турбулентности, с примерами их наблюдения в экспериментах или в численном счете. Подробно разбирается построенная в работах [52; 53; 64] модель когерентного столбового вихря, который поддерживается турбулентным потоком, создаваемым стохастической силой с коротковолновой однородной и изотропной статистикой, в случае неограниченной системы при малых числах Россби. Результаты в этой модели служат основой и точкой для сравнения в исследованиях, представленных в этой работе. В заключение главы дается введение в тему переноса пассивного скалярного поля и детально представлена теория его перемешивания в бэтчелоровском режиме. Описание начинается со статистики показателей растяжения вдоль лагранжевых траекторий и сводится к статистике затухания моментов пассивного скаляра в задаче о распаде и распределения его флуктуаций в случае непрерывной накачки. Приводятся точные выражения в рамках модели Крайчнана для изотропного случайного потока. Изложенные результаты используются далее при переходе к анизотропному сдвиговому течению.

Во **Второй главе** проводится исследование перемешивания пассивного скаляра двумерным течением, которое складывается из сильной сдвиговой компоненты и относительно слабых гладких флуктуаций, случайных во времени. Сначала изучается динамика близких лагранжевых траекторий в данном течении: описывается их разбегание с апериодическими проворотами соединяющего их вектора и выводится эффективная ланжевеновская система в присутствии сильного сдвига. После перемасштабирования вдоль направления потока исследуются остаточная анизотропия и статистика разбегания, что задается функцией Крамера: устанавливаются ее общие свойства, после чего в модели с коротко коррелированными флуктуациями вычисляется ее численная аппроксимация и находятся аналитические характеристики для углового распределения и экспоненты Ляпунова. Далее разбирается задача о распаде скаляра: вычисляются одноточечные моменты, находится пространственная зависимость парной корреляционной функции и характеризуются корреляционные функции высших порядков вблизи максимума в коллинеарной геометрии. Отдельно устанавливается связь парной корреляционной функции с функцией Крамера на масштабах выше диффузионного. Следом эти же статистические характеристики находятся для задачи с непрерывной накачкой, установившееся состояние в которой описывается как совокупность вкладов от внешнего источника, возбуждаемых в разные моменты времени. В частности, исследуется отклонение статистики моментов флуктуаций пассивного скаляра от гауссова распределения и находится анизотропный аналог каскада Бэтчелора. В конце главы представлено заключение с кратким обсуждением результатов.

В **Третьей главе** строится теория взаимодействия инерционной волны с течением геострофического вихря. Выводятся и анализируются уравнения динамики волны в цилиндрической геометрии для описания ее распространения на фоне стационарного осесимметричного вихря. В невязком пределе показано, что монохроматическая волна не создает момента сил, действующего на вихрь, пока не достигнет своего критического слоя: сходящаяся волна либо поглощается в нем, отдавая среднему течению момент импульса и энергию, либо отражается от вихревого течения без передачи. Далее проводится локальное рассмотрение волны вблизи точки отражения и критического слоя; для анализа выполнен переход к модели с прямыми линиями тока в их окрестности. Следующая часть главы посвящена окрестности критического слоя с учетом вязкости, где рассматриваются как монохроматическая волна, так и динамика

волнового пакета. Наконец, в заключении главы подводятся итоги этой части исследования.

В **Четвертой главе** строится теоретическая модель сформировавшегося среднего течения в осесимметричном геострофическом вихре, поддерживаемом ансамблем случайных инерционных волн, которые возбуждаются на периферии системы и распространяются в направлении вихря. Рассматривается распространение отдельной инерционной волны на фоне осесимметричного вихря: приводится общее описание ее профиля в коротковолновом пределе. Далее задаются статистические свойства ансамбля на периферии; в его разложении выделяются сходящиеся цилиндрические гармоники, определяющие передачу энергии и момента импульса геострофическому вихрю. На основе механизма поглощения в критическом слое выводится поток момента импульса, получаемый вихрем от падающих волн: обсуждаются правила отбора волн, способных передавать этот поток. Это замыкает уравнение на среднее течение, в котором напряжение Рейнольдса определяется вкладом от азимутальных гармоник ансамбля с числом  $|m| \leq m_*$ , не испытывающих отражения перед поглощением. Сформулированное уравнение Рейнольдса оказывается нелокальным: отбор волн, вносящих вклад в напряжение в данной точке, определяется поведением профиля скорости вихря на больших расстояниях. Для описания экспериментальных данных по циклонам применяются приближения модели, сводящие уравнение к обыкновенному дифференциальному. Затем его численное решение сопоставляется с профилями угловой скорости циклонов, измеренными при разных скоростях вращения установки. Это позволяет проверить предложенный механизм поддержания вихря в турбулентном течении. В конце главы представлено заключение с обсуждением применимости теории.

В **Заключении** отмечены основные результаты исследования и выражены благодарности.

В приложениях представлен подробный вывод соотношений для используемых в работе моделей, установлены свойства этих моделей и приведены технические детали вычислений.

## Глава 1. Литературный обзор

### 1.1 Динамика быстро вращающейся жидкости

Отличительной чертой течения, возникающего в жидкости с глобальным вращением, является действие на него неинерциальных сил, связанных с переходом во вращающуюся систему отсчета, в особенности силы Кориолиса [65]. Ограничившись рассмотрением вязкой несжимаемой жидкости, можно упростить систему уравнений движения. Для среды, вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\boldsymbol{\Omega}$ , уравнение Навье-Стокса на импульс и уравнение непрерывности для массы поделены на ее плотность  $\rho = \text{const}$  и записаны для поля скорости  $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$  в системе координат, где радиус-вектор  $\mathbf{r}$  отсчитывается от оси вращения:

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + 2 [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}] = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (1.1)$$

Здесь  $\mathbf{f}$  обозначает силу на единицу массы, возбуждающую течения,  $\nu$  - кинематическая вязкость, а функция  $p$  является редуцированным давлением. Физическое давление связано с ним как  $P = \rho (p + [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}]^2 / 2)$ , отличаясь на центробежный потенциал; в переопределение можно также включить потенциал силы тяжести. Динамика будет изучаться и в терминах эволюции завихренности  $\boldsymbol{\varpi} = \text{rot } \mathbf{v}$ :

$$\partial_t \boldsymbol{\varpi} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\varpi} - (\boldsymbol{\varpi} \cdot \nabla) \mathbf{v} - 2 (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\varpi} + \text{rot } \mathbf{f}, \quad \text{div } \boldsymbol{\varpi} = 0. \quad (1.2)$$

В случае быстрого вращения системы сила Кориолиса начинает преобладать в динамике достаточно крупных течений. Это можно охарактеризовать малыми значениями числа Россби  $\text{Ro} = U/L\Omega$  — критерием подобия, сравнивающего нелинейную силу инерции с ней при описании потока масштаба  $L$  в пространстве и скорости  $U$ . Сравнение членов в (1.2) при увеличении угловой скорости требует выполнения  $\Omega^{-1} (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} \rightarrow 0$  для течений с достаточно медленной динамикой. Утверждение об однородности такого потока вдоль оси вращения в пределе  $\text{Ro} \rightarrow 0$  известно как теорема Тэйлора-П्राудмена. Поскольку течение жидкости происходит в слое конечной высоты (океане, атмосфере, внутри установки), то у него отсутствует вертикальная скорость, раз

она должна зануляться на дне, поэтому в теореме идет речь о двумерном и бездивергентном потоке.

Если Дж. Праудмен получил теоретическое предсказание результата теоремы [66], то сэр Дж. И. Тейлор вскоре после этого провел ряд опытов [67; 68] и [69], который стал классической демонстрацией явления. Сосуд с водой закреплен на поворотном столе и наблюдатель, вращающийся вместе с установкой, медленно проводит небольшое тело вдоль дна. Однако слой жидкости не поднимается, перетекая сверху через данное тело, как было бы в случае без вращения. Жидкость над телом просто дрейфует вместе с ним в виде “колонны”, синхронно повторяя его перемещение по дну. При этом жидкость снаружи колонны обтекает его как твердое препятствие, и течение в целом сохраняет строго двумерный характер. Эти дрейфующие колонны впоследствии получили название столбиков Тейлора [15; 65; 70].

Эффекты двумеризации в течениях и колонновидные структура характерны гидродинамики при быстром вращении, что будет обсуждаться в других отношениях дальше. Отметим здесь, что колончатость как результат теоремы реализуется при слабых эффектах вязкости в динамике, см. подробнее обсуждение при (1.13–1.15) в Разделе 1.2.

Возмущенные течения во вращающейся жидкости демонстрируют поведение волн с быстрой динамикой, сравнимой со скоростью вращения. Такие волны называют инерционными. Для них сила Кориолиса играет роль возвращающей, которая поддерживает волновое движение. Поскольку она является гироскопической, то в инерционных волнах заключена только кинетическая энергия.

Здесь и далее направим ось вращения системы  $\boldsymbol{\Omega}$  вдоль  $Oz$ . Свободные инерционные волны описываются линеаризованным уравнением (1.2) динамики несжимаемого поля скорости:

$$\partial_t \operatorname{rot} \mathbf{v} = 2 (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nu \nabla^2 \operatorname{rot} \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1.3)$$

которое разрешает 2 поляризации  $s = \pm 1$  для монохроматической волны. Рассматривая решение в виде плоских волн в декартовых координатах, гармоника с волновым вектором  $\mathbf{k}$  раскладывается по ортонормированному базису круговых поляризаций  $(\mathbf{h}_k^+, \mathbf{h}_k^-)$ . Он заводится на основе векторов в сферической системе, построенной для  $\mathbf{k}$  с полярной осью  $Oz$  (известны как Craya-Herring

frame  $\mathbf{e}^{(i)}$ , см., например, в книге [72]):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{(1)} &= \frac{1}{k_\perp} [\mathbf{k} \times \mathbf{e}_z], \quad \mathbf{e}^{(2)} = \mathbf{e}^{(3)} \times \mathbf{e}^{(1)}, \quad \mathbf{e}^{(3)} = \frac{\mathbf{k}}{k}, \quad k_\perp = \sqrt{k^2 - k_z^2}; \\ \mathbf{h}_\mathbf{k}^s &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}^{(2)} \mp i s \mathbf{e}^{(1)}) = \frac{1}{\sqrt{2} k_\perp k} \begin{pmatrix} k_x k_z - i s k k_y \\ k_y k_z + i s k k_x \\ -k_\perp^2 \end{pmatrix}, \quad s = \pm 1; \\ (\mathbf{h}_\mathbf{k}^s)^* &= \mathbf{h}_\mathbf{k}^{-s} = \mathbf{h}_{-\mathbf{k}}^s, \quad \mathbf{h}_\mathbf{k}^{-s} \cdot \mathbf{h}_\mathbf{k}^{s'} = \delta^{ss'}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Проекция (1.3) на базис  $\mathbf{h}_\mathbf{k}^s$  приводит к уравнению эволюции амплитуды круговой поляризации (выполнено соотношение  $a_{-\mathbf{k}}^s = (a_\mathbf{k}^s)^*$ , которое обеспечивает вещественность поля  $\mathbf{v}$ ):

$$\mathbf{v} = \text{Re} \sum_{s=\pm 1} a_\mathbf{k}^s(t) \mathbf{h}_\mathbf{k}^s e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} : \quad \partial_t a_\mathbf{k}^s = - (i\omega_\mathbf{k}^s + \nu k^2) a_\mathbf{k}^s. \quad (1.5)$$

Здесь в  $\omega_\mathbf{k}^s$  записан закон дисперсии инерционных волн в идеальной жидкости

$$\omega_\mathbf{k}^s = 2s (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k}) / k, \quad (1.6)$$

а вязкое трение приводит к диссипации амплитуды монохроматической волны с декрементом  $\nu k^2$ . Перенос энергии квазимонохроматическим волновым пакетом происходит с групповой скоростью  $\mathbf{c}_g$ . Поскольку закон дисперсии инерционных волн (1.6) однороден по  $k$  со степенью 0, она распространяется в направлении,

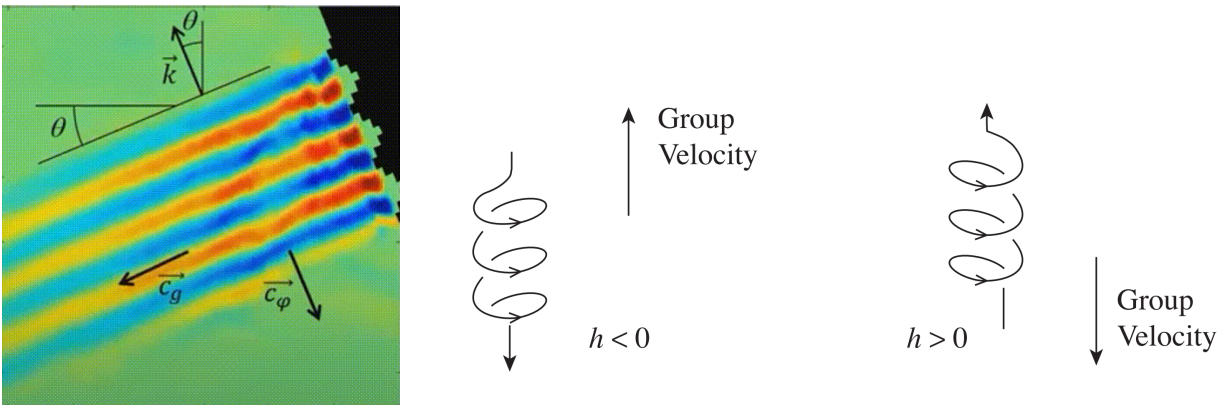


Рисунок 1.1 — Направления векторов движения для плоской инерционной волны. Слева: горизонтальное поле скорости  $v^x$ , создаваемое генератором волн в опыте [71]. Здесь обозначены векторы фазовой  $\mathbf{c}_\varphi$  и групповой скорости  $\mathbf{c}_g$  волны, см. (1.7), а угол  $\theta$  отмеряется между волновым вектором  $\mathbf{k}$  и осью вращения  $\boldsymbol{\Omega}$ . Справа: схема распространения инерционной волны с отрицательной и положительной спиральностью из книги [27].

перпендикулярном фазовой скорости  $\mathbf{c}_\varphi = \omega_{\mathbf{k}}^s \mathbf{k}/k^2$  осцилляций:

$$\mathbf{c}_g = \frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}^s}{\partial \mathbf{k}} = 2s [\boldsymbol{\Omega}/k - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k}/k^3], \quad \mathbf{c}_g \perp \mathbf{c}_\varphi. \quad (1.7)$$

Заметим, что завихренность, создаваемая плоской волной, согласно уравнению (1.3) параллельна вектору скорости. Таким образом, значение поляризации  $s$  отдельной волны (1.5) указывает на знак спиральности  $H = (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\varpi})$ . Она, как и энергия  $E = v^2/2$ , в общем является плотностью интеграла движения в динамике идеальной жидкости, а также топологического инварианта [73; 74]:

$$H_{\mathbf{k}}^s = -sk |a_{\mathbf{k}}^s|^2 / 2 = -sk E_{\mathbf{k}}^s. \quad (1.8)$$

Сопоставляя это с выражением групповой скорости (1.7), можно заключить, что инерционная волна, переносящая отрицательную спиральность, распространяется вверх,  $(\mathbf{c}_g \cdot \boldsymbol{\Omega}) > 0$ , и наоборот. Иллюстрация плоской инерционной волны с обозначением ее волнового вектора и направлений скоростей представлена на Рис. 1.1.

## 1.2 Турбулентность во вращающейся системе

При вращении системы режимы гидродинамики можно схематически различать с помощью пары безразмерных параметров: числа Россби  $Ro = U/L\Omega$ , введенного ранее ниже (1.2), и числа Рейнольдса  $Re = UL/\nu$ . При развитой турбулентности, которой соответствует большое число Рейнольдса, течения жидкости являются нестационарными и хаотическими. Для них описание фокусируется на вероятностном подходе, поскольку их статистические свойства воспроизводятся между реализациями. С одной стороны, картина течения при  $Re \gg 1$  и  $Ro \gtrsim 1$  изотропна и слабо отличается от классической трехмерной турбулентности: большое число Россби означает, что эволюция турбулентного потока осуществляется значительно быстрее времени, за которое сила Кориолиса повлияет на его динамику. С другой стороны, в пределе малого числа Россби (начиная с  $Ro \sim 0.1$  по оценкам из [18] на основе обзереваемых экспериментов) при сохраняющемся большом числе Рейнольдса, турбулентное течение становится анизотропным. В этом режиме вращающейся турбулентности (“rotating

turbulence”) сила Кориолиса играет ведущую роль в динамике и формирует квазидвумерную картину течений.

По теореме Тейлора-Пraudмена медленные потоки с ростом скорости вращения системы становятся эффективно двумерными, как обсуждалось в Разделе 1.1 — согласно (1.2) на вертикально однородные течения не влияет сила Кориолиса. Вращающаяся турбулентность также проявляет характерные признаки двумерной турбулентности. В двумерной гидродинамике для идеальной жидкости одновременно сохраняются энергия и энстрофия. При возбуждении турбулентных течений внешней силой и слабой диссипации их кинетическая энергия будет переноситься нелинейным взаимодействием, сформировав каскад в сторону более крупномасштабных потоков (ситуация, противоположная картине колмогоровской трехмерной турбулентности), в то время как энстрофия будет каскадировать вперед, передаваясь вихрям меньшего масштаба (вплоть до ее вязкой диссипации). Теоретическое описание этого было развито в работах по однородной турбулентности [3–5]; были получены спектральные плотности, с которой каждая перераспределялась по модам в фурье-пространстве:  $E(k) \propto k^{-5/3}$  для обратного каскада энергии и  $E(k) \propto k^{-3}$  для прямого каскада энстрофии. При достижении статистически стационарного состояния в турбулентной системе энергия, перенесенная каскадом самым крупным потокам, выводится из системы за счет диссипации, в роли которой обычно выступает трение о дно, оказываясь эффективнее чем объемное вязкое трение.

В быстро вращающейся жидкости энергия тоже переносится в сторону потоков бóльшего масштаба — в обзорах [13; 75] вращение рассматривается как один из механизмов двумеризации турбулентной динамики, из-за которого устанавливается обратный каскад энергии (энстрофия вне рассмотрения, т.к. не сохраняется в трехмерной гидродинамике). Переход к режиму вращающейся турбулентности изучался в численных экспериментах [16] (с гипервязкостью) и [17] (с обычной вязкостью). При малом числе Россби поток можно разделить на два разных типа течений, взаимодействующих между собой: быстро осциллирующее поле инерционных волн и медленный квазидвумерный “конденсат”, который, как правило, и развивается в крупномасштабные потоки, порожденные обратным каскадом энергии. Последний тип, однородный вдоль оси вращения, также называют геострофическими модами [76].

### 1.2.1 Каскады волновой турбулентности

Начнем с теоретического описания вращающейся турбулентности в отсутствие геострофической компоненты. Для пространственно-однородной системы взаимодействующих инерционных волн спектр каскада получается в рамках теории слабой волновой турбулентности (“weak-wave turbulence”) и был выведен впервые в [77]. Данная компактная работа существенно асимптотическая и задействует ряд приближений так, что, установив факт анизотропного каскада, она оставляет ряд пробелов в теории. В ней учитывались трехволновые процессы взаимодействия, представляющие ведущий порядок по нелинейности. В пределе малого  $Ro$  нелинейное взаимодействие у разных мод резко ослабляется вследствие декогерентности фаз за очень короткое время порядка  $\Omega^{-1}$ . Исключение составляют резонансные процессы — остается рассматривать только такие триады волн, у которых одновременно выполнены:

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = 0, \quad \omega_{\mathbf{k}_1}^{s_1} + \omega_{\mathbf{k}_2}^{s_2} + \omega_{\mathbf{k}_3}^{s_3} = 0. \quad (1.9)$$

Важной особенностью нелинейного взаимодействия инерционных волн является то, что с законом дисперсии (1.6) уравнения выше имеют ненулевое множество решений — резонансную поверхность для третьего вектора  $\mathbf{k}_i$ . Следует отметить статью [78], в которой авторы построили из первых принципов гамильтонов формализм для инерционных волн в канонических переменных Клебша, впервые выписали четырехволновое взаимодействие в явном виде (они не учитывались в [77]) и детально описали геометрию резонансной поверхности при изучении распаднoй неустойчивости. При этом в обеих работах двумерные моды исключались из рассмотрения как сингулярный предел  $k_z \rightarrow 0$ , при котором волны не распространяются.

В постановке волновой турбулентности течения возбуждаются на внешней силой, которая вбрасывает в систему энергию мощностью  $\epsilon$  на единицу объема. После масштаба накачки  $k_f$  следует инерционный интервал прямого/обратного каскада, на котором (без учета диссипации) квадратичные интегралы движения переносятся на другие моды. В [77] получены кинетические уравнения на спектральную плотность энергии  $E(\mathbf{k})$  и спиральность  $H(\mathbf{k})$  (см. (1.8)), для которых автор нашел стационарные степенные решения — спектры Колмо-

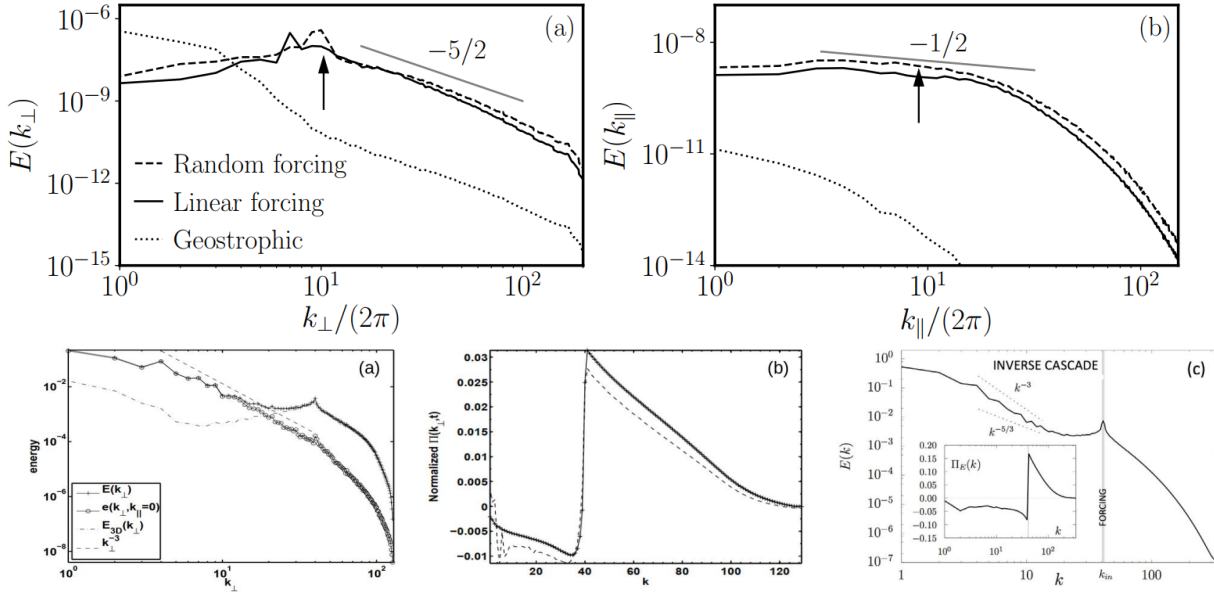


Рисунок 1.2 — Измерения каскадов во вращающейся турбулентности. Вверху: проверка анизотропного спектра Колмогорова-Захарова в [79] для зависимостей от  $k_\perp, k_z$  по отдельности (графики а и б, соотв.), где серой линией отложен скейлинг решения Галтиера (1.10). Внизу: обратный каскад энергии в численных экспериментах со случайной накачкой. Графики а, б взяты из эксперимента [80] и демонстрируют зависимость спектра  $E$  (а) и потока энергии  $\Pi$  (б) от величины волнового числа в плоскости  $k_\perp$ . График справа (с) получен в эксперименте [81]. На присутствие обратного каскада энергии указывает отрицательное значение потока энергии  $\Pi(k)$  (см. вставку графика).

рова-Захарова для каскадов:

$$E(k_\perp, k_z) \sim \epsilon^{1/2} \Omega^{1/2} k_\perp^{-5/2} k_z^{-1/2}, \quad H(k_\perp, k_z) \propto k_\perp^{-3/2} k_z^{-1/2}. \quad (1.10)$$

Триадный распад инерционной волны на две экспериментально наблюдался в [71], где также были проверены условия резонанса (1.9). Прямой каскад энергии со анизотропным спектром, соответствующий решению Галтиера, наблюдался, например, в численном счете [79], см. верхнюю часть Рис. 1.2. В этой работе авторы, интересуясь каскадом инерционных волн, изолировали их трехмерную динамику волны (от перекачки энергии геострофическим модам), специально введя в систему сильное затухание для мод с  $k_z = 0$ . В статье [78] отмечалось, что гипотеза локальности для вращающейся волновой турбулентности еще требует проверки исследованием на сходимость интеграла столкновений в кинетическом уравнении; этот пробел был устранен позднее в работе [82]. С увеличением волнового числа  $k$  инерционный интервал заканчивается на масштабе Земана  $k_\Omega \sim (\epsilon \Omega^2)^{-1/2}$  [83], где число Россби потоков

становится сравнимо с единицей. Далее в мелкомасштабной области (при достаточно слабой диссипации) возможно формирование трехмерного прямого каскада с изотропным спектром  $E(k) \propto k^{-5/3}$  [2].

Наблюдения обратного каскада энергии демонстрируют, как та переносится от быстрых трехмерных к медленным двумерным модам. Вид каскада неуниверсален, он анизотропный и не обладает определенным скейлингом — его поведение представляют как нечто среднее между наклонами  $k_1^{-5/3}$  и  $k_1^{-3}$ , см. нижнюю часть Рис. 1.2. В численном моделировании [80] были рассмотрены различные варианты накачки (среди них АВС и случайное возбуждение с разной статистикой) и установлено направление потока энергии в сторону больших масштабов. Приближение спектра каскада к крайним скейлингам авторы связывали со степенью анизотропии в возбуждающей силе: при изотропной накачке наклон каскада приближается к  $k^{-3}$ . Подобный спектр регистрировали и в ранних работах, например [14]. В симуляции [81] со случайной накачкой было исследовано, как передача энергии в каскаде распределяется между трехмерными, двумерными волнами и их взаимодействием между собой. При этом авторы, интересуясь волновой турбулентностью, искусственно подавляли возникновение конденсата членом с гиповязкостью в динамике.

### 1.2.2 Геоострофические течения в турбулентности

Энергия от накачки во вращающейся турбулентности подпитывает динамику квазидвумерного конденсата [14], собираясь в окрестности мод с  $k_z \approx 0$ , и переносится обратным каскадом к крупным течениям. Если провести эксперимент внутри системы размера  $L$  в плоскости, который бы ограничивал инерционный интервал каскада в динамике, то при определенных условиях в установившейся турбулентности формируется когерентное квазидвумерное течение масштаба порядка  $L$ . В работе [84] был получен ряд результатов по стабильности базового двумерного течения, среди которых была показана его линейная устойчивость по отношению к трехмерным (вертикально неоднородным) возмущениям.

Далее полагается, что система ограничена по высоте размером  $H$  горизонтальными стенками. При рассмотрении потока со сформировавшейся

геострофической компонентой выделим ее в разложении поля  $\mathbf{v} = \mathbf{U} + \mathbf{u}$ , обозначив как  $\mathbf{U}$  и тем самым отделив от скорости трехмерных волн  $\mathbf{u}$ . Скорость геострофического течения определяется как усреднение поля  $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{U}(t, \mathbf{x})$  по вертикали (будем обозначать это чертой сверху) и, как и вектор  $\mathbf{x}$ , лежит в плоскости  $Oxy$ . Усреднением (1.1) по вертикали получается уравнение для  $\mathbf{U}$ . Учитывая его бездивергентность, скорость можно задать с помощью скалярной функции тока Стокса  $\mathbf{U} = \nabla \times (\Psi \mathbf{e}_z)$  — в этом представлении сила Кориолиса записывается через потенциал. Плоскость динамики подчеркивается подстрочным индексом “ $\perp$ ” в выражении градиента:

$$\partial_t \mathbf{U} + \overline{(\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v}} - \nu \nabla^2 \mathbf{U} = -\nabla_{\perp} (\bar{p} + 2\Omega \Psi). \quad (1.11)$$

Полученная последняя формула для скорости объясняет название “геострофическое течение”.

Обратим внимание, что оставшееся уравнение уже не содержит большого члена с  $\Omega$ . По этой причине динамика геострофического течения характеризуется временами, значительно превышающими период глобального вращения  $\Omega^{-1}$ . Он же задает масштаб для периода колебаний инерционных волн,  $|\omega| \leq 2\Omega$ . В связи с этим усреднение по Рейнольдсу турбулентной динамики на временах  $T$  между данными масштабами позволяет приближенно разделить член нелинейного взаимодействия на геострофическую моду и волны [19; 21]:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(t, \mathbf{x}) = \langle \mathbf{v} \rangle &= \frac{1}{HT} \int_{-T/2}^{T/2} dt' \int_0^H dz \mathbf{v}(t + t', \mathbf{x}, z) : \\ \partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} - \nu \nabla^2 \mathbf{U} &= -\nabla \bar{p} - \langle (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} \rangle. \end{aligned} \quad (1.12)$$

При численном моделировании вращающейся турбулентности с периодическими граничными условиями двумерный конденсат формируется в виде отдельных циклонов/антициклонов (по отношению к вращению всей системы) или крупномасштабной струи, см. примеры работ со стохастической накачкой на Рис. 1.3. Авторы [85] наблюдали образование трех столбовых вихрей, окруженных фоновой турбулентностью трехмерных флуктуаций, при прямом численном моделировании (DNS) в кубе с разрешением сетки  $2048^3$ . Далее, они изучали лагранжеву статистику для легких и тяжелых инерционных частиц, переносимых этим течением. На графике 1.3а показано распределение абсолютного значения скорости, не различая плоскую и вертикальную составляющие. Представленные результаты искажает тот факт, что из-за периодичности

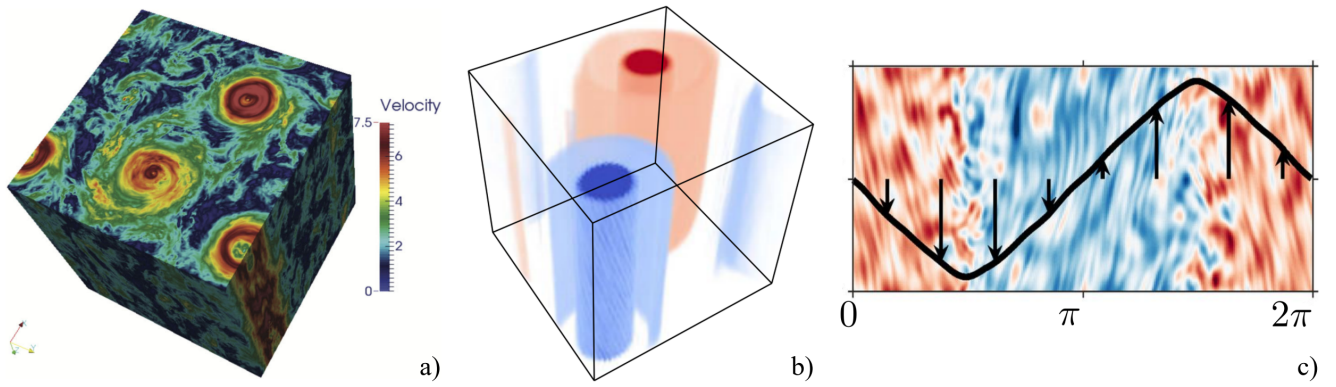


Рисунок 1.3 — Примеры реализации двумерного конденсата в численном моделировании: на графиках представлена вертикальная компонента завихренности турбулентного течения. Столбовые вихри наблюдались как в виде отдельных колонн [85] (слева, параметры накачки:  $Ro = 0.25$ ,  $Re = 460$  при  $\Omega = 10$ ), так и в форме вихревого диполя [48] (посередине, параметры  $Ro = 0.02$ ,  $Re = 100$ ), подавляющего трехмерные флуктуации. Справа: вертикальная завихренность в горизонтальной (прямоугольной) плоскости когерентной струи в работе [49] ( $Ro = 0.011$ ,  $Re = 9.3$ ).

потолка/дна ячейки внутри вихрей регистрируется (примерно однородное) вертикальное течение. В эксперименте [48] вертикального потока нет: авторы провели симуляции с детерминированной силой возбуждения в широком диапазоне значений параметров  $Ro$ ,  $Re$  для накачки и обнаружен переход к образованию вихревого конденсата при сильном вращении системы (когда турбулентное  $Ro < 0.6$ ). В пределе быстрого вращения, т.ч.  $Ro \ll 1$ ,  $Ro \ll Re^{-1/2}$ , наблюдалось статистически стационарное состояние в виде вихревого диполя (изображение посередине), которое авторы называют “вязким конденсатом”. При этом поток энергии преимущественно сосредоточен в двумерных модах, что свидетельствует о незначительности трехмерных флуктуаций. Состояние “вихревого конденсата”, реализующееся при больших значениях числа Россби, ближе к предыдущему примеру: выраженная трехмерная турбулентная динамика на фоне потока столбового вихря. В недавней работе [49] перешли к прямоугольному ящику в горизонтальной плоскости,  $L_y = 2L_x = 2\pi$ ; в работах по моделированию других турбулентных систем (двумерной гидродинамики [9], конвекции Буссинеска с вращением [86]) было установлено, что это способствует реализации конденсата в форме двумерных струй. Заметим, числа Рейнольдса для возбуждаемых течений в их симуляциях порядка  $Re \sim 10$ , что не указывает на сильное нелинейное взаимодействие. Тем не менее, авторы приводят

косвенные аргументы в пользу (неразвитой) турбулентности в динамике, демонстрируя потоки энергии при взаимодействиях двумерных и трехмерных течений на разных масштабах и описывая течение струи (изображение справа) как результат обратного каскада. При уменьшении числа Рейнольдса в симуляции конденсат уже отсутствовал и заменялся ансамблем трехмерных инерционных волн.

### 1.2.3 Влияние трения о стенки на геострофическое течение

При редукции динамики для геострофической моды выше не принималась во внимание роль границ течения. В случае твердых стенок для вязкой жидкости должно выполняться условие прилипания на них: обращение в ноль полной скорости. Поэтому около горизонтальных границ системы заведомо не выполняется предположение об однородности  $\mathbf{U}$  вдоль вертикали. Несоответствие снимается введением вторичных течений: проблема была разобрана Экманом в классической работе [87] задолго до развития теории геострофической турбулентности. При быстром вращении и относительно слабой вязкости жидкости, см. ниже (1.15), они формируются в тонком пограничном слое. Хотя исходная задача Экмана относилась к полубесконечному океану под ветровым напряжением, структура пограничного слоя универсальная, так как обуславливается балансом вязкости и вращения при твердой стенке. Это порождает профиль скорости  $\mathbf{V}$ , известный как “спираль Экмана”, закручивающийся по вертикали в горизонтальной плоскости с характерной толщиной слоя  $\delta = \sqrt{\nu/\Omega} \ll H$  [65]. В общем уравнении на завихренность  $\mathcal{W} = \text{rot } \mathbf{V}$ :

$$\partial_t \mathcal{W} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathcal{W} - ((2\Omega + \mathcal{W}) \cdot \nabla) \mathbf{V} = \nu \nabla^2 \mathcal{W} \quad (1.13)$$

для модели, описывающей структуру пограничного слоя (на дне), следует пренебречь нелинейностью, а также медленной зависимостью от переменных  $(t, \mathbf{x})$ . Тогда она сводится к одномерной задаче на  $\mathbf{V}$  от  $z$

$$\partial_z \{2\Omega \mathbf{V} - \nu [\partial_z^2 \mathbf{V} \times \mathbf{e}_z]\} = 0 \quad (1.14)$$

с условиями обращения в ноль на границе  $z = 0$  и асимптотикой выхода  $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{U}$  на вертикально однородное геострофическое течение (о котором речь шла ранее

в (1.12)) при  $z \gg \delta$ . Решение для профиля спирали Экмана около дна вида

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{U} \left(1 - e^{-z/\delta} \cos(z/\delta)\right) + [\mathbf{e}_z \times \mathbf{U}] e^{-z/\delta} \sin(z/\delta), \quad 0 < z \ll H \quad (1.15)$$

обобщается на случай погранслоя при потолке  $z = H$  путем замены  $z$  на  $H - z$  и  $\mathbf{e}_z \rightarrow -\mathbf{e}_z$ . Приближение обусловлено пределом малого числа Экмана  $\text{Ek} = \nu/\Omega H^2 \ll 1$ , равного квадрату  $(\delta/H)^2$  относительной толщины слоя [65; 70].

Учет вторичного течения  $\mathbf{V} - \mathbf{U}$  в динамике геострофической моды вводит дополнительную диссипацию, реализующуюся в вязких слоях Экмана. Это приводит к новому механизму в (1.12), который в пределе быстрого вращения системы эффективно работает как линейное трение [70]. Рассмотрим вертикальную компоненту (1.13), усредненную по  $z$ , где пренебрежем нелинейностью в члене  $-\overline{((2\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\mathcal{W}}) \cdot \nabla) \mathbf{V}}$ . Воспользовавшись следствием бездивергентности  $\partial_z V_z = -\text{div}_1 \mathbf{V}_1$ , получим из него выражение для коэффициента  $\alpha$  экмановского трения — приведем вычисление для одного слоя (1.15), за счет потолка вклад удвоится:

$$\int_0^\infty \frac{dz}{H} 2\Omega \text{div}_1 \mathbf{V}_1 = \frac{\alpha}{2} [\nabla \times \mathbf{U}], \quad \alpha = 2 \frac{2\Omega}{H} \int_0^\infty dz e^{-z/\delta} \sin(z/\delta) = 2 \sqrt{\frac{\nu\Omega}{H^2}}. \quad (1.16)$$

Отметим, что для динамики скорости  $\mathbf{U}$  вывод линейного трения Экмана следует из усреднения члена с силой Кориолиса  $2[\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{V} - \mathbf{U})]$ . Изучение влияния трения на геострофическое (антициклоническое/циклоническое) течение в замкнутых вращающихся объемах, а именно — как подкачка/отсос вторичным течением  $V_z$  жидкости из основного объема вызывает спин-ап/спин-даун эффект, соответственно, описывающий затухание потока [88]. Изложение эффекта можно найти в учебнике [65]. Рассмотрение динамики завихренности (1.13) с обобщением на нелинейное затухание Экмана согласно  $-\overline{((2\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\mathcal{W}}) \cdot \nabla) \mathbf{V}}$ , в том числе для моделирования спин-дауна циклонического течения, представлено в [89]. В работе [90] Праудмен обратил внимание на существование пограничных слоев при вертикальных боковых стенках; их структуру описал Стюартсон в [91]. Погранслои Стюартсона состоят из двух слоев, относительные толщины которых масштабируются как  $\text{Ek}^{1/4}$  (у внешнего слоя) и  $\text{Ek}^{1/3}$  (у вложенного внутреннего подслоя), см. также [65]. Поскольку они существенно толще горизонтального слоя Экмана  $\delta \sim \text{Ek}^{1/2}$  при  $\text{Ek} \ll 1$ , то вязкое напряжение в них оказывается слабее. Поэтому роль слоя Стюартсона в первую очередь кинематическая (описывает обращение в ноль скорости при боковой стенке), и

лишь во вторую очередь диссипативная: экмановский вклад в трение (1.16) остается ведущим.

Наиболее ранней работой, в которой экспериментально наблюдали квазидвумерный вихрь, сформировавшийся в турбулентной вращающейся системе, является эксперимент [92] с возбуждением течения путем подачи воды через перфорированное дно сосуда. Отметим недостаток количественных характеристик турбулентности в работе: о самом режиме свидетельствуют представленные снимки и данные. Первым систематическим исследованием стал опыт [43], см. Рис. 1.4а. Механизмом возбуждения была быстро осциллирующая решетка (с частотой выше  $\Omega$ ) на дне вращающегося бака. Переход к режиму с доминированием вращения в системе происходил при значении турбулентного числа Россби (у возбуждаемых течений близко к слою Экмана на дне)  $Ro_E = 0.4$ . Возникающие вихри лишь приблизительно ориентированы вдоль оси вращения системы, их время жизни составляло порядка нескольких десятков периодов собственного вращения, см. Раздел 6 обзора [93]. Это является характерным недостатком экспериментов с возбуждением течений за счет решетки/трубок, расположенных у дна [44; 94]. Такие конструктивные особенности являются существенными неровностями, которые значительно увеличивают диссипацию у стенки. Подчеркнем, что формула экмановского трения (1.16) была получена в линейной теории для гладкого горизонтального дна: реальное трение в таких системах значительно превышает порядок  $\alpha$ , что подтверждают в [45]. Измерение профиля скорости сформировавшегося вихря в [43] проводились косвенным образом, а в обзоре [93] изучение структуры вихревого течения проводилось для случаев со специально создаваемым в установке изолированным вихрем (через гравитационный коллапс, перемешивание или откачку жидкости).

В недавних экспериментах [46; 47] установка представляет собой стеклянный куб ребром 1 м, установленный на вращающейся платформе, который полностью заполняется водой с частицами полиамида. Механизм возбуждения принципиально отличается от решеточного, оставляя гладкими его дно и потолок: мешалки с лопатками расположены у четырех вертикальных ребер, периодически меняя направление своего вращения, чтобы в среднем не сообщать жидкости угловой момент. Диссипация квазидвумерных вихрей хорошо согласуется с темпом трения о дно в (1.16). В зависимости от интенсивности и частоты возбуждения течений в установке, а также угловой скорости вращения, формируются когерентные вихревые течения с различной структурой, см. Рис. 1.4b,c.

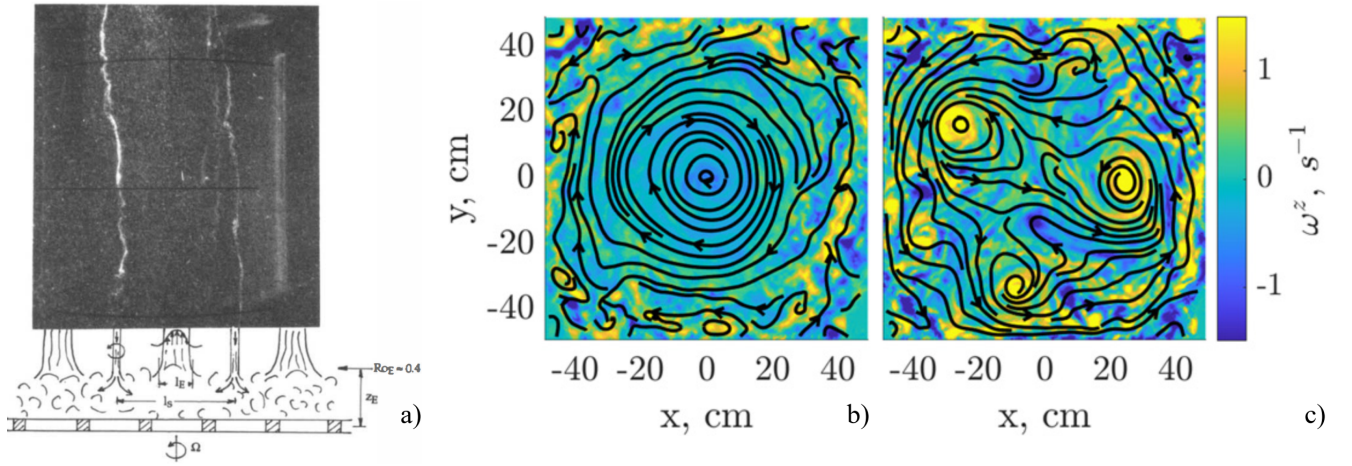


Рисунок 1.4 — Экспериментальные наблюдения когерентных вихрей во вращающейся турбулентности. а) фотография эксперимента [43] со схемой установки. Взято из работы [93]. Правее: распределения вертикальной завихренности в эксперименте [47] при: б)  $\Omega = 0.06$  об./с, где реализовался крупномасштабный антициклон в центре. с)  $\Omega = 0.18$  об./с в режиме с циклонами.

Их продолжительность жизни в разы превышает время Экмана  $\alpha^{-1}$ . На малых скоростях вращения (до частоты порядка 0.1 оборота в секунду;  $Ro_M = 0.3 - 0.5$ ,  $Re_M = 1250 - 1500$  — оценки макро-чисел Россби и Рейнольдса по всем течениям в горизонтальной плоскости системы) в центре куба наблюдается большой почти неподвижный осесимметричный антициклон с центром приблизительно вдоль оси куба [47] (Рис. 1.4b). Поле завихренности течения в большей части установки остается организованным. На расстояниях порядка  $r \sim 20$  см от оси вихря профиль его средней азимутальной скорости  $U(r)$  можно охарактеризовать выходом сдвигового темпа его потока  $\Sigma = \partial_r U - U/r$  на продолжительное плато. При частотах вращения порядка 0.1 об./с интенсивность флуктуаций на периферии системы снижается и возникают долгоживущие циклоны, сосуществующие с антициклоном. При более быстром вращении, вплоть до 0.72 об./с (оценки  $Ro_M = 0.05 - 0.3$ ,  $Re_M \sim 2000$  для экспериментов [46; 47]), в объеме остаются долгоживущие течения только в форме циклонов (Рис. 1.4с), течения которых детально изучались в [46] и будет разбираться далее в работе. Отметим, что во всех типах экспериментов у когерентных вихрей, сформированных турбулентностью [43; 46; 47] завихренность распределена неоднородно в вихре. В их случае модели точечного вихря, вихря Ранкина (где ненулевая завихренность равномерно распределена в сердцевине) и гауссова вихря, ис-

пользовавшихся, например, в обзоре [93] для описания искусственно созданных вихрей, не отражают структуру среднего течения.

### 1.3 Модель столбового когерентного вихря с мелкомасштабной случайной накачкой

В присутствии крупномасштабного когерентного потока однородная картина динамики волновой турбулентности нарушается, и главную роль в перераспределении энергии начинают играть не триадные взаимодействия волн, а взаимодействие флуктуаций  $\mathbf{u}$  со средним полем  $\mathbf{U}$ . При разделении динамики на медленную геострофическую и быструю флуктуационную части в (1.12) было установлено, что первая управляется дивергенцией  $\nabla_i \Pi^{ij}$  тензора напряжений Рейнольдса  $\Pi^{ij} = \langle u^i u^j \rangle$ . В статье [52] была построена теоретическая модель, рассматривающая установившееся среднее когерентное течение осесимметричного столбового вихря в системе с быстрым вращением, где турбулентные пульсации возбуждаются случайной силой однородно и изотропно по объему системы. Характерная длина волны накачки  $k_f^{-1}$  полагалась значительно меньше размера вихря  $R_v$  и масштабов изменения его потока. Это обосновывало рассмотрение отдельной пульсации в локальной системе отчета, движущейся вместе с вихрем, см. комментарий к Рис. 1.5 в начале подраздела ниже. В данном разделе излагается эта теория и приводятся основные результаты, полученные в статье [52] и продолжающих ее работах [53–55; 64].

Уравнение на среднее течение значительно упрощается в предположении о симметричном потоке рассматриваемого вихря: введя цилиндрические координаты  $(r, \varphi, z)$ , где  $Oz$  направлена вдоль его оси, вектор средней скорости в них будем считать азимутальным:  $\mathbf{U} = U(t, r) \mathbf{e}_\varphi$ . Профиль  $U(t, r)$  описывает дифференциальное вращение в горизонтальной плоскости, что является примером сдвигового течения. Нас будет интересовать азимутальная компонента (1.12), которая не содержит нелинейного  $(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U}$  и кориолисова вклада от вихря. В преобразованиях соответствующей компоненты усредненного нелинейного взаимодействия волн по симметрии в модели можно не учитывать слагаемые, являющиеся производными  $\Pi^{ij}$  по координатам  $\varphi, z$ . Запишем ее в представлении Ламба через завихренность и раскроем компоненты ротора в

цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \rangle^\varphi &= -\frac{1}{2} \nabla^\varphi \langle \mathbf{u}^2 \rangle + \langle [\boldsymbol{\varpi} \times \mathbf{u}] \rangle^\varphi = \langle \varpi^z u^r - \varpi^r u^z \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \langle u^\varphi u^z \rangle - \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \langle (u^r)^2 + (u^z)^2 \rangle + \frac{\partial u^\varphi}{\partial r} u^r + \frac{1}{r} u^r u^\varphi - u^\varphi \frac{\partial u^z}{\partial z}. \end{aligned}$$

Если воспользоваться условием несжимаемости  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  для последнего слагаемого, то дивергенция тензора  $(\nabla \cdot \Pi)^\varphi$  может быть представлена в терминах одной касательной компоненты:

$$\langle (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \rangle^\varphi = \left( \partial_r + \frac{2}{r} \right) \langle u^r u^\varphi \rangle. \quad (1.17)$$

Так было получено уравнение Рейнольдса для осесимметричного вихря:

$$\partial_t U + \alpha U = \left( \partial_r + \frac{2}{r} \right) (\nu \Sigma - \langle u^r u^\varphi \rangle), \quad (1.18)$$

где  $\Sigma = \partial_r U - U/r$  обозначает сдвиговый темп его потока. В работах [52; 53] модель не учитывала эффекты экмановского трения (1.16), и рассматривался установившийся профиль течения за счет механизма (1.17) взаимодействия с турбулентными пульсациями. Тогда уравнение сводится к стационарному условию

$$\nu \Sigma - \langle u^r u^\varphi \rangle = 0, \quad (1.19)$$

которое отражает баланс (см. члены под производной в (1.18)): момент сил  $-r^2 \langle u^r u^\varphi \rangle$  от пульсаций, закручивающий течение вихря на расстоянии  $r$  от оси, должен компенсироваться вязкой диссипацией. Согласно (1.19), в области вихревого потока должно выполняться неравенство  $\Sigma \langle u^r u^\varphi \rangle > 0$  [53].

В общем случае волновая динамика пульсаций описывается оставшейся быстрой частью уравнения (1.1) — здесь и далее поле давления  $p$  относится к волновой части  $\mathbf{u}$ :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{U}, \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{U} + 2 [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}] - \nu \nabla^2 \mathbf{u} \\ = -\nabla p + \mathbf{f} + [\langle (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \rangle - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}], \end{aligned} \quad (1.20)$$

которая возбуждалась в модели случайной бездивергентной силой  $\mathbf{f}(t, \mathbf{r})$ . Ее статистика полагалась гауссовой с нулевым средним и парной корреляционной функцией, отвечающей условиям однородности и изотропности в пространстве и коротко коррелированному во времени пределу. В фурье-пространстве она

задается выражением:

$$\begin{aligned} \langle f_{\mathbf{k}}^i(t_1) f_{\mathbf{q}}^j(t_2) \rangle &= (2\pi)^3 \left( \delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2} \right) \epsilon \delta^{(3)}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \delta(t_1 - t_2) \chi(k), \\ \mathbf{f}_{\mathbf{k}}(t) &= \int d^3\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathbf{f}(t, \mathbf{r}), \quad \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \chi(k) = 1, \end{aligned} \quad (1.21)$$

обеспечивающим приток энергии в систему мощностью  $\epsilon$  на единицу массы. Характерный волновой вектор возбуждения  $k_f$  задает масштаб безразмерной корреляционной функции  $\chi(k)$  (нормированной на единицу).

Теория была построена для интенсивного вихревого течения на квазилинейном приближении. Оно заключается в пренебрежении последним, нелинейным слагаемым в квадратных скобках для динамики флуктуаций (инерционных волн) в (1.20) при сохранении обратной реакции (1.17) на когерентное течение. Исторически его схема восходит к квазилинейной теории плазмы, сформулированной в цикле работ Вedenова, Велихова и Сагдеева [95–97], который продолжает идеи Власова и Ландау [98–100]; см. также работы по плазме [101] и тепловой конвекции [102]. Таким образом, формируется теория среднего поля: поведение каждой флуктуации определяется  $\mathbf{U}$ , на которое оказывает влияние совокупный эффект от их ансамбля. Получающаяся система уравнений является замкнутой, а решение для  $\mathbf{U}$  — самосогласованным. Квазилинейное приближение применимо в случае слабой нелинейности пульсаций: темп их взаимодействия по оценке  $1/\tau_{\text{tr}} \sim k_f \sqrt{\epsilon/\Omega}$  из режима волновой турбулентности [77] должен быть значительно меньше  $\Sigma$ , характеризующего их взаимодействие со средним течением. Вместе с условиями малого числа Россби  $\text{Ro}_f = 1/(\Omega\tau_{\text{tr}})^{2/3}$  и большого числа Рейнольдса  $\text{Re}_f$  для волн получаем требуемые неравенства:

$$k_f \sqrt{\epsilon/\Omega} \ll \Sigma, \Omega; \quad \text{Re}_f = \epsilon^{1/3} k_f^{-4/3} / \nu \gg 1. \quad (1.22)$$

### 1.3.1 Мелкомасштабная динамика инерционных волн на фоне сдвигового течения вихря

В модели масштаб  $k_f$  волнового числа полагался достаточно большим, так чтобы движение и диссипацию отдельной волны-флуктуации можно было приближенно рассматривать в малой области по сравнению с размером вихря [52].

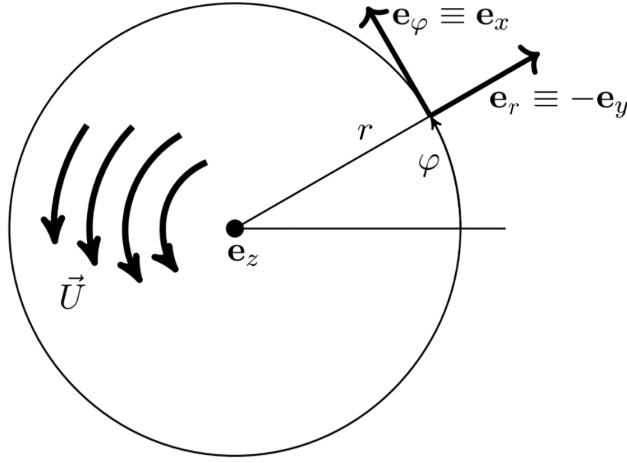


Рисунок 1.5 — Схема потока столбового вихря в исходных цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$  и во введенной локальной декартовой системе  $(x, y, z)$ , следующей вместе с течением вихря. Изображение адаптировано из [52].

Для пульсации выполнялся переход в систему, у которой начало отсчета движется от места ее возбуждения силой  $\mathbf{f}$  вдоль лагранжевой траектории в среднем потоке,  $r = r_0$ ,  $\varphi(t) = \varphi_0 + tU(r_0)/r_0$ ,  $z = z_0$  и вводились локальные декартовы координаты  $(x, y, z)$ , см. Рис. 1.5. Единичный вектор  $\mathbf{e}_x$  имеет азимутальное направление, а  $\mathbf{e}_y$  направлен против радиуса в горизонтальной плоскости. Базис  $Oxy$  вращается с полной угловой скоростью  $\tilde{\Omega}(r_0) = \Omega + U(r_0)/r_0$ , отличающейся от глобальной  $\Omega$  поправкой за счет вращения вихря. Ниже именно ее мы будем подразумевать под  $\Omega$ , следуя обозначениям работы [52], и считать для нее выполненными условия (1.22). В системе отсчета  $Oxyz$  геострофический поток локально приближается сдвиговым течением  $U(r) = U(r_0) - \Sigma y$  (где  $\Sigma = \Sigma(r_0)$ ); у вихря полагается малым число Россби  $\Sigma \ll \Omega$  с прямыми линиями тока. Тогда уравнение (1.20) принимает вид:

$$(\partial_t - \Sigma y \partial_x) \mathbf{u} - u^y \Sigma \mathbf{e}_x + 2\Omega[\mathbf{e}_z \times \mathbf{u}] - \nu \nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{f}. \quad (1.23)$$

Анализ продолжался в фурье-пространстве с переходом к разложению по базису круговых поляризаций (1.4). За счет сдвига от течения в динамике плоской волны появляется перенос радиальной компоненты волнового вектора  $\mathbf{k}'(t)$  вдоль характеристики

$$k'_y(t) = k_y + \Sigma k_x t, \quad \mathbf{k}'(t) = (k_x, k'_y(t), k_z). \quad (1.24)$$

Спроецировав уравнение (1.23) на направление  $\mathbf{k}'(t) \perp \mathbf{f}_{\mathbf{k}'(t)}$ , можно выразить давление через компоненты скорости:

$$\mathbf{p}_{\mathbf{k}'} = \frac{2i}{k'^2} [\Omega k'_y u_{\mathbf{k}'}^x - (\Omega + \Sigma) k_x u_{\mathbf{k}'}^y]. \quad (1.25)$$

После этого, система уравнений в проекции на плоскость  $(\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^+, \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^-)$  отличается от свободного случая (1.5) возникновением дополнительных членов, связанных с потоком вихря: они представлены в виде матрицы  $H_{\mathbf{k}}^{s\sigma}$  (где  $s, \sigma = \pm 1$ ); выпишем ее диагональные и недиагональные элементы в явном виде ниже.

$$\frac{d}{dt} a_{\mathbf{k}'(t)}^s(t) = \sum_{\sigma} H_{\mathbf{k}'}^{s\sigma} a_{\mathbf{k}'}^{\sigma} - \nu (k'(t))^2 a_{\mathbf{k}'}^s + f_{\mathbf{k}'}^s \quad (1.26)$$

$$H_{\mathbf{k}'}^{ss} = -is (\omega_{\mathbf{k}'}^s + \delta\omega_{\mathbf{k}'}) - \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \ln (\mathbf{k}'(t))^2, \quad \delta\omega_{\mathbf{k}'} = \Sigma \frac{k_z (3k_x^2 + k_y'^2)}{2k' k_{\perp}'^2}, \quad (1.27)$$

$$H_{\mathbf{k}'}^{-s,s} = \Sigma h_{\mathbf{k}'}^{s,x} h_{\mathbf{k}'}^{s,y} = \Sigma \frac{k_x k_y' (k'^2 + k_z^2) + i s k' k_z (k_x^2 - k_y'^2)}{2k'^2 k_{\perp}'^2}. \quad (1.28)$$

Детали вывода можно найти в приложении статьи [53]. Для компонент случайной силы  $f_{\mathbf{k}}^s(t)$  в проекции на базис (1.4) парная корреляционная функция принимает вид:

$$\langle f_{\mathbf{k}}^s(t_1) f_{\mathbf{q}}^{\sigma}(t_2) \rangle = (2\pi)^3 \delta^{s\sigma} \delta^{(3)}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \delta(t_1 - t_2) \epsilon \chi(\mathbf{k}). \quad (1.29)$$

Далее для (1.19) понадобится определить парное среднее от амплитуд  $a_{\mathbf{k}'}^s$  по статистике случайных сил, после чего найти  $\langle u^r u^{\varphi} \rangle$  как совокупный вклад по всем фурье-гармоникам. Для типичной флуктуации в возбуждаемом ансамбле эффекты вязкой диссипации полагались слабыми, см. (1.22): в модели вводится малый параметр

$$\gamma = 2\nu k_f^2 / |\Sigma| \ll 1. \quad (1.30)$$

В пределе малого числа Россби вихря,  $\Sigma \ll \Omega$ , для большей части волновых векторов выполнено  $\Sigma k \ll \Omega k_z$ : такие гармоники проявляют волновую динамику, качественно близкую к (1.5). Поэтому авторы называют эту область  $\mathbf{k}$  “сектором быстрых осцилляций”. Анализ в теории фокусируется на таких волнах, не рассматривая квазидвумерные пульсации с  $k_z \lesssim k_x \Sigma / \Omega$ , которые остаются в меньшинстве в ансамбле. Для типичных волн недиагональные элементы в (1.26) являются подавленными. Исключим быструю осцилляцию согласно

диагональной части: перейдем к описанию вынужденного решения  $a_{\mathbf{k}}^s$ , заведя специальную матрицу  $P_{\mathbf{k}}^{s\sigma}$  для остаточной эволюции согласно (1.28)

$$e^{\int_{\tau}^t dt_1 H_{\mathbf{k}'}^{ss}(t_1)} = \sqrt{\frac{k'(\tau)}{k'(t)}} e^{-isG_{\mathbf{k}}(t,\tau)}, \quad G_{\mathbf{k}}(t,\tau) = \int_{\tau}^t dt_1 (\omega_{\mathbf{k}'}^s + \delta\omega_{\mathbf{k}'})(t_1) :$$

$$a_{\mathbf{k}'(t)}^s(t) = \int_{-\infty}^t d\tau \sqrt{\frac{k'(\tau)}{k'(t)}} e^{-isG_{\mathbf{k}}(t,\tau) - \nu \int_{\tau}^t dt_1 (k'(t_1))^2} \sum_{\sigma} P_{\mathbf{k}}^{s\sigma}(t,\tau) f_{\mathbf{k}'(\tau)}^{\sigma}(\tau), \quad (1.31)$$

которая является решением задачи ниже (формально может быть записана через хронологически упорядоченную экспоненту). Здесь  $B_{\mathbf{k}} = H_{\mathbf{k}(t)}^{+-} e^{2isG_{\mathbf{k}}(t,\tau)}$ :

$$\partial_t P^{s\sigma}(t,\tau) = \sum_{\varsigma} \begin{pmatrix} 0 & B_{\mathbf{k}}(t,\tau) \\ B_{\mathbf{k}}^*(t,\tau) & 0 \end{pmatrix}^{\varsigma\varsigma} P^{\varsigma\sigma}(t,\tau), \quad P^{s\sigma}(\tau,\tau) = \delta^{s\sigma}. \quad (1.32)$$

Величина  $B_{\mathbf{k}}$  для типичной волны в ансамбле быстро осциллирует во времени; по этой причине ее вклад в изменение  $P^{s\sigma}$  при интегрировании уравнения будет мал. В Приложении А статьи [52] выводится оценка для недиагональных элементов матрицы и обсуждается поправка к диагональным, которые были получены последовательными приближениями в решении (1.32) (т.е. разложением хронологической экспоненты, см. формулы (19, А3)):

$$P^{+-}(t,\tau) \approx \int_{\tau}^t dt_1 B_{\mathbf{k}}(t_1,\tau) \approx \frac{iH_{\mathbf{k}(t_1)}^{+-}}{2\omega_{\mathbf{k}(t_1)}^+} \Big|_{t_1=\tau}^{t_1=t} \sim \frac{\Sigma k}{\Omega k_z} \ll 1.$$

Вычисление парного среднего для амплитуд (1.31) по статистике (1.29) в ведущем приближении по малому параметру  $\Sigma k/\Omega k_z$ , где  $P^{s\sigma} \approx \delta^{s\sigma}$ , приводит к диагональному виду выражения

$$\langle a_{\mathbf{k}}^s(t) (a_{\mathbf{k}}^{\sigma}(t))^* \rangle_f \approx \epsilon \delta^{s\sigma} \int_{-\infty}^0 d\tau \chi(k'(\tau)) \frac{k'(\tau)}{k} e^{-2\nu \int_{\tau}^0 dt_1 (k'(t_1))^2}, \quad (1.33)$$

где интегрирование по  $\tau$  проходит по всему предшествовавшему времени накачки. На основе него в модели находится выражение касательной компоненты тензора Рейнольдса, как интеграл по совокупности гармоник в ансамбле накачки (чем отличается обозначение угловых скобок от (1.33)). Начальное отличие в знаке связано с расположением орт, см. Рис. (1.5)

$$\begin{aligned} \langle u^r u^{\varphi} \rangle &= -\langle u^x u^y \rangle = - \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{s=\pm 1} \langle |a_{\mathbf{k}}^s|^2 \rangle_f h_{\mathbf{k}}^{sx} h_{-\mathbf{k}}^{sy} = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \langle |a_{\mathbf{k}}^s|^2 \rangle_f \frac{k_x k_y}{k^2} \\ &= \epsilon \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^0 d\tau \frac{k_x k_y k'(\tau)}{k^3} \chi(k'(\tau)) e^{-2\nu \int_{\tau}^0 dt_1 (k'(t_1))^2}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Характерное время корреляции пульсаций  $\tau_{\text{corr}}$  в модели будет уменьшаться вместе с периодом вращения системы. Его можно определить, например, как  $1/\tau_{\text{corr}} = \left| \text{Re} \int_0^\infty dT \langle a_{\mathbf{k}}^s(t+T) a_{\mathbf{k}}^{s*}(t) \rangle / \langle |a_{\mathbf{k}}^s|^2 \rangle \right|$  с помощью разновременной парной корреляционной функции, аналогично (1.34) усредненной в фурье-пространстве. Поскольку для отдельной гармоники та будет содержать дополнительный быстро осциллирующий фактор  $\langle a_{\mathbf{k}}^s(t+T) a_{\mathbf{k}}^{s*}(t) \rangle_f \propto e^{-isG_{\mathbf{k}}(T,0)}$ , то его интегрирование по  $T$  даст малый множитель  $(\omega_{\mathbf{k}'}^s)^{-1}$ , что приводит к оценке  $\tau_{\text{corr}} \propto \Omega^{-1}$ .

Пространственная зависимость парных корреляций для скорости пульсаций в модели изучалась в последующих публикациях авторов. В работе [54] интересовались поведением структурной функции  $S^{ij} = \langle \Delta u^i(\mathbf{r}) \Delta u^j(\mathbf{r}) \rangle$  на наименьших масштабах, где поле скорости можно считать гладким, т.е. рассматривалась локальная корреляция градиентов скорости в одной точке. Для диагональных элементов было показано, что компоненты  $S^{xx}, S^{zz}$  изменяются в радиальном направлении в  $\gamma^{-1/3}$  быстрее раз, см. определение параметра в (1.30). Направление максимального роста отклонено от  $Ox$  вдоль потока на характерный малый угол  $\gamma^{1/3}$  в горизонтальной плоскости. При этом компонента  $S^{yy}$  оказывается логарифмически меньше и уже не содержит выраженной пространственной анизотропии. В работе [55] исследовали поведение парной корреляционной функции на расстояниях, превышающих характерную длину возбуждения  $k_f^{-1}$ . В частности, для диагональных элементов корреляционной функции затухание вдоль потока логарифмическое, оказывается значительно медленнее степенного спада в направлениях  $Oy, Oz$ . С другой стороны, парная корреляционная функция  $\langle u^r(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}) u^r(\mathbf{r}_0) \rangle$ , которая переходит в касательное напряжение (1.34) при  $\mathbf{r} = 0$ , см. (1.36), демонстрирует сильную зависимость от формы корреляционной функции  $\chi$  и быстро затухает на расстояниях  $r$  выше  $k_f^{-1}$ .

### 1.3.2 Статистика взаимодействия пульсаций со средним течением

Результаты по мелкомасштабной турбулентной статистике, используемые в статье [52] для анализа уравнения на поток вихря (1.19), были получены в пределе быстрого вращения и в ведущем приближении по слабой диссипации, определяемом малостью  $\gamma$  (1.30). Обратим внимание, что поток импульса от

пульсаций к среднему течению в отсутствие вязкости (1.34) обращается в ноль по симметрии, поэтому требуется рассмотрение в пределе  $\nu \rightarrow +0$ . Обобщение исследования среднего течения для конечных значений вязкости и числа Россби вихря  $Ro = \Sigma/2\Omega$  было проделано в следующей работе [53]. Для определенности вычисления в них проводились с модельной безразмерной корреляционной функцией накачки (1.21) гауссова вида:

$$\chi(k) = \frac{16\pi^{3/2}}{3k_f^5} k^2 e^{-k^2/k_f^2}. \quad (1.35)$$

При вычислении ведущего вклада в (1.34) уместно преобразовать его подынтегральное выражение следующим образом. В интегрировании по фурье-пространству  $\int d^3\mathbf{k}$  сначала обезразмерим волновые векторы на масштаб  $k_f$ , после чего перейдем к переменной волнового вектора  $\mathbf{q}$  на характеристике, которая стоит аргументом в выражении  $\chi(k_f q)$ . При этом исходный вектор  $\mathbf{k} = k_f \mathbf{q}'(\tau)$  принимает вид со сдвигом вдоль  $Oy$ :

$$\mathbf{q}' = (q_x, q_y - \Sigma q_x \tau, q_z),$$

$$\langle u^r u^\varphi \rangle = \frac{\epsilon}{\Sigma} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} q \chi(k_f q) \int_{-\infty}^0 d\tau e^{-2\nu k_f^2 \int_{\tau}^0 dt_1 (q'(t_1))^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{q'(\tau)}.$$

Применим интегрирование по частям к  $\int d\tau$ : основной вклад, не исчезающий в пределе  $\nu \rightarrow +0$ , в касательное напряжение Рейнольдса возникает из отдельного интегрирования полной производной по времени

$$\langle u^r u^\varphi \rangle = \frac{\epsilon}{\Sigma} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} q \chi(k_f q) \int_{-\infty}^0 d\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{e^{-2\nu k_f^2 \int_{\tau}^0 dt_1 (q'(t_1))^2}}{[q_x^2 + (q_y - \Sigma q_x \tau)^2 + q_z^2]^{1/2}} = \frac{\epsilon}{\Sigma}, \quad (1.36)$$

где мы воспользовались условием нормировки (1.21). Остаточное выражение в пределе  $\gamma \ll 1$  является малой поправкой к результату (1.36) — ее относительное значение задается формулой

$$\langle u^r u^\varphi \rangle = \frac{\epsilon}{\Sigma} (1 - Q), \quad Q = \gamma \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \chi(k_f q) q q'(\tau) e^{-2\nu k_f^2 \int_{\tau}^0 dt_1 (q'(t_1))^2}. \quad (1.37)$$

На основе показателя диссипационной экспоненты (сравнивая его значение с единицей) можно извлечь характерный вязкий масштаб времени  $t_v = (\nu k_f^2 \Sigma^2)^{-1/3}$ , после которого передача момента импульса среднему течению (см.

комментарий после (1.19)) заканчивается. Для касательного напряжения основная часть момента передается от флуктуаций за значительно меньшее время накачки  $\tau$ , см. рассмотрение в Разделе IV и Приложении В статьи [52]. В силу изотропности накачки в модели авторы переходили в вычислении  $\int d^3\mathbf{q}$  к сферическим координатам, где зависимость подынтегральной функции от времени проявляла себя в виде анизотропного распределения на сфере. Анализ показывает, что основной вклад в интеграл  $\langle u^r u^\varphi \rangle$  по углу  $\phi$  в горизонтальной плоскости (проведем его для (1.36), оставив производную по  $\tau$ ) набирается в узкой окрестности направления  $\mathbf{q}_\perp = q_\perp (\cos \phi_0, \sin \phi_0)$ , которое отклоняется от среднего потока на малый угол  $\phi_0 = (\Sigma\tau)^{-1} \ll 1$ . После усреднения выражения по сфере, основной вклад в интеграл по  $\tau$  осуществляется на масштабах времени до  $|\tau| \sim \Sigma^{-1}$ , что параметрически меньше вязкого. Поправка (1.37) получается малой по параметру  $\gamma$  как  $Q \approx q_{1/3} \gamma^{1/3}$ , где в случае накачки (1.35) численное значение коэффициента  $q_{1/3} \approx 1.8$  [53].

Представленная картина в общих чертах воспроизводит положения теории [38; 39] когерентного вихря в двумерной турбулентности, течение которого так же поддерживается однородной изотропной накачкой от мелкомасштабной случайной силы. Аналогично в модели вводится малый параметр  $\gamma = 2\nu k_f^2 / |\Sigma|$ ; несмотря на иную динамику волн, среднее  $\langle u^r u^\varphi \rangle$  задается похожим выражением. Оно обращается в ноль в отсутствие диссипации в динамике, а в пределе малого  $\gamma$  восстанавливается результат (1.36). Существенным отличием трехмерной системы является скорость взаимодействия пульсаций со средним течением. В двумерных системах флуктуации в среднем передают энергию крупномасштабному когерентному вихрю за время  $|\tau| \sim 1/(\nu k_f^2)$ , определяемое вязкостью. Таким образом, когерентный вихрь, который также испытывает трение о дно, может существовать в случае, если выполняется неравенство  $\nu k_f^2 \gg \alpha$  [40]. В трехмерной задаче большинство инерционных волн взаимодействуют с потоком гораздо быстрее, за характерное время  $\Sigma^{-1}$ , см. обсуждение ниже (1.37), что влечет ограничение  $\alpha \ll \Sigma$ .

### 1.3.3 Среднее течение столбового вихря

Установив масштаб касательного напряжения Рейнольдса в (1.37), перейдем к уравнению на средний поток (1.19). В пределе  $\gamma \ll 1$  подстановка (1.36) приводит к не зависящему от радиуса темпу сдвига:  $(\Sigma_0)^2 = \epsilon/\nu$ . Он соответствует линейно-логарифмическому профилю азимутальной скорости течения,

$$U(r) = \mp r \Sigma_0 \ln(R_v/r), \quad \Sigma_0 = \sqrt{\epsilon/\nu} \quad (1.38)$$

для циклона и антициклона соответственно. Константа  $R_v$  имеет смысл размера вихря. Линейно-логарифмический профиль скорости когерентного вихря наблюдался в численном моделировании двумерной турбулентности [42], в динамике которой были подавлены эффекты линейного трения о дно. Как говорилось в конце прошлого подраздела, двумерная аналитическая теория для когерентных вихрей [38] дает аналогичный результат (1.36) при малой вязкости, так что рассмотрение (1.18,1.19) формально дает те же ответы для  $U(r)$ , что и в случае столбового вихря.

Полученное решение требует уточнения путем учета эффектов трения о дно для геострофического течения [64]. Восстанавливая его в (1.18) на профиль радиальной скорости когерентного вихря, приходим к

$$\alpha U = \left( \partial_r + \frac{2}{r} \right) \left( \nu \Sigma - \frac{\epsilon}{\Sigma} \right). \quad (1.39)$$

В уравнении выше возникает характерный вязкий масштаб  $R_\alpha = \sqrt{\nu/\alpha}$ . На больших расстояниях  $r \gg R_\alpha$  от оси можно пренебречь вязким членом в правой части уравнения, и тогда его решение будет выходить на константное значение

$$U_0 = \sqrt{3\epsilon/\alpha}. \quad (1.40)$$

Напротив, на расстояниях  $r \lesssim R_\alpha$  до центра ведущий эффект на профиль вихря оказывает вязкое трение — воспроизводится найденная ранее асимптотика (1.38). Приближение модели пульсаций с локальным сдвигом (1.23) нарушается, если приблизиться достаточно близко к оси в область сердцевины вихря. Ее размер можно оценить по порядку, рассмотрев для типичной волны произведение характерной групповой скорости  $\Omega/k_f$  на время  $1/\Sigma$  ее взаимодействия со средним течением:  $r_u = k_f^{-1}/\text{Ro}$  [52]. Для малых  $r$  должно выполняться

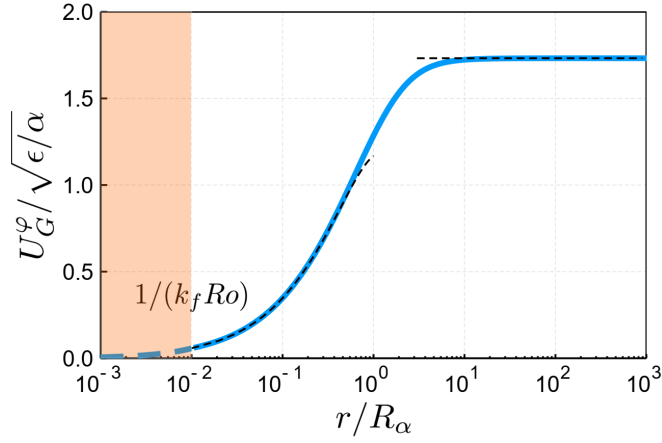


Рисунок 1.6 — Профиль течения столбового вихря  $U_G(r)$  как решения (1.39). Черным пунктиром отмечены ближняя (1.38) и дальняя асимптотики (1.40). Численное значение  $R_v = 3.22R_\alpha$  найдено фитом численного решения (синяя кривая). Центральная зона вязкой области, где реализуется асимптотика твердотельного вращения, закрашена цветом. График из работы [64].

$\Sigma \rightarrow 0$ : в области  $r < r_u$  реализуется твердотельное вращение. График численного решения модельного уравнения (1.39) с отмеченными на нем асимптотиками представлен на Рис. 1.6.

Такая же результирующая модель среднего течения (1.39) и асимптотики, которые она предсказывает, возникают в теории когерентных вихрей в двумерной турбулентности [38]: как обсуждалось в конце прошлого подраздела, в ней также воспроизводится ответ (1.36) в пределе нулевой диссипации  $\gamma \rightarrow +0$ . Плоский профиль (1.40), обусловленный трением о дно, наблюдался при численном моделировании [37] и в ходе лабораторного эксперимента [12]. Линейно-логарифмический профиль скорости когерентного течения (1.38) воспроизводился в численном моделировании [42] двумерной турбулентности без учета эффектов трения о дно с граничными условиями непротекания при стенках,  $\mathbf{v} = 0$ . Размер вихря  $R_v$  сопоставим с размером ячейки, а малый ограничивающий масштаб, на котором асимптотика (1.38) сменяется на твердотельное вращение, оценивался как  $r_u \sim k_f^{-1}$ .

Уравнение (1.39) и его решения обладают симметрией  $U \rightarrow -U$  и дают одинаковое поведение для циклонов и антициклонов. Симметрия их структуры обусловлена пределом быстрого вращения в модели, что согласуется с режимом “вязкого конденсата” в симуляциях [48]. Относительная поправка к профилю скорости при быстром вращении ожидается малой как  $Ro = \Sigma_0/2\Omega$ . Обратим внимание, что из стандартных определений турбулентного числа Россби и чис-

ла Рейнольдса, см. (1.22), следует соотношение  $2\text{Ro} = \text{Ro}_f \sqrt{\text{Re}_f}$ . Именно эта комбинация в статье [48], обозначаемая  $\text{Ro}_\lambda$ , разделяла между собой режимы динамики двумерного конденсата (см. описание результатов со ссылкой на Рис. 1.3). “Вязкий конденсат” устанавливался при  $\text{Ro}_\lambda$  меньше 0.2 — в этом режиме в системе формируется симметричная дипольная пара циклон-антициклон масштаба порядка размера системы  $L$  (периодический ящик). Накачка в моделировании была детерминированной (в отличие от теоретической модели [52; 53]) и мелкомасштабной ( $k_f L \approx 25$ ).

В работе [53] исследовалось среднее течение вихря (без трения о дно  $\alpha = 0$ ) при конечных числах Россби и влиянии вязкости, определяемом параметром  $\gamma$  (1.30). Для касательного напряжения (1.37) вводился безразмерный коэффициент эффективности передачи  $F$ , зависящий от двух локальных параметров, см. Ур. (16-18). Число Россби ниже определялось локально согласно  $\tilde{\Omega}(r) = \Omega + U(r)/r$ :

$$\langle u^r u^\varphi \rangle = \frac{\epsilon}{\Sigma} \cdot F, \quad F(\text{Ro}, \gamma) = 1 - Q; \quad \text{Ro} = \frac{\Sigma(r)}{2\tilde{\Omega}}, \quad \gamma = \frac{2\nu k_f^2}{|\Sigma(r)|}. \quad (1.41)$$

В аналитической теории, изложенной выше, приводилась асимптотика в пределе малых аргументов:  $F \approx 1 - q_{1/3} \gamma^{1/3}$ ,  $q_{1/3} \approx 1.8$ . Графики численного расчета функции  $F$  для антициклонического и циклонического течения (при положительных/отрицательных значениях параметра Россби  $\text{Ro}$ ) представлены на Рис. 1.7. На их основе были рассчитаны профили скорости столбовых вихрей при разных значениях параметров на основе решения нелинейного ОДУ (1.19) для функции обезразмеренной угловой скорости вращения  $\omega(r) = 2\tilde{\Omega}(r)/\Sigma_0$  (знаки  $\mp$  соответствуют случаям циклона и антициклона, см. Рис. 5,6 [53], соответственно):

$$\sigma = \mp \sqrt{F\left(\frac{\sigma}{\omega}, \frac{2}{\text{Re}_f^{3/2} |\sigma|}\right)}, \quad \omega|_{r=R_v} = \frac{1}{\text{Ro}_R}; \quad (1.42)$$

$$\omega(r) = \frac{2\tilde{\Omega}(r)}{\Sigma_0}, \quad \sigma = \frac{\Sigma(r)}{\Sigma_0} = \frac{r}{2} \partial_r \omega.$$

Значение для граничного условия  $\omega(R_v) = \text{Ro}_R^{-1}$  связано с тем, что  $U(R_v) = 0$ , см. (1.38). С увеличением параметра  $\text{Ro}_R \propto \text{Ro}_f \sqrt{\text{Re}_f}$  профиль антициклона сильнее отклоняется от линейно-логарифмического профиля (1.38), чем у циклона: сдвиг  $\Sigma$  приобретает выраженную радиальную зависимость, затухая

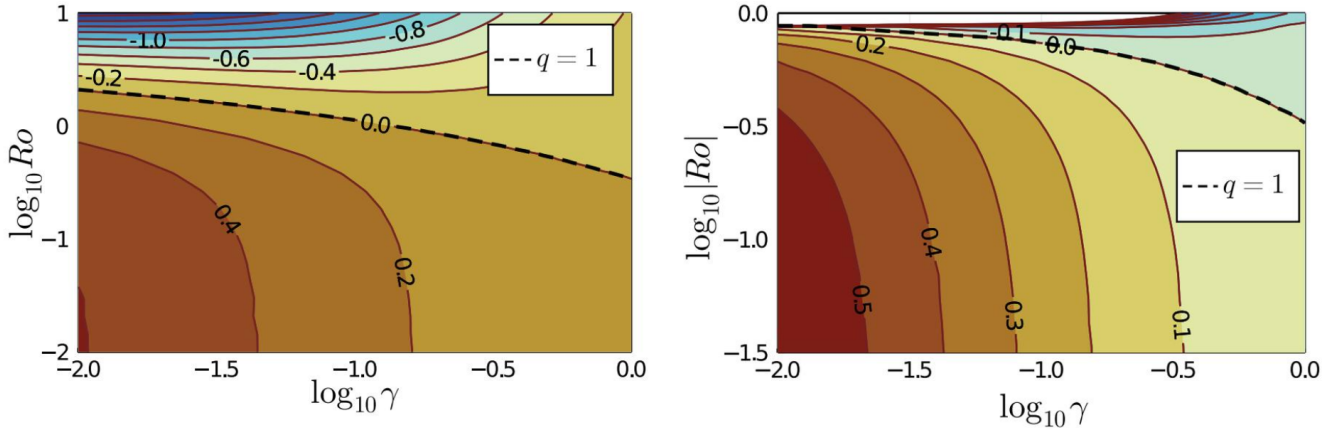


Рисунок 1.7 — Диаграммы распределения для безразмерного коэффициента эффективности передачи  $F$  из численного расчета в [53]. Слева: случай антициклона (положительные числа Россби). Справа: случай циклона (отрицательные числа Россби). Изолинии  $q = 1$  (черный пунктир) обозначают контуры, на которых напряжение  $\langle u^r u^\varphi \rangle$  обращается в ноль.

при приближении к оси вихря. В пределе  $Ro_R \ll 1$ ,  $Re_f \gg 1$  симметрия циклон-антициклон восстанавливается; выход на постоянное  $\Sigma_0$  для антициклона наблюдается только при малом значении  $Ro_R = 0.1$ . Было показано, что квазилинейное приближение теории применимо при условии достаточно большой интенсивности передачи энергии вихрю от накачки: эволюция пульсаций достаточно хорошо описывается линейным Ур. (1.23), если выполнено

$$F/Ro \gtrsim 1,$$

что заведомо нарушено вблизи кривой  $F = 0$ . В этой области не формируется среднего течения, поскольку практически не происходит передачи энергии. Она отмечена черной пунктирной линией на диаграммах на Рис. 1.7.

#### 1.4 Пассивная скалярная примесь в турбулентности

Турбулентный поток эффективно перемешивает любое поле, которое он переносит. В роли скалярного поля может выступать, например, концентрация примеси, химического реагента, отклонение температуры или же завихренность и потенциал магнитного поля в случае, если речь идет о двумерных течениях в тонких слоях жидкости. В общем случае поле влияет на течение жидкости;

различные механизмы обратной реакции (нелинейный, нелокальный и др.) разбираются на примерах в §4.7 обзора [13]. Однако ей можно пренебречь, если речь идет о разбавленных растворах или слабых флуктуациях температуры, и рассматривать отдельно “пассивный” перенос поля заданным гидродинамическим потоком  $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ , который в турбулентном режиме полагается хаотическим. Эволюция пассивного скалярного поля  $\theta(t, \mathbf{r})$  описывается уравнением переноса–диффузии (течение жидкости  $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$  считаем несжимаемым):

$$\partial_t \theta + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \theta - \kappa \nabla^2 \theta = \phi, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1.43)$$

где  $\phi(t, \mathbf{r})$  обозначает внешний источник, вносящий скаляр в систему, а  $\kappa$  — коэффициент диффузии. В контексте переноса температуры  $\kappa$  имеет смысл коэффициента температуропроводности, для которого используют обозначение  $\chi$ . Если рассматривается концентрация примеси, роль  $\kappa$  играет коэффициент молекулярной диффузии  $D$ . Все эти величины имеют размерность  $\text{см}^2/\text{с}$  — ту же, что и кинематическая вязкость  $\nu$  (коэффициент диффузии импульса). Отсюда естественным образом возникают безразмерные отношения, характеризующие среду: число Прандтля  $\text{Pr}$  для тепла и число Шмидта  $\text{Sc}$  для примеси. Сравнение же членов переноса и диффузии в уравнении (1.43) вводит число Пекле  $\text{Pe}$ , характеризующее течение, которое выражается через них следующим образом:

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\chi}, \quad \text{Pe}_T = \text{Re} \cdot \text{Pr} = \frac{UL}{\chi}; \quad \text{Sc} = \frac{\nu}{D}, \quad \text{Pe}_c = \text{Re} \cdot \text{Sc} = \frac{UL}{D}. \quad (1.44)$$

Далее мы остановимся на интерпретации эволюции концентрации примеси в жидкости.

Процесс перемешивания можно представить на примере эволюции первоначального сгустка красителя в потоке — в работе будем также называть его кляксой (“blob” в англоязычной литературе). Разделим в динамике эффекты переноса и диффузии, полагая предел большого числа Пекле. Течение многократно растягивает, складывает части сгустка; многократное нерегулярное повторение процесса размешивает (“stirring”) его в переплетенный рисунок нитей в жидкости. Наконец, молекулярная диффузия заканчивает процесс перемешивания (“mixing”): среда становится неразличима с ее составляющими — ни с примесью, ни с жидкостью [36; 103]. Статистическое описание эволюции начального распределения без накачки в случайном течении — формулировка т.н. распадной задачи [104], в которой изучаются характеристики затухания количества скаляра.

### 1.4.1 Каскад флуктуаций скаляра

Однородная динамика по (1.43) имеет интеграл движения — полное количество скаляра в системе. При изучении эволюции поля удобно исключить из рассмотрения сохраняющуюся величину и рассматривать отклонение скаляра относительно среднего:

$$\theta \rightarrow \theta - \frac{1}{V} \int dV \theta.$$

Наряду с задачей распада естественным образом возникает другая постановка, в которой флуктуации скаляра непрерывно возбуждаются в системе (статистически постоянным) источником  $\phi$  [34]. Здесь интерес представляет стационарное состояние, устанавливающееся на временах много больших характерного времени перемешивания, когда приток дисперсии скаляра от накачки уравнивается диссипацией на мелких масштабах. Источник методически удобно представлять случайным гауссовым полем с нулевым средним и коротко коррелированным во времени пределом:

$$\langle \phi(t_1, \mathbf{r}_1) \phi(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle = \Phi(\delta \mathbf{r}_{12}/l_f) \delta(t_1 - t_2), \quad (1.45)$$

поскольку общие характеристики перемешивания зависят не столько от особенностей механизма накачки, а от статистики течения. Более детальное обсуждение можно найти в Разделе С обзора [35].

Примером такой задачи возбуждения является каскад для примеси в турбулентном потоке. Рассуждение Ричардсона-Колмогорова переносится на скаляр почти дословно: изучим ситуацию, когда скаляр вносится на масштабе  $L$ , а стирается диффузией на гораздо меньшем диффузионном масштабе Бэтчелора  $r_\kappa \sim (\nu \kappa^2 / \epsilon)^{1/4}$  [30]. В промежутке между ними,  $r_\kappa \ll r \ll L$ , формируется конвективный интервал, ширина которого растет вместе с числом Пекле  $Pe$ . В нем устанавливается стационарный поток дисперсии скаляра [35; 105]: рассмотрим  $\partial_t \langle \theta(t, \mathbf{r}_1) \theta(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle$  согласно (1.43) и усредним по статистике (1.45):

$$\langle [(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla_1) + (\mathbf{v}_2 \cdot \nabla_2)] \theta_1 \theta_2 \rangle \approx \Phi_0, \quad \Phi_0 \equiv \Phi(0). \quad (1.46)$$

Результат для пульсаций скаляра  $\delta_r \theta$  получается подстановкой в него соответствующей зависимости для пульсаций  $\delta_r v$ . На инерционно-конвективном

интервале подстановка колмогоровского скейлинга для скорости  $\delta_r v \sim (\epsilon r)^{1/3}$  приводит к оценке  $\delta_r \theta \sim r^{1/3}$  — закону Обухова-Корсина для спектра каскада пассивного скаляра [29; 106]:

$$F(k) \sim \epsilon^{-1/3} \Phi_0 k^{-5/3}, \quad (1.47)$$

где  $F(k)$  обозначает фурье-образ парной корреляционной функции скаляра. Существует также точное выражение скейлинга в однородной изотропной трехмерной турбулентности — соотношение Яглома [28], являющееся аналогом колмогоровского “закона 4/5”:

$$\langle \delta_r v_{\parallel} (\delta_r \theta)^2 \rangle = -\frac{4}{3} \Phi_0 r.$$

Ниже вязкого масштаба  $\eta \sim \nu^{3/4} \epsilon^{-1/4}$  Колмогорова каскад Ричардсона прекращается и поле скорости в потоке сглаживается,  $\delta v \sim r$ . Рассмотрим скейлинг выражения для потока (1.46) на вязко-конвективном интервале,  $r_{\kappa} \ll r \ll \eta$ , протяженность которого определяется числом Шмидта  $\eta/r_{\kappa} = \text{Sc}^{1/2}$  из (1.44). Там устанавливается каскад Бэтчелора [30] со спектром:

$$F(k) \sim \Phi_0 (\nu/\epsilon)^{1/2} k^{-1}. \quad (1.48)$$

#### 1.4.2 Перемешивание в бэтчелоровском режиме и модель Крайчнана

В этом разделе будет детально представлена теория однородной изотропной турбулентности скаляра на масштабах ниже вязкого в предположении  $\text{Sc} \gg 1$  на основе разбора работы [34]. В ней были получены универсальные результаты статистики для переноса турбулентным течением и для задачи пассивного скаляра, а также были выведены их точные выражения в рамках модели Крайчнана [107].

Для изучения мелкомасштабной статистики совершается переход в систему, сопутствующую некоторой лагранжевой частице с траекторией  $\mathbf{X}(t)$ . Эволюция поля вектора  $\ell(t) \equiv \delta \mathbf{X}(t)$  между близкими лагранжевыми траекториями в потоке определяется разностью скоростей, которая приближается линейным разложением (поле  $\mathbf{v}$  гладкое в бэтчелоровском режиме). Запишем

также отдельно уравнение переноса скаляра в сопутствующей системе (в декартовых координатах):

$$\frac{d}{dt}\ell_i(t) = \sigma_{ij}\ell_j(t), \quad \sigma_{ij} = \partial_j v_i(t, \mathbf{X}), \quad (1.49)$$

$$\partial_t \theta + \hat{\sigma} \mathbf{r} \cdot \nabla \theta - \kappa \nabla^2 \theta = 0 \quad (1.50)$$

Из условия несжимаемости  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  течения следует бесследовость матрицы  $\sigma_{ij}$  градиентов скорости.

В общем случае модель Крайчнан полагает случайное поле скорости  $\mathbf{v}$  гауссовым, дельта-коррелированным во времени и масштабно инвариантным в пространстве с парной структурной функцией  $\langle \delta_{\mathbf{r}} v_i(t), \delta_{\mathbf{r}} v_j(t') \rangle \propto \delta(t_1 - t_2) r^\xi$ , где показатель шероховатости течения  $0 < \xi < 2$ . Тем самым разделяется пространственная и временная зависимости в турбулентных пульсациях: статистика течения свелась к статистике случайной матрицы  $\hat{\sigma}(t)$ , которая в данной модели является белым шумом с изотропной парной корреляционной функцией:

$$\langle \sigma_{ij}(t_1) \sigma_{kl}(t_2) \rangle = D [(d+1)\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ij}\delta_{kl}] \delta(t_1 - t_2), \quad (1.51)$$

где  $d = 2, 3$  обозначает размерность пространства.

В сопутствующей системе (1.49) кинематика полностью описывается матрицей эволюции  $\hat{W}(t)$ , являющейся решением задачи Коши ниже (может быть записано как хронологически упорядоченная экспонента). В силу бесследовости  $\hat{\sigma}$  детерминант  $\hat{W}$  равен 1:

$$\partial_t \hat{W} = \hat{\sigma}(t) \hat{W}, \quad \hat{W}(0) = \hat{1}; \quad \det \hat{W}(t) = 1. \quad (1.52)$$

Поскольку  $\hat{W}(t)$  мультипликативный случайный процесс, можно воспользоваться результатом мультипликативной эргодической теоремы Оселед-ца [108]: предел

$$\Lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln (\hat{W} \hat{W}^T)$$

существует почти наверное и не зависит от реализации  $\hat{\sigma}$ . Его собственные значения  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d$  являются Ляпуновскими экспонентами, характеризующими динамику системы. В силу несжимаемости течения сумма всех  $\sum \lambda_i = 0$ . В связи с этим авторы [34] рассматривают динамику скаляра в терминах тензора инерции  $I(t)$ , поскольку для эволюции вектора  $\boldsymbol{\ell}(t) = \hat{W}(t) \boldsymbol{\ell}_0$  его определение как раз воспроизводит (транспонированную) конструкцию  $\ell_0^2 \hat{W} \hat{W}^T$ :

$$I_{ab} = \frac{1}{2N} \int d^3 \mathbf{r} r_a r_b \theta(t, \mathbf{r}), \quad N = \int d^3 \mathbf{r} \theta. \quad (1.53)$$

Тензор  $I$  однозначно определяет, например, гауссово пространственное распределение сгустка в форме эллипсоида. Для эволюции  $I$  из (1.50) выводится замкнутое стохастическое дифференциальное уравнение:

$$\partial_t I = \kappa \hat{1} + \hat{\sigma} I + I \hat{\sigma}^T, \quad I(0) = L^2 \hat{1}. \quad (1.54)$$

Из теоремы следует, что направления, соответствующие положительным и отрицательным Ляпуновским экспонентам  $\lambda_i$ , будут соответственно увеличиваться или уменьшаться, и что изначально шаровой сгусток скаляра радиуса  $L$  превратится в эллипсоид, у которого длины главных осей будут изменяться как  $e^{\lambda_i t}$ . Ориентация эллипсоида может меняться произвольным образом. Наименьшая размерность будет экспоненциально уменьшаться с темпом, задаваемым  $\lambda_d < 0$ , пока не достигнет диффузионного масштаба Бэтчелора (в данной модели  $r_\kappa = \sqrt{\kappa/|\lambda_d|}$ ) за время порядка  $t_\kappa = |\lambda_d|^{-1} \ln(L/r_\kappa)$ , при котором диффузионное распространение частиц делает дальнейшее сжатие невозможным. Наименьшее направление будет колебаться около масштаба  $r_\kappa$ , но диффузия не повлияет на другие направления, которые продолжают изменяться в соответствии со своими экспонентами Ляпунова. Чтобы отделить эту стадию динамики, в работе полагается предел большого числа Пекле у течения. К симметричной положительно определенной матрице  $I$  применяется спектральное разложение, приводя ее матрицей поворота  $R$  к диагональному виду  $\Lambda$ , у которой собственные значения представлены в экспоненциальной форме:

$$I = R^T \Lambda R, \quad \Lambda = \text{diag}(e^{2\rho_1}, \dots, e^{2\rho_d}), \quad \rho_1 \geq \dots \geq \rho_d. \quad (1.55)$$

Диагональные уравнения в (1.54) представляют собой стохастические уравнения для показателей степени  $\rho_i(t)$ , см. Ур. (2.2, 2.3) в [34]: их эволюция определяется на основе динамики матрицы поворота  $R$ , на которую не влияют эффекты диффузии. В рамках статистики (1.51) оказывается возможным усреднить совместную динамику по вращательным степеням свободы в  $R$  и оставить в рассмотрении только показатели  $\rho_i(t)$ . Редукция была проделана в работе [109]; она приводит к ланжевеновской динамике уравнений с производным белым шумом  $\xi_i(t)$

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_i &= \frac{Dd}{2} \sum_{j \neq i} \coth(2\rho_i - 2\rho_j) + \xi_i + \frac{\kappa}{2} e^{-2\rho_i}, \\ \langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle &= C_{ij} \delta(t - t'), \quad C_{ij} = D(d\delta_{ij} - 1). \end{aligned} \quad (1.56)$$

Отметим, что уравнение Фоккера-Планка на совместную функцию плотности распределения вероятности (PDF) может быть сведено преобразованием к уравнению Шредингера в евклидовом времени с гамильтонианом Калоджеро-Сазерленда (является интегрируемой моделью). Показатели  $\rho_i$  в динамике отталкиваются друг от друга при сближении согласно первому гиперболическому слагаемому в системе, а при достижении  $\rho_d$  большого отрицательного значения  $\sim \ln(r_\kappa/L)$  его дальнейшее уменьшение останавливает диффузионный третий член. В типичной реализации эволюции показателей согласно (1.56) после короткого начального периода времени они начинают различаться; выберем упорядочение согласно (1.55). На временах  $t \gg D^{-1}$  разделение между ними становится существенным,  $\rho_1 \gg \dots \gg \rho_d$ , т.ч. гиперболическое взаимодействие можно приближенно считать константой  $\coth(2\rho_i - 2\rho_j) \approx \text{sign}(\rho_i - \rho_j)$  и динамическая система для  $\rho_i(t)$  становится свободной:

$$\partial_t \rho_i = \lambda_i + \xi_i + \frac{\kappa}{2} e^{-2\rho_i}, \quad \lambda_i = \frac{Dd}{2} (d - 2i + 1). \quad (1.57)$$

На временах  $D^{-1} \ll t \ll D^{-1} \ln(DL^2/\kappa)$ , роль диффузии пренебрежима и поведение показателей определяется только хаотическим потоком: выражение (1.57) в этом приближении соответствует броуновскому движению для  $(\rho_i(t) - \lambda_i t)$ . Таким образом в модели устанавливаются линейная зависимость для типичных показателей  $\rho_i$  и значения для Ляпуновских экспонент в модели Крайчнана (1.51):

$$d = 2: \lambda_{1,2} = \pm D; \quad d = 3: \lambda_{1,3} = \pm 3D, \lambda_2 = 0. \quad (1.58)$$

Асимптотики функций плотности распределения вероятности для двумерного и трехмерного случаев, соответственно:

$$P_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \exp\left[-\frac{(\rho_1 - Dt)^2}{2Dt}\right] \theta(\rho_1) \delta(\rho_1 + \rho_2), \quad (1.59)$$

$$P_3 = \frac{\theta(\rho_1 - \rho_2) \theta(\rho_2 - \rho_3) \delta(\sum \rho_i)}{2\sqrt{3\pi} Dt} \exp\left[-\frac{(\rho_1 - 3Dt)^2 + (\rho_1 - 3Dt)\rho_2 + \rho_2^2}{3Dt}\right].$$

Ступенчатые функции моделируют границу области  $\rho_i > \rho_{i+1}$ : вблизи нее формулы неприменимы, но эта окрестность пренебрежима уже по сравнению с характерной шириной распределения  $\sqrt{Dt}$ . Замирание промежуточного  $\rho_2 \approx 0$  вызвано симметриями модели Крайчнана.

Анализ финальной асимптотики на временах  $t \gg t_\kappa$ , превышающих диффузионный масштаб  $t_\kappa \sim D^{-1} \ln(DL^2/\kappa)$ , приводится в Приложении А [34].

Последнее слагаемое в (1.57) для  $\rho_d(t)$  компенсирует член  $\lambda_d$ : динамика  $\rho_d$  замирает около диффузионного значения и флуктуирует за счет шума  $\xi_d(t)$ . Это обуславливает для  $P_d(t, \rho_1, \dots, \rho_d)$  отцепление зависимости от  $\rho_d$  в виде некоторого стационарного распределения  $P_{st}(\rho_d)$ , см. (A3, A4).

Авторы обобщают свои результаты, полученные в модели Крайчна на (1.51), на случай конечного короткого времени корреляции шума  $\hat{\sigma}(t)$ . Его характерный масштаб  $\tau$  следует сравнивать с безразмерной конструкцией  $\lambda\tau \ll 1$  на основе оценок для Ляпуновских экспонент ( $\lambda \sim D$ ). Уравнения динамики параметров спектрального разложения (1.55) при разделении показателей степени на  $t \gg D^{-1}$  ( $D$  по-прежнему обозначает характерную мощность шума),  $\rho_1 \gg \dots \gg \rho_d$ , приближенно сводятся к системе:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_i &\approx \tilde{\sigma}_{ii} + \frac{\kappa}{2} e^{-2\rho_i}, \quad \tilde{\sigma} = R \hat{\sigma} R^T, \\ \partial_t R &= \hat{\Omega} R, \quad \Omega_{ik} \approx \begin{cases} \tilde{\sigma}_{ki}, & i < k \\ -\tilde{\sigma}_{ik}, & i > k \end{cases} \end{aligned} \quad (1.60)$$

Для динамики без влияния диффузии поведение показателей согласно  $\dot{\rho}_i = \tilde{\sigma}_{ii}$  (на поздних временах  $t \gg t_\kappa$  не рассматриваем последнее случайное число  $\rho_d$ ) определяется отдельной компонентой модифицированного случайного шума  $\tilde{\sigma}_{ii}$ . Для  $t \gg \tau$  вклад  $\int_0^t dt' \tilde{\sigma}_{ii}$  в  $\rho_i(t)$  можно разбить на совокупность из  $n = t/\tau \gg 1$  интегралов по отдельному промежутку времени  $\tau$  и рассматривать их как сумму большого числа независимых одинаково распределенных случайных величин. Тогда на временах много больше времени корреляции можно ожидать выхода распределения на формулу, обобщающую результат (1.59). Однако гауссово распределение описывает лишь основную часть наиболее вероятных событий, оставляя редкие события за пределами своей области применимости. Их учет в рамках теории больших отклонений [1; 110; 111] приводит к асимптотической форме в виде  $P \sim t^{-1/2} e^{-tS}$  для PDF. В ней квадратичный показатель гауссова распределения, например, для  $P_2$  в (1.59), заменяется на выражение  $tS(\rho_1/t - \lambda_1)$ , где  $S$  называется функцией Крамера (или функцией отклонений). Функция  $S(x)$  обладает следующими свойствами: она выпукла, положительна, ее минимум  $S(\bar{x}) = 0$  реализуется в точке  $\bar{x}$ , соответствующей математическому ожиданию случайной величины, а разложение в его окрестности воспроизводит гауссово тело функции распределения. Тем самым, выражение обобщает результат центральной предельной теоремы на случай больших отклонений  $(x - \bar{x})$ .

Обобщение (1.59) для невязкой асимптотики на случай корреляций во времени при  $D^{-1}, \tau \ll t \ll t_\kappa$  было описано выше. Значения Ляпуновских экспонент в них отличаются от (1.58) в модели с белым шумом. Асимптотика на временах  $t \gg D^{-1} \ln(DL^2/\kappa)$  диффузионной эволюции для двумерного случая:

$$\mathcal{P}_2(t, \rho_1, \rho_2) \propto \exp \left[ -t S_2 \left( \frac{\rho_1 - \lambda_1 t}{t} \right) \right] \mathcal{P}_{st}(\rho_2). \quad (1.61)$$

Ответ в трехмерном случае должен учитывать по отдельности возможный знак Ляпуновской экспоненты  $\lambda_2$ : в случае двух отрицательных  $\lambda_{2,3}$ , на диффузионных временах замораживается статистика как  $\rho_3$ , так и  $\rho_2$ :

$$\mathcal{P}_3(t, \rho_1, \rho_2, \rho_3) \propto \begin{cases} \exp \left[ -t S_3 \left( \frac{\rho_1 - \lambda_1 t}{t}, \frac{\rho_2 - \lambda_2 t}{t} \right) \right] \mathcal{P}_{st}(\rho_3), & \lambda_2 > 0, \\ \exp \left[ -t \tilde{S}_3 \left( \frac{\rho_1 - \lambda_1 t}{t} \right) \right] \tilde{\mathcal{P}}_{st}(\rho_2, \rho_3), & \lambda_2 < 0. \end{cases} \quad (1.62)$$

Используя найденные результаты для тензора  $I$ , можно перейти к описанию статистики пассивного скаляра  $\theta$ . Для задачи распада (см. также [104]) авторы рассматривают начальное условие для  $\theta(t, \mathbf{r})$  в форме пространственно однородного случайного ансамбля флуктуаций скаляра с гауссовым профилем парной корреляционной функции. После усреднения по ансамблю начальных условий выводится выражение (3.7) для затухания со временем одноточечного момента, выражающегося через  $\det I$  для корреляционной функции. На стадии размешивания течением при  $t \lesssim t_\kappa$  он сохраняется в силу соотношения  $\sum \rho_i = 0$  (условие несжимаемости течения, см. (1.52)). Затухание начинается на временах  $t \gg t_\kappa$  после того, как вступает в силу диффузионное перемешивание; оно будет экспоненциальным и характеризуется декрементом  $\gamma(\alpha)$ :

$$\langle |\theta|^\alpha \rangle \propto \langle (\det I)^{-\alpha/4} \rangle = \int d^d \boldsymbol{\rho} \exp \left[ -\frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^d \rho_i \right] \mathcal{P}_d(t, \boldsymbol{\rho}) \sim e^{-\gamma(\alpha)t}, \quad t \gg t_\kappa. \quad (1.63)$$

На больших временах выражение берется в перевальном приближении при условии, что точка перевала попадает в область интегрирования. Так, для двумерного случая интеграл одномерный по  $\int d\rho_1$ , и уравнение на седловую точку приводит к ее линейному росту со временем  $\rho_1^* \propto t$ . Декремент затухания  $\gamma(\alpha)$  определяется через преобразование Лежандра показателя экспоненты:

$$S'_2(z_*) + \frac{\alpha}{2} = 0, \quad \rho_1^* = (z_* + \lambda_1)t, \quad \gamma(\alpha) = \frac{\alpha}{2} \rho_1^* + S_2(z_*). \quad (1.64)$$

Однако при увеличении показателя степени  $\alpha$  значение  $z_*$  уменьшается, так что  $\rho_1^*$  приближается к нижней границе интегрирования. Авторы указывают ее

значение как  $\rho_1 = 0$  согласно (1.59). В случае  $\alpha > \alpha_{\text{cr}}$  интеграл (1.63) набирается на этой границе, что задает экспоненциальное затухание со временем за счет функции Крамера:  $\gamma(\alpha) = S_2(-\lambda_1)$ . Приведем выражения в явном виде для модели Крайчнана, где  $S_2$  имеет квадратичное выражение (1.59):

$$\alpha > \alpha_{\text{cr}} = -2S'(-\lambda_1) = 2; \quad (1.65)$$

$$0 < \alpha < \alpha_{\text{cr}} : \gamma(\alpha) = \frac{\alpha D}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{4}\right), \quad \alpha > \alpha_{\text{cr}} : \gamma(\alpha) = D/2.$$

Задача для трехмерного случая была подробно разобрана в Разделе ПИВ [34]. Для  $\lambda_2 < 0$  анализ качественно сводится к двумерной задаче, а в случае  $\lambda_2 \geq 0$  анализ требует рассматривать разные области для двух переменных интегрирования  $\rho_1 > \rho_2$  в (1.63). Приведем здесь результаты в рамках модели Крайчнана, где  $\lambda_2 = 0$ , для критического показателя момента и декремента затухания при  $t \gg t_\kappa$ :

$$\alpha_{\text{cr}} = -\partial_1 S_3(-\lambda_1, -\lambda_2) - \partial_2 S_3(-\lambda_1, -\lambda_2) = 4; \quad (1.66)$$

$$0 < \alpha < \alpha_{\text{cr}} : \gamma(\alpha) = \frac{3D\alpha}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{8}\right), \quad \alpha > \alpha_{\text{cr}} : \gamma(\alpha) = S_3(-\lambda_1, -\lambda_2) = 3D.$$

Остановка роста декремента  $\gamma(\alpha)$  с увеличением  $\alpha$  означает неравномерность в затухании моментов  $\langle |\theta|^\alpha \rangle$ . В частности, нормированные характеристики моментов, такие как “асимметрия” (skewness) и “эксцесс” (kurtosis) расходятся со временем. Физически это обусловлено несамоподобностью процесса перемешивания: высокие моменты определяются редкими нетипичными событиями в выборке с очень большим содержанием  $\theta(t, 0)$  (когда сгусток слабо растягивался и его не перемешивала диффузия) — с ростом показателя  $\alpha$  они вносят основной вклад, см. (1.64). Это статистическое свойство называется перемежаемостью; описанная картина является аналогом явления аномального скейлинга структурных функций  $S_p(r) \propto r^{\zeta_p}$  на инерционном интервале в трехмерной турбулентности, а именно вогнутого поведения для показателя  $\zeta_p$ , отклоняющегося от гипотезы Колмогорова  $p/3$ , см. подробнее в [1].

Для задачи с накачкой вклад возбуждения  $\phi$  в статистически стационарное распределение скаляра на больших временах набирается за конечное время  $t_*$  — по смыслу это возраст тех сгустков, чей наименьший размер как раз достигает  $r_\kappa$  к моменту наблюдения. Таким образом, каждая случайная реализация

$\hat{\sigma}(t)$  характеризуется своим параметром  $t_*$ . В Разделе IV [34] приводятся выражения в модели через (1.54):

$$\theta(0,0) \approx \int_{-t_*}^0 dt' \phi(t',0), \quad t_* = \int_{-\infty}^0 \frac{dt'}{\sqrt{\det I(t')}}. \quad (1.67)$$

У плотности распределения  $p(t_*)$  тело сосредоточено около  $|\lambda_d|^{-1} \ln \text{Pe}$  с шириной  $\sim \sqrt{\ln \text{Pe}}$ , где число Пекле  $\text{Pe} = L\sqrt{|\lambda_d|/\kappa}$ , а  $L$  масштаб корреляционной функции накачки. Хвост распределения экспоненциален:  $p(t_*) \propto e^{-ct_*}$ . Здесь проводится связь с решенной распадной задачей: по своему смыслу  $c$  совпадает с предельным значением  $\gamma(\alpha)$ , т.к.  $p(t_*)$  задает вероятность того, что сгусток к моменту  $t_*$  еще не успел затухнуть.

$$p(t_*) \propto e^{-ct_*}; \quad d=2: c = S_2(-\lambda_1), \quad d=3: c = S_3(-\lambda_1, -\lambda_2). \quad (1.68)$$

В результате были выведены асимптотики для PDF значений флуктуаций скаляра (промежуточная область неуниверсальна):

$$\mathcal{P}(\theta) \simeq \left( \frac{|\lambda_d|}{2\pi\Phi_0 \ln \text{Pe}} \right)^{1/2} \exp \left[ -\frac{|\lambda_d|\theta^2}{2\Phi_0 \ln \text{Pe}} \right], \quad \theta \ll \ln \text{Pe}$$

$$\mathcal{P}(\theta) \propto \exp \left( -\sqrt{2c/\Phi_0} |\theta| \right), \quad \theta \gg \ln \text{Pe},$$

а для коррелированной статистики течения был получен точный показатель экспоненты PDF в рамках модели Крайчнана (1.51).

Изложенная схема принадлежит семейству подходов, известных как теории лагранжевых растяжений (Lagrangian stretching theories), берущих начало в [33; 34; 56]. В ней скорость заменяется своим линейным разложением (1.49) вдоль лагранжевой траектории, а эволюция сгустка скаляра в течении определяется согласно статистике матрицы  $\hat{W}$  (1.52). После отделения вращательных степеней свободы она сводится к статистике показателей растяжения  $\rho_i$ , а вся необходимая информация о течении при этом входит в функцию Крамера  $S$ . Статистика скаляра (моменты и корреляционные функции) восстанавливается усреднением таких решений по ансамблю траекторий, то есть с весом  $\mathcal{P} \propto e^{-tS}$ .

Авторы [34] также кратко рассматривают статистику градиентов поля скаляра. Изучение корреляционных функций скаляра четвертого порядка в бэтчелоровском режиме проводилось в работах [112; 113], посвященных двумерному случаю; в работах [114; 115] оно было расширено на трехмерное течение.

В последнем случае статистика течения детально отображается в поведении четырехточечной корреляционной функции на своих угловых особенностях. У ее аналога в двумерном течении поведение на угловых особенностях обладает другими свойствами, но существенно зависит от поворота вектора  $\ell$  по матрице  $R$  в (1.55), что не рассматривалось в разобранный выше схеме. Статистика лагранжевых траекторий  $\ell(t)$  с учетом поворота по  $R$ , растяжения по  $\text{diag}(e^\varrho, e^{-\varrho})$ , а также сдвига при переносе случайным течением в  $d = 2$  была изучена в [116] в другой параметризации: разложения Ивасава [117] непосредственно для матрицы эволюции (1.52).

## Глава 2. Мелкомасштабное перемешивание пассивного скаляра

### 2.1 Введение

Перемешивание — это процесс гомогенизации скалярного поля, такого как температура или концентрация примеси, в жидкости ускоряемый посредством адвекции. Ускорение особенно эффективно в хаотических течениях, которые характеризуются нерегулярными флуктуациями скорости течения в пространстве и/или во времени. Процесс перемешивания обладает нетривиальными статистическими свойствами (см., например, [36; 103]), а в задаче о пассивном скаляре изучается предел, в котором обратной реакцией поля на течение можно пренебречь.

Наличие градиента среднего течения вызывает анизотропию, которая изменяет статистические свойства как пульсаций, так и процесса перемешивания. Степень этого изменения зависит от отношения величин градиентов в среднем течении к градиентам в турбулентной части. В случае пристеночной турбулентности [118] в трехмерном течении они одного порядка. Анизотропия течения присутствует и на малых масштабах внутри инерционного интервала вместе с сохраняющимся колмогоровским скейлингом для скорости [119]. Она порождает так называемые структуры “ramp-cliff” типа [120] и анизотропию градиента скаляра [121] в случае числа Шмидта  $Sc = \nu/\kappa \sim 1$ , где  $\nu$  кинематическая вязкость жидкости, а  $\kappa$  коэффициент диффузии скаляра. Другой случай — предел, в котором среднее течение преобладает над турбулентными пульсациями, — реализуется при определенных условиях. Примерами таких потоков являются осесимметричное вихревое течение и пристеночное течение, у которых градиент скорости соответствует сдвиговому течению и не меняется вдоль линий тока среднего потока. К первому типу относится крупномасштабный когерентный вихрь, возникающий в двумерной турбулентности вследствие обратного каскада энергии [11; 37–39]; именно он мотивировал данное исследование. Ко второму типу относится течение раствора полимера в микроканале в режиме эластической турбулентности [61]. На основании крутых спектров кинетической энергии у обоих типов потоков [8; 62; 122] можно полагать, что флуктуации на фоне сдвигового течения в основном также являются круп-

номасштабными и, следовательно, гладкими. Подавление мелкомасштабных турбулентных пульсаций означает увеличение эффективного числа Шмидта  $Sc$  по сравнению с его номинальной оценкой  $Sc \sim \nu/\kappa \sim \eta^2/r_\kappa^2$  в режиме Бэтчелора. В его определении колмогоровский масштаб  $\eta$  следует заменить на масштаб потока  $R$ ,  $Sc \sim R^2/r_\kappa^2$  [123], где бэтчелоровский масштаб  $r_\kappa \sim \sqrt{\kappa/\lambda}$ , а  $\lambda$  — Ляпуновская экспонента потока.

В настоящей главе диссертации проводится аналитическое исследование перемешивания поля пассивного скаляра  $\theta$  в двумерном течении с пространственно гладким бездивергентным полем скорости, обладающим сильной постоянной сдвиговой компонентой и относительно слабыми флуктуациями при большом числе Шмидта  $Sc$ . Мы считаем, что эта аналитическая модель отражает локальную структуру потока когерентного вихря в двумерной турбулентности. Заметим, что теоретическое описание скорости столбового вихря во вращающейся турбулентности, возникающего при мелкомасштабной однородной накачке, сводится к такой же задаче на среднее течение, как обсуждалось ниже Рис. 1.38 после (1.3.3). Поэтому в отношении столбового вихря данную задачу можно считать “игрушечной моделью” меньшей размерности, при этом воспроизводящей характерный поток в плоскости. Интересуясь статистикой перемешивания примеси в описанных физических течениях, мы рассматриваем как распад пассивного скаляра, так и его непрерывную накачку. Обзор теории перемешивания скаляра в гладком поле скорости для изотропной турбулентности был представлен в Подразделе 1.4.2. Непрерывное статистически однородное во времени возбуждение флуктуаций пассивного скаляра приводит к статистически стационарному состоянию при условии, что статистика случайного течения также однородна во времени [35; 123]. В пределе больших чисел Шмидта каскад пассивного скаляра формирует бэтчелоровский спектр (1.48) в широком диапазоне от колмогоровского масштаба вплоть до бэтчелоровского [30]. Анизотропный случай переноса-диффузии скаляра в постоянном сдвиговом течении, при котором адвекция становится детерминированной, рассматривался в работе [124]. Задача перемешивания скаляра, когда на сдвиговое течение накладывалась случайная компонента, изучалась численно в работе [60] в рамках модели Крайчнана.

Глава 2 основана на материалах **работ** соискателя, опубликованных в журналах ВАК: [125; 126].

Оставшаяся часть главы организована следующим образом. В Разделе 2.2 обсуждаются общие свойства динамики пассивного скаляра, после чего в Разделе 2.3 изучается статистика лагранжевых траекторий, описывающая перемешивание без диффузии. Ряд аналитических результатов получен в рамках модели, в которой случайное течение коротко коррелировано во времени. Затем мы включаем в рассмотрение диффузионные эффекты и исследуем моменты и корреляционные функции пассивного скаляра. Задача о распаде анализируется в Разделе 2.4, где эволюция пассивного скаляра запускается с начального распределения в виде ансамбля осесимметричных клякс. Ключевым элементом исследования статистики пассивного скаляра является усреднение по статистике течения. Поскольку предполагается, что корреляционная длина случайного течения много больше размеров клякс, оно действует согласованно на их множество. Это приводит к существенно негауссовым статистическим свойствам пассивного скаляра, которые изучаются в настоящей работе. Непрерывная накачка скаляра рассматривается в Разделе 2.5; в нашей модели она реализуется путем внесения в систему новых статистически независимых клякс внешним источником, после чего каждая из них эволюционирует так же, как в задаче о распаде. Кроме того, здесь мы анализируем зависимость пространственных корреляционных функций от расстояния между точками. Некоторые технические детали вынесены в Приложения А, Б.

## 2.2 Модель случайного течения с сильным сдвигом

В этом разделе мы вводим базовые соотношения, необходимые для исследования статистики пассивного скаляра. Мы рассматриваем скалярное поле  $\theta(t, \mathbf{r})$ , переносимое двумерным течением несжимаемой жидкости и одновременно испытывающее диффузию и подпитываемое внешним источником (накачкой). Уравнение, управляющее динамикой пассивного скаляра в плоскости, имеет вид

$$\partial_t \theta + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \theta = \kappa \nabla^2 \theta + f, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{v}$  скорость течения,  $f$  внешний источник скаляра,  $\kappa$  его коэффициент молекулярной диффузии. Накачка  $f$  полагается стохастической величиной с

характерным пространственным масштабом  $L$ . Мы предполагаем, что диффузия на масштабе  $L$  значительно меньше не только влияния постоянной части скорости, но и слабее эффекта ускорения размешивания, вызванного случайной частью скорости. Флуктуации течения считаются малыми по сравнению со средним течением; критерии сформулированы ниже, см. (2.6) и (2.48). В пределе слабой диффузии имеет смысл начать рассмотрение отдельно с эволюции пассивного скаляра в ее отсутствие. Тогда его решение может быть записано в терминах лагранжевых траекторий  $\mathbf{X}(t)$ , подчиняющихся уравнению  $\partial_t \mathbf{X}(t) = \mathbf{v}(t, \mathbf{X}(t))$ . Решение бездиффузионного уравнения (2.1) с начальным условием  $\theta_0(\mathbf{r})$  при  $t = 0$  имеет вид, определяющийся лагранжевой траекторией, которая проходит через точку  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$ :

$$\begin{aligned} \theta(t, \mathbf{r}) &= \theta[0, \mathbf{X}(0)] + \int_0^t dt_1 f[t_1, \mathbf{X}(t_1)]; \\ \dot{\mathbf{X}}(t_1) &= \mathbf{v}(t_1, \mathbf{X}(t_1)), \quad \mathbf{X}(t) = \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Далее в работе мы рассматриваем случай, когда поле скоростей  $\mathbf{v}$  является гладким и его можно линеаризовать разложением Тейлора с радиусом сходимости, превышающим все масштабы, характеризующие эволюцию пассивного скаляра. Рассмотрим статистические свойства для разности  $\boldsymbol{\ell} = \delta \mathbf{X}$  между двумя лагранжевыми траекториями. Нас интересует эволюция PDF для  $\boldsymbol{\ell}$  со временем при заданном начальном распределении. Если в начале распределение скаляра представляет собой ансамбль из клякс с однородной и изотропной пространственной статистикой, PDF можно рассматривать как вероятность того, что начальная и конечная точки  $\boldsymbol{\ell}$  попадут внутрь одной кляксы. Векторы  $\boldsymbol{\ell}$  и  $-\boldsymbol{\ell}$  в этом смысле эквивалентны для описания пространственного распределения скаляра, поэтому  $\boldsymbol{\ell}/\ell$  можно называть директором.

Детерминированный вклад  $\mathbf{U}$  в поле скорости  $\mathbf{v}$  полагается постоянным сдвиговым течением. Двигаясь в потоке вместе с лагранжевой частицей, запишем уравнения динамики скаляра и вектора  $\boldsymbol{\ell}$  в развернутом виде. Выберем оси  $Oxy$  системы отсчета так, чтобы скорость сдвигового течения имела вид  $U_x = \Sigma y$ , где  $\Sigma$  — сдвиговый темп течения (для определенности считаем положительным). В нашем случае уравнения (1.49, 1.50) обобщаются следующим образом:

$$\partial_t \theta + \Sigma y \partial_x \theta + \hat{\sigma} \mathbf{r} \cdot \nabla \theta - \kappa \nabla^2 \theta = f; \quad (2.3)$$

$$\partial_t \ell_x = \Sigma \ell_y + \ell_x \sigma_{xx} + \ell_y \sigma_{xy}, \quad \partial_t \ell_y = \ell_x \sigma_{yx} + \ell_y \sigma_{yy}, \quad (2.4)$$

где  $\sigma_{ik} = \partial_k u_i$  — градиенты флуктуирующей части скорости  $\mathbf{u}$ . Статистические свойства  $\mathbf{u}$  предполагаются однородными во времени и в пространстве. Градиенты скорости в уравнении (2.4) являются случайными функциями времени, которые определяются структурой  $\mathbf{u}$  в окрестности близких лагранжевых траекторий. Условие несжимаемости течения приводит к тому, что матрица градиентов бесследовая:  $\sigma_{xx} = -\sigma_{yy}$ .

Флуктуирующая часть скорости  $\mathbf{u}$  предполагается относительно слабой. Для характеристики ее малости вводится тензор

$$D_{ijkl} = \int_0^\infty dt' \langle \sigma_{ij}(t+t') \sigma_{kl}(t') \rangle, \quad (2.5)$$

Здесь угловые скобки обозначают усреднение по статистике случайного течения  $\mathbf{u}$ . В эксперименте усреднение следует проводить по области, в которой статистика скорости пространственно однородна, и/или по реализациям в серии экспериментальных запусков.

Все элементы тензора  $D$  предполагаются одного порядка и много меньше  $\Sigma$ . Как будет показано ниже, единственный интересующий нас элемент — это  $D = D_{yxyx}$ , обусловленный  $\sigma_{yx}(t) = \partial_x u_y$ , в силу анизотропии от сдвигового течения. Слабость случайного течения по сравнению со сдвиговым течением означает

$$D \ll \Sigma. \quad (2.6)$$

У вектора  $\ell$  специфическая динамика (2.4) из-за флуктуаций скорости [127]. Главным членом в правой части уравнения на  $\partial_t \ell_x$  является  $\Sigma \ell_y$ . Поэтому, если  $\ell_y > 0$ , то  $\ell_x$  растет в сторону положительных значений. Однако если  $\ell_y$  становится отрицательным,  $\ell_x$  начинает убывать, затем меняет знак и растет в сторону отрицательных значений. Этот процесс, при котором  $\ell_x$  резко меняет знак, мы будем называть проворотом (“tumbling”). В динамике, содержащей только постоянный сдвиг  $\Sigma$ , точное выстраивание  $\ell_x$  вдоль линии тока представляет собой неустойчивую стационарную точку для направления вектора. Флуктуации скорости  $\hat{\sigma}$  (главном образом, именно компоненты  $\sigma_{yx}(t)$ ) делают возможными провороты за счет изменения знака  $\ell_y$ . Повороты происходят апериодически с характерным временем  $D^{-1/3} \Sigma^{-2/3}$ .

В промежутке между проворотами  $\ell_x \gg \ell_y$ . Оценка отношения  $\ell_y/\ell_x \sim \psi_* = (D/\Sigma)^{1/3} \ll 1$  представляет собой характерный угол между директором и линиями тока. Однако при каждом провороте  $\ell_x$  уменьшается в несколько раз.

Чтобы не вдаваться в детальное описание проворотов, воспользуемся следующей параметризацией вектора  $\ell$

$$(D/\Sigma)^{1/3}\ell_x = l_0 \exp \varrho \cos \phi, \quad \ell_y = l_0 \exp \varrho \sin \phi, \quad (2.7)$$

где константа  $l_0$  определяется начальным значением  $\ell$ . После перемасштабирования неравенство  $(D/\Sigma)^{1/3}\ell_x \lesssim \ell_y$  выполняется большую часть времени, так что величина  $\varrho$  не испытывает резких скачков в отличие от  $\ell_x$ . Угол  $\phi + \pi$  соответствует инверсии вектора  $\ell$ , так что эквивалентен  $\phi$ , поэтому достаточно рассматривать угол на интервале  $-\pi/2 < \phi < \pi/2$  и функции от него (например, PDF) как периодические с периодом  $\pi$ .

Подставляя выражения (2.7) в уравнения (2.4), при условии слабости шума  $D_{ijkl} \ll \Sigma$  мы заключаем, что единственной значимой составляющей градиентов случайной скорости является  $\partial_x u_y$ ; см. также (2.14, 2.15). Таким образом, мы приходим к стохастической системе:

$$\partial_\tau \varrho = (1 + \zeta) \cos \phi \sin \phi, \quad (2.8)$$

$$\partial_\tau \phi = \zeta \cos^2 \phi - \sin^2 \phi, \quad (2.9)$$

где  $\zeta(\tau) = \Sigma^{-1/3} D^{-2/3} \partial_x u_y$ , и введено безразмерное время

$$\tau = \Sigma^{2/3} D^{1/3} t. \quad (2.10)$$

В работах [128; 129] использовалась другая, “естественная” параметризация вектора  $\ell$ :

$$\ell_x = l_0 \exp \rho \cos \varphi, \quad \ell_y = l_0 \exp \rho \sin \varphi, \quad (2.11)$$

для которой были получены аналитические результаты по динамике углов и экспоненты Ляпунова. Она может быть более удобной для анализа экспериментальных данных; см., например, опыт [130]. Введя обозначение  $\psi_* = (D/\Sigma)^{1/3}$  для характерного угла  $\varphi$ , кратко покажем, как соотносятся наши подходы. Углы  $\phi$  и  $\varphi$  связаны друг с другом соотношением

$$\sin \phi = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{(\psi_* \cos \varphi)^2 + (\sin \varphi)^2}}, \quad \cos \phi = \frac{\psi_* \cos \varphi}{\sqrt{(\psi_* \cos \varphi)^2 + (\sin \varphi)^2}}. \quad (2.12)$$

Преобразование не двигает точки  $\pi n/2$ , где  $n$  — целое число. В частности, это означает, что средняя частота проворотов в терминах этих углов (2.12) одинакова. Показатели степени  $\varrho$  и  $\rho$  отличаются на функцию, которую можно

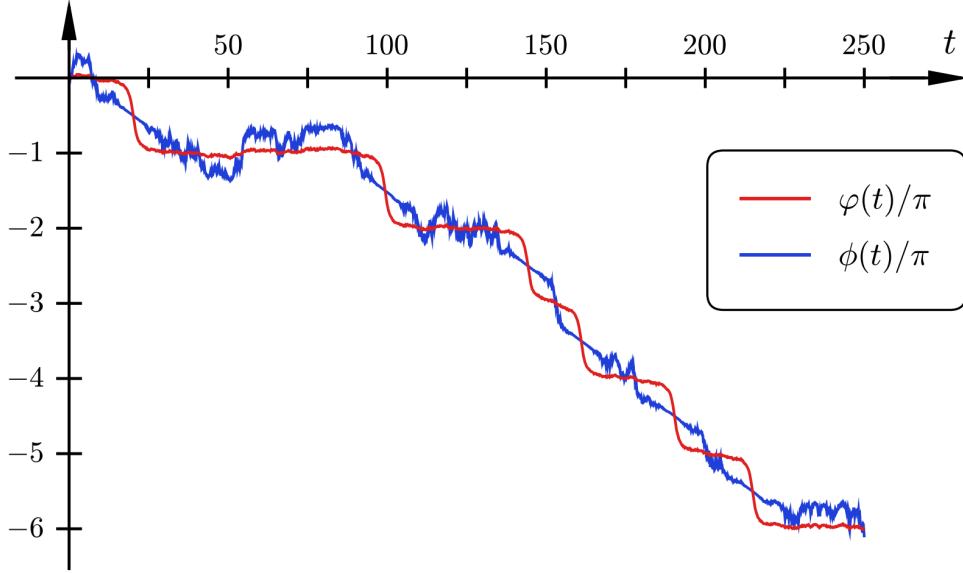


Рисунок 2.1 — Примеры реализации ланжевендовской динамики углов и проворты для  $\varphi(t)$ . Параметры:  $\Sigma = 1$ ,  $D = 10^{-3}$ , так что  $\psi_* = 0.1$ ; шаг по времени при решении стохастического уравнения  $\Delta t = 0.1$ .

ограничить константой:

$$\rho = \varrho + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\cos^2 \phi}{\psi_*^2} + \sin^2 \phi \right), \quad (2.13)$$

что означает их линейный рост со временем для типичной флуктуации происходит с одинаковой скоростью. Полные динамические уравнения (2.4), записанные в терминах  $\rho$  и  $\varphi$ , имеют вид:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho &= \frac{\Sigma + \partial_y u_x + \partial_x u_y}{2} \sin(2\varphi) + \partial_x u_x \cos(2\varphi), \\ \partial_t \varphi &= -(\Sigma + \partial_y u_x) (\sin \varphi)^2 + \partial_x u_y (\cos \varphi)^2 - \partial_x u_x \sin(2\varphi). \end{aligned} \quad (2.14)$$

В пределе (2.6) доминирующего сдвига над флуктуациями мы пренебрегаем членами  $\partial_i u_j$ , которые стоят в сумме вместе с  $\Sigma$ . Далее, исходя из оценки для шума (2.5) и малого угла  $\sin \varphi \sim \psi_* \ll 1$ , мы пренебрегаем последними членами в уравнениях выше. Тем самым мы приходим к системе уравнений с единственной компонентой шума  $\partial_x u_y$ :

$$\partial_t \rho = \frac{\Sigma}{2} \sin(2\varphi), \quad \partial_t \varphi = -\Sigma (\sin \varphi)^2 + \partial_x u_y (\cos \varphi)^2. \quad (2.15)$$

Если в (2.14) оставить только одну флуктуацию  $\partial_x u_y$ , то после перемасштабирования (2.7) и (2.10) система сводится к модели (2.8–2.9) с шумом  $\zeta(\tau)$  единичной интенсивности:  $\int_0^\infty d\tau \langle \zeta(0) \zeta(\tau) \rangle = 1$ . На Рис. 2.1 представлены типичные реализации случайной динамики для углов  $\phi(t), \varphi(t)$ , связанные между

собой согласно (2.12). График  $\varphi(t)$  — решение (2.14) с единственной компонентой флуктуаций  $\partial_x u_y$  (белый шум интенсивности  $D$ ), также представлено соответствующее ему поведение  $\phi(t)$  согласно (2.12). Угол  $\varphi(t)$  в естественной параметризации демонстрирует резкие провороты, быстро перепрыгивая между соседними положениями  $\sin \varphi \approx 0$ . В отличие от этих плато, угол  $\phi(t)$  демонстрирует более равномерное поведение с выраженными случайными блужданиями, которые усиливаются за счет масштабирования:  $\text{tg } \varphi = \psi_* \text{tg } \phi$ .

## 2.3 Статистика лагранжевых траекторий в сдвиговом потоке

### 2.3.1 Общие соотношения

В уравнениях (2.8–2.9) регулярные и случайные члены в правых частях сопоставимы по величине, что и послужило мотивацией для введения параметризации (2.7). Отметим, что уравнение (2.9) представляет собой замкнутое стохастическое уравнение для угла  $\phi$ , что является следствием линейности уравнений (2.4) по  $\ell_i$ . Поэтому статистические характеристики угла  $\phi$  можно исследовать независимо. Величина  $\rho$  в среднем растет со временем. Рост может быть охарактеризован безразмерной экспонентой Ляпунова  $\lambda = \langle \dot{\rho} \rangle$ ; размерная экспонента Ляпунова равна  $\lambda = (D\Sigma^2)^{1/3} \lambda$ . Согласно (2.13),  $\langle \dot{\rho}(t) \rangle = \langle \dot{\rho}(t) \rangle = \lambda$ , так что обеим параметризациям соответствует одинаковый инкремент. Можно также ввести  $\omega = -\langle \partial_\tau \phi \rangle$  безразмерную частоту процессов проворота, так что при большом  $t$  провороты происходят в системе в среднем  $\Sigma^{2/3} D^{1/3} \omega t / \pi$  раз. Значения обеих величин,  $\lambda$  и  $\omega$ , порядка единицы.

Общая структура стохастических уравнений (2.8) и (2.9) позволяет найти соотношение для редуцированной функции плотности вероятности  $\varrho$ ,  $\Pi(\varrho)$ , если статистика  $\zeta(\tau)$  не меняется при инверсии во времени. Это свойство предполагается и далее. Тогда, подразумевая, что в начале при  $\tau = 0$  угол  $\phi$  фиксирован и  $\varrho = 0$ , можно связать значения  $\Pi(\varrho)$  при разных знаках соотношением:

$$\Pi(-\varrho) = \exp(-2\varrho)\Pi(\varrho). \quad (2.16)$$

В Приложении А приводится доказательство соотношения. Отметим, что данная формула является выражением флуктуационной теоремы [131; 132].

Асимптотически при  $\tau \rightarrow +\infty$  функция плотности вероятности  $P(\phi)$  на интервале  $|\phi| \leq \pi$  выходит на стационарное распределение, если  $\zeta(\tau)$  обладает статистическими свойствами, однородными во времени. Что касается PDF  $\Pi(\varrho)$ , то она не становится стационарной на больших временах  $\tau$ , поскольку в среднем  $\varrho$  растет. Вместо этого, в соответствии с теорией больших уклонений [110; 111], при  $\tau \gg 1$

$$\Pi(\varrho) \propto \exp[-\tau S(\varrho/\tau)], \quad (2.17)$$

где  $S(\xi)$  — функция Крамера (или энтропийная функция). Она выпукла и имеет минимум при  $\xi = \lambda$ , что отвечает наиболее вероятной реализации  $\varrho = \lambda\tau = \lambda t$ , а значит

$$S'(\lambda) = 0, \quad (2.18)$$

Нормировка в (2.17) определяется малой окрестностью точки минимума. Мы полагаем, что  $S(\lambda) = 0$ . Тогда выражение PDF на больших временах принимает вид

$$\Pi(\varrho) = \sqrt{\frac{S''(\lambda)}{2\pi\tau}} \exp[-\tau S(\varrho/\tau)]. \quad (2.19)$$

С точки зрения естественной параметризации (2.11) подобный результат для редуцированной PDF  $\Pi(\rho)$  ожидается исходя из наглядного рассуждения. Согласно огрубленной системе (2.15) ланжевеновская динамика  $\rho$  определяется только случайным процессом  $\varphi(t)$ , который на больших временах  $t \gg (D\Sigma^2)^{-1/3}$  сводится к совокупности случайных актов проворота угла. Большое число отдельных проворотов  $\varphi(t)$ , за счет которых растет в среднем  $\rho(t)$ , служит отправной точкой для применения теории больших уклонений.

Общая симметрия (2.16) приводит к соотношению для асимптотики (2.17):

$$S(-\xi) = S(\xi) + 2\xi. \quad (2.20)$$

Его дифференцирование дает равенство, из которого определяется значение производной функции Крамера в точках  $\xi = -\lambda, 0$ :

$$S'(-\xi) = -S'(\xi) - 2 \quad \Rightarrow \quad S'(0) = -1, \quad S'(-\lambda) = -2. \quad (2.21)$$

Вместе с  $\Pi(\varrho)$  мы также будем рассматривать ее преобразование Фурье:

$$\tilde{\Pi}(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} d\varrho \exp(-\eta\varrho) \Pi(\varrho). \quad (2.22)$$

Мы трактуем параметр  $\eta$  как произвольное комплексное число (в области сходимости интеграла из определения) в отличие от стандартного преобразования Фурье, в котором  $\eta$  мнимое. В пределе  $\tau \gg 1$  можно воспользоваться выражением (2.17), и интеграл (2.22) берется методом перевала. В результате находим

$$\tilde{\Pi}(\eta) \propto \exp[-\gamma(\eta)\tau], \quad (2.23)$$

где функция  $\gamma(\eta)$  связана с функцией Крамера  $S(\xi)$  преобразованием Лежандра:

$$S = \gamma - \eta\xi, \quad (2.24)$$

$$\partial_\eta \gamma = \xi, \quad \partial_\xi S = -\eta. \quad (2.25)$$

Решения уравнений (2.24, 2.25) отвечают вещественным  $\eta$ . Принимая во внимание соотношение (2.20), приходим к эквивалентному утверждению для  $\gamma$ :

$$\gamma(\eta) = \gamma(2 - \eta). \quad (2.26)$$

Такая симметрия была получена, например, в работе [133] для модели гладкого течения без средней компоненты в периодической системе.

Безразмерная экспонента Ляпунова  $\lambda$  равна координате  $\xi = \varrho/\tau$  минимума функции Крамера  $S(\xi)$ . Как следует из уравнения (2.25), минимум  $S$  соответствует значению  $\eta = 0$ , а значит

$$\lambda = \partial_\eta \gamma(0). \quad (2.27)$$

Поскольку  $\gamma$  инвариантна относительно преобразования  $\eta \rightarrow 2 - \eta$ , ее производная в  $\eta = 1$  равна нулю:  $\gamma'(1) = 0$ . Аналогично с помощью (2.25) заключаем, что точка  $\eta = 1$  ( $\varrho = \lambda\tau$ ) отвечает значению  $\xi = 0$ .

### 2.3.2 Модель с белым шумом

Для демонстрации основных особенностей статистики лагранжевых траекторий рассмотрим модель, в которой случайное течение является коротко

коррелированным во времени. Такая модель позволяет получить ряд аналитических результатов [129]. В терминах нашей параметризации (2.7) модель определяется парной корреляционной функцией

$$\langle \zeta(\tau_1) \zeta(\tau_2) \rangle = 2\delta(\tau_1 - \tau_2), \quad (2.28)$$

где множитель в правой части согласуется с (2.5) при переходе к безразмерному времени  $\tau$ .

Из уравнений динамики следует, что безразмерная экспонента Ляпунова и безразмерная частота проворотов (см. ниже (2.10)) равны

$$\lambda = \langle \partial_\tau \varrho \rangle = \langle \cos \phi \sin \phi + \cos(2\phi) \cos^2 \phi \rangle, \quad (2.29)$$

$$\omega = -\langle \partial_\tau \phi \rangle = \langle \sin^2 \phi + \sin(2\phi) \cos^2 \phi \rangle. \quad (2.30)$$

Первая пара слагаемых в угловых скобках отвечает детерминированным членам в динамике согласно (2.8–2.9), в то время как вторая пара слагаемых отвечает членам с шумом  $\zeta(\tau)$ . Чтобы определить их, нужно найти приращения для  $\varrho, \phi$  за малое время  $\Delta\tau$ , вызванные флуктуациями  $\zeta$ , а затем усреднить произведения  $\zeta$  в них по статистике (2.28). В результате величины (2.29–2.30) выражаются через статистику угла  $\phi$  и могут быть рассчитаны независимо от статистики  $\varrho$ .

Уравнения Ланжевена (2.8–2.9) в случае статистики белого шума (2.28) для случайной величины  $\zeta(\tau)$ , позволяют вывести уравнения Фоккера–Планка как для PDF переменной  $\phi$ , так и для совместной PDF переменных  $\varrho, \phi$ . Ниже мы приводим соответствующие уравнения Фоккера–Планка в соглашении Стратоновича без вывода (процедуру можно найти, например, в [134; 135]), сосредоточившись на анализе их решений.

Рассмотрим вначале уравнение Фоккера–Планка для плотности распределения вероятности отдельно по углу  $\phi$ , следующее из (2.9, 2.28):

$$\partial_\tau P = \partial_\phi (\sin^2 \phi P) + \partial_\phi [\cos^2 \phi \partial_\phi (\cos^2 \phi P)]. \quad (2.31)$$

Его необходимо дополнить условием периодичности по углу  $\phi$  и задать некоторое начальное условие. В силу эквивалентности направлений  $\ell$  и  $-\ell$  далее в задаче, см. ниже (2.2), можно ограничиться интервалом  $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$ . Для начального PDF, соответствующего фиксированному значению угла  $\phi_0$ , оно имеет вид дельта-функции  $P = \delta(\phi - \phi_0)$  (продолжаемой с периодом  $\pi$ ).

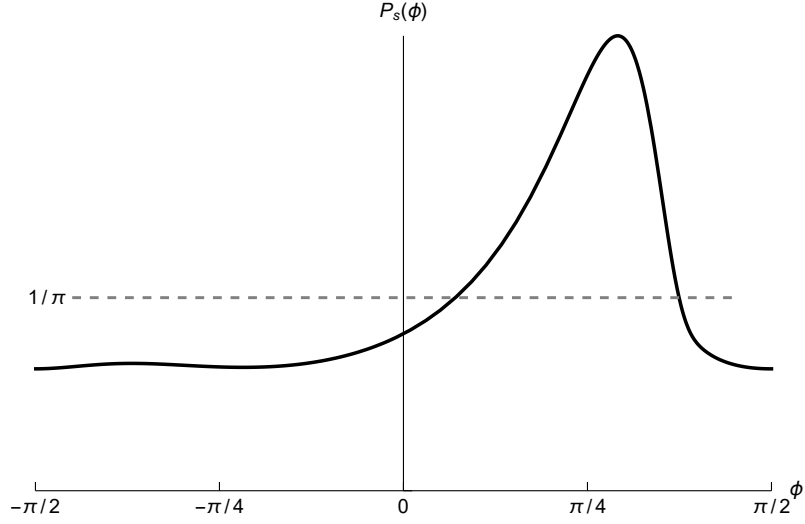


Рисунок 2.2 — Стационарная PDF  $P_s$  для угла  $\phi$  в модели белого шума (2.28).

На больших временах  $\tau \rightarrow \infty$  реализуется стационарное распределение по углу  $\phi$ . Стационарное решение  $P_s$  уравнения (2.31) имеет вид

$$P_s(\phi) = \frac{N}{\cos^2 \phi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\cos^2 \psi} e^{[(\operatorname{tg} \phi - \operatorname{tg} \psi)^3 - \operatorname{tg}^3 \phi]/3}, \quad -\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2, \quad (2.32)$$

где постоянная  $N = 3^{5/6} / [2^{1/3} \sqrt{\pi} \Gamma(1/6)]$  находится из условия нормировки  $\int d\phi P_s = 1$ . График функции  $P_s$  представлен на Рис. 2.2. Вычисляя численно средние (2.29, 2.30) как интегралы с весом  $P_s(\phi)$ , находим

$$\lambda = \frac{\pi N}{\sqrt{3}} \approx 0.36, \quad \omega = \pi N \approx 0.63. \quad (2.33)$$

Численные значения (2.33) согласуются с анализом, приведенным для естественной параметризации (2.11) в работе [129].

Далее мы переходим к изучению совместной PDF  $\mathcal{P}(\tau, \varrho, \phi)$  величин  $\varrho, \phi$  — для нее уравнение Фоккера—Планка, как следствие уравнений (2.8), (2.9) и (2.28), можно записать в компактном виде

$$\partial_\tau \mathcal{P} = \partial_\phi (\sin^2 \phi \mathcal{P}) - \partial_\varrho (\cos \phi \sin \phi \mathcal{P}) + [\partial_\phi \cos^2 \phi + \sin \phi \cos \phi \partial_\varrho]^2 \mathcal{P}, \quad (2.34)$$

где квадратные скобки  $[\dots]^2$  в правой части выражения обозначают итерированный дифференциальный оператор, действующий на  $\mathcal{P}$  справа. Редуцированная плотность распределения вероятности отдельно для переменной  $\varrho$  выражается через нее следующим образом

$$\Pi(\varrho) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\phi}{\pi} \mathcal{P}(\varrho, \phi).$$

Отметим, что из (2.34) нельзя вывести замкнутое уравнение для  $\Pi(\varrho)$ . Уравнение (2.34) однородно по  $\varrho$ ; это прямое следствие линейности исходных уравнений (2.4). Поэтому имеет смысл рассматривать уравнение для преобразования Фурье функции  $\mathcal{P}$ . Введем его образ  $\tilde{\mathcal{P}}(\eta)$  (где  $\eta$  комплексный параметр) по аналогии с уравнением (2.22):

$$\tilde{\mathcal{P}} = \int d\varrho \exp(-\eta\varrho) \mathcal{P}, \quad (2.35)$$

Анализ функции  $\mathcal{P}$  можно найти в Приложении Б. В нем напрямую проверяется свойство (2.26) и задается функция  $\gamma(\eta)$  из уравнения (2.23).

Функцию  $\gamma(\eta)$  можно вычислить численно. Можно убедиться, что значение  $\lambda$ , рассчитанное по формуле (2.27), совпадает со значением формулы (2.33). Переходя от расчета  $\gamma(\eta)$  в Приложении Б к  $S(\xi)$  по формулам преобразования Лежандра (2.24, 2.25), находим разложение функции Крамера  $S(\xi)$  около минимума  $\xi = \lambda$ :

$$S''(\lambda) \approx 2.46, \quad S'''(\lambda) \approx -1.56. \quad (2.36)$$

Эти значения позволяют описать тело редуцированной плотности распределения  $\Pi(\varrho)$  и найти множитель перед экспонентой в (2.19).

## 2.4 Распад скаляра

Переходим к изучению статистики пассивного скаляра. Мы начинаем рассмотрение с его динамики в задаче распада, которая описывается основным уравнением (2.3) при  $f = 0$ . Нас интересует эволюция корреляционных функций пассивного скаляра  $\theta$ , полученных путем усреднения по статистике случайного течения. Статистические свойства  $\theta$  на больших временах  $\tau \gg 1$ , см. (2.10) оказываются существенно негауссовыми; мы устанавливаем некоторые особенности этой статистики.

Далее мы рассматриваем величины, получаемые усреднением по ансамблю реализаций начальных распределений  $\theta(0, \mathbf{r})$ . Каждую из них мы трактуем как совокупность клякс скалярных флуктуаций подобной формы, помещенных в течение при  $\tau = 0$  с сохранением нулевого суммарного количества скаляра. В пределе их высокой концентрации, то есть при перекрытии многих

клякс в каждой точке, значение  $\theta(0, \mathbf{r})$  представляет собой сумму большого числа независимых величин. По этой причине считаем, что поле  $\theta(0, \mathbf{r})$  обладает гауссовой статистикой с нулевым средним [114].

Введем среднее  $\mathcal{F}(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \theta(t, \mathbf{r}_1) \theta(t, \mathbf{r}_2) \rangle_\theta$ , где нижний индекс  $\theta$  означает усреднение произведения по статистике начального распределения. Чтобы найти любую корреляционную функцию скаляра, следует взять произведение  $\theta(\mathbf{r}_1) \theta(\mathbf{r}_2) \dots$  и усреднить его сначала по начальной статистике (будем считать ее пространственно однородной), а затем по статистике случайного поля скорости. Первый шаг сводит произведение  $\theta(\mathbf{r}_1) \theta(\mathbf{r}_2) \dots$  к произведению функций  $\mathcal{F}$  с некоторым комбинаторным множителем в соответствии с теоремой Вика [134; 136]. Для второго шага необходимо установить статистические свойства  $\mathcal{F}$ ; перейдем к этой задаче.

Динамика  $\mathcal{F}(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  в общем случае (усреднение по случайной накачке от источника  $f$  будет представлять интерес далее в Разделе 2.5) подчиняется уравнению, которое следует из основного (2.1):

$$\partial_t \mathcal{F} = -[(\mathbf{v}_{(1)} \nabla_{(1)}) + (\mathbf{v}_{(2)} \nabla_{(2)})] \mathcal{F} + \kappa (\nabla_{(1)}^2 + \nabla_{(2)}^2) \mathcal{F} + \langle \theta_{(1)} f_{(2)} + \theta_{(2)} f_{(1)} \rangle. \quad (2.37)$$

Здесь индексы (1) и (2) обозначают точки  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  соответственно. Если статистика скаляра однородна в пространстве, то  $\mathcal{F}$  зависит только от  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ . Тогда сумма лапласианов сводится к  $(\nabla_{(1)}^2 + \nabla_{(2)}^2) = 2\nabla^2$ , а член, отвечающий за перенос течением, равен  $(\mathbf{v}_{(2)} - \mathbf{v}_{(1)}) \cdot \nabla$ , где дифференцирование проходит по компонентам  $\mathbf{r}$ . Далее, используя гладкость поля скоростей, мы упрощаем член переноса в уравнении и выделяем в нем явно постоянную и случайную части. Без учета последнего члена с накачкой мы приходим к однородному уравнению

$$\partial_t \mathcal{F} + \Sigma y \partial_x \mathcal{F} + \sigma_{\alpha\beta} r_\beta \partial_\alpha \mathcal{F} = 2\kappa \nabla^2 \mathcal{F}. \quad (2.38)$$

Обратим внимание, что здесь  $\mathcal{F}$  является функционалом случайных градиентов  $\sigma_{\alpha\beta} = \partial_\beta u_\alpha$ , входящих в уравнение (2.38).

В соответствии с анализом динамики лагранжевых траекторий в Разделе 2.2, мы оставляем только одну компоненту градиента  $\sigma_{yx}$ . Перейдем к перемасштабированной координате  $w = (D/\Sigma)^{1/3} x$  и безразмерному времени (2.10) — уравнение (2.38) сводится к

$$\partial_\tau \mathcal{F} + y \partial_w \mathcal{F} + \zeta w \partial_y \mathcal{F} = r_\kappa^2 \partial_y^2 \mathcal{F}, \quad (2.39)$$

где  $\zeta = \Sigma^{-1/3} D^{-2/3} \partial_x u_y$ . Здесь мы оставили главную производную  $\partial_y^2$  в лапласиане и ввели диффузионный масштаб

$$r_\kappa = (2\kappa)^{1/2} \Sigma^{-1/3} D^{-1/6}. \quad (2.40)$$

Предполагается, что бэтчелоровский масштаб  $r_\kappa$  много меньше характерных масштабов начального скалярного поля и накачки.

Будет методически удобно рассмотреть гауссову форму начального условия  $\mathcal{F}$ : такой профиль пространственного распределения, формируемый начальной статистикой, сохраняет свою форму при эволюции согласно (2.38). Пусть изначально  $\mathcal{F}(0, \mathbf{r}) = \exp(-r^2/L^2)$ , где  $L$  — характерный начальный масштаб. Тогда величина  $\mathcal{F}$  в произвольный момент времени  $\tau$  выражается как

$$\mathcal{F}(\tau, w, y) = \frac{\sqrt{\det \hat{\Lambda}}}{\sqrt{\det \hat{\Lambda}|_{\tau=0}}} \exp(-\Lambda_{\alpha\beta} b_\alpha b_\beta), \quad (2.41)$$

где  $b_\alpha = (w, y)$  — координатный вектор в перемасштабированном пространстве, а симметричная матрица  $\hat{\Lambda}$  является функцией времени, динамика которой согласована с уравнением (2.39), а интенсивность начального распределения нормирована на  $\mathcal{F}(0, 0) = 1$ . Зависящий от времени множитель перед экспонентой в (2.41) определяется на основании того что уравнение (2.39) сохраняет полный интеграл от решения  $\int d^2 \mathbf{b} \mathcal{F}$ .

Далее используется следующая параметризация матрицы  $\hat{\Lambda}$ , определяющая пространственный профиль в (2.41):

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_+^{-2} & 0 \\ 0 & L_-^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

с собственными значениями  $L_+^{-2}$ ,  $L_-^{-2}$ . Значения полуосей  $L_\pm$  эллипса, задаваемого гауссианой, можно интерпретировать как размеры кляксы скаляра в пространстве  $\mathbf{b}$ . Следовательно, коэффициент  $\sqrt{\det \hat{\Lambda}}$  в предэкспоненте (2.41) равен

$$\sqrt{\det \hat{\Lambda}} = (L_+ L_-)^{-1}, \quad (2.43)$$

то есть обратной площади, занимаемой кляксой (в пространстве  $\mathbf{b}$ ). В соответствии с (2.41–2.42), начальные условия определяются для профиля  $\mathcal{F}(0, \mathbf{r}) = \exp(-r^2/L^2)$  как:

$$\phi(0) = \pi/2, \quad L_+(0) = L, \quad L_-(0) = L_*, \quad L_* = (D/\Sigma)^{1/3} L. \quad (2.44)$$

Таким образом, изначально  $L_+ \gg L_-$ . Как будет показано далее, в типичной реализации динамики с  $\zeta(\tau)$  отношение  $L_+/L_-$  растет со временем. Будем полагать, что  $L_+ \gg L_-$  выполняется в течение всей эволюции и игнорировать очень редкие случаи, когда это отношение становится порядка единицы.

Подстановка профиля (2.41–2.42) в (2.39) приводит к ланжевенским уравнениям для угла  $\phi(\tau)$  и параметров  $L_{\pm}(\tau)$  со случайным шумом  $\zeta(\tau)$ . В пределе  $L_+ \gg L_-$  воспроизводится уравнение (2.9) для угла  $\phi$ , а уравнения для полуосей имеют вид (ср. с (1.60) для изотропной модели):

$$\partial_\tau \ln L_+ = \cos \phi \sin \phi (1 + \zeta), \quad (2.45)$$

$$\partial_\tau \ln L_- = -\cos \phi \sin \phi (1 + \zeta) + 2 \frac{r_\kappa^2}{L_-^2} \cos^2 \phi. \quad (2.46)$$

Нас интересует статистика решений этой системы на временах  $\tau \gg 1$ , когда PDF угла  $\phi$  выходит на стационарное распределение.

Уравнение (2.45) совпадает с уравнением (2.8) для  $\varrho$ . Следовательно,  $\ln(L_+/L)$  обладает теми же статистическими свойствами, что и  $\varrho$ , см. Раздел 2.3. Типичное значение  $\ln(L_+/L)$  можно оценить как  $\lambda\tau$ . Что касается величины  $L_-$ , ее статистические свойства зависят от отношения  $L_-/r_\kappa$ . Если  $L_- \gg r_\kappa$ , то последний член в (2.46) несуществен, и мы находим  $L_- = LL_*/L_+$ . Поэтому типичное  $L_-$  убывает экспоненциально со временем. Если же  $L_-$  достигает  $r_\kappa$ , см. (2.40), ее статистические свойства становятся стационарными, и справедлива оценка  $L_- \sim r_\kappa$ .

Продолжительность первой стадии (переноса, или бездиффузионной) оценивается как

$$\tau_\kappa = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{L_*}{r_\kappa} = \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{DL^2}{\kappa}. \quad (2.47)$$

Здесь мы предполагаем, что

$$DL^2/\kappa \gg 1. \quad (2.48)$$

Точнее, ниже мы предполагаем, что  $\ln(DL^2/\kappa)$  велико, то есть  $\tau_\kappa \gg 1$ . Иначе, если  $DL^2/\kappa \lesssim 1$ , процесс перемешивания определяется только сдвигом среднего течения  $\Sigma$  и молекулярной диффузией; предел  $\Sigma L^2/\kappa \gg 1$  рассматривался в [124]. Неравенство (2.48) означает, что на масштабе  $L$  влияние молекулярной диффузии слабее влияния сдвигового течения и ускорения перемешивания за счет случайной составляющей потока. Отметим, что в нашей системе предел

большого числа Пекле  $Pe = L^2/r_\kappa^2 \sim (D\Sigma^2)^{1/3}L^2/\kappa \gg 1$  не является достаточным критерием. Амплитуда (2.43) остается постоянной на стадии переноса и ведет себя как  $\propto L_+^{-1}$  на второй (диффузионной) стадии. Поскольку изначально  $L_+L_- = LL_*$ , мы делаем вывод, что  $L_+ \sim LL_*/r_\kappa$  в переходной области между стадиями, что приводит к условию на диффузионной стадии

$$\ln(L_+/L) > \lambda\tau_\kappa. \quad (2.49)$$

Стоит подчеркнуть, что член  $\partial_x u_y$ , единственный учитываемый в (2.4), вносит основной вклад в процесс размешивания. В результате совместного действия постоянного сдвига и этой случайной составляющей экспонента Ляпунова становится ненулевой. Действительно, в других моделях со случайным сдвиговым течением, в которых ненулевой является только  $x$ -компонента скорости  $v_x(t, y)$ , лагранжевы траектории с течением времени будут разбегаться только алгебраически, так что экспонента Ляпунова равна нулю в этом случае. Это касается, например, работы [137], в которой  $v_x(t, y)$  содержит случайную составляющую как по времени, так и по пространству. В рамках этой модели в работе [138] было получено ненулевое значение экспоненты Ляпунова, которое, однако, стремится к нулю с увеличением размера системы. Еще один пример — расширенная модель [139], в которой случайная составляющая учитывается только в  $\partial_z u_x$ , где  $z$  — третья координата.

### 2.4.1 Одноточечная статистика

Проанализируем моменты пассивного скаляра, представляющие собой одноточечные средние  $\langle |\theta|^{2\alpha} \rangle$ . Для нахождения моментов используем выражение

$$\langle |\theta|^{2\alpha} \rangle = C_\alpha \langle [\mathcal{F}(t, \mathbf{0})]^\alpha \rangle, \quad (2.50)$$

где  $C_\alpha = 2^\alpha \Gamma(\alpha + 1/2)/\sqrt{\pi}$ . Этот множитель следует из гауссовости начальной статистики  $\theta(0, \mathbf{r})$ . Хотя выражение (2.50) подразумевает специфическую статистику начальных значений  $\theta$ , результаты, касающиеся поведения моментов при больших временах  $\tau \gg 1$ , универсальны, поскольку определяются статистикой течения.

Подставляя выражение (2.41) с предэкспонентой согласно (2.43) в уравнение (2.50), приходим к следующему выражению для моментов:

$$\langle |\theta|^{2\alpha} \rangle = C_\alpha \langle (L_+ L_- / L L_*)^{-\alpha} \rangle. \quad (2.51)$$

Таким образом, моменты пассивного скаляра могут быть вычислены с использованием статистических свойств полуосей  $L_\pm$ , установленных выше. На стадии переноса, где  $\tau < \tau_\kappa$ , произведение  $L_+ L_-$  остается постоянным, и среднее  $\langle |\theta|^{2\alpha} \rangle$  не зависит от времени  $\tau$ . В изотропной турбулентности стадия переноса наблюдается как в экспериментах при больших числах Шмидта [59], так и в численном моделировании [57]. Визуально пространственное распределение скаляра выглядит как совокупность растянутых и сложенных клякс. И растяжение, и складывание являются результатом только размешивания течением, поэтому амплитуда скаляра в кляксе остается такой же, как и в начальный момент. Другими словами, площадь, занимаемая каждой кляксой, на стадии переноса остается неизменной.

Далее мы сосредоточимся на следующей стадии при  $\tau > \tau_\kappa$ , когда становится актуальной диффузия. Это стадия перемешивания, когда площадь, занимаемая кляксой, экспоненциально увеличивается со временем за счет растяжения вдоль наибольшей полуоси эллипса, в то время как его наименьший поперечный размер не может уменьшиться ниже диффузионного масштаба. Увеличение площади кляксы приводит к уменьшению амплитуды скаляра внутри нее. При расчете статистики необходимо также учитывать, что на диффузионной стадии количество клякс, перекрывающихся в одной точке, со временем растет. Эта стадия соответствует неравенству (2.49), которое эквивалентно  $\varrho > \lambda \tau_\kappa$ . Мы оцениваем здесь наименьший размер кляксы  $L_-$  диффузионным масштабом  $r_\kappa$ , поэтому в (2.51) отношение  $L_*/L_- \sim \exp(\lambda \tau_\kappa)$  согласно (2.47), тогда как полуось эллипса  $L_+$  определяется PDF (2.19) с  $\varrho = \ln(L_+/L)$ . Поэтому типичное значение момента зависит от  $\alpha$  и  $\tau$ . Теперь можно записать (2.51) в следующем виде

$$\langle |\theta|^{2\alpha} \rangle \sim \int_{\lambda \tau_\kappa}^{\infty} d\varrho \exp[-\alpha(\varrho - \lambda \tau_\kappa) - \tau S(\varrho/\tau)], \quad (2.52)$$

где мы опустили множители в  $\Pi(\varrho)$  и  $C_\alpha$  перед экспонентой, поскольку их зависимость от  $\alpha$ ,  $\tau$  слабая относительно экспоненциального затухания (1.63), которое будет сравниваться с результатами для изотропной теории [34].

В случае  $0 < \alpha < 1$  на достаточно больших временах интеграл для момента  $\langle |\theta|^{2\alpha} \rangle$  определяется точкой перевала, являющейся решением уравнения

$$\alpha + S'(\xi) = 0, \quad \varrho = \xi\tau. \quad (2.53)$$

Значение  $\xi$ , найденное в соответствии с уравнением (2.53), принадлежит интервалу  $0 < \xi < \lambda$ , поскольку  $S'(\lambda) = 0$  и  $S'(0) = -1$ , см. (2.21). Чтобы точка перевала находилась в пределах интегрирования, необходимо, чтобы  $\varrho > \lambda\tau_\kappa$ , то есть время  $\tau$  должно удовлетворять неравенству  $\tau > \lambda\tau_\kappa/\xi$ . Подставляя перевальное  $\varrho$  в (2.52), получим

$$\langle |\theta|^{2\alpha} \rangle \sim \exp[\alpha\lambda\tau_\kappa - \gamma(\alpha)\tau], \quad (2.54)$$

где  $\gamma(\eta)$  находится в соответствии с преобразованием Лежандра (2.24) и (2.25). Поскольку  $\xi < \lambda$ , на диффузионной стадии существует промежуточная асимптотика на временах  $\tau_\kappa < \tau < \lambda\tau_\kappa/\xi$ : в этот промежуток времени интеграл (2.52) определяется наименьшим возможным значением  $\varrho = \lambda\tau_\kappa$  при условии, что диффузия не влияет на динамику скаляра. Таким образом, мы получаем

$$\langle |\theta|^{2\alpha} \rangle \sim \exp[-\tau S(\lambda\tau_\kappa/\tau)]. \quad (2.55)$$

Отметим, что (2.55) не зависит от  $\alpha$  (с точностью до опущенного  $C_\alpha$ ), поскольку эта величина дает вероятность того, что процесс  $\varrho$  достигнет фиксированного значения  $\lambda\tau_\kappa$  ровно за время  $\tau$  и до этого момента находился на стадии переноса в динамике. Для таких реализаций скорости случайного течения амплитуда скаляра в каждой кляксе равна своему начальному значению порядка единицы.

Если  $\alpha > 1$ , то перевальная точка, определяемой уравнением (2.53), не попадает на интервал интегрирования при любом  $\tau$ . Действительно, уравнение приводит к  $\xi, \varrho < 0$ . В этой ситуации интеграл (2.52) определяется значением  $\varrho = \lambda\tau_\kappa$ , определяющим начало диффузионной стадии в динамике скаляра. Таким образом, соотношение (2.55) верно при любом времени  $\tau > \tau_\kappa$  для  $\alpha > 1$ .

Переформулируем результаты для затухания моментов в терминах одно-точечной PDF  $\mathcal{P}_\theta$ . При фиксированной реализации скорости она имеет гауссово распределение:

$$\tilde{\mathcal{P}}_\theta(\theta, \varrho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mathcal{F}(t, \mathbf{0})}} \exp\left(-\frac{\theta^2}{2\mathcal{F}(t, \mathbf{0})}\right). \quad (2.56)$$

Пока время  $\tau$  не достигло диффузионного времени  $\tau < \tau_\kappa$  для наиболее вероятных реализаций скорости  $\mathcal{F}(t, \mathbf{0}) = 1$ , так что PDF скаляра совпадает с

начальной. После этого, на временах  $\tau > \tau_\kappa$ , усреднение по статистике скорости приводит к

$$\mathcal{P}_\theta = \int_{\lambda\tau_\kappa}^{\infty} d\varrho \tilde{\mathcal{P}}_\theta(\theta, \varrho) \Pi(\varrho) \sim \frac{1}{|\theta|} \exp(-\tau S(\varrho_*/\tau)), \quad (2.57)$$

где интенсивность скаляра предполагается не превышающей характерного начального значения  $|\theta| \lesssim 1$ , а оптимальная флуктуация скорости определяется величиной  $\varrho_* = \lambda\tau_\kappa - 2 \ln |\theta|$ . Полученная PDF (2.57) соответствует (2.52) и применима для интенсивностей  $|\theta|$ , превышающих интенсивность скаляра при наиболее вероятных реализациях скорости,  $|\theta| > e^{-\lambda(\tau-\tau_\kappa)/2}$ . В этой области PDF может быть охарактеризована своей логарифмической производной  $\partial_\theta \ln \mathcal{P}_\theta = (2S'(\varrho_*/\tau) - 1)/\theta$ . На больших временах это приводит к степенной зависимости от  $|\theta|$  с показателем  $(2S'(0) - 1) = -3$  вплоть до масштаба максимально возможной амплитуды скаляра  $|\theta| \sim 1$ . Это означает, что все моменты с  $\alpha \geq \alpha_c$ ,  $\alpha_c = 1$ , определяются пиками интенсивности скаляра. Такие пиковые события отвечают нетипичным реализациям течения, в которых процесс  $\varrho$  достигает фиксированного значения  $\lambda\tau_\kappa$  ровно к моменту  $\tau$ , так что наименьший размер кляксы скаляра не подвергался воздействию молекулярной диффузии на протяжении всего времени предшествующей эволюции.

### 2.4.2 Парная корреляционная функция

Парная корреляционная функция  $F$  пассивного скаляра  $\theta$  может быть записана как среднее

$$F(t, \mathbf{r}) = \langle \mathcal{F}(t, \mathbf{r}) \rangle. \quad (2.58)$$

В модели флуктуаций течения с короткой корреляцией во времени (2.28) усреднение (2.39) по их статистике приводит к уравнению эволюции  $F$ :

$$\partial_\tau F + y \partial_w F - w^2 \partial_y^2 F = r_\kappa^2 \partial_y^2 F. \quad (2.59)$$

Введем полярные координаты в перемасштабированном пространстве:

$$w = (D/\Sigma)^{1/3} x = b \cos \psi, \quad y = b \sin \psi. \quad (2.60)$$

На расстояниях много больших  $r_\kappa$  эффектами диффузии в динамике можно пренебречь. В таком случае динамика функции  $F$  определяется только статистикой лагранжевых траекторий. Иными словами, уравнение (2.59) должно быть эквивалентно (2.34). Чтобы доказать это свойство, введем

$$F = \mathcal{P}/b^2. \quad (2.61)$$

Тогда уравнение (2.59), записанное для  $\mathcal{P}(\tau, \varrho, \phi)$ , логарифм растяжения  $\varrho = \ln b$ , а угол  $\psi$ , см. (2.60), совпадает с (2.34).

Опишем универсальные свойства парной корреляционной функции, не привязываясь к статистике в модели белого шума (2.28). Как и в уравнении (2.41), мы полагаем, что начальная статистика задает гауссово пространственное распределение  $F$ , а значит корреляционная функция сохраняет этот вид и в последующие моменты времени. Усреднение выше выполняется по статистике реализаций  $\phi, L_+, L_-$  параметров (2.42). Выражение, стоящее в экспоненте в (2.41), имеет вид:

$$\Lambda_{\alpha\beta} b_\alpha b_\beta = b^2 L_+^{-2} \cos^2(\phi - \psi) + b^2 L_-^{-2} \sin^2(\phi - \psi). \quad (2.62)$$

Если  $b \ll L_-$ , величина (2.62) много меньше единицы, и функция  $\mathcal{F}$  сводится ко второму моменту  $\theta$ , рассмотренному в Подразделе 2.4.1. Переходим к случаю  $b \gg L_-$ . Отметим, что это ограничение для  $b$  зависит от времени на стадии переноса в эволюции скаляра, а на диффузионной стадии сводится к  $b \gg r_\kappa$ .

В случае  $b \gg L_-$  величина (2.62) имеет глубокий минимум при  $\phi = \psi$ . Соответственно, в этом направлении  $\exp(-\Lambda_{\alpha\beta} b_\alpha b_\beta)$  обладает острым пиком. Поэтому усреднение по статистике  $\phi$  приводит к множителю, пропорциональному ширине пика:

$$F(\tau, b) \sim \left\langle \frac{L_\star L}{b L_+} \exp(-b^2 L_+^{-2}) \right\rangle_+, \quad (2.63)$$

как следствие (2.41), (2.43);  $L_\star$  был определен в (2.44). Примечательно, что полуось  $L_-$  выпадает из рассмотрения, и остается усреднение только по статистике  $L_+$ . Коэффициент пропорциональности в (2.63) зависит от угла  $\psi$ . Его точное значение определяется деталями PDF угла  $\phi$ , т.е. зависит от статистики флуктуаций  $\zeta$ . Поскольку мы выполнили перемасштабирование (2.7, 2.60), это распределение ожидается близким к изотропному; пример  $P_s(\phi)$  в модели с дельта-корреляцией приведен на Рис. 2.2. Далее сосредоточимся на зависимости парной корреляционной функции от длины  $b$ .

Усреднение в (2.63) можно представить в виде интеграла по  $\varrho = \ln(L_+/L)$  с весом (2.19). Из-за сильной зависимости  $\exp(-b^2 L_+^{-2})$  от  $\varrho$  эта экспонента ограничивает область интегрирования до  $\varrho > \ln(b/L)$ , так что приходим к

$$F \sim \frac{L_*}{b} \int_{\varrho_{\min}}^{\infty} d\varrho \exp[-\varrho - \tau S(\varrho/\tau)], \quad (2.64)$$

при  $b \gg L_-$ , если  $\varrho_{\min} = \max(\ln(b/L), \ln \sqrt{L_*/L})$ . Полученное выражение похоже на (2.52), что возникало для статистики моментов, и может быть проанализировано аналогичным образом. При  $\ln(b/L) < 0$  интеграл в (2.64) определяется точкой перевала  $\varrho = 0$  и согласно (2.21) находим

$$F \sim \frac{L_*}{b} \exp[-\tau S(0)], \quad b \lesssim L. \quad (2.65)$$

При  $\ln(b/L) > 0$  интеграл в (2.64) определяется допустимым минимальным значением  $\varrho_{\min} = \ln(b/L)$ , поэтому получаем

$$F \sim \frac{LL_*}{b^2} \exp\left[-\tau S\left(\frac{\ln(b/L)}{\tau}\right)\right], \quad b \gtrsim L. \quad (2.66)$$

Результат монотонно убывает с ростом  $b$ . Действительно, производная (2.66)

$$\frac{\partial \ln F}{\partial \ln(b/L)} = -2 - S'\left(\frac{\ln(b/L)}{\tau}\right)$$

отрицательна, поскольку  $S'(\xi) > -1$  при  $\xi > 0$ .

Представленный вывод основывался на условии  $b \gg L_-$ . Оно выполнено, если  $b$  намного больше начального значения (2.44):  $b \gg L_*$ . Однако если  $r_\kappa \ll b \ll L_*$ , то оптимальное значение малой полуоси  $L_- \sim b$ , что нарушает условие резкого пика при усреднении по статистике  $\phi$ , поэтому оно дает просто коэффициент порядка единицы. Поскольку  $L_- \sim b \gg r_\kappa$ , член, отвечающий за диффузию в уравнении (2.46), неважен, и заключаем

$$F \sim \exp\left[-\tau S\left(\frac{\ln(L_*/b)}{\tau}\right)\right]. \quad (2.67)$$

В ином случае  $\lambda\tau < \ln(L_*/b)$  означает  $L_- \gg b$ , что приводит нас к среднему квадрату  $F = 1$ .

Вернемся к обсуждению, следующему за (2.59): функция  $F$  не зависит от коэффициента диффузии на масштабах много больше бэтчелоровского  $r_\kappa$ , см. (2.63). Следовательно, она определяется только статистикой лагранжевых

траекторий. Там была установлена связь между совместной PDF  $\mathcal{P}$  из (2.34) и  $F$  из (2.59) в этой области:  $F \propto \mathcal{P}/b^2$ . Зависимость (2.66) согласуется с этой связью, а также с (2.65) и (2.67), если воспользоваться симметрией функции Крамера  $S(\varrho/\tau)$  (2.20), а также ее разложением около нуля.

### 2.4.3 Корреляционные функции высоких порядков

Пространственное распределение  $F$  (2.58) не отражает складывания кляксы при перемешивании пассивного скаляра. Это связано с тем, что данная функция получается в том числе усреднением по углу  $\phi(\tau)$ , что делает статистику почти изотропной. Складчатая структура может быть выявлена с помощью корреляционных функций более высокого порядка. Как показано в [115; 140], корреляционные функции пассивного скаляра высоких порядков  $F_{2n}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{2n})$  в бэтчелоровском режиме имеют острые максимумы в коллинеарной геометрии, где точки  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{2n}$  разбиты на пары с параллельными разностями. Можно считать, что складчатая структура вызвана перекрытием сильно растянутых клякс скаляра. В коллинеарной геометрии векторы каждой пары могут быть одновременно накрыты одной кляксой при усреднении по углу.

Остановимся на коллинеарной геометрии и изучим ведущий вклад в корреляционную функцию порядка  $2n$ :

$$F_{2n} = \langle \mathcal{F}(b_1, \psi) \dots \mathcal{F}(b_n, \psi) \rangle, \quad (2.68)$$

где  $\mathcal{F}$  определяются формулами (2.41), (2.43) и (2.62), а угловые скобки означают усреднение по статистике  $\phi, L_+, L_-$ .

Для определенности рассмотрим случай  $b \gg L$ , где  $b^2 = b_1^2 + \dots + b_n^2$ . Тогда вместо (2.64) получаем

$$F_{2n} \sim \int_{\ln(b/L)}^{\infty} \frac{L_*^n d\varrho}{b L_-^{n-1}} \exp[-n\varrho - \tau S(\varrho/\tau)]. \quad (2.69)$$

Основной вклад в интеграл определяется его нижним пределом, то есть  $L_+ \sim b$ . Если  $b \ll LL_*/r_\kappa$ , то получается тот же закон пропорциональности, что и в (2.66),  $F_{2n} \sim F$ , поскольку оптимальная флуктуация скорости отвечает подавленной диффузии:  $L_+ L_- = LL_*$ . Иначе, при  $b \gg LL_*/r_\kappa$ , имеем  $L_- \sim r_\kappa$  и

$$F_{2n} \sim \frac{(LL_*)^n}{r_\kappa^{n-1} b^{n+1}} \exp\left[-\tau S\left(\frac{\ln(b/L)}{\tau}\right)\right]. \quad (2.70)$$

В обоих случаях корреляционная функция  $F_{2n}$  при умеренных значениях порядка  $n$  значительно превосходит наивную оценку  $F_{2n} \gg (F(b/\sqrt{n}))^n$ .

## 2.5 Непрерывная накачка скаляра

В этом разделе будет рассмотрена задача, в которой флуктуации скалярного поля  $\theta$  возбуждаются в системе в течение длительного времени случайным источником  $f$ , см. (2.1). Если время корреляции источника много меньше, чем масштаб  $\Sigma^{-2/3}D^{-1/3}$  эволюции скаляра, накачку можно представлять как совокупность статистически независимых вкладов (клякс), что приводит к гауссовой статистике  $\theta$  до усреднения по статистике потока — так было и в случае задачи распада, см. Раздел 2.4.

По аналогии введем произведение  $\mathcal{F}(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \theta(t, \mathbf{r}_1) \theta(t, \mathbf{r}_2) \rangle_f$ , усредненное по статистике случайной накачки  $f$  при заданной реализации случайной скорости  $\mathbf{u}$ . Поскольку статистика  $\theta$  гауссова (до усреднения по течению  $\mathbf{u}$ ), любое среднее  $\langle \theta(t, \mathbf{r}_1) \dots \theta(t, \mathbf{r}_{2n}) \rangle_f$  выражается по теореме Вика через произведения  $n$  множителей  $\mathcal{F}$ .

Для определенности положим, что накачка  $f$  коротко коррелирована во времени, и ее статистика задается парной корреляционной функцией, однородной в пространстве:

$$\langle f(t_1, \mathbf{r}_1) f(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle = \delta(t_1 - t_2) \Phi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (2.71)$$

Характерный масштаб  $L$  у накачки  $\Phi$  полагается меньше, чем корреляционная длина потока, но намного больше диффузионной длины  $r_\kappa$  (2.40).

В нашей пространственно однородной задаче  $\mathcal{F}(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  является функцией только разности координат  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ , ее динамика задается неоднородной версией уравнения (2.38):

$$\partial_t \mathcal{F} + \Sigma y \partial_x \mathcal{F} + x (\partial_x u_y) \partial_y \mathcal{F} = 2\kappa \nabla^2 \mathcal{F} + \Phi(\mathbf{r}). \quad (2.72)$$

Здесь, как и ранее, мы сохраняем единственную существенную компоненту градиента случайной скорости  $\mathbf{u}$ ,  $\partial_x u_y$ . После этого произведем замену  $\nabla^2 \rightarrow \partial_y^2$  и перемасштабируем координаты и время:

$$\partial_\tau F + y \partial_w F - w^2 \partial_y^2 F = r_\kappa^2 \partial_y^2 F + \Phi. \quad (2.73)$$

Уравнение (2.73) решается тем же методом, использованным для задачи распада в Разделе 2.4. Действительно, можно взять решение (2.38) с начальным условием  $\mathcal{F}(t, \mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r})$  в предшествующий момент времени и рассмотреть его эволюцию до текущего момента — таким образом, мы получим вклад от одного момента воздействия  $\tau$ , а результат будет задаваться интегрированием по временному интервалу активности  $f$ . В терминах нашей модели каждая клякса, попадая в систему, с этого момента эволюционирует в потоке, и  $F$  есть совокупный результат от всех клякс за все время, пока они находились в системе.

Как и в случае распада, поучительно проанализировать гауссов профиль корреляционной функции накачки,  $\Phi \propto \exp(-r^2/L^2)$ . Тогда решение (2.72) в пределе больших времен имеет вид

$$\mathcal{F}(\mathbf{r}) = \int_0^\infty d\tau \frac{LL_\star}{L_+L_-} \exp(-\Lambda_{\alpha\beta} b_\alpha b_\beta), \quad (2.74)$$

где матрица  $\hat{\Lambda}$  определена формулой (2.42). Величины  $\phi, L_+, L_-$  были введены там, и в Разделе 2.4 были установлены их статистические свойства.

### 2.5.1 Одноточечная статистика

Здесь мы рассматриваем моменты пассивного скаляра, то есть одноточечные средние  $\langle |\theta|^{2\alpha} \rangle$ . Как и в случае распада, до усреднения по флуктуациям течения пассивный скаляр обладает гауссовой статистикой. Поэтому при заданном течении момент равен  $C_\alpha(\mathcal{F})^\alpha$ , где  $C_\alpha$  тот же, что и в (2.50), а  $\mathcal{F}$  — значение (2.74) в начале координат  $\mathbf{r} = 0$ . Таким образом, момент равен

$$\langle |\theta|^{2\alpha} \rangle = C_\alpha \langle (\mathcal{F})^\alpha \rangle. \quad (2.75)$$

При условии  $L_\star \gg r_\kappa$  главный вклад в одноточечное  $\mathcal{F}$  обусловлен первой стадией, на которой произведение  $L_+L_-$  остается постоянным; этот вклад пропорционален длительности  $\tau$  стадии переноса. Учитывая вероятность события, при котором  $L_-$  достигает  $r_\kappa$ , из (2.75) находим

$$\langle |\theta|^{2\alpha} \rangle \sim C_\alpha \tau^\alpha \exp \left[ -\tau S \left( \frac{\ln(L_\star/r_\kappa)}{\tau} \right) \right]. \quad (2.76)$$

Здесь время  $\tau$  является параметром, подлежащим оптимизации, аналогично подходу в работе [34, Разд. IV].

При умеренных значениях  $\alpha$  максимум выражения (2.76) достигается там, где функция Крамера  $S$  минимальна, то есть при  $\tau = \ln(L_*/r_\kappa)/\lambda$ . Это, очевидно, приводит к гауссовой одноточечной статистике  $\theta$ . В этом случае моменты (2.75) выражаются через дисперсию следующим образом:

$$\langle |\theta|^{2\alpha} \rangle = C_\alpha \langle \theta^2 \rangle^\alpha, \quad \langle \theta^2 \rangle = \frac{\Phi(0)}{\lambda} \ln(L_*/r_\kappa), \quad (2.77)$$

где  $\lambda$  — размерная экспонента Ляпунова, а  $\Phi(0)$  — скорость производства дисперсии скаляра.

Однако моменты большей степени,  $\alpha \gtrsim \ln(L_*/r_\kappa)$ , сильно отклоняются от соотношения (2.77). Оптимизируя выражение (2.76) по  $\tau$ , находим условие  $\gamma\tau = \alpha$ , где  $\gamma$  — преобразование Лежандра функции  $S$ ; см. (2.24) и (2.25). Если  $\alpha \ll \ln(L_*/r_\kappa)$ , то  $\gamma$  мала, что возвращает к гауссовой статистике (2.77). Если же  $\alpha \gg \ln(L_*/r_\kappa)$ , то  $\alpha = S(0)\tau$ , так что и  $\tau \gg \ln(L_*/r_\kappa)$ . Этот режим отвечает экспоненциальному хвосту PDF для  $\theta$ ,  $\exp(-\theta/\theta_0)$ , где  $\theta_0^2 = \Phi(0)(D\Sigma^2)^{-1/3}/S(0)$ .

### 2.5.2 Парная корреляционная функция

Переходим к рассмотрению парной корреляционной функции пассивного скаляра  $\theta$ . Как и в задаче о распаде, для нее требуется усреднение по статистике течения:  $F(t, \mathbf{r}) = \langle \mathcal{F}(t, \mathbf{r}) \rangle$ . Для достаточно большого времени притока от  $\Phi(\mathbf{r})$  в (2.73) функция  $F(\mathbf{r})$  выходит на стационар вследствие однородности статистики накачки во времени. Поэтому мы исследуем  $\langle \mathcal{F}(\mathbf{r}) \rangle$ , где  $\mathcal{F}(\mathbf{r})$  задается формулой (2.74).

При  $b \ll r_\kappa$  восстанавливается значение среднего квадрата  $\langle \theta^2 \rangle$  из (2.77). В области  $r_\kappa \ll b \ll L_*$  применимы рассуждения, использованные для вывода второго момента. Главный вклад в  $F$  дает стадия переноса, на которой произведение  $L_+L_-$  постоянно, а экспоненту в (2.74) можно заменить единицей. Этот режим завершается тогда, когда  $L_-$  сравнивается с  $b$ . Время процесса пропорционально соответствующему логарифму, и мы получаем выражение:

$$F = \frac{\Phi(0)}{\lambda} \ln(L_*/b). \quad (2.78)$$

Данный результат представляет собой аналог прямого каскада Бэтчелора флуктуаций пассивного скаляра в изотропном случае [30], записанный в координатном представлении. Он может быть получен непосредственно решением уравнения для парной корреляционной функции  $F$  в фурье-пространстве  $\mathbf{k} = (k_w, k_y)$ :

$$(\partial_\tau - k_w \partial_{k_y} - k_y^2 \partial_{k_w}^2 + r_\kappa^2 k_y^2) \tilde{F}_\mathbf{k} = \tilde{\Phi}_\mathbf{k}, \quad (2.79)$$

$$\tilde{F}_\mathbf{k}(t) = \int dw dy F(t, \mathbf{r}) \exp(-ik_w w - ik_y y). \quad (2.80)$$

Рассматривая его на инерционном интервале  $1/L_\star \ll k = \sqrt{k_w^2 + k_y^2} \ll 1/r_\kappa$ , можно пренебречь членами с диффузией и накачкой. Для задачи со сдвиговым течением имеется соответствие (симметрия) между (2.79) и уравнением (2.73) в координатном пространстве: в отсутствие диффузии однородные уравнения эквивалентны при замене  $(k_w, k_y) \rightarrow (y, -w)$ . Поэтому, с учетом связи между  $F$  из (2.63) и задачей для PDF, см. (2.61), существует стационарное решение (2.79) на инерционном интервале, соответствующее каскаду Бэтчелора:

$$\tilde{F}_\mathbf{k} = \frac{2\pi^2 \Phi(0) P_s(\phi_k)}{\lambda k^2}, \quad (2.81)$$

где  $k_y = k \cos \phi_k$ ,  $k_w = -k \sin \phi_k$ , а  $P_s$  — стационарное распределение по углу (2.32). Множитель с накачкой  $\Phi(0)$  здесь восстановлен из условия, что поток через линию  $k = \text{const}$  был равен скорости производства дисперсии скаляра. Спектр получается из него интегрированием по углу и равен  $k/(2\pi)^2 \int d\phi_k \tilde{F}_\mathbf{k} = \Phi(0)/(\lambda k)$ . Зависимость  $k^{-1}$  та же, что и в случае изотропной турбулентности (1.48), и согласуется с логарифмическим поведением (2.78) в  $\mathbf{b}$ -пространстве через обратное преобразование Фурье.

При  $b \gg L_\star$ , так что  $L_-/b \ll 1$  в любой момент времени, после усреднения по углу получается выражение, аналогичное (2.64):

$$F \sim \frac{L_\star}{b} \int_0^\infty d\tau \int_{\ln(b/L)}^\infty d\varrho \exp[-\varrho - \tau S(\varrho/\tau)]. \quad (2.82)$$

Если  $b \ll L$ , то есть  $\ln(b/L) < 0$ , интеграл по времени определяется значениями  $\tau \sim 1$ , и поэтому приближение (2.82), строго говоря, некорректно. Тем не менее можно утверждать, что в этой области  $F \sim (\Phi(0)/\lambda) L_\star/b$  благодаря усреднению по углам. Если  $\ln(b/L) > 0$ , то  $\varrho > 0$  во всей области интегрирования. Тогда интеграл по  $\tau$  в (2.82) определяется узкой окрестностью точки  $\tau = \varrho/\lambda$ ; после него интегрирование по  $\varrho$  определяется нижним пределом, и дает  $F \sim (\Phi(0)/\lambda) L L_\star/b^2$ .

### 2.5.3 Корреляционные функции высоких порядков

Далее рассмотрим корреляционные функции более высокого порядка  $F_{2n}$ . Их можно представить в виде суммы  $n(n-1)/2$  различных произведений  $F$  в соответствии с теоремой Вика [136], где каждое произведение в сумме должно быть усреднено по статистике случайного течения. Ниже мы проанализируем отдельное произведение в их сумме.

В ситуации, когда все расстояния между точками намного меньше  $L_*$ , основной вклад в усреднение произведения  $n$  множителей  $F$  связан со стадией переноса. Каждый множитель  $F$  дает коэффициент, определяемый продолжительностью периода, в течение которого произведение  $L_+L_-$  остается постоянным, и при этом не возникает подавления, связанного с усреднением по статистике угла. При умеренных значениях  $n$  эволюция  $L_-$  определяется типичными процессами:  $\ln(L_*/L_-) = \lambda\tau$ . Тогда продолжительность действия каждого множителя  $F$  пропорциональна тому же логарифму (2.78), а усреднение произведения множителей  $F$  сводится к произведению средних. Другими словами, мы приходим к гауссовой статистике при умеренном числе  $n$  сомножителей в произведении, где  $F_{2n}$  может выражаться через  $F$  в соответствии с теоремой Вика [136].

Однако если  $n$  достаточно велико, главный вклад в  $F_{2n}$  связан с редкими событиями, в которых убывание  $L_-$  происходит гораздо медленнее типичного, как это было для высоких моментов  $\theta$ . В этом случае значение  $F_{2n}$  определяется длительностью событий и нечувствительно к логарифмам от множителей  $F$  (2.78). Мы заключаем, что в этом пределе  $F_{2n}$  совпадает с моментом  $\langle \theta^{2n} \rangle$ ; см. Подраздел 2.5.1. Этот негауссов режим предполагает, что  $n$  превышает логарифмы типа (2.78) в произведении. Отметим, что этот режим может реализоваться при меньших  $n$ , чем в случае одноточечных моментов, поскольку логарифмы для корреляционных функций меньше, чем  $\ln(L_*/r_\kappa)$ .

Задача усложняется, если расстояния между точками в корреляционных функциях много больше  $L$ . Как обсуждалось ранее в Подразделе 2.4.3, корреляционные функции  $F_{2n}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{2n})$  имеют острые максимумы в коллинеарной геометрии [115; 140]. В этом случае  $F_{2n}$  определяется усреднением (2.68), где теперь  $\mathcal{F}$  определяется формулой (2.74). Усреднение по статистике угла  $\phi$ , как и в (2.69), дает дополнительный множитель  $(L_-/b) \exp(-b^2 L_+^{-2})$ ,

где  $b^2 = b_1^2 + \dots + b_n^2$ . Множитель  $\exp(-b^2 L_+^{-2})$  означает, что эффективное минимальное значение  $\varrho = \ln(L_+/L)$  равно  $\ln(b/L)$ . Основной вклад в интеграл по  $\varrho$  дает окрестность этого минимального значения. Поэтому далее можно положить  $L_+ = b$ .

Как и для парной корреляционной функции, распределение по временам, определяемое множителем  $\exp[-\tau S(\varrho/\tau)]$ , имеет пик при  $\lambda\tau = \ln(b/L)$ . Поэтому после интегрирования по временам находим

$$F_{2n} \propto \frac{1}{b^{n+1} L_-^{n-1}}. \quad (2.83)$$

Поскольку выражение (2.83) определяется типичными событиями, можно считать, что  $L_- = LL_*/b$ , если  $\lambda\tau < \ln(L_*/r_\kappa)$ , и  $L_- \sim r_\kappa$  в противном случае. Таким образом, приходим к

$$F_{2n} \propto \begin{cases} b^{-2}, & L \ll b \ll LL_*/r_\kappa, \\ b^{-n-1}, & b \gg LL_*/r_\kappa. \end{cases} \quad (2.84)$$

Найденная зависимость охватывает и парную корреляционную функцию — для случая  $n = 1$  различия между режимами (2.84) отсутствуют.

## 2.6 Заключение главы

Данная глава была посвящена исследованию статистических характеристик пассивного скаляра, таких как его моменты и корреляционные функции, при перемешивании сдвиговым потоком с добавлением относительно слабой гладкой случайной компоненты. Мы рассмотрели как задачу распада пассивного скаляра, так и задачу о его случайном возбуждении, однородном во времени.

Динамика лагранжевых траекторий в таком течении характеризуется случайными проворотами. Мы показываем, что после соответствующего перемасштабирования (2.10), (2.60) статистические свойства течения становятся схожими с характеристиками изотропного случая. Полученные результаты найдены в рамках теории лагранжевых растяжений и выражаются в терминах функции Крамера (2.17) для описания растяжения в заданном случайном потоке и применимы в области широкого размера.

Как и следовало ожидать на основании известных результатов для изотропного случая, статистические свойства пассивного скаляра и в данной задаче далеки от гауссовых. Таким образом, изучение параметров распределения пассивного скаляра не может быть сведено к анализу дисперсии и парной корреляционной функции и требует анализа моментов и корреляционных функций более высокого порядка. В случае задачи распада для изотропного турбулентного течения одноточечная статистика была установлена в [34]; до этого асимптотика (2.54) была отдельно найдена для дисперсии скаляра  $\langle \theta^2 \rangle$  в [33]. Критическое значение степени  $\alpha_c = 1$  было определено для двумерной изотропной модели Крайчнана [34]. Обратим внимание, в той работе было другое определение показателя у моментов,  $\alpha \rightarrow \alpha/2$ , см. (1.63) Раздела 1.4.2. Соответствующий алгебраический хвост  $\mathcal{P}_\theta \propto |\theta|^{-3}$ , см. обсуждение формулы (2.57), был подтвержден численным моделированием [57]. В Подразделе 2.4.1 было продемонстрировано, как результаты изотропной теории воспроизводятся в нашей задаче со сдвиговым течением, попутно расширяя результаты. В частности, значение  $\alpha_c = 1$  расширено на сдвиговое течение, где у флуктуаций не конкретизирована статистика (требуется ее инвариантность относительно обращения времени), и была получена промежуточная асимптотика (2.55) для случая  $0 < \alpha < 1$ .

В главе было показано, как из статистического анализа переноса пассивного скаляра получить информацию о статистике самого потока. В нашей работе мы установили свойства функции Крамера при некоторых общих допущениях. Найденная связь между функцией Крамера и парной корреляционной функцией  $F$ , см. обсуждение в конце Подраздела 2.4.2 о задаче распада, носит общий характер. Ее можно использовать для определения  $S$  на основе экспериментальных измерений пространственной статистики пассивного скаляра согласно (2.19), (2.61). Мы также получили численную аппроксимацию  $S$  и некоторые аналитические результаты для модели сдвигового течения с коротко коррелированными во времени флуктуациями.

Для задачи с непрерывной накачкой установившееся статистическое состояние рассматривалось как совокупность вкладов от клякс разного “возраста”, что сводится к разобранной задаче о распаде. В изучаемом течении со сдвигом получена анизотропная версия для бэтчелоровского каскада (2.81) [30], что соответствует логарифмическому поведению  $\sim \ln(L_*/b)$  на инерционном интервале  $r_\kappa \ll b \ll L_*$ , см. (2.78). За пределами масштаба накачки парная корреляцион-

ная функция переходит к степенным зависимостям. Одноточечная статистика оказывается гауссовой лишь при умеренных показателях момента; когда показатель становится сравним с указанным логарифмом размаха инерционного интервала,  $\ln(L_*/r_\kappa)$ , моменты выходят из гауссова режима, а хвост функции распределения оказывается экспоненциальным. Это находится в соответствии с результатами, полученными ранее для изотропной модели [34].

Парная корреляционная функция почти изотропна в пространстве после перемасштабирования  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{b}$ , см. обсуждение в начале Подраздела 2.4.3. Поэтому были рассмотрены корреляционные функции высокого порядка  $F_{2n}$ , для которых мы установили характеристики пространственного распределения отдельно в случае коллинеарной геометрии, где  $F_{2n}$  испытывают резкий максимум. В задаче о распаде эти максимумы значительно превышают гауссову оценку через парную корреляционную функцию  $F$ . В задаче с накачкой на малых расстояниях  $b < L_*$  статистика  $F_{2n}$  остается гауссовой при умеренном числе  $n$  сомножителей  $F$ , но перестает быть таковой с ростом  $n$ . На больших разнесениях точек  $b$  найдены степенные асимптотики для зависимости  $F_{2n}$  от  $b$ , определяемого соотношением  $b^2 = b_1^2 + \dots + b_n^2$  по совокупности разностей между парами точек.

Результаты получены в рамках теории лагранжевых растяжений, которая имеет свои границы применимости. Так, для изучения распада скаляра в эксперименте или численном моделировании существенным ограничением применимости является нехватка статистических данных для выборки. Например, асимптотика затухания моментов (2.55) определяется реализациями течений, сохраняющих размеры кляксы скаляра больше диффузионного масштаба  $r_\kappa$ . Их вероятность экспоненциально убывает со временем, так что для восстановления хвоста теоретического распределения (2.17) по измерениям требуется все большая статистическая выборка. Из-за недостаточной выборки восстановленное эмпирическое распределение на больших временах определяется на основе наиболее вероятных реализаций течения, для которых  $\varrho \approx \lambda\tau$ . Такое сужение распределения в моделировании [58] приводило к линейной зависимости декремента затухания  $\gamma(\alpha)$  при  $\alpha > \alpha_c$ , которую наблюдали авторы (вместо не зависящей от  $\alpha$  асимптотики (2.55)).

## Глава 3. Распространение инерционных волн в течении геострофического вихря

### 3.1 Введение

Вращающаяся турбулентность, для которой характерны высокие числа Рейнольдса и низкие числа Россби, демонстрирует квазидвумерное поведение. В частности, оно проявляется в геострофической составляющей потока, которая однородна вдоль оси вращения [27]. Типичным примером турбулентного геострофического потока является когерентный столбовой вихрь, обсуждавшийся в Подразделе 1.2.2 литературного обзора.

Поддержание крупномасштабного когерентного столбового вихря инерционными волнами изучалось в [52; 53; 64] в предположении, что волны возбуждаются на фоне неограниченного однородного сдвигового течения, возникающего вследствие дифференциального вращения вихря. Возбуждение осуществлялось посредством накачки, однородно распределенной по объему. Обзор этой теории взаимодействия мелкомасштабных волн с однородным сдвиговым потоком и результаты для среднего течения вихря были представлены в Разделе 1.3. Однако такая идеализированная модель непригодна, если учитывать конечный размер вихря, либо рассматривать случай локализованного в пространстве возбуждения, как это имеет место, например, в экспериментах [46; 47]. Альтернативный подход, основанный на рассмотрении волны в произвольном сдвиговом течении, был детально развит для внутренних гравитационных волн в вертикально стратифицированной жидкости с законом дисперсии  $\omega = \pm N \sin \theta_{\mathbf{k}}$ , где  $N$  — частота Брента-Вяйсяля, а  $\theta_{\mathbf{k}}$  — угол между волновым вектором  $\mathbf{k}$  и осью  $Oz$  [23]. Для внутренней гравитационной волны закон дисперсии в сочетании с эффектом Доплера, обусловленным горизонтальным течением с вертикальным сдвигом и достаточно большой скоростью, приводит к существованию горизонтального критического слоя, на котором сдвинутая относительная частота волны обращается в ноль, а ее волновое число, соответственно, стремится к бесконечности. Волна поглощается средним течением вблизи этого слоя, передавая ему свои импульс и энергию [24]. Закон дисперсии для инерционных волн аналогичен:  $\omega = 2s\Omega \cos \theta_{\mathbf{k}}$ , где  $\Omega$  — угло-

вая скорость вращения жидкости, а  $s$  — поляризация волны [15]. Он также имеет узлы — в случае, когда угол  $\theta_k$  между волновым вектором  $\mathbf{k}$  и осью вращения  $Oz$  становится равным  $\pi/2$ . Следовательно, неоднородное геострофическое течение с достаточно большой скоростью порождает для инерционной волны вертикальный критический слой с аналогичными свойствами. Недавно этот подход был распространен на инерционные волны в сферической геометрии [141; 142].

В настоящей главе мы разбираем механизм передачи момента импульса и энергии от инерционной волны осесимметричному геострофическому вихрю. Волновое уравнение на фоне течения вихря выводится для цилиндрической геометрии. Оно позволяет систематически учитывать эффекты в случае, когда длина волны и размер геострофического вихря становятся сравнимы. Затем волновое уравнение анализируется в коротковолновом пределе, что создает основу для статистической теории поддержания вихря ансамблем коротких волн, построенной в Главе 4. Там она применяется к реализации накачки, в которой вихрь поддерживается сходящимися цилиндрическими волнами, приходящими из периферийной области течения. Мы также исследовали влияние вязкости на поглощение волны, которое ранее рассматривалось в [143] для двумерных внутренних волн. Наконец, уточняется теория волновых пакетов [23] в окрестности критического слоя, где мы показываем, что стандартное описание там дает неверное предсказание для ширины пакета. Вместо этого мы вывели надлежащее уравнение, рассматривающее, в частности, динамику волнового пакета, и показали, что волновое действие [144; 145] здесь по-прежнему сохраняется. Развита квазилинейная теория может быть использована для анализа данных моделирования когерентных течений во вращающейся турбулентности. В работе [146] было показано, что динамика внутренних гравитационных волн, полученная в ходе DNS стратифицированной жидкости, хорошо согласуется с результатами волновой теории, основанной на линеаризованных уравнениях на фоне среднего течения, взятого из DNS. Недавно аналогичный подход для вращающейся турбулентности был распространен на обратное воздействие инерционных волн на среднее течение в случае прямолинейных геострофических струй [49].

Глава 3 основана на материалах **работы** соискателя, опубликованной в журнале ВАК: [147].

Оставшаяся часть главы организована следующим образом. Распространение волны внутри осесимметричного стационарного вихря рассмотрено в Разделе 3.2, где получено и проанализировано волновое уравнение. В Разделе 3.3 более подробно рассматривается модель с прямолинейными линиями тока, пригодная для описания поведения волны в окрестности критического слоя, в том числе в цилиндрической геометрии. Процесс поглощения волны в окрестности критического слоя и отражение волны рассмотрены в Разделе 3.4 в коротковолновом приближении. Более точно процесс поглощения рассмотрен в Разделе 3.5, где были восстановлены эффекты вязкости. Обсуждение полученных результатов и заключение даны в Разделе 3.6. Некоторые технические детали вынесены в Приложения В, Г.

### 3.2 Распространение волны в геострофическом вихре

Течение несжимаемой жидкости, вращающейся вокруг оси  $Oz$  с угловой скоростью  $\Omega$ , описывается уравнением Навье–Стокса с кориолисовым членом. В полном поле его скорости  $\mathbf{v}$  можно выделить отдельно среднюю геострофическую часть  $\mathbf{U}$  и волновое поле  $\mathbf{u}$  на ее фоне:  $\mathbf{v} = \mathbf{U} + \mathbf{u}$ . Геострофическое течение лежит во вращающейся плоскости  $Oxy$  и зависит только от горизонтальной части радиус-вектора:  $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{r}_\perp)$ , где  $\mathbf{r}_\perp \perp Oz$ . Предполагается, что система подвержена быстрому вращению, так что число Россби для волнового движения мало:  $|\nabla \mathbf{u}|/2\Omega \ll 1$ . В этом пределе вращение подавляет нелинейное волновое взаимодействие, скорость которого в динамике  $\mathbf{u}$  имеет порядок  $|\nabla \mathbf{u}|^2/2\Omega$  [77]. Предполагается, что межволновое взаимодействие слабее взаимодействия волны с геострофическим течением  $\mathbf{U}$ , скорость которого может быть оценена по элементам градиентов его потока  $\Sigma_j^i = \nabla_j U^i$ . Таким образом, для описания волнового движения на фоне геострофического течения используется линейное по  $\mathbf{u}$  приближение в динамике (1.20):

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{U} + 2[\Omega \times \mathbf{u}] - \nu \Delta^{3D} \mathbf{u} = -\nabla p, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0, \quad (3.1)$$

где  $\Delta^{3D}$  обозначает (векторный) оператор Лапласа в трехмерном пространстве. Ввиду несжимаемости течения независимыми являются лишь две компоненты скорости. В Приложении В мы выводим ковариантные уравнения волновой

динамики для двухкомпонентного вектора скорости  $\mathbf{c}$  в горизонтальной плоскости:

$$\partial_z^2 \left( \left( \frac{d}{dt} - \nu \Delta^{3D} \right) \mathbf{c} + (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{U} + 2[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{c}] \right) + \text{grad} \left( \left( \frac{d}{dt} - \nu \Delta^{3D} \right) \text{div} \mathbf{c} \right) = 0. \quad (3.2)$$

Здесь  $d/dt = \partial_t + (\mathbf{U} \cdot \nabla)$  — конвективная производная по среднему течению, а операции с  $\nabla$  двумерные относительно вращающейся плоскости  $Oxy$ , так что  $\Delta^{3D} = \Delta + \partial_z^2$ . Вертикальная компонента  $u^z = w$ , направленная вдоль оси вращения, и давление в волне связаны с  $\mathbf{c}$  следующими соотношениями:

$$\partial_z^2 p = -\partial_z \left( \left( \frac{d}{dt} - \nu \Delta^{3D} \right) w \right) = \left( \frac{d}{dt} - \nu \Delta^{3D} \right) \text{div} \mathbf{c}. \quad (3.3)$$

Кроме того, взяв  $z$ -компоненту ротора уравнения (3.1) или (3.2), можно получить уравнение (B.3), которое будет использовано в вычислениях.

### 3.2.1 Модель цилиндрического вихря

Далее в разделе мы рассматриваем распространение инерционной волны внутри осесимметричного геострофического вихря. В цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  среднее течение  $\mathbf{U}$  считается азимутальным и зависящим только от радиуса в горизонтальной плоскости:  $\mathbf{U} = U(r)\mathbf{e}^\varphi$ . Вихревое течение отличается от твердотельного вращения, если его угловая скорость  $U/r$  зависит от радиального положения  $r$ . В этом случае говорят о дифференциальном вращении; оно характеризуется ненулевой локальной скоростью сдвига  $\Sigma = r\partial_r(U/r)$ . Мы также предполагаем, что вихрь локализован в поперечной плоскости:  $U \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ , см. иллюстрацию на Рис. 3.1. Уравнения (3.2) для  $\mathbf{u}_\perp = \mathbf{c}$  в горизонтальной плоскости принимают вид:

$$\partial_z^2 \left( \frac{d\mathbf{c}}{dt} - \nu \Delta^{3D} \mathbf{c} + \begin{pmatrix} -2\tilde{\Omega}u_\varphi \\ (2\tilde{\Omega} + \Sigma)u_r \end{pmatrix} \right) + \text{grad} \left( \left( \frac{d}{dt} - \nu \Delta^{3D} \right) \text{div} \mathbf{c} \right) = 0, \quad (3.4)$$

где планарная часть векторного лапласиана  $\Delta^{3D} \mathbf{c} = (\Delta + \partial_z^2) \mathbf{c}$ :

$$\Delta \mathbf{c} = \left( \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{\partial_\varphi^2}{r^2} - \frac{1}{r^2} \right) \begin{pmatrix} u^r \\ u^\varphi \end{pmatrix} + \frac{2\partial_\varphi}{r^2} \begin{pmatrix} -u^\varphi \\ u^r \end{pmatrix}.$$

Здесь мы ввели локальную угловую скорость вращения  $\tilde{\Omega}(r) = \Omega + U/r$ . Вместе с ней, переобозначение  $d/dt$  как производной по времени с учетом среднего переноса  $d/dt = \partial_t + (U/r)\partial_\varphi$  указывает на то, что (3.4) описывает динамику в системе отсчета, вращающейся вместе с вихревым течением. Комбинация  $2\tilde{\Omega} + \Sigma = 2\Omega + U' + U/r$  представляет собой абсолютную (вертикальную) завихренность  $(2\mathbf{\Omega} + \nabla \times \mathbf{U})_z$  течения в инерциальной системе отсчета. Предполагается, что всюду выполнено  $\tilde{\Omega} > 0$ , т. е. глобальное вращение не компенсируется вращением вихря ни на каком расстоянии  $r$ .

Задача однородна по переменным  $t, \varphi, z$ , что позволяет искать решение в фурье-представлении, заменяя производные по этим переменным на волновую частоту  $\omega$ , которую будем называть абсолютной (ту, что измеряется в системе отсчета, вращающейся с внешней угловой скоростью  $\Omega$ ), на азимутальную гармонику  $m$  и на волновое число  $k_z$  соответственно:

$$\partial_t \rightarrow -i\omega, \quad \partial_\varphi \rightarrow im, \quad \partial_z \rightarrow ik_z, \quad (3.5)$$

где значение угловой гармоники  $m$  — целое число. Компоненты комплексного вектора волновой скорости в цилиндрических координатах обозначим за  $\mathbf{u} = (v, u, w)$ , где  $v$  обозначает радиальную компоненту вектора скорости,  $u$  — проекцию в азимутальном направлении вдоль среднего течения, а  $w$  — вертикальную компоненту. Альтернативная (3.4) система уравнений волновой динамики (B.7–B.8), записанная в терминах  $\text{div}_\perp(v, u) \propto w$  согласно (3.3) и  $\text{div}_\perp(u, -v) \propto \varpi_z$ , представлена в Приложении B. Ее удобство в том, что используется только скалярный лапласиан (обозначается как  $\Delta_0^{3D}$ ), записанный для цилиндрических координат; в фурье-представлении он имеет вид:

$$\Delta_0^{3D} = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r - \frac{m^2}{r^2} - k_z^2.$$

В отсутствие вихревого течения,  $U = 0$ , из нее следует (явной подстановкой (B.7) в (B.8) с учетом (3.3)) уравнение на гармонику давления  $p$  инерционной волны [65]

$$\omega^2 \Delta_0^{3D} p + 4\Omega^2 k_z^2 p = 0, \quad (3.6)$$

которое допускает две поляризации для каждой цилиндрической гармоники:

$$p(t, \mathbf{r}) = J_m(qr) e^{im\varphi + ik_z z - i\omega_{\mathbf{k}}^s t}, \quad \omega_{\mathbf{k}}^s = \frac{2s\Omega k_z}{k}, \quad (3.7)$$

где полное значение волнового вектора  $k = \sqrt{k_z^2 + q^2}$  положительно по определению, а  $s = \pm 1$  — знак поляризации.

В присутствии вихревого течения, по-прежнему пренебрегая вязкостью, выведем далее уравнения, модифицирующие эту модель свободной волны. Естественнo ввести относительную частоту волны  $\tilde{\omega}(r)$  в системе отсчета, движущейся вместе со средним потоком,

$$\tilde{\omega}(r) = \omega - mU(r)/r, \quad (3.8)$$

которая учитывает доплеровский сдвиг на радиусе  $r$  [23].

Азимутальная  $\varphi$ -компонента уравнения (3.4) в невязком пределе не содержит производных от  $u(r)$ , что позволяет выразить  $u$  через  $v$ . Соотношения для  $w$  и  $p$  могут быть получены с помощью уравнения (3.3):

$$u = \frac{im/r}{k_\perp^2} (v' + v/r) - \frac{ik_z^2 2\tilde{\Omega} + \Sigma}{k_\perp^2 \tilde{\omega}} v, \quad (3.9)$$

$$w = \frac{ik_z}{k_\perp^2} (v' + v/r) + \frac{ik_z m/r 2\tilde{\Omega} + \Sigma}{k_\perp^2 \tilde{\omega}} v, \quad p = \tilde{\omega} w / k_z, \quad (3.10)$$

где  $k_\perp^2(r) = k_z^2 + m^2/r^2$ , а штрих означает производную по  $r$ . Волновое уравнение для радиальной компоненты  $v$  получается подстановкой (3.9) в (B.4):

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} \left[ \frac{d}{dr} \left( \frac{\tilde{\omega}}{k_\perp^2} (v' + v/r) + \frac{\Sigma m/r}{k_\perp^2} v \right) - \tilde{\omega} v \right] \\ + \frac{2\tilde{\Omega} (2\tilde{\Omega} + \Sigma) k_z^2}{k_\perp^2} v + v \tilde{\omega} r \frac{d}{dr} \left( \frac{2\tilde{\Omega} m}{k_\perp^2 r^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Альтернативно, волновое уравнение на гармонику  $p$  в невязком пределе приведено в формуле (B.9) Приложения B. В задаче о монохроматической волне в цилиндрическом среднем течении это уравнение должно быть дополнено граничным условием регулярности при  $r = 0$ . Для описания динамики немонхроматического волнового поля в них следует произвести замену  $\tilde{\omega} \rightarrow i\partial_t - mU/r$ .

Рассмотрим монохроматическую волну, являющуюся решением (3.11). Такая волна не обменивается моментом импульса и энергией с течением вихря до тех пор, пока не встретит критический слой, который подробно обсуждается в Подразделе 3.4.2. Действительно, плотность потока  $\varphi$ -компоненты импульса в направлении  $r$ , связанная с волновым движением, равна

$$\Pi^{r\varphi} = \langle v^r v^\varphi \rangle_w = \frac{\text{Re}(uv^*)}{2} = -\frac{m \text{Im}(v'v^*)}{2rk_\perp^2}, \quad (3.12)$$

где угловые скобки  $\langle \dots \rangle_w$  означают усреднение по периоду осцилляций и использовано соотношение (3.9). Средняя плотность потока энергии в радиальном направлении, связанная с волной, пропорциональна  $\Pi^{r\varphi}$ :

$$j^r = \left\langle \left( \frac{v^2}{2} + p \right) v_r \right\rangle_w = \frac{\operatorname{Re}(pv^* + Uuv^*)}{2} = \frac{\omega r}{m} \Pi^{r\varphi}, \quad (3.13)$$

согласно уравнениям (3.9–3.10). Полный поток момента импульса волны (его вертикальной компоненты) равен  $r^2 \Pi^{r\varphi}$ , а полный поток энергии в радиальном направлении в цилиндрических координатах равен  $rj^r$ . Для монохроматической волны в невязком пределе потоки не зависят от  $r$ :

$$(r^2 \Pi^{r\varphi}(r))' = 0, \quad (rj^r(r))' = 0, \quad (3.14)$$

что следует из (3.11), поскольку и  $v$ , и  $v^*$  являются решениями невязкого уравнения. Таким образом, объемная сила, действующая со стороны монохроматической волны на среднее течение в азимутальном направлении, равна нулю. Равенство (3.14) нарушается в динамике с конечной вязкостью, см. также [52; 53]. Следует отметить, что даже в невязком пределе бегущий волновой пакет обменивается энергией со средним течением и создает момент сил вследствие неоднородности вихревого потока. Этот обмен обсуждается в Разделе 3.3, где рассматриваются волновые пакеты.

### 3.2.2 Коротковолновый предел цилиндрических волн

Рассмотрим далее коротковолновый предел, когда длина волны мала по сравнению с характерным масштабом вихревого течения  $U(r)$ . Сохраняя главные члены в (3.11), приходим к уравнению

$$\tilde{\omega}^2(v'' - k_\perp^2 v) + 2\tilde{\Omega}(2\tilde{\Omega} + \Sigma)k_z^2 v = 0. \quad (3.15)$$

Если  $v$  отвечает бегущей волне, движущейся к центру вихря или от него, то  $v'' \approx -k_r^2 v$ , где  $k_r$  — радиальное волновое число. Уравнение (3.15) дает закон дисперсии, обобщающий (3.7):

$$\tilde{\omega} = \frac{s\sqrt{2\tilde{\Omega}(2\tilde{\Omega} + \Sigma)}k_z}{k}, \quad k^2 = k_r^2 + k_\perp^2. \quad (3.16)$$

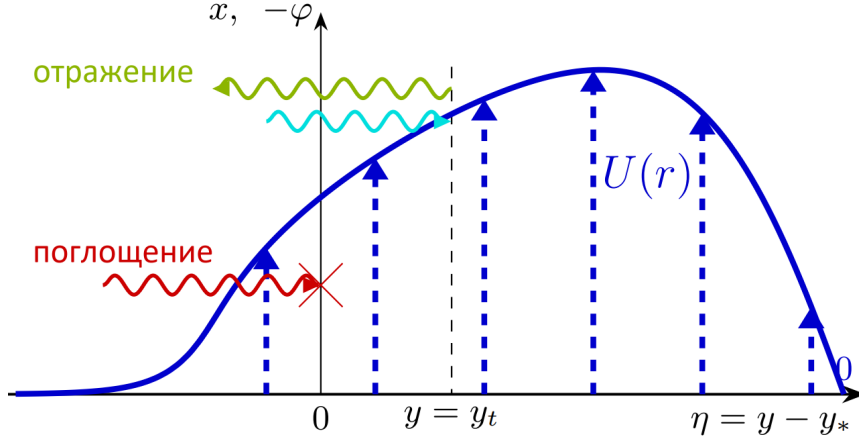


Рисунок 3.1 — Схема распространения инерционной волны: поглощение на критическом слое  $r = r_*$  и полное отражение на поверхности отражения  $r = r_t$ . Для прямолинейной модели Раздела 3.3 мы переходим к декартовым координатам при обращенной оси  $Oy$ , сохраняя подстрочные обозначения особых точек.

Для вещественности волнового числа  $k$  должно выполняться  $2\tilde{\Omega}(2\tilde{\Omega} + \Sigma) > 0$ . Распространение инерционной волны в сдвиговом течении, однородном и неограниченном в пространстве, рассматривалось в [148], а работа [52] посвящена пределу слабого сдвига  $\Sigma/2\tilde{\Omega} \ll 1$ . В этих моделях волновой вектор инерционной волны эволюционирует во времени вдоль характеристики, см. (1.24). Напротив, здесь мы рассматриваем однородную эволюцию во времени, но неоднородное пространственное распределение волнового поля.

Если  $\omega m U > 0$ , что отвечает волне с поляризацией  $smUk_z > 0$  в (3.16), и величина вихревого течения  $U$  достаточно велика, то существует цилиндрическая поверхность  $r = r_*$ , на которой  $k(r) \rightarrow \infty$ , за счет обращения  $\tilde{\omega}$  в ноль. Такая поверхность называется критическим слоем [24] и ей отвечает сингулярная точка невязкого волнового уравнения (3.11). Уравнение (3.8) означает, что при  $r = r_*$  частота возбужденной инерционной волны (на периферии, где  $U \rightarrow 0$ ) совпадает с доплеровским сдвигом, приобретенным ею при распространении в среднем течении. Перед слоем радиальное волновое число  $k_r$  стремится к бесконечности вместе с  $k$ , так что длина волны в радиальном направлении сокращается. Для изучения поведения волны вблизи поверхности слоя достаточно перейти к упрощенной модели с локальной декартовой системой координат, см. Рис. 3.1, исключив тем самым из рассмотрения криволинейность линий тока среднего сдвигового течения. Из результатов Подраздела 3.4.2 следует, что после прохождения критического слоя амплитуда волны экспоненциально затухает. Поэтому

соотношение (3.14) неприменимо на критическом слое, и монохроматическая волна передает там момент импульса и энергию среднему течению.

Для другой поляризации  $smUk_z < 0$ , такой что  $\omega mU < 0$ , волновое число  $k(r)$  убывает с ростом угловой скорости  $U(r)/r$  течения вихря. Для каждой цилиндрической гармоники существует поверхность  $r = r_t$ , на которой волновое число достигает своего минимально возможного значения  $k = k_\perp$ , так что радиальное волновое число обращается в ноль  $k_r = 0$ . Поверхность  $r = r_t$  соответствует точке поворота в WKB-приближении. Сходящаяся цилиндрическая волна отражается от этой поверхности и переходит в расходящуюся. Передачи момента импульса в этом случае не происходит: поток отраженной волны компенсирует падающий. Рис. 3.1 иллюстрирует поглощение и отражение волн. Поверхность отражения  $r_t$  существует и для волн с противоположной поляризацией  $smUk_z > 0$ . Если вихревое течение достаточно слабое, то сходящаяся волна с  $smUk_z > 0$  встречает сначала поверхность отражения, а не критический слой, поскольку последний расположен ближе к оси вихря,  $r_* < r_t$ . Передачей момента импульса от такой волны можно пренебречь, поскольку после прохождения поверхности  $r_t$  амплитуда падающей волны быстро затухает в запрещенной зоне волнового движения (где  $k_r^2(r) < 0$ ), так что по достижении критического слоя она оказывается существенно ослабленной.

Наконец, эффект Доплера не влияет на осесимметричную волну с  $m = 0$  — в ее динамике среднее течение лишь модифицирует вращение системы как  $\sqrt{2\tilde{\Omega}(2\tilde{\Omega} + \Sigma)}$  в (3.16). Сходящаяся волна проходит весь вихрь вплоть до его оси и затем отражается назад. Отметим, что устойчивость течения Куэтта по отношению к осесимметричным возмущениям рассматривалась в [149, §15].

### 3.3 Модель с прямыми линиями тока

Как обсуждалось выше, для описания поведения инерционной волны вблизи ее критического слоя или поверхности отражения можно перейти к локальной декартовой системе координат. Мы начнем с того, что для полноты картины переформулируем задачу о распространении инерционной волны в сдвиговом течении с прямыми линиями тока. Далее мы считаем, что инерционная волна с полем скорости  $\mathbf{u}$  входит извне в область, занятую течением

$\mathbf{U} = U(y)\mathbf{e}^x$ . При этом асимптотически при  $y \rightarrow -\infty$  среднее течение отсутствует,  $U \rightarrow 0$ , см. Рис. 3.1.

В этом разделе мы по-прежнему пренебрегаем вязкостью. Предполагается, что в области  $y \rightarrow -\infty$  волна  $\mathbf{u}$  возбуждается как свободная инерционная волна, являющаяся решением уравнения

$$\partial_t^2 \Delta^{3D} \mathbf{u} + 4(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)^2 \mathbf{u} = 0, \quad \text{div} \mathbf{u} = 0. \quad (3.17)$$

Заметим, что в декартовых координатах векторный и скалярный лапласианы совпадают:  $\Delta^{3D} = \Delta_0^{3D}$ .

Для его монохроматического решения в виде плоской волны скорость  $\mathbf{u}_k^s$  лежит в плоскости, перпендикулярной волновому вектору  $\mathbf{k}$ , а частота  $\omega_k^s$  та же, что и в (3.7), см. уравнения (1.3–1.6). Обозначения планарных компонент мы адаптируем из цилиндрической геометрии:  $u^x \equiv u$  обозначает компоненту в направлении сдвига,  $u^y \equiv v$  — компоненту в поперечном направлении.

Для волны в сдвиговом течении сохраняются обозначения вертикального волнового числа  $k_z$  и частоты  $\omega$  из (3.5), но на смену азимутальному числу для фурье-преобразования производной вдоль направления течения приходит волновое число  $k_x$ :  $\partial_x \rightarrow ik_x$ . Согласно (3.3), вертикальная компонента  $w$  и давление  $p$  связаны с компонентами вектора  $\mathbf{u}$  в горизонтальной плоскости как

$$k_z^2 p = k_z \tilde{\omega} w = \tilde{\omega} (iv' - k_x u), \quad (3.18)$$

где штрих обозначает производную по  $y$ , а относительная частота  $\tilde{\omega}(y) = \omega - k_x U(y)$  из (3.8) вводится теперь в декартовых координатах. Из  $x$ -компоненты уравнения (3.2) находится выражение  $u$  через  $v$ :

$$u = \frac{ik_x v'(y)}{k_\perp^2} + \frac{i(2\Omega + \Sigma) k_z^2 v}{k_\perp^2 \tilde{\omega}}, \quad (3.19)$$

где  $k_\perp = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$ , а темп сдвига  $\Sigma = -U'$  переопределен в прямолинейной модели вследствие изменения ориентации в координатах  $(x, y, z)$ . Формула (B.3) на вертикальную завихренность после подстановки выражения выше становится замкнутым волновым уравнением на  $v(y)$ :

$$\tilde{\omega} [\tilde{\omega} (v'' - k_\perp^2 v) - k_x \Sigma' v] + 2\Omega(2\Omega + \Sigma) k_z^2 v = 0. \quad (3.20)$$

Уравнение (3.20) [142, Ур.(60)] аналогично уравнению Тейлора–Голдстейна, описывающему внутренние гравитационные волны в

стратифицированной жидкости [24; 150; 151] и выводимому из системы Буссинеска. Вместе с (3.19) их цилиндрические аналоги (3.9), (3.11) сводятся к ним в пределе  $r \rightarrow \infty$ , но при фиксированном волновом числе в направлении течения  $m/r = k_x$ .

Для монохроматической волны компоненты ее потока импульса  $\Pi^{xy}$  и потока энергии  $j^y$  определяются теми же уравнениями (3.12), (3.13) с заменами  $u^\varphi \rightarrow u^x$ ,  $u^r \rightarrow u^y$  и  $m/r \rightarrow k_x$ :

$$\Pi^{xy} = -\frac{k_x \operatorname{Im}(v'v^*)}{2k_\perp^2}, \quad j^y = \frac{\omega}{k_x} \Pi^{xy}, \quad (3.21)$$

что получается непосредственно из (3.18), (3.19). В прямолинейной геометрии в невязком пределе потоки постоянны, что является следствием уравнения (3.20), которому удовлетворяют и  $v$ , и  $v^*$ :

$$\partial_y \Pi^{xy} = 0, \quad \partial_y j^y = 0. \quad (3.22)$$

Опишем теперь общие черты распространения волны согласно (3.20) в коротковолновом пределе, в котором длина волны много меньше масштабов изменения среднего течения  $U(y)$ . Решение для бегущей монохроматической волны в WKB-приближении имеет вид

$$v(t, y) = \Phi \exp \left( -i\omega t \pm i \int^y d\xi k_y(\xi) \right), \quad (3.23)$$

где  $k_y(y)$  удовлетворяет закону дисперсии, отвечающему уравнению (3.16) в цилиндрических координатах после замены  $r$  на  $y$ ,  $k_r \rightarrow k_y$ ,  $\tilde{\Omega}(r) \rightarrow \Omega$  и  $m/r \rightarrow k_x$ , так что  $k_\perp$  становится постоянным:

$$k_y^2 = \frac{2\Omega(2\Omega + \Sigma)k_z^2}{\tilde{\omega}^2} - k_\perp^2 - \frac{k_x \Sigma'}{\tilde{\omega}}, \quad (3.24)$$

Выше  $\Phi(y) = a/\sqrt{k_y(y)}$  — комплексная огибающая, а константа  $a$  — комплексная амплитуда волны. Условие применимости WKB-приближения требует выполнения  $k'_y(y) \ll (k_y(y))^2$  на всем пути движения волны. Поток импульса (3.21) принимает теперь вид

$$\Pi^{xy} = -\frac{k_x k_y |a|^2}{2k_\perp^2 |k_y|}. \quad (3.25)$$

Хотя монохроматическая волна не обменивается импульсом и энергией со средним течением, это не означает, что нестационарный волновой пакет

распространяется без такого обмена. Теория распространения волнового пакета в контексте внутренних гравитационных волн изложена, например, в книге [23]. Чтобы воспроизвести эту процедуру для инерционных волн, будем считать  $\Phi$  функцией как времени, так и координаты, медленно меняющейся по сравнению с экспонентой в (3.23) (рассмотрим далее вариант со знаком '+'). Кроме того, восстановим производную по времени в волновом уравнении (3.20):  $\tilde{\omega} \rightarrow i\partial_t - k_x U$ . Чтобы получить уравнение, управляющее динамикой огибающей  $\Phi$  в главном приближении, следует учесть первые производные медленно меняющихся  $k_y$ ,  $\Sigma$  и  $\Phi$ :

$$\left( \partial_t + v_g \partial_y + \frac{v_g}{2k_y} k_y' \right) \Phi = \frac{ik_x \Sigma'}{2k^2} \Phi, \quad (3.26)$$

где  $k(y) = \sqrt{k_y^2 + k_\perp^2}$ , а групповая скорость в направлении  $y$  равна

$$v_g = \frac{\partial \tilde{\omega}_s}{\partial k_y} = -\frac{k_y \tilde{\omega}}{k^2}. \quad (3.27)$$

Как и должно быть, знак потока энергии  $j^y$ , см. (3.21), совпадает со знаком групповой скорости.

Правая часть уравнения (3.26) возникает из относительно малого последнего члена в (3.20) и дает лишь дополнительное изменение фазы огибающей, поэтому сейчас она нас не интересует. Что касается абсолютной величины огибающей, уравнение (3.26) переписывается в форме

$$\left( \partial_t + \partial_y v_g \right) \frac{k_y |v|^2}{v_g} = 0. \quad (3.28)$$

Из (3.18), (3.19) можно получить соотношение  $k_\perp^2 |\mathbf{u}|^2 = (2 + \Sigma/2\Omega) k^2 |v|^2$ , при условии, что дифференцирование по  $y$  учитывает лишь быстро осциллирующую экспоненту в (3.23). Используя его, приходим к интегралу движения

$$\int \frac{|\mathbf{u}|^2 dy}{(1 + \Sigma/4\Omega) \tilde{\omega}} = \text{const}. \quad (3.29)$$

Формула (3.29) означает сохранение волнового действия — приближенный общий закон для волн, распространяющихся на фоне пространственно-неоднородной среды, см. [23; 144; 145]. Поскольку  $\tilde{\omega}$  в вихревом течении не постоянна, закон сохранения (3.29) означает, что энергия волнового пакета не сохраняется во времени. Полная энергия течения  $\mathbf{v}$  сохраняется, поскольку мы рассматриваем уравнение Эйлера. Таким образом, волновой пакет обменивается энергией со средним течением.

### 3.4 Отражение и поглощение волны в точке поворота

Волнам, что движутся от периферийной области вихря к его оси, соответствует положительный знак потока энергии (3.21). Поскольку знак относительной частоты волны  $\tilde{\omega}$  совпадает со знаком глобальной частоты волны  $\omega$  по ходу ее движения (перед достижением критического слоя), приходим к условиям

$$j^y > 0, \quad \text{sign} \Pi^{xy} = \text{sign}(\omega k_x). \quad (3.30)$$

Для упрощения далее мы будем полагать, что  $U(y)$  монотонно возрастает по абсолютной величине вдоль оси  $Oy$ , так что произведение  $\Sigma U < 0$ .

#### 3.4.1 Отражение волны в точке поворота

Рассмотрим те волны, относительная частота  $\tilde{\omega}$  которых растет по величине при приближении к центру вихря, то есть  $\omega k_x U < 0$ . Если среднее течение достаточно сильное, существует поверхность  $y = y_t$ , на которой  $k_y = 0$  согласно закону дисперсии с доплеровским сдвигом (3.16). Пусть  $\eta = y_t - y$  и  $\tilde{\omega}(y_t) = \tilde{\omega}_t$ , тогда монохроматическое волновое уравнение вблизи этой поверхности сводится к уравнению Эйри

$$\eta_t^3 v'' + \eta v = 0, \quad \eta_t^3 = \left( \frac{\tilde{\omega}_t}{2\Sigma k_x} \right) \frac{1}{k_\perp^2}, \quad (3.31)$$

причем множитель в круглых скобках положителен, ведь  $\omega k_x U < 0$ . Уравнение (3.31) описывает отражение волны, приходящей из области больших отрицательных  $y$  и отражающейся вблизи точки  $y = y_t$  обратно в эту область [152, §4.2]. Область  $y > y_t$  в WKB-приближении запрещена для классического движения: падающая волна там затухает.

Решение  $v \propto \text{Ai}(-\eta/\eta_t)$  уравнения (3.31), затухающее при  $y > y_t$ , может быть выбрано вещественным и интерпретировано как стоячая волна, состоящая из падающей и отраженной бегущих волн с равными амплитудами. Таким образом, отражение является упругим, а полный поток импульса  $\Pi^{xy}$  (3.21), связанный с волной, равен нулю. Для падающей волны он имеет знак, противоположный знаку  $U$ :  $U\Pi^{xy} < 0$ . В цилиндрической геометрии это означает, что

такие волны переносят момент импульса, противоположный по знаку моменту импульса вихревого течения. Отметим также, что при отражении сохраняются частота  $\omega$  и волновое число  $k_z$ , так что знак поляризации  $s$  остается прежним.

Отражение волнового пакета длится конечное время: рассмотрим область  $\eta \gg |\eta_t|$  в рамках WKB-анализа коротких волн. Волновое число в этой области  $k_y = \pm \sqrt{\eta/\eta_t^3}$ , а групповая скорость (3.27)  $v_g \sim \eta^{1/2}$ , так что время движения до точки отражения и обратно  $\int d\eta/v_g$  сходится на малых расстояниях. При подходе к точке отражения, вплоть до  $\eta \sim \eta_t$ , плотность кинетической энергии растет как  $u^2 \propto \eta^{-1/2}$  — вплоть до некоторой близости к нулю. Поскольку отражение упруго, интеграл волнового действия (3.29) для отраженного пакета равен тому, который падающий пакет имел ранее в том же месте. Таким образом, процесс отражения приводит к обратимому во времени обмену энергией между волнами и средним течением. Условия, что можно пренебречь кривизной линий тока вихря и использовать описанное в прямолинейной модели решение, как и для WKB-приближения требуют, чтобы длина волны была мала по сравнению с радиусом  $r_t$  и характерным масштабом среднего течения  $U$ .

### 3.4.2 Поглощение в критическом слое

В противоположном случае, когда  $\omega k_x U > 0$ , относительная частота волны  $\tilde{\omega}(y)$  убывает и обращается в ноль на критическом слое  $y = y_*$ ,  $\tilde{\omega}(y_*) = 0$ , если величина среднего течения  $U$  достаточно велика. Ниже будет показано, что в этой ситуации постоянные значения потоков (3.21) различаются по разные стороны от критического слоя. Различие означает обмен энергией и импульсом между волнами и средним течением. Отметим, что, тогда как относительная частота  $\tilde{\omega}$  меняет знак при прохождении критического слоя, волновое число  $k_z$  остается неизменным. Следовательно, закон дисперсии (3.16) приводит к инверсии поляризации волны  $s$  при прохождении критического слоя.

В окрестности слоя введем смещенную координату  $\eta = y - y_*$ , обновив обозначение, и аппроксимируем поле средней скорости линейным разложением, так что  $\tilde{\omega} \approx \Sigma k_x \eta$ , где значение  $\Sigma \equiv \Sigma(y_*)$  берется на критическом слое. Монохроматическая волна там является решением приближенного уравнения (3.20),

которое характеризуется локальным числом Россби  $\rho$ :

$$v'' + \frac{1}{\rho^2 \eta^2} v = 0, \quad \rho = \frac{|\Sigma k_x / k_z|}{\sqrt{2\Omega(2\Omega + \Sigma)}}. \quad (3.32)$$

Уравнение выше справедливо вблизи слоя при значениях  $\eta$ , меньших характерного масштаба  $\eta_c = |\Sigma/U''| \cdot \min(1, \rho^{-2})$ , где кривизна профиля скорости  $U'' \equiv U''(y_*)$  также определяется в критическом слое. Для волны в цилиндрической геометрии уравнение (3.11) вблизи критического слоя  $r = r_*$  сводится к (3.32) с заменой  $k_x \rightarrow m/r_*$  в определении  $\rho$ . С оценкой  $|\Sigma/U''| \sim r_*$  для крупномасштабного вихревого течения в этом случае получается характерный масштаб  $\eta_c = r_* \cdot \min(1, \rho^{-2} \Sigma / 2\tilde{\Omega})$ , где все величины берутся при  $r = r_*$ . Отметим, что на масштабе  $\eta \sim \eta_c$  величина волнового вектора  $k(r)$  становится того же порядка, что и на периферии вихря, см. (3.16). Решения для  $v(\eta)$  имеют степенную зависимость в начале координат, что отвечает нейтральному осциллирующему поведению в случае  $\rho < 2$ :

$$v_{\pm} \sim \eta^{(1 \pm i\beta)/2}, \quad \beta = \sqrt{4 - \rho^2} / \rho, \quad (3.33)$$

Проведем параллель с задачей о внутренних гравитационных волнах в стратифицированной жидкости как о возмущениях сдвигового течения  $U(z)\mathbf{e}^x$ , однородного в горизонтальной плоскости. Аналоги (3.32), (3.33) записываются для вертикальной компоненты скорости  $w(z)$  с выражением для параметра  $\beta_N$  в показателе:  $\beta_N^2 = 4(Nk_{\perp}/\Sigma k_x)^2 - 1$ , где  $N$  — частота Брента-Вайсяля. Он имеет нижнюю границу  $\inf \beta_N = \sqrt{4\text{Ri} - 1}$ , выражаемую через локальное число Ричардсона  $\text{Ri} = N^2/(U')^2$ , которое не зависит от волновых чисел. Неравенство  $\text{Ri}(z_*) > 1/4$  обеспечивает нейтральное поведение в плоскости  $z = z_*$  по отношению к любым возмущениям сдвигового течения в линейном анализе. Достаточное условие устойчивости плоскопараллельного сдвигового течения в стратифицированной жидкости состоит в том, что число Ричардсона превышает  $1/4$  во всем течении. Это условие устойчивости известно как теорема Майлса–Ховарда [150; 151]. Анализ аналогичной задачи о критическом слое для внутренних волн представлен в [24], см. также монографию [153, §5.2].

Возьмем теперь  $v(\eta)$  из (3.33) в качестве решения, описывающего инерционную волну, которая проходит через критический слой направо, в область  $\eta > 0$ . Для решений  $v_{\pm}$  из (3.33) локальное волновое число равно  $k_y = \pm\beta/(2\eta)$ ; вместе с относительной частотой  $\tilde{\omega} = \Sigma k_x \eta$  это дает знак групповой скорости

$\text{sign } v_g = \mp \text{sign } \Sigma k_x$ , соответственно, см. (3.27). Таким образом, мы выбираем решение

$$v_\sigma \sim \eta^{(1+i\sigma\beta)/2}, \quad \sigma = -\text{sign } \Sigma k_x. \quad (3.34)$$

Для монотонного профиля течения  $U(y)$  параметр  $\sigma$  отвечает знаку частоты  $\omega$ , см. замечание после (3.30).

Чтобы продолжить решение из области  $\eta > 0$  в область  $\eta < 0$ , мы используем соображения причинности во времени, которые предполагают регуляризацию особой точки уравнения (3.20). Регуляризация в комплексной плоскости фурье-переменной  $\omega$  требует, чтобы особенность смещалась в полуплоскость  $\text{Im } \omega < 0$ . Это задает ветвь степенной функции в (3.33) по правилу

$$\eta \rightarrow \eta - 0i\sigma. \quad (3.35)$$

Далее в Подразделе 3.5.1 мы придем к той же регуляризации, учитывая вязкую диссипацию в модели. Для решения (3.34) получается соотношение между его значениями по разные стороны от критического слоя; результат может быть выражен через коэффициент прохождения волны через критический слой

$$\eta^{(1+i\sigma\beta)/2} \Big|_{\eta < 0} = -i\sigma e^{\pi\beta/2} \eta^{(1+i\sigma\beta)/2} \Big|_{\eta > 0}; \quad T = i\sigma e^{-\pi\beta/2}. \quad (3.36)$$

Отметим, что амплитуда другой волны  $v_{-\sigma}$ , напротив, больше со стороны положительных  $\eta$ , при этом ее групповая скорость (3.27) направлена налево. Поэтому волна, проходящая критический слой, ослабляется в направлении своего распространения. Ослабление потоков импульса и энергии (3.21) для прошедшей волны составляет

$$\frac{\text{Im } v'_\sigma v_\sigma^* \Big|_{\eta > 0}}{\text{Im } v'_\sigma v_\sigma^* \Big|_{\eta < 0}} = e^{-\pi\beta}. \quad (3.37)$$

Рассмотрим предел малых  $\rho$ , то есть  $\beta \approx 2/\rho \gg 1$ . Предел  $\rho \ll 1$  является локальным проявлением условия применимости WKB-приближения (3.23) вблизи критического слоя. Для большинства волн ансамбля, входящего в вихревое течение, он оправдан пределом больших  $\Omega$ . Отношение потоков (3.37) в этом пределе экспоненциально мало. Поскольку  $\Pi^{xy}$  терпит разрыв при  $\eta = 0$ , его ослабление означает обмен между волной и сдвиговым течением в окрестности критического слоя. В пределе  $\rho \ll 1$  волна создает объемную силу  $-\partial_y \Pi^{xy} = \Pi_{(0)}^{xy} \delta(y - y_*)$ , передавая среднему течению практически весь свой импульс, а также энергию.

Продолжим далее рассмотрение в коротковолновом пределе. Развитый в Разделе 3.3 приближенный анализ общего характера может быть применен лишь частично для описания поглощения волнового пакета вблизи критического слоя. Этот анализ правильно описывает движение центра пакета, но не описывает его ширину и интенсивность. Ниже, в подразделе 3.5.2, мы рассмотрим волновое уравнение (3.20) более строго, выходя за рамки приближения огибающей (3.26), и, в частности, опишем динамику ширины и интенсивности волнового пакета.

Здесь мы установим лишь движение центра волнового пакета, считая его локализованным в окрестности некоторого положения  $\bar{\eta}(t)$  при  $t = 0$ . Текущее несущее волновое число равно  $\bar{k}_y' = \sigma\beta/(2\bar{\eta})$ . Поскольку групповая скорость (3.27) равна  $v_g = 2|\Sigma k_x|\bar{\eta}^2/\beta$ , волновой пакет движется к критическому слою по закону

$$\bar{\eta}(t) = \frac{\bar{\eta}_0}{1 - 2|\Sigma k_x|t\bar{\eta}_0/\beta}. \quad (3.38)$$

Это приводит к асимптотике приближения  $\bar{\eta} \propto 1/t$  на больших временах  $t \gg t_\Sigma$ , где  $t_\Sigma = \bar{k}_y/|\Sigma k_x|$  определено через начальное несущее волновое число  $\bar{k}_y = \sigma\beta/(2\bar{\eta}_0)$ .

### 3.5 Окрестность критического слоя с вязкостью

Расходящееся поведение поля скорости  $\mathbf{u}$  на критическом слое для монохроматической волны обусловлено пренебрежением эффектами вязкой диссипации. Чтобы прояснить характер диссипации поглощаемой волны, мы обобщили уравнения (3.19–3.20), восстановив конечное  $\nu$  в рамках прямолинейной модели. Из  $y$ -компоненты уравнения (В.2) Приложения В сдвиговая компонента  $u$  выражается через  $v$  как

$$u = -\frac{\Delta^{3D}}{2\Omega k_\perp^2} (i\tilde{\omega} + \nu\Delta^{3D})v + \frac{ik_x}{k_\perp^2} \partial_y \left[ \left(1 - \frac{U'}{\Omega}\right)v \right]. \quad (3.39)$$

Подставляя это в (В.3), получаем волновое уравнение для  $v$  с вязкостью — приходим к производной по  $Oy$  от выражения

$$(\tilde{\omega} - i\nu\Delta^{3D}) \left[ (\tilde{\omega} - i\nu\Delta^{3D}) \Delta^{3D}v + k_x U''v \right] + 2\Omega (2\Omega - U') k_z^2 v = 0, \quad (3.40)$$

где лапласиан  $\Delta^{3D} = \partial_y^2 - k_\perp^2$ . Вертикальная компонента  $w$  и давление  $p$  могут быть найдены из (3.3). Уравнение (3.20) как предел  $\nu \rightarrow 0$  уравнения (3.40) получается непосредственно; чтобы восстановить (3.19), нужно взять этот предел в (3.39), а затем воспользоваться (3.20). Для внутренних гравитационных волн в стратифицированной жидкости вывод был проделан в [143] для похожей двумерной задачи с учетом эффектов как вязкости, так и теплопроводности.

### 3.5.1 Поглощение монохроматической волны

Чтобы описать монохроматическую волну внутри вязкой внутренней области вокруг критического слоя, уравнение (3.40) можно упростить. Пренебрежем в лапласиане  $\Delta^{3D}$  членом  $k_\perp^2$  по сравнению со второй производной  $v''(\eta)$  по  $\eta = y - y_*$  и сохраним среди вязких членов только производные высшего порядка от  $v$  — аналогично процедуре, примененной в [143], см. уравнение (1.6). Результат упрощения в нашем случае может быть представлен в следующем факторизованном виде:

$$\left( \eta \partial_\eta + i \sigma \eta_v^3 \partial_\eta^3 - \frac{1 + i\beta}{2} \right) \left( \eta \partial_\eta + i \sigma \eta_v^3 \partial_\eta^3 - \frac{1 - i\beta}{2} \right) v = 0. \quad (3.41)$$

где введен положительный вязкий масштаб  $\eta_v$  согласно  $\eta_v^3 \equiv \nu / |\Sigma k_x|$ , а  $\sigma = -\text{sign } \Sigma k_x$  взято из (3.34). Скобки в (3.41) коммутируют друг с другом. Уравнение (3.41) обосновывает регуляризацию (3.35) в комплексной плоскости  $\eta$  для движения монохроматической волны в невязком пределе; теперь эта регуляризация реализуется на вязком масштабе  $\eta_v$ . Возврат к результату (3.36) невязкой модели путем предельного перехода  $\eta_v \rightarrow 0$  оправдан, если вязкий масштаб существенно меньше и масштаба  $\eta_c$  применимости модели критического слоя (3.32), см. определение ниже уравнения, и величины  $\rho \eta_c$ , которая является характерной длиной волны там. Для типичной волны это приводит к условию  $k \eta_v \ll 1$  (где  $k$  — асимптотическое значение волнового вектора на периферии), которое может быть переписано в виде  $\nu k_f^2 / \Sigma \ll 1$  через характерный волновой вектор в ансамбле  $k_f$ . Последнее воспроизводит условие (1.30), которое в работе [52] формулировалась малость влияния вязкости на динамику инерционной волны в однородном сдвиговом течении.

Решение уравнения (3.41) с асимптотикой (3.33) вне вязкой области является нулевой модой одного из двух дифференциальных операторов:

$$\left( \eta \partial_\eta + i \sigma \eta_v^3 \partial_\eta^3 - \frac{1 \pm i\beta}{2} \right) v_\pm(\eta) = 0. \quad (3.42)$$

Уравнение такого типа возникает и в контексте анализа устойчивости стратифицированного сдвигового течения, см. [154; 155]. Решение (3.42) может быть выражено через обобщенный класс функций Эйри, описанных, например, в [149]. Там они были введены для задачи Орра–Зоммерфельда, см. подробности в Приложении Г. Здесь мы приводим интегральное представление, в котором, в отличие от (Г.2), особенность интегрируема на вещественной оси:

$$v_\pm = C \int_0^\infty \frac{d\chi}{\chi^{(1 \pm i\beta)/2}} (i\sigma\eta + \eta_v^3 \chi^2) e^{-i\sigma\eta\chi - (\eta_v\chi)^3/3}. \quad (3.43)$$

Выбор решения в виде  $v_\sigma$  описывает волну, бегущую направо через критический слой, см. (3.34); ее степенная асимптотика имеет место в пределе  $|\eta/\eta_v| \gg 1$  для (3.43). Чтобы ее получить, нужно рассмотреть подынтегральное выражение вблизи особой точки  $\chi = 0$ , где контур в комплексной плоскости следует наклонить вблизи этой точки под углом  $-\sigma\pi/2 \cdot \text{sign } \eta$  для достижения наискорейшей сходимости интеграла. Попутно восстанавливается амплитуда прохождения (3.36). Характерное поведение решения  $v_\sigma(\eta)$  во внутреннем слое показано на Рис. 3.2, где и для вещественной, и для мнимой его частей построены их обратные гиперболические синусы в зависимости от  $\text{arcsinh}(\eta/\eta_v)$ . Такое отображение фактически строит график в двойном логарифмическом масштабе для значений, больших единицы, что позволяет проверить степенные асимптотики.

В заключение обсудим, как параметр  $k_\perp$ , которым пренебрегали в представленном анализе, влияет на монохроматическую волну в окрестности критического слоя. В Приложении Г мы нашли решения уточненного модельного уравнения (Г.5), отвечающие  $v_\pm$ , см. (Г.8). Решения в перемасштабированной координате  $\eta/\eta_v$  зависят от единственного нового параметра  $\mu = k_\perp \eta_v$ ; выражение (3.43) достигается в пределе  $\mu \rightarrow +0$ . Считая вязкость малой, приведем здесь ведущую поправку к решению (3.43) вблизи критического слоя:

$$\delta v_\pm = \frac{C\mu^2}{2} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(\xi/\eta_v)^{(1 \pm i\beta)/2}} \left[ 1 \pm i\beta + \frac{1}{2 \pm i\beta} \frac{d^3}{d\xi^3} \right] e^{-i\sigma\xi\eta/\eta_v - \xi^3/3}. \quad (3.44)$$

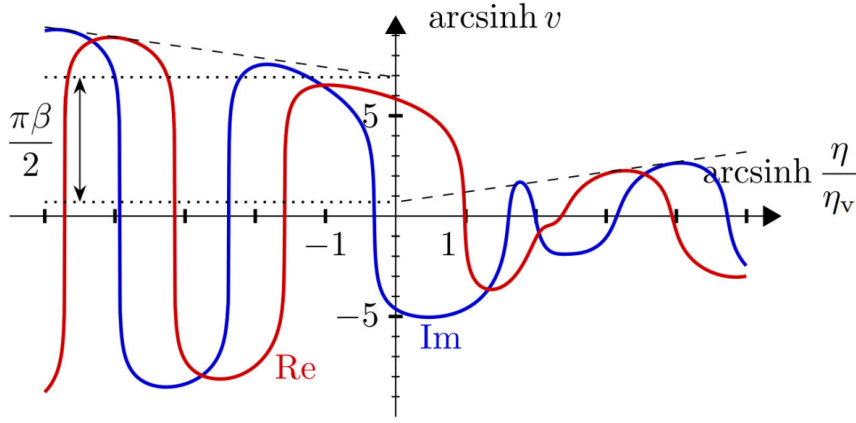


Рисунок 3.2 — График численного решения (3.42) для волны  $v_\sigma$  при  $\sigma = 1$ , проходящей вязкий внутренний слой. Решение получено интегрированием (3.43) при  $\beta = 4$ . Красная и синяя линии отвечают соответственно вещественной и мнимой частям решения. Штриховые линии в обеих областях  $|\eta/\eta_v| \gg 1$  обозначают скейлинг  $|v_+| \propto \sqrt{|\eta|}$  для абсолютной величины согласно асимптотике (3.33). Вертикальное смещение между штриховыми асимптотами отвечает абсолютной величине коэффициента прохождения (3.36).

### 3.5.2 Поглощение волнового пакета

В этом подразделе мы переходим к детальному описанию динамики квазимонохроматического волнового пакета, начатому в Подразделе 3.4.2. Мы рассматриваем пакет узкой ширины  $\delta\omega$  вокруг несущей частоты  $\omega$  и определяем расстояние до критического слоя по несущей волне как  $\eta = y - y_*(\omega)$ . Динамика пакета  $v_\sigma(t, \eta)$ , подходящего к слою со стороны  $\eta < 0$ , описывается уравнением, отвечающим (3.42) для монохроматического случая. В члене  $\tilde{\omega}\partial_\eta v_\sigma$  (который отвечает члену  $\eta\partial_\eta v_\sigma$  с множителем  $\Sigma k_x$ ) производится замена  $\tilde{\omega} \rightarrow i\partial_t - \omega + \Sigma k_x \eta$ , что дает

$$\left( (i\partial_t - \omega + \Sigma k_x \eta) \partial_\eta - i\nu \partial_\eta^3 - \frac{1 + i\sigma\beta}{2} \Sigma k_x \right) v_\sigma = 0. \quad (3.45)$$

Если воспользоваться подстановкой (3.23) с  $k_y = \sigma/\rho\eta$  в коротковолновом пределе  $\rho \ll 1$ , то по сравнению с (3.26) (с нулевой правой частью) в результате появится дополнительный член  $-i\sigma\rho\eta\partial_\eta\partial_t\Phi$ , см. также (3.51). Этот член существенно меняет динамику формы волнового пакета, что будет показано ниже, после (3.48).

Введем фурье-образ  $\tilde{v}_\sigma^{(0)}(k_y)$  начального поля скорости  $v_\sigma^{(0)}(\eta)$  при  $t = 0$ . После перехода (3.45) в фурье-пространство  $\eta \rightarrow k_y$ , уравнение с начальным условием решается методом характеристик. Выражение для  $v_\sigma(t, \eta)$  через интеграл обратного преобразования имеет вид

$$v_\sigma(t, \eta) = e^{-i\omega t} \int \frac{dk_y}{2\pi} e^{ik'_y(t)\eta} \left( \frac{k_y}{k'_y(t)} \right)^{\frac{3+i\sigma\beta}{2}} \tilde{v}_\sigma^{(0)}(k_y) e^{-\nu \int_0^t d\tau (k'_y(\tau))^2}. \quad (3.46)$$

где переменная интегрирования  $k_y$  — начальное волновое число, отвечающее волновому числу на характеристике  $k'_y(t) = k_y + \Sigma k_x t$ , ср. с (1.24). Начальный профиль  $\tilde{v}_\sigma^{(0)}(k_y)$  для волны, бегущей к критическому слою, должен удовлетворять условию  $\sigma k_y < 0$ , см. (3.43) и (Г.8), где  $\chi$  отвечает  $-\sigma k_y$ . Неравенство  $\Sigma k_x k_y > 0$  означает, что особенность  $k_y = -\Sigma k_x t$  в (3.46) при  $t > 0$  лежит на той полупрямой, где  $\tilde{v}_\sigma^{(0)}(k_y)$  обращается в ноль.

Формула (3.46) соответствует решению (1.31), полученному в [52] для плоской волны в однородном сдвиговом течении, см. Подраздел 1.3. Во-первых, вещественная часть  $3/2$  первого показателя в (3.46) означает, что абсолютная величина фурье-образа вектора скорости волны ведет себя как  $|\tilde{v}(t, k_y)| \propto (k_y/k'_y(t))^{1/2}$  в силу (3.18–3.19), что отвечает квадратному корню в (1.33). Во-вторых, выражение в вязком показателе в (3.46) отличается от показателя с вязкой диссипацией  $-\nu \int_0^t d\tau (\mathbf{k}'(\tau))^2$  в постоянном сдвиговом течении  $U_x = -\Sigma y$  на вклад от  $k_\perp^2$ , которым мы пренебрегли в (3.41), см. уточненную формулу (Г.8) для монохроматической волны. Такой диссипативный показатель и соответствующее вязкое время  $t_v = (\nu \Sigma^2 k_x^2)^{-1/3}$  возникают естественным образом при описании локальной динамики в сдвиговом течении для двумерной модели вихря [38] и трехмерной модели во вращающейся системе [52].

В коротковолновом пределе интеграл (3.46) может быть приближенно вычислен методом перевала по осциллирующей экспоненте  $(k_y/k'_y(t))^{i\sigma\beta/2}$ . Возьмем его сначала в пределе слабой вязкости и рассмотрим времена  $t \ll t_v$ , когда вязкость пренебрежимо мала. Что касается начального условия, будем полагать, что волновой пакет локализован в окрестности своего центра  $\bar{\eta}_0 < 0$  — точки, в которой абсолютная величина  $|v_\sigma^{(0)}|$  достигает максимума. Поле скорости  $v_\sigma^{(0)}$  осциллирует в пространстве с несущим волновым числом  $\bar{k}_y$ , определяемым как положение максимума модуля фурье-образа  $|\tilde{v}_\sigma^{(0)}|$ . Разность  $\eta_* = \bar{\eta}_0 - \sigma\beta/(2\bar{k}_y)$  есть положение критического слоя для несущей волны в пакете. Параметры  $\bar{k}_y$ ,  $\bar{\eta}_0$  и начальный комплексный параметр ширины  $l_0$  пакета

в пространстве связаны с фурье-образом  $\tilde{v}_\sigma^{(0)}$  следующим образом:

$$\bar{\eta}_0 = i \frac{\partial}{\partial k_y} \ln \tilde{v}_\sigma^{(0)} \Big|_{k_y = \bar{k}_y}, \quad l_0^2 = - \frac{\partial^2}{\partial k_y^2} \ln \tilde{v}_\sigma^{(0)} \Big|_{k_y = \bar{k}_y}. \quad (3.47)$$

Мы предполагаем, что начальная ширина  $L_0 = |l_0^2|/\sqrt{\text{Re } l_0^2}$  мала по сравнению с положением пакета:  $L_0 \ll |\bar{\eta}_0|$ . Перевальная точка  $k_y = \bar{k}_y$  отвечает центру пакета. Положение центра  $\bar{\eta}(t) + \eta_*$  согласуется с найденным ранее в (3.38) в конце Подраздела 3.4.2. Считая, что разложения  $\ln \tilde{v}_\sigma^{(0)}$  до второго порядка по  $\delta k_y = k_y - \bar{k}_y$  достаточно для описания пакета вблизи его центра, в результате интегрирования в (3.46) получаем

$$v_\sigma = e^{-i\omega t} \frac{l_0}{l} v_0^{(0)} \left( \frac{\bar{k}_y}{\bar{k}_y'} \right)^{\frac{3+i\sigma\beta}{2}} \exp \left[ i \frac{\eta - \eta_*}{\rho \bar{\eta}} - \frac{(\delta\eta)^2}{2l^2} \right], \quad (3.48)$$

где  $v_0^{(0)}$  — начальная амплитуда в центре  $\bar{\eta}_0$ ,  $\bar{k}_y' = \sigma\beta/(2\bar{\eta})$ ,  $\delta\eta = (\eta - \eta_*) - \bar{\eta}$  — смещение от центра волнового пакета, а  $l^2 = l_0^2 + i\sigma\rho(\bar{\eta}_0^2 - \bar{\eta}^2)$  — квадрат параметра ширины пакета. Последний параметр  $l$  не меняется, если его начальное значение достаточно велико,  $|l_0| \gg \sqrt{\rho} \bar{\eta}_0$ . В противном случае он существенно возрастает за время порядка  $t \sim t_\Sigma$  и затем перестает меняться. Пакет фактически прекращает движение, когда его ширина  $L = |l^2|/\sqrt{\text{Re } l^2}$  становится больше его положения,  $L \gg |\bar{\eta}|$ , что происходит на временах  $t \gg (\eta_0/L)t_\Sigma$ . Установившееся поведение ширины пакета не может быть получено в рамках уравнения огибающей (3.26) — в отличие от более строгого уравнения (3.45), в котором учитывается дисперсионный член. Эта уточненная динамика вблизи критического слоя представлена на Рис. 3.3. Несмотря на указанное расхождение, закон сохранения волнового действия (3.29) выполняется и в рамках уравнения (3.45): теперь его роль играет следующий инвариант в фурье-пространстве вдоль характеристики  $k_y'(t)$ :

$$|k_y'|^3 |v_\sigma(k_y')|^2 = \text{const}. \quad (3.49)$$

Кинетическая энергия, запасенная в волне, пропорциональна  $|k_y' v_\sigma(k_y')|^2$ , а ее частота  $\tilde{\omega}$  пропорциональна  $1/|k_y'|$ , поскольку предполагается  $|k_y'| \gg k_\perp$ . Таким образом, (3.29) и (3.49) действительно соответствуют друг другу.

Когда волновой пакет перестает двигаться, на относительно больших временах  $t \gg (\eta_0/L)t_\Sigma$ , интеграл (3.46) может быть представлен в виде

$$v_\sigma = \frac{e^{-i\omega t + i\Sigma k_x t \eta}}{2\pi (\Sigma k_x t)^{(3+i\sigma\beta)/2}} \int dk_y k_y^{(3+i\sigma\beta)/2} e^{ik_y \eta} \tilde{v}_\sigma^{(0)}(k_y). \quad (3.50)$$

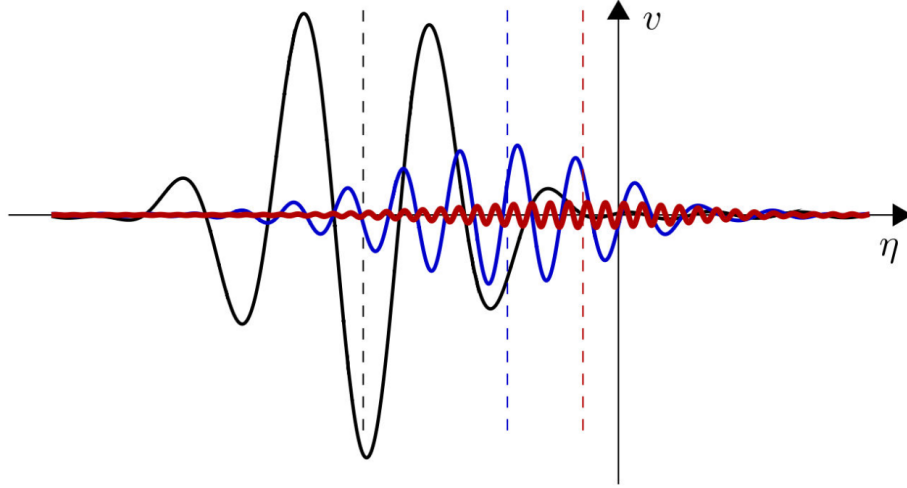


Рисунок 3.3 — Эволюция волнового пакета  $v_\sigma$  в окрестности критического слоя в невязкой стадии распространения, полученная численным интегрированием (3.46) при параметрах ширины  $l_0/\bar{\eta}_0 \approx 0.4$  в (3.48) и  $\beta = 25$ . Функция  $\text{Re } v_+$  построена в моменты времени  $|\Sigma k_x \bar{\eta}_0|t = 0, 15, 75$ , см. описание ниже (3.50).

Степенное убывание со временем было установлено ранее в [24, Ур. (5.8)], а формула (3.50) добавляет информацию о форме пакета на этой стадии. На Рис. 3.3 приводится график движения пакета в моменты времени  $|\Sigma k_x \bar{\eta}_0|t = 0, 15, 75$  согласно (3.46) без учета вязкости. Положение центра пакета приближается к критическому слою, а его длина волны сокращается (в 2.2 и 7 раз соответственно; вертикальные штриховые линии отвечают положениям центра, ось  $v$  расположена при  $\eta = 0$ ) в соответствии с (3.38) и (3.48). Амплитуда убывает в согласии со степенным законом  $t^{-3/2}$  из (3.50) для времен между синей и красной кривыми (уменьшение в 3.3 и 19 раз соответственно). При этом ширина пакета остается почти неизменной, что следует из (3.48). Несущее волновое число в (3.48) и (3.50) продолжает линейно расти со временем, так что в конце концов вязкость приводит к быстрому затуханию амплитуды пакета на временах  $t \gg t_v$  с показателем  $\ln |v_\sigma| \sim -t^3/(3t_v^3)$ .

Стоит отдельно рассмотреть движение волнового пакета с  $\omega k_x U < 0$ , который отражается от вихря на некотором  $y_t$  (см. Подраздел 3.4.1), чтобы показать, каким образом пакет может диссипировать энергию среднего течения. Будем считать, что волна имеет относительно малые азимутальное и вертикальное волновые числа,  $k_x, k_z \ll k_f$ , так что ее волновой вектор  $\mathbf{k}$  величины  $k_f$  изначально при  $y \rightarrow -\infty$  направлен преимущественно радиально. При распространении от периферии вихря к точке поворота  $y_t$  радиальное волновое число  $|k_y(y)|$  убы-

вает от  $k_f$  до нуля в соответствии с (3.16) и (3.23). Относительная частота волны  $\tilde{\omega}(y)$ , напротив, возрастает в  $k_f/k_\perp$  раз, а вместе с ней и энергия пакета согласно (3.29), см. обсуждение в конце Раздела 3.3. Поэтому в ходе своего распространения пакет забирает энергию у среднего течения, демонстрируя поведение, характерное для немодальной неустойчивости [156]. Время распространения такого пакета относительно велико, поскольку для него радиальная групповая скорость с самого начала мала по параметру  $k_\perp/k_f$  и убывает далее. Поэтому вязкость успевает рассеять пакет прежде, чем он покинет вихрь, и энергия, переданная ему средним течением, диссипирует в тепло. В рамках статистического подхода это явление рассматривалось в [53]; там было показано, что роль таких процессов растет с абсолютной величиной числа Россби  $\Sigma/2\tilde{\Omega}$ , см. Подраздел 1.3.3: если оно становится сравнимым с единицей или превышает ее, передача энергии оказывается направленной от среднего течения к волнам.

### 3.6 Заключение главы

Исходя из линейного приближения (3.4) для динамики инерционной волны внутри осесимметричного стационарного геострофического вихря, мы вывели уравнение (3.11) для ее радиальной скорости. Если монохроматическая сходящаяся цилиндрическая волна несет момент импульса, знак которого противоположен знаку момента импульса вихря, то она отражается назад на некотором расстоянии от оси вихря без обмена им со средним течением (в невязком пределе). В коротковолновом пределе отражение происходит на радиусе  $r_t$ , определяемом уравнением (3.16): там локальное радиальное волновое число  $k_r$  обращается в ноль. В противном случае волна, момент импульса (3.25) которой того же знака, что и у вихря, может достичь своего критического слоя, где она частично поглощается средним течением. Критический слой внутри осесимметричного вихря — это цилиндрическая поверхность  $r = r_*$ , на которой доплеровский сдвиг обращает относительную частоту волны в ноль:  $\tilde{\omega}(r_*) = 0$ .

Дальнейший анализ был основан на модели с прямолинейной геометрией фонового сдвигового течения. Модель позволяет упростить рассмотрение поведения волны в окрестности критического слоя или поверхности отражения. Критический слой в прямолинейной геометрии ранее изучался для

инерционных волн в [142]; для задачи о внутренних гравитационных волнах соответствующая теория разработана детально: основные результаты Подраздела 3.4.2 аналогичны теории, изложенной в [24]. Мы рассмотрели динамику как монохроматической инерционной волны, так и волнового пакета вблизи критического слоя при наличии вязкости. Сначала из линейной системы (3.1) было выведено общее волновое уравнение (3.40). Затем было показано, что вблизи критического слоя оно приводится к факторизованному виду (3.41). Такая форма позволяет анализировать по отдельности волны, бегущие в разных направлениях по отношению к слою.

Общепринятая теория волнового пакета вблизи критического слоя в коротковолновом пределе, см., например, [157, Ур. (1.3)] и обзор [158, Ур. (13)], не описывает в данной задаче его форму в ходе распространения. В главном приближении, см. (3.26), волновой пакет движется с групповой скоростью  $v_g$  (3.27), которая правильно описывает движение центра пакета. В следующем приближении теории его динамика оказалась бы слегка изменена слабой дисперсией, величина которой пропорциональна  $\partial v_g / \partial k_y$ . Если бы этот подход был здесь справедлив, то для достаточно широкого пакета дисперсия была бы несущественна и его ширина убывала бы как  $t^{-2}$  на достаточно больших временах согласно (3.26). Наш анализ был проведен на основе уравнения (3.45), выведенного из уравнения (3.40) вязкой линейной теории для волны, распространяющейся к критическому слою, и представлен в Подразделе 3.5.2. Он показывает, что динамика ширины пакета противоречит изложенной выше картине: на больших временах ширина остается постоянной. Причина в том, что течение вблизи критического слоя характеризуется постоянным градиентом скорости. Применительно к решению  $v_\sigma$  в фурье-пространстве  $k_y$ , см. (3.46), это течение задает эволюцию вдоль характеристик  $k'_y(t) = k_y + \Sigma k_x t$ , которые параллельны друг другу, так что спектральная ширина пакета постоянна во времени. Если выделить монохроматическую волну (3.33) подстановкой  $v = \eta^{(1+i\sigma\beta)/2} e^{-i\omega t} a$  (в обозначениях (3.23) огибающая  $\Phi$  равна  $\sqrt{\eta}a$ ), то уравнение (3.45) приводит к следующему уравнению на амплитуду  $a$  в невязком пределе

$$\left( (1 - i\sigma/\beta) \partial_t + v_g \partial_\eta \right) a - \frac{2i\sigma\eta}{\beta} \partial_t \partial_\eta a = 0, \quad (3.51)$$

которое следует сравнить с (3.26); здесь групповая скорость  $v_g = 2|\Sigma k_x| \eta^2 / \beta$ . Применить стандартное приближение огибающей  $\partial_t \rightarrow -v_g \partial_\eta$  в последнем члене

здесь недостаточно. Тем не менее важно отметить, что волновое действие (3.29) сохраняется, см. (3.49), хотя классическое приближение волнового пакета, в рамках которого оно обычно вводится, здесь неприменимо.

Поскольку амплитуда монохроматической волны вблизи критического слоя растет как  $1/\sqrt{\eta}$ , можно ожидать, что нелинейные эффекты здесь существенны. Для внутренних гравитационных волн анализ нелинейных эффектов в [146] был проведен на основе численного моделирования авторов и результатов эксперимента [159]. Авторы пришли к выводу, что линейной теории волн достаточно для описания волнового поля, если задан правильный профиль фонового среднего течения. В свою очередь, среднее течение вихря должно удовлетворять усредненному уравнению (1.18), учитывающему дивергенцию  $(r^2\Pi^{r\varphi})'/r^2$  напряжения Рейнольдса, создаваемого волнами, см. (3.12). Стоит оговориться, что такой подход предполагает однородность вдоль вертикального и азимутального направлений (отвечающих прямолинейным осям  $z$  и  $x$ ). Это соответствует рассмотрению волнового ансамбля, статистически однородного вдоль этих направлений. Рассмотрение волнового пакета в ином случае — например, локализованного также и по координате  $x$ , — нарушает однородность вдоль этого направления. Данная постановка задачи исследовалась в численном моделировании нелинейной динамики внутренних гравитационных волн вблизи критического слоя в [160].

## Глава 4. Поддержание геострофического вихря посредством поглощения инерционных волн

### 4.1 Введение

В турбулентном течении быстро вращающейся жидкости формируются долгоживущие геострофические вихри — статистически устойчивые квазидвумерные структуры, течение в которых поддерживается притоком энергии от мелкомасштабных турбулентных пульсаций и инерционных волн [18; 161]. Ранее в Главе 3 диссертации нами был рассмотрен механизм поддержания течения инерционными волнами: анализ уравнений динамики волны на фоне стационарного осесимметричного вихря при малой вязкости в коротковолновом пределе показывает, как сходящаяся волна отдает вихрю момент импульса и энергию при поглощении в своем критическом слое, тогда как волна, не имеющая критического слоя в теле вихря, отражается от вихревого течения без передачи. В данной главе это положен в основу для аналитического описания радиального профиля когерентного вихря и применимо непосредственно к экспериментальной реализации [46; 47], где вихрь поддерживается сходящимися волнами с периферии течения.

Квазидвумерный вихрь в турбулентной вращающейся системе впервые наблюдался в [92], где течение возбуждалось подачей воды через перфорированное дно сосуда; первым систематическим исследованием стал опыт [43] с быстро осциллирующей решеткой на дне вращающегося бака. Нас будут интересовать вихри, самопроизвольно возникающие в турбулентном течении; искусственно сформированные вихревые течения, у которых профили скорости изучались в ряде экспериментов [162; 163], см. также обзор [93], остаются за рамками настоящего исследования. Вихри, возникавшие в опыте [43], были лишь приблизительно соосны оси вращения системы, а их время жизни составляло несколько десятков собственных оборотов [93]. Неизбежные в установке с осциллирующей решеткой на дне неровности горизонтальной границы значительно ускоряют затухание геострофического течения по сравнению с экмановской оценкой [64].

В настоящей работе мы строим теорию, описывающую структуру долгоживущих вихрей, которые наблюдались в экспериментах [46; 47] во вращаю-

щемся кубе с накачкой у боковых границ сосуда и гладкими горизонтальными границами. Данное аналитическое описание радиального профиля когерентного вихря развивает подход работы [52]: структура вихря определяется уравнением Рейнольдса для среднего течения, а входящее в это уравнение напряжение Рейнольдса — статистикой инерционных волн. В общем случае динамика волн определяется как их взаимодействием со средним течением, так и нелинейным взаимодействием волн между собой; реализующийся в эксперименте предел достаточно сильного вращения позволяет пренебречь последним. Даже при таком упрощении уравнение Рейнольдса в теории оказывается нелокальным: отбор волн, дающих вклад в напряжение в данной точке, зависит от профиля течения на больших радиусах. Отметим, что радиальная зависимость скорости у самостоятельно сформировавшихся вихрей в перечисленных экспериментах не воспроизводится классическими моделями монопольного вихря, использованными в обзоре [93] для искусственно созданных течений. Полученные нами профили среднего течения характеризуются нетривиальным поведением  $U(r)$ , которое является результатом поглощения одной части сходящихся цилиндрических волн и отражения остальных внутри течения вихря. В данной работе развитая теория поглощения инерционных волн применяется к крупномасштабным циклоническим течениям, наблюдавшимся в серии экспериментов [46; 47]; обсуждением, чем отличаются условия опыта, в котором формировался крупномасштабный устойчивый антициклон [47], мы завершим изложение.

Глава 4 основана на материалах **работы** соискателя, опубликованной в журнале ВАК [147], а также препринта [164].

Оставшаяся часть главы организована следующим образом. В Разделе 4.2 формулируются общие соотношения квазилинейной модели когерентного течения и рассматривается распространение типичной коротковолновой инерционной волны на фоне вихря, с выделением точки поворота и критического слоя в ее профиле. Раздел 4.3 посвящен описанию статистики ансамбля волн на периферии и разложению по сходящимся цилиндрическим гармоникам, нормировка которого фиксируется потоком энергии внутрь вихря. В Разделе 4.4 выводится выражение для касательного напряжения Рейнольдса и формулируются правила отбора волн, передающих вихрю момент импульса. В Разделе 4.5 уравнение для среднего течения сводится к обыкновенному дифференциальному, и его численное решение сопоставляется с измеренными профилями угловой скорости циклонов. Раздел 4.6 содержит заключение и обсуждение границ применимости

линейного описания волн. Технические детали работы с нелокальным выражением касательного напряжения в модели перенесены в Приложение Д.

## 4.2 Квазилинейная модель когерентного вихря

Мы рассматриваем течение несжимаемой жидкости в системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью  $\Omega$ , направленной вдоль вертикальной оси  $Oz$ . В полном поле скорости жидкости  $\mathbf{v}$  мы выделяем геострофическую компоненту  $\mathbf{U}(t, \mathbf{r}_\perp)$ , зависящую только от горизонтальных координат и направленную ортогонально оси вращения, и быстро изменяющуюся во времени часть  $\mathbf{u}$ , существенно зависящую от вертикальной координаты,  $\mathbf{v} = \mathbf{U} + \mathbf{u}$ .

В модели будет изучаться установившееся течение вихря, который мы представляем постоянным с осесимметричным профилем, однородным вдоль вертикали  $\mathbf{U} = U(r)\mathbf{e}^\varphi$  в цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$ . Усреднением динамики по времени выводится уравнение Рейнольдса для среднего течения (1.18):

$$\alpha U + \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \Pi^{r\varphi} - \nu r^2 \Sigma) = 0, \quad \Pi^{r\varphi} = \langle u^r u^\varphi \rangle, \quad (4.1)$$

где угловые скобки  $\langle \dots \rangle$  означают усреднение по ансамблю инерционных волн,  $\nu$  есть кинематическая вязкость,  $\alpha$  — коэффициент трения Экмана о дно, определенный в (1.16). Локальный темп сдвигового течения  $\Sigma = U' - U/r$  (штрих здесь и далее означает производную по  $r$ ) характеризует дифференциальное вращение жидкости в вихре. Ниже нам будет удобнее описывать течение в терминах угловой скорости его вращения  $W = U/r$ , так что  $\Sigma = rW'$ .

Предполагается, что волны возбуждаются на периферии, далее распространяясь в теле вихря. В модели они представляются случайным ансамблем флуктуаций  $\mathbf{u}$  с нулевым средним по времени. На периферии, где  $U$  можно считать равным нулю, у волн в ансамбле полагается пространственно однородная и изотропная статистика с характерной величиной волнового вектора  $k_f$ . Выберем некоторое расстояние  $R_0$  до оси вихря, условно разделяющее тело вихря и периферию. Средняя кинетическая энергия волн в ансамбле  $\langle \mathbf{u}^2 \rangle$  при  $r > R_0$  пропорциональна создаваемому этими волнами потоку энергии  $f$  на единицу

массы (размерность  $\text{см}^3/\text{с}^3$ ) через цилиндрическую поверхность  $r = R_0$ , см. определение статистики в (4.22) и (4.24) ниже. Этот поток определяет максимально возможную мощность, которую вихрь может получить от турбулентных пульсаций для поддержания собственного течения. Ранее в теоретических работах [52; 64] использовалась другая величина, характеризующая передачу энергии от волн среднему течению — мощность на единицу массы  $\epsilon$  (размерность  $\text{см}^2/\text{с}^3$ ). Если условно предположить, что в нашем случае передача энергии распределена однородно по объему  $r < R_0$ , то связь между этими двумя характеристиками есть

$$2\pi R_0 f = \pi R_0^2 \epsilon. \quad (4.2)$$

Для того, чтобы в турбулентном волновом поле можно было выделить отдельные инерционные волны, требуется, чтобы их нелинейное взаимодействие было слабо по сравнению с силой Кориолиса, то есть чтобы было мало число Россби  $Ro \sim |\nabla \mathbf{u}|/2\Omega$ . В режиме слабой турбулентности средняя кинетическая энергия волн порядка  $\langle \mathbf{u}^2 \rangle \sim \sqrt{\epsilon \Omega}/k_f$  [77], поэтому требование малости числа Россби приводит к неравенству

$$k_f \sqrt{\epsilon/\Omega} \ll \Omega. \quad (4.3)$$

В неравенстве (4.3) слева стоит темп нелинейного взаимодействия волн между собой  $1/\tau_{tr}$  [77]. Мы предполагаем, что этим эффектом можно пренебречь также по сравнению с взаимодействием волн с геострофическим течением. Тогда динамика поля  $\mathbf{u}$  описывается линеаризованным уравнением Навье-Стокса [147]. Требование малости  $1/\tau_{tr}$  по сравнению со темпом  $\Sigma$  взаимодействия волн с геострофическим течением и с обратным временем пробега  $\Omega/k_f R_0$  волны по телу вихря приводит к неравенствам

$$k_f \sqrt{\epsilon/\Omega} \ll \Sigma, \quad \Omega/k_f R_0. \quad (4.4)$$

Размеры вихря предполагаются большими по сравнению с длиной волны  $\sim 1/k_f$ , а число Россби для вихря  $\Sigma/2\Omega \ll 1$ , поэтому оба неравенства в (4.4) являются более сильным условием по сравнению с (4.3).

### 4.2.1 Инерционная волна в течении вихря

Стационарный осесимметричный вихрь задает фон, однородный по переменным  $t, \varphi, z$ . Поэтому в описании волнового поля мы переходим к отдельной цилиндрической гармонике, обладающей частотой  $\omega$ , азимутальным числом  $m$  и вертикальным волновым числом  $k_z$ . Ниже мы рассматриваем уравнение для радиального профиля отдельной такой гармонике. Отправной точкой служит система линеаризованных уравнений (B.7–B.8) на компоненты скорости  $v \equiv u^r$ ,  $u \equiv u^\varphi$  в горизонтальной плоскости, выведенной в Приложении B. В коротковолновом пределе, когда параметры среднего течения меняются медленно на длине волны (условия применимости сформулированы ниже в (4.11)), эта система сводится к замкнутому эффективному уравнению для  $\text{div}_\perp(v, u)$ . Запишем его для давления волны  $p(r)$ , воспользовавшись (3.3):

$$\begin{aligned} (\tilde{\omega} - i\nu\Delta_0^{3D})^2 \Delta_0^{3D} p + 2\tilde{\Omega}(2\tilde{\Omega} + \Sigma) k_z^2 p &= 0, \\ \Delta_0^{3D} &= \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r - k_\perp^2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь мы восстанавливаем обозначения смещенной по Доплеру относительной частоты волны  $\tilde{\omega} = \omega - mW$ , квадрата волнового числа  $k_\perp^2 = k_z^2 + m^2/r^2$ , возникающего в лапласиане, и полной локальной скорости вращения жидкости  $\tilde{\Omega} = \Omega + W$ , которые были введены в Разделе 3.2.

Далее уравнение (4.5) будет рассмотрено в WKB-приближении, ср. с (3.23) — ищем решение задачи в виде:

$$p = \frac{C_+}{\sqrt{rk_r}} e^{i \int_{r_t}^r dr' k_r(r')} + \frac{C_-}{\sqrt{rk_r}} e^{-i \int_{r_t}^r dr' k_r(r')}, \quad (4.6)$$

где радиальное волновое число  $k_r(r)$  находится из полной квазиклассической величины вектора  $k_\nu(r)$  ( $\text{Re } k_\nu > 0$ ), определяющегося согласно уравнению

$$(\tilde{\omega} + i\nu k_\nu^2)^2 k_\nu^2 = 2\tilde{\Omega}(2\tilde{\Omega} + \Sigma) k_z^2, \quad k_r^2 = k_\nu^2 - k_\perp^2. \quad (4.7)$$

Влияние вязкости выражается в мнимой части  $k_\nu$ , что обеспечивает диссипацию волны при распространении. Его можно считать малым, если для типичной волны характерный темп у нее  $\nu k_f^2$  будет значительно меньше  $\tilde{\omega}$  у переноса средним течением и  $\Sigma$  у его неоднородности в теле вихря. Первое не выполняется в окрестности точки  $\tilde{\omega}(r_*) = 0$  — критического слоя, где происходит резонансное поглощение волны средним течением [153], что было подробно разобрано в

Подразделах 3.4.2, 3.5.1 предыдущей главы. Как отмечалось в Приложении Г, WKB-приближения недостаточно для описания прохождения инерционной волной критического слоя, и использовался альтернативный метод решения. Не беря в рассмотрение точку  $r_*$ , приведем ведущую поправку по вязкости в выражение  $k_\nu^2$  (где  $k_0(r)^2$  — значение в невязком пределе, соответствующее закону дисперсии (3.16)):

$$k_\nu^2 \approx k_0^2 \left( 1 - \frac{2i\nu k_0^2}{\tilde{\omega}} \right), \quad k_0^2 = \frac{2\tilde{\Omega}(2\tilde{\Omega} + \Sigma) k_z^2}{\tilde{\omega}^2}. \quad (4.8)$$

Полное невязкое уравнение на давление волны, справедливое за рамками коротковолнового предела, приведено в Приложении В, см. (В.9). В коротковолновом пределе оно упрощается до

$$\tilde{\omega}^2 \Delta_0^{3D} p + 2\tilde{\Omega}(2\tilde{\Omega} + \Sigma) k_z^2 p = 0, \quad (4.9)$$

воспроизводящее уравнение (3.15) из Подраздела 3.2.2 для функции  $p$  с локальным законом дисперсии:

$$\tilde{\omega} = \sqrt{2\tilde{\Omega}(2\tilde{\Omega} + \Sigma)} s k_z / \sqrt{k_r^2 + k_\perp^2}, \quad (4.10)$$

где  $s = \pm 1$  — поляризация волны. Множитель  $r^{-1/2}$  в (4.6) возникает вследствие цилиндрических координат. Поскольку в терминах переменной  $x = \ln(r/R_0)$  лапласиан принимает вид  $\Delta_0^{3D} = r(x)^{-2} \partial_x^2 - k_\perp^2$ , это позволяет записать для (4.9), как уравнения без  $\partial_x p$ , WKB-приближение в канонической форме на основе волнового числа  $K(x) = r(x)k_r$ , после чего перейти обратно:  $\int^x dx' K = \int^r dr' k_r$ . Рассуждение обобщается на уравнение (4.5) в пределе малой вязкости. Применимость коротковолнового приближения требует выполнения неравенств:

$$k_r' \ll k_r^2; \quad (\ln W)', (\ln \tilde{\Omega})' \ll k_r. \quad (4.11)$$

Вблизи точки поворота  $r_t$ , где  $k_r^2$  меняет знак (за счет центробежного потенциала  $m^2/r^2$ , содержащегося в  $k_\perp^2$ , см. (4.10), приближение нарушается. Ближе к центру, на  $r < r_t$ , решение  $p$  оказывается в запрещенной зоне волнового движения, где  $k_r$  мнимый, а поведение экспонент в (4.6) сменяется с осциллирующего на рост или затухание. Для цилиндрической гармоникой граничным условием является требование обращения в ноль в центре вихря, выходящее на асимптотику  $p \sim r^{|m|}$  при малых  $r$ . Для сшивки WKB-решений при прохождении через единственную точку поворота можно применить приближение

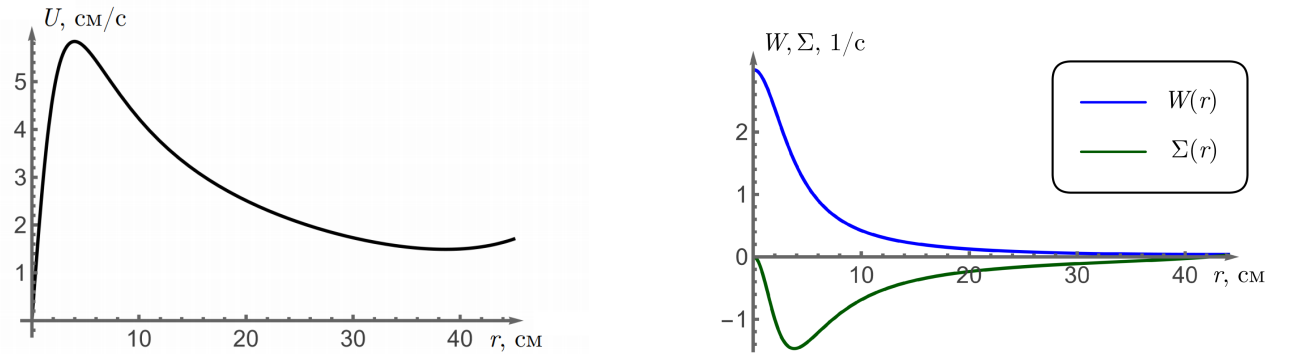


Рисунок 4.1 — Профиль среднего течения циклона для эксперимента при  $\Omega = 2.62 \text{ с}^{-1}$ . Радиальная зависимость приведена для азимутальной скорости  $U(r)$ , а также для угловой скорости  $W(r)$  и сдвига  $\Sigma(r)$ .

Лангера [165], также известный как МАФ-приближение [166], основывающийся на функциях Эйри. Запишем получающееся выражение для цилиндрической гармоники и ее затухающую асимптотику в запрещенной зоне:

$$p(r) = p_0 \frac{X^{1/4}}{\sqrt{rk_r}} \text{Ai}(-X), \quad X = \left( \frac{3}{2} \int_{r_t}^r dr' k_r \right)^{2/3}; \quad (4.12)$$

$$p(r) = \frac{p_0}{2\sqrt{\pi rk_r}} e^{\int_{r_t}^r dr' |k_r|}, \quad r < r_t. \quad (4.13)$$

В (4.12) выделяется ветвь степенной функции так, чтобы выражение  $X$  на основе (4.10) было вещественным и отрицательным на  $r < r_t$ ;  $X$  обозначается как  $\xi$  в книге [166]. При этом в разрешенной зоне, при  $r > r_t$ , решение выходит на линейную комбинацию сходящейся и расходящейся радиальных волн: в формуле (4.6) надо выбрать коэффициенты  $C_{\pm} = p_0 e^{\mp i\pi/4} / 2\sqrt{\pi}$ .

При немонотонном поведении профиля  $W(r)$  среднего течения можно было бы ожидать и более сложной картины, когда волна оказывается заперта в классически разрешенной области, ограниченной точками поворота  $r_{t1}$  и  $r_{t2}$  с обеих сторон. Такая ситуация возможна, потому что в законе дисперсии инерционных волн в цилиндрической геометрии фигурирует полная локальная угловая скорость  $\tilde{\Omega}$ , учитывающая вращение жидкости в вихре: ее радиальная зависимость сама по себе способна создать волновод. Захват внутренних волн в сдвиговом течении  $Ue^x$  исследовался в [167], где полагалось, что он вызван вертикальной неоднородностью частоты Брента-Вайсяля  $N(z)$ . В настоящей работе мы не рассматриваем такую возможность. Характерный профиль течения циклона, построенный по экспериментальным данным, приведен на Рис. 4.1: угловая скорость  $W(r) > 0$  монотонно затухает от оси вихря к периферии, где

среднее течение практически отсутствует. Детальное описание течения циклонов и того, как были получены экспериментальные профили, представлены в Разделе 4.5.

Проследим за поведением решения  $k_r(r)$  уравнения (4.10) для сходящейся цилиндрической волны. На больших расстояниях, где практически отсутствует среднее течение  $W$ , в законе дисперсии (4.10) полный волновой вектор  $\sqrt{k_r^2 + k_\perp^2}$  достигает фиксированного значения; здесь и далее обозначим его числом  $k > 0$ . При этом абсолютное значение проекции волнового вектора на горизонтальную плоскость оказывается равным  $q$ :  $q = \sqrt{k^2 - k_z^2} = \sqrt{k_r^2 + m^2/r^2} > 0$ . Таким образом, на самых больших расстояниях  $r \gg |m|/q$  радиальное волновое число  $k_r = q$ . Уменьшая  $r$ , можно встретить первой одну из двух особенностей в решении  $k_r(r)$ . Если такой особенностью оказывается  $k_r(r_t) = 0$ , это означает, что такая сходящаяся цилиндрическая волна претерпевает отражение в точке поворота  $r = r_t$ , переходя в расходящуюся волну. Другая особенность, для которой, наоборот,  $k_r(r_*) = \infty$  (что равносильно условию обращения в ноль относительной частоты  $\tilde{\omega}(r_*) = 0$ ), соответствует критическому слою. В критическом слое происходит резонансное поглощение волны средним течением, которое впервые было изучено в [24] для задачи о внутренних гравитационных волнах в стратифицированной жидкости. Эффективность поглощения растет с уменьшением локального числа Россби  $\rho$ , введенного в (3.32). В нашем случае оно ожидается малым для типичной волны: за счет условия  $\rho \ll 1$  выполняется первое неравенство (4.11) и можно пренебречь прошедшей и отраженной волнами — их амплитуды оказываются малы по параметру  $e^{-\pi/\rho} \ll 1$ . С учетом закона дисперсии (4.10), его возможно записать в виде

$$\rho = \frac{2\Omega}{\sqrt{2\tilde{\Omega}(2\tilde{\Omega} + rW')}} \cdot \frac{|mW'|}{k|\omega|} \ll 1. \quad (4.14)$$

Если число Россби для геострофического течения невелико,  $W \ll 2\Omega$ , то первый множитель в (4.14) близок к 1, так что условие (4.14) упрощается до  $|mW'|/k\omega \ll 1$ .

В невязком пределе компоненты поля скорости цилиндрической гармоник в плоскости течения,  $u^r \equiv v$ ,  $u^\varphi \equiv u$ , выражаются через давление следующим образом

$$v = \frac{i(\tilde{\omega}p' - 2\tilde{\Omega}pm/r)}{4\tilde{\Omega}^2 + 2\tilde{\Omega}\Sigma - \tilde{\omega}^2}, \quad u = \frac{(2\tilde{\Omega} + \Sigma)p' - \tilde{\omega}pm/r}{4\tilde{\Omega}^2 + 2\tilde{\Omega}\Sigma - \tilde{\omega}^2}. \quad (4.15)$$

Как было показано в Подразделе 3.2.1, у монохроматической цилиндрической волны сохраняется поток момента импульса через поверхность радиуса  $r$ :

$$2\pi r^2 \Pi^{r\varphi} = 2\pi r^2 \langle u^r u^\varphi \rangle_w = \pi r^2 \operatorname{Re}(uv^*) = \text{const}, \quad (4.16)$$

где усреднение производится по волновым осцилляциям. Величина (4.16) фигурирует в уравнении Рейнольдса (4.1) в виде производной. Постоянство потока (4.16) нарушается вблизи критического слоя вследствие поглощения волны.

Поглощение монохроматической инерционной волны вблизи критического слоя с учетом вязких эффектов было разобрано в Подразделе 3.5.1 и Приложении Г. Было получено решение около слоя с вязким пространственным масштабом  $\eta_v = |\nu/mW'|^{1/3}$ , см. формулы (3.43) и (Г.2). Для малых  $\rho$  волна затухает на расстояниях  $\rho^{-2/3}\eta_v$  около него, как обсуждалось ниже формулы (Г.4) и Рис. Г.1. Мы основываемся на приближении малой вязкости в работе, полагая  $\eta_v$  значительно меньше иных масштабов в задаче; далее будем считать поглощение в критическом слое основным механизмом передачи момента импульса и энергии среднему течению. В частности, пренебрежем вязкой диссипацией волны согласно (4.8) при распространении.

### 4.3 Ансамбль волн на периферии

На периферии течения, поле  $\mathbf{u}$  описывает инерционные волны в однородном пространстве. Пренебрегая так же эффектами диссипации и межволновым взаимодействием, опишем их динамику разложением (1.4–1.5) по ортонормированному базису плоских поперечных волн с амплитудами  $a_{\mathbf{k}}^s$ :

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}} = \sum_{s=\pm 1} a_{\mathbf{k}}^s \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s e^{-i\omega_{\mathbf{k}}^s t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad \omega_{\mathbf{k}}^s = 2s\Omega\zeta, \quad \zeta = \cos \theta_{\mathbf{k}} = k_z/k. \quad (4.17)$$

Соответствующее (4.17) разложение давления по плоским волнам имеет вид (здесь  $q^2 = k_x^2 + k_y^2$ ):

$$p = \sum_{s=\pm 1} s \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{-\sqrt{2}\Omega q}{k^2} a_{\mathbf{k}}^s e^{-i\omega_{\mathbf{k}}^s t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (4.18)$$

В нашей задаче с осевой симметрией, описание ансамбля требуется перенести на цилиндрические гармоники. При отсутствии геострофического течения

приближенное уравнение (4.9) становится точным, см. (3.6), и сводится к уравнению Бесселя. Его решением, остающимся конечным в начале координат, является функция Бесселя  $J_m(qr)$  порядка  $m$ , где планарное волновое число  $q = \sqrt{k^2 - k_z^2}$  выражается через полную величину  $k$ . Воспользовавшись (4.15), выразим компоненты скорости для свободной волны [168] через функцию Бесселя  $J_m(qr)$  порядка  $m$  и смежных с ним  $J_{m\pm 1}(qr)$ . Здесь косинус  $\zeta = \cos \theta_{\mathbf{k}}$  определен аналогично, а  $\chi$  обозначает совокупность чисел, задающих гармонику:

$$\begin{aligned} v &= b_{\chi} [(1 - s\zeta) J_{m-1}(qr) + (1 + s\zeta) J_{m+1}(qr)], \\ u &= ib_{\chi} [(1 - s\zeta) J_{m-1}(qr) - (1 + s\zeta) J_{m+1}(qr)], \\ w &= 2is \sin \theta_{\mathbf{k}} \cdot b_{\chi} J_m(qr); \quad \chi = (\mathbf{k}, s), \quad \mathbf{k} = (q, m, k_z). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Разложение давления по такому базису с амплитудами  $b_{\chi}$ :

$$p(t, r, \varphi, z) = \sum_{s=\pm 1} \int \frac{dk_z}{2\pi} \int_0^{\infty} q dq \sum_m \frac{4i\Omega q}{k^2} b_{\chi} e^{im\varphi + ik_z z - i\omega_{\mathbf{k}}^s t} J_m(qr). \quad (4.20)$$

Сравнивая разложение свободных волн по цилиндрическим гармоникам (4.20) с фурье-разложением по плоским волнам (4.18), находится связь амплитуд:

$$b_{\chi} = \frac{i^{m+1} s}{2^{5/2} \pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^{-im\phi} a^s(q \cos \phi, q \sin \phi, k_z). \quad (4.21)$$

А именно, в правой части следует перейти к интегрированию в (4.18) по компонентам вектора  $\mathbf{k}$  в цилиндрической системе координат, получив интегральное представление функции Бесселя  $J_m(qr)$ .

Ансамбль в модели задается в терминах амплитуд  $a_{\mathbf{k}}^s$  у плоских волн (4.17) с установившейся во времени статистикой. Она полагается однородной и изотропной в пространстве, гауссовой с нулевым средним и описывается парной корреляционной функцией

$$\begin{aligned} \langle a_{\mathbf{k}}^s a_{\mathbf{k}'}^{s'*} \rangle &= (2\pi)^3 \delta^{ss'} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \frac{3\pi f}{\Omega} k \Xi(k), \\ \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \Xi(k) &= 1. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Изотропия означает, что нормированная корреляционная функция  $\Xi(k)$  зависит только от абсолютного значения волнового вектора  $k$ ; характерное волновое число  $k_f$  в ансамбле задает ее масштаб. Коэффициент в правой части (4.22) согласован с определением  $f$  как потока энергии внутрь вихря, см. (4.2). Далее будет пояснено его происхождение.

Из соотношения (4.21) следует корреляционная функция для  $b_{\chi}$ :

$$\langle b_{\chi} b_{\chi'}^* \rangle = 2\pi \delta^{ss'} \delta_{mm'} \delta(k_z - k'_z) \frac{\delta(q - q')}{q} \langle |b_{\chi}|^2 \rangle, \quad \langle |b_{\chi}|^2 \rangle = \frac{3f}{2^4 \Omega} k \Xi(k), \quad (4.23)$$

где, напомним,  $k^2 = q^2 + k_z^2$ . Существенный вклад в волновое поле дают только те цилиндрические гармоники, для которых точка отражения  $r_t = |m|/q$  оказывается меньше текущей координаты  $r$ ,  $r_t < r$ . Остальные волны претерпевают отражение на расстояниях больших  $r$ , и потому их амплитуда в точке  $r$  оказывается пренебрежимо малой.

Свободная цилиндрическая гармоника является стоячей волной — суперпозицией  $J_m = (H_m^{(1)} + H_m^{(-1)})/2$  волн одинаковой амплитуды, бегущих в противоположных направлениях вдоль радиальной координаты, где  $H_m^{(\pm 1)}$  — функции Ханкеля 1 и 2 рода, соответственно. Сходящейся цилиндрической волне соответствует решение  $H_m^{(\sigma)}$ , где знак частоты  $\sigma = \text{sign } \omega$ . Радиальная компонента плотности потока энергии, создаваемая одной сходящейся бегущей волной на расстоянии  $r > r_t$ , принимает отрицательное значение

$$j_{\chi}^r = \frac{1}{2} \text{Re } p v^* = -\frac{2\Omega |k_z|}{\pi k^3 r} |b_{\chi}|^2. \quad (4.24)$$

Как и должно быть в невязком пределе, произведение  $r j_{\chi}^r$  не зависит от  $r$ , см. (3.13). Полный поток энергии  $-2\pi r j_r$  в направлении к оси координат, произведенный ансамблем тех сходящихся цилиндрических волн, для которых точка отражения  $r_t$  находится ближе к оси, чем  $R_0$ , оказывается равным

$$-2\pi r \sum_{s=\pm 1} \int \frac{dk_z}{2\pi} \int_0^{\infty} q dq \sum_{m=-m_0}^{m_0} \langle j_{\chi}^r \rangle = 2\pi R_0 f, \quad (4.25)$$

где  $m_0 = q R_0$ . При получении правой части (4.25) сначала мы подставили правую часть (4.23) для  $\langle |b_{\chi}|^2 \rangle$  в (4.24), затем была взята сумма по  $m$ , а после в интегрировании мы перешли от  $q = k \sin \theta$ ,  $k_z = k \cos \theta$  к сферическим координатам  $(k, \theta)$  и использовали условие нормировки (4.22). Таким образом, определение статистики ансамбля (4.22) действительно согласовано с (4.2).

Сходящаяся цилиндрическая волна в невязком пределе несет постоянный падающий поток момента импульса (4.16):

$$r^2 \Pi_{\chi}^{r\varphi} = \frac{r^2}{2} \text{Re } u v^* = \frac{-m\sigma}{\pi k^2} |b_{\chi}|^2. \quad (4.26)$$

в области до точки поглощения или отражения,  $r > r_*, r_t$ .

#### 4.4 Касательное напряжение Рейнольдса

Запишем выражение для касательного напряжения Рейнольдса  $\langle u^r u^\varphi \rangle$  в (4.1), разложенного по волнам в ансамбле (4.22). При описании отдельной монохроматической волны мы опираемся на решение, построенное в Подразделе 4.2.1. Прежде всего отметим, что те волны, которые отразились перед поглощением, не вносят вклад в это среднее, поскольку амплитуда отраженной волны в невязком пределе равна амплитуде падающей, см. обсуждение ниже (4.12). В результате поток отраженной волны компенсирует падающий. Поэтому вклад вносят только те волны, которые поглотились в критическом слое, и для которых это поглощение еще не произошло,  $r > r_*$ :

$$\Pi^{r\varphi} = \int \frac{dk_z}{2\pi} \int_0^\infty q dq \sum'_{s,m} \langle \Pi_{\chi}^{r\varphi} \rangle \theta(|\omega_{\chi}| - \sigma m W) \theta(r_* - r_t). \quad (4.27)$$

Штрих у знака суммы означает, что она ограничена и должна производиться только по тем числам  $s, m$ , для которых  $\sigma m W > 0$  (т. е.  $msk_z W > 0$ ). Это условие означает, что волна должна нести момент импульса того же знака, что и у вихря, см. (4.26), тем самым раскручивая среднее течение при его передаче. Первая  $\theta$ -функция воспроизводит условие  $r_* < r$  (напомним, мы считаем  $W(r)$  монотонной функцией). Вторая  $\theta$ -функция оставляет только те волны, для которых точка поворота находится к оси ближе критического слоя,  $r_t < r_*$ . Снова перейдем к сферическим координатам, обозначив  $\zeta = \cos \theta_{\mathbf{k}}$ . С учетом (4.23, 4.26) производная потока момента импульса может быть записана в виде:

$$(r^2 \Pi^{r\varphi})' = \frac{3fW'(r)}{32\pi^2\Omega} \int_0^\infty k^2 dk \frac{\Xi(k)}{k} \sum_{s,m} m^2 \int_{-1}^1 d\zeta \delta(2\Omega s \zeta - mW) \theta(r - r_t). \quad (4.28)$$

Здесь  $\delta$ -функция задает условие резонанса  $2\Omega s \zeta = mW(r)$ , ведь согласно (4.16) ненулевой вклад в (4.28) вносят только те волны, для которых текущее положение  $r$  является критическим слоем,  $r_* = r$ . Требование  $\theta(r - r_t) = 1$  равносильно условию, что радиальное волновое число (4.10)  $k_r^2(\xi) > 0$  при всех  $\xi > r$ . Максимально возможное  $|m| = m_*$  определяется из условия, что в точке минимума  $\xi = \xi_*$  радиальное волновое число равно нулю:  $k_r^2(\xi_*) = 0$ . Поскольку  $\zeta \propto m$  при резонансе, то предел суммирования  $m_*$  зависит только от  $k$ . Приблизив сумму

по  $m$  интегралом, получаем

$$(r^2 \Pi^{r\varphi})' = \frac{fW'(r)}{16\pi\Omega^2} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{2\pi^2} \frac{\Xi(k)}{k} m_*^3. \quad (4.29)$$

Нам потребуется явное выражение для ограничения  $m_*$  в сумме по азимутальным гармоникам. Рассмотрим ограничение в терминах косинуса  $\zeta_*$ . Совместив резонансное соотношение  $2\Omega s\zeta = mW(r)$  с (4.10), находим: условие  $r > r_t$ , чтобы падающая волна не попадала в запрещенную область до поглощения, требует выполнения неравенства для всех  $\xi > r$  снаружи:

$$\zeta^2 \leq \frac{2\tilde{\Omega}(2\tilde{\Omega} + \Sigma)(\xi) \cdot W^2}{(2\Omega)^2 [W - W(\xi)]^2} \frac{(k\xi W/2\Omega)^2}{1 + (k\xi W/2\Omega)^2}. \quad (4.30)$$

Заметим, что на краю системы  $\xi \rightarrow R_0$  при учете резонансного соотношения вторая дробь представляет условие  $(kR_0 \sin \theta)^2 \geq m^2$ ; оно использовалось для обрезки  $m_0$  при вычислении (4.25). Значение для обрезки  $\zeta_*^2$  определяется как наименьшее из 1 и минимума правой части неравенства; обрезка по номеру гармоники — как натуральное число:

$$m_* = \lfloor 2\Omega\zeta_*/|W(r)| \rfloor. \quad (4.31)$$

Далее, полагая его значение достаточно большим, как было сделано при взятии суммы для (4.29), мы будем пренебрегать округлением. Уравнение на положение экстремума  $\xi_*(r)$ , если приблизить  $2\tilde{\Omega}(2\tilde{\Omega} + \Sigma)(\xi_*) \approx (2\Omega)^2$  в силу быстрого вращения системы, имеет вид:

$$[1 + (k\xi_* W/2\Omega)^2] \xi_* W'(\xi_*) = W(\xi_*) - W(r). \quad (4.32)$$

Для монотонно затухающего профиля  $W(r)$  угловой скорости вращения вихря решение (4.32) на экстремум заведомо находится снаружи,  $\xi_* > r$ . Радиус  $\xi_*(r)$  имеет смысл точки отражения для гармоники в ансамбле, следующей за предельной  $m_*$ .

Результат (4.29) перестает быть применимым около оси вихря, где вязкий механизм поглощения теряет эффективность из-за близости к точке поворота. Сравнение масштабов для расстояния  $r - r_t$  с характерной длиной поглощения волны, см. обсуждение в конце Подраздела 4.2.1, для гармоник порядка  $m_*$  (на которых набирается сумма (4.28)) требует рассмотрения на достаточном отдалении от центра:

$$r \gg r_\nu = \left( \frac{\nu k_f^2}{W} \right)^{1/3} \frac{m_*^{2/3}}{k_f}.$$

## 4.5 Профиль когерентного циклона

Изучим решение уравнения на средний поток (4.1), у которого угловая скорость  $W(r)$  есть монотонно затухающая знакопостоянная функция. Мы соотносим такой профиль с когерентными циклоническими течениями, которые наблюдались в условиях эксперимента [46], поэтому считаем  $W > 0$ . Для проведения сравнения результатов теории и экспериментальных наблюдений опишем сначала полученные в эксперименте данные. Значения азимутальной скорости циклона усреднялись по углу и времени его жизни. Представленные на Рис. 4.2, 4.3 графики  $W(r)$  — профили течения, усредненные по 5 долгоживущим циклонам, близким по максимальной величине скорости и наблюдавшимся в одном эксперименте (стандартное отклонение находится в пределах 10%). Вдалеке у  $W(r)$  имеется выраженный минимум. Последующий рост  $W(r)$  происходит на расстояниях порядка радиуса установки 0.5 м, и поэтому мы относим его к внешнему среднему течению и принимаем положение минимума  $R_v$  за границу циклона.

Для монотонно убывающей функции  $W$  удобно использовать подстановку WKБ-типа:

$$W(r) = W(0)e^{-\int_0^r dx \gamma(x)}, \quad (4.33)$$

где  $\gamma = -W'/W$  есть локальный декремент затухания, меняющейся на масштабе течения, так что  $\gamma/k_f \ll 1$ . Уравнение на положение экстремума (4.32) приобретает вид:

$$e^A = 1 + \gamma(\xi_*)\xi_* [1 + B], \quad (4.34)$$

$$A = \int_r^{\xi_*} dx \gamma(x), \quad B = (k\xi_* W(r)/2\Omega)^2.$$

Конструкция  $B = (k\xi_* W(r)/2\Omega)^2$ , возникшая в условии (4.30), убывает с удалением от оси вихря, а ее значение задает поведение решения (4.32). Около центра  $\xi_*(r)$  остается далеко,  $W(0)$  сравнима с  $\Omega$ , поэтому  $B \gg 1$ . Анализ для отдаленного экстремума представлен в Приложении Д. Он показывает, см. (Д.2), что экстремум приближается к оси,  $d\xi_*/dr < 0$ , когда  $B > 1$ , и, наоборот,  $\xi_*(r)$  растет при  $B < 1$ . При  $B \ll 1$  его рост приближенно можно считать линейным. Этот рост существенно замедляется при приближении к краю вихря  $R_v$ .

Минимальное значение  $\xi_* \approx 2k_f^{-1}\Omega/W(r_m)$  достигается на расстоянии  $r_m$ , где  $B \approx 1$ . Угловая скорость в циклоне при  $r_m \sim 10$  см оказывается уже значительно ослабленной по сравнению с ее значением на оси,  $W(r_m) \ll W(0)$  (характерный пример поведения представлен на Рис. Д.1 в Приложении Д.). Поэтому минимальное  $\xi_*$  в свою очередь отстоит далеко от точки  $r_m$  в смысле  $W(\xi_*) \ll W(r_m)$ . С другой стороны, функция в выражении (4.30), (она определяет ограничение сверху для  $m^2(\xi)$ , см. (4.31)), меняется незначительно на больших  $\xi$ , покуда  $\xi$  отстоит далеко от  $r$ ,  $W(\xi) \ll W(r)$ , см. формулу (Д.3) в Приложении Д. Поэтому при описании тела вихря можно приближенно полагать, что обрезка (4.30) определяется дальним масштабом  $R_v$ , и пренебречь отклонением от ее значения в  $\xi_* < R_v$ .

Сделаем еще одно упрощение. Будем считать, что спектр инерционных волн узок, так что корреляционная функция  $\Xi(k)$  (4.22) отлична от нуля только вблизи некоторой  $k_f$ . В результате уравнение Рейнольдса (4.1) принимает вид обыкновенного дифференциального уравнения. Линейное трение о дно можно считать доминирующим механизмом диссипации для вихря за пределами его вязкой сердцевинки масштаба  $\sqrt{\nu/\alpha}$ . Согласно данным эксперимента, трение о дно преобладает начиная с  $r_0 = 3$  см, что примерно в 2 раза больше  $\sqrt{\nu/\alpha}$ . На Рис. 4.2, 4.3 профили на основе измерений (точки, см. детали в начале раздела) сравниваются с численным решением (сплошная кривая) дифференциального уравнения

$$\frac{W'}{r^3} \left[ \min \left( \left( \frac{2\Omega}{W} \right)^2, \frac{W^2}{(W - W_*)^2} \frac{(k_f R_v)^2}{1 + B_v} \right) \right]^{3/2} + \kappa W = 0, \\ \kappa = 16\pi\Omega^2\alpha k_f / f, \quad W_* = W(R_v), \quad (4.35)$$

где коэффициент  $\kappa$  равен отношению  $\alpha$  к внешнему множителю у выражения (4.29) после взятия интеграла и имеет размерность  $\text{см}^{-4}$ . Также введено обозначение  $B_v$  — это  $B$  из (4.34), взятое в  $\xi = R_v$ .

Для решения требуется определить граничные условия и параметры в уравнении. Нами был выработан следующий алгоритм. По экспериментально измеренному профилю скорости определяется начальное условие  $W(r_0)$  и граница вихря  $R_v$ . Коэффициент  $\kappa$  выбирался таким, чтобы производная решения в начале  $W'(r_0)$  совпала со значением производной у профиля, найденным из эксперимента. Поскольку в начале на  $r \approx r_0$  значение  $B_v(r_0) \gg 1$ , то (4.35) упрощается и  $\kappa$  определяется отдельно от оставшихся параметров. Масштаб  $k_f$

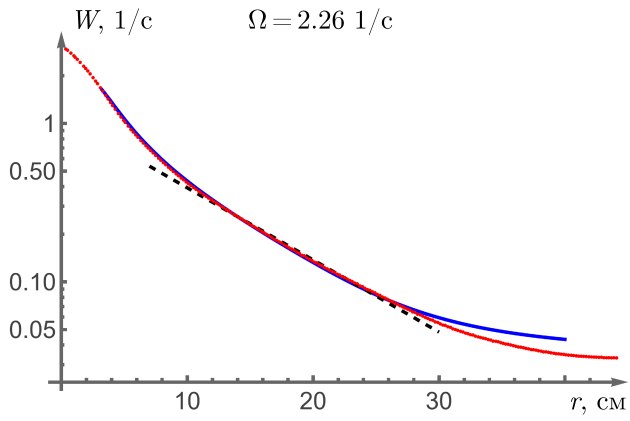
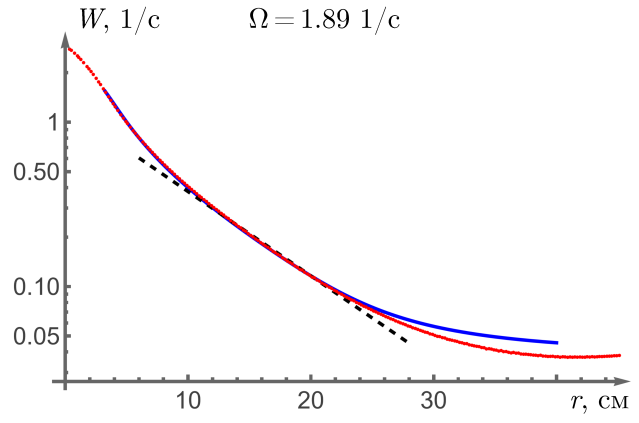
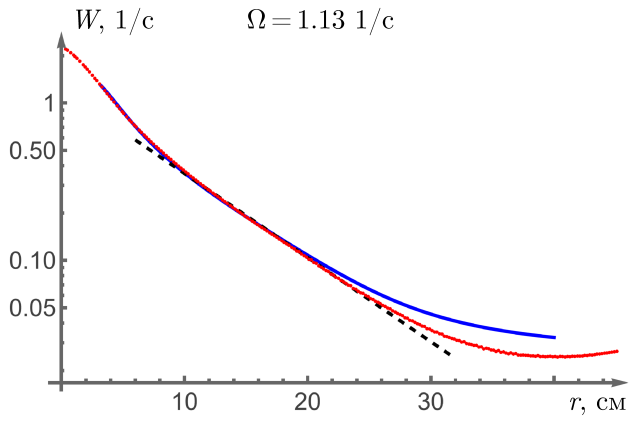


Рисунок 4.2 — Сравнение угловой скорости  $W(r)$  циклонов с численным решением (4.35) в экспериментах при медленном вращении в логарифмическом масштабе. Черный пунктир приближает экспериментальные данные экспоненциальным поведением.

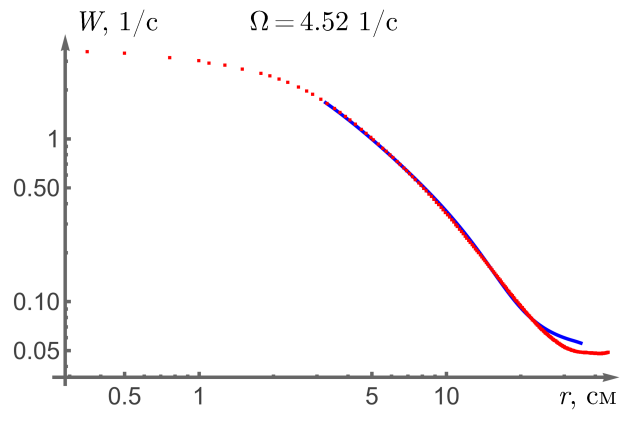
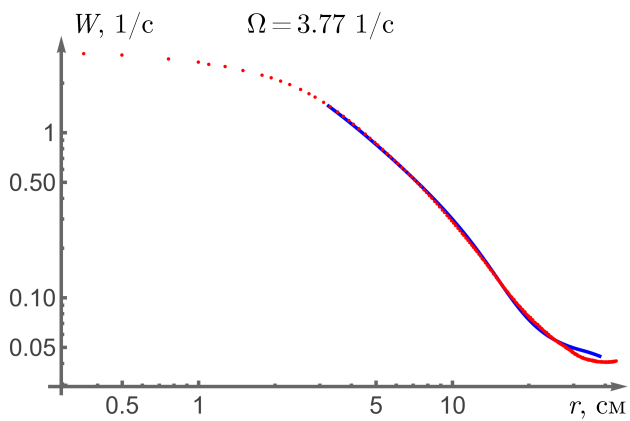
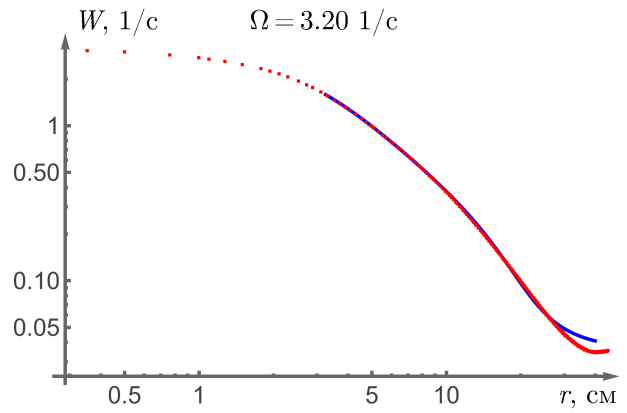
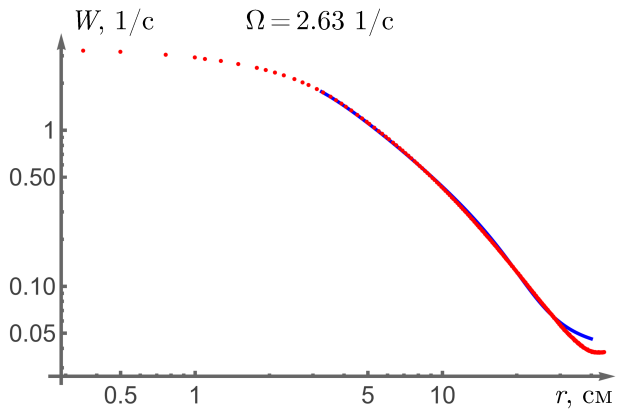


Рисунок 4.3 — Сравнение угловой скорости  $W(r)$  циклонов с численным решением (4.35) в экспериментах при быстром вращении; обе оси логарифмические.

|                          |      |      |      |      |      |      |      |
|--------------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| $\Omega, \text{с}^{-1}$  | 1.13 | 1.89 | 2.26 | 2.63 | 3.20 | 3.77 | 4.52 |
| $R_v, \text{см}$         | 41   | 42   | 43   | 43   | 41   | 39   | 38   |
| $\kappa, \text{см}^{-4}$ | 0.03 | 0.10 | 0.14 | 0.21 | 0.53 | 1.43 | 1.52 |
| $k_f, \text{см}^{-1}$    | 0.28 | 0.35 | 0.44 | 0.44 | 0.55 | 0.61 | 0.67 |
| $\gamma, \text{см}^{-1}$ | 0.09 | 0.09 | 0.08 | 0.10 | 0.11 | 0.14 | 0.13 |

Таблица 1 — Параметры для численного решения уравнения (4.35). Нижняя строка: декремент в экспоненциальной аппроксимации темпа сдвига  $\Sigma(r)$ .

волн в ансамбле (по оценке из экспериментов [46; 47]:  $k_f \sim 1 \text{ см}^{-1}$ ) в уравнении подбиралось так, чтобы согласовать дальнейшее поведение профиля  $W(r)$ . Значения по каждому профилю приведены в Таблице 1. Параметры  $\kappa, k_f$  растут с увеличением скорости вращения  $\Omega$  системы. Точность, с которой они записаны, мотивирована лучшим приближением решения (4.35) для  $W(r)$  с эксперимента; она превышает погрешность определения экспериментальной зависимости  $W(r)$ . Отклонение численного решения после  $r = 25 \text{ см}$  усиливается по мере приближения  $W(r)$  к периферийному значению  $W(\xi_*)$ . Тогда огрубление  $\xi_* \rightarrow R_v$  для (4.35) более неприменимо, поскольку предположение о том, что ограничение (4.30) на  $m^2$  медленно изменяется с  $\xi$ , перестает выполняться (см. формулы (Д.3) и ниже в Приложении Д).

Графики, на которых измеренные профили сравнивались с решением (4.35), описанным выше, при  $\Omega > 2.5 \text{ с}^{-1}$  представлены в двойном логарифмическом масштабе на Рис. 4.3, поскольку функция  $W(r)$  для них демонстрировала поведение, похожее на степенное затухание. Напротив, при медленном вращении в эксперименте,  $\Omega = 1.1 \div 2.3 \text{ с}^{-1}$ , в профиле  $W(r)$  можно выделить область с приблизительно экспоненциальным затуханием угловой скорости; такие циклоны представлены в логарифмическом масштабе на Рис. 4.2. Черная пунктирная прямая проведена для обозначения области экспоненциального затухания циклона ( $W$  уменьшается более чем в 5 раз). Однако стоит отметить, что функция  $\Sigma(r)$  имеет подобную экспоненциальную асимптотику в промежуточной области с хорошей точностью при всех скоростях вращения:  $\Sigma(r) \propto e^{-\gamma r}$ . В среднем  $\gamma$  немного увеличивается на больших скоростях вращения  $\Omega$ : ее значения  $\gamma$  приведены внизу Таблицы 1.

Рассчитанная по  $\kappa, k_f$  зависимость  $\epsilon(\Omega)$  оказывается хаотически распределенной в интервале  $0.06 \dots 0.11 \text{ см}^2/\text{с}^3$ , что показывает реальную ошибку наших

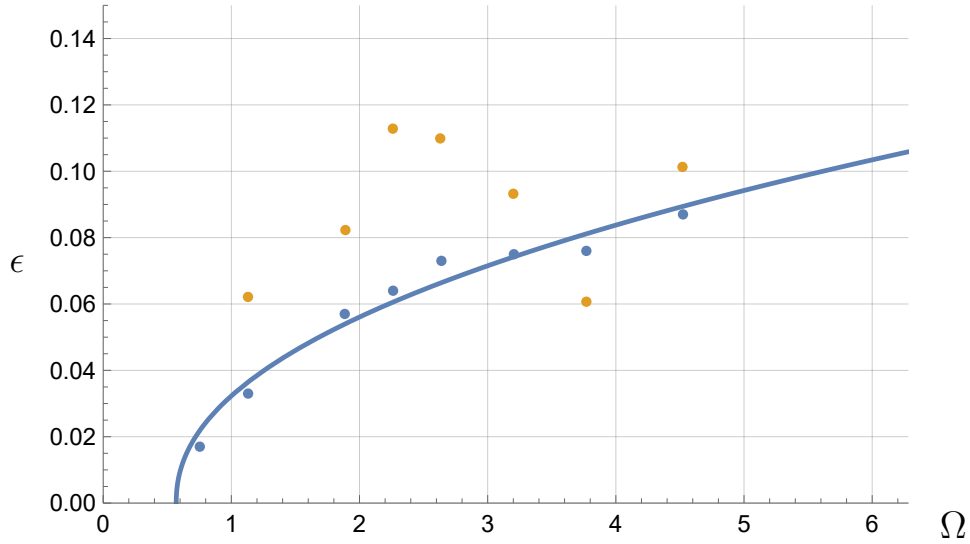


Рисунок 4.4 — Экспериментальные значения средней мощности диссипации энергии в объеме (синий) и значения  $\epsilon$  на основе параметров численного решения (4.35) (желтый). Все физические величины измеряются в единицах СГС.

вычислений. Из эксперимента можно непосредственно вычислить  $\epsilon_{\text{exp}} = 2\alpha E$ , где  $E$  — средняя плотность энергии течения, см. Рис. 4.4. Синяя линия фита  $\epsilon_{\text{exp}} = 0.048 \cdot (\Omega - 0.57)^{0.46}$  проведена по точкам экспериментальных данных. Полученные значения  $\epsilon$  и  $\epsilon_{\text{exp}}$  сравнимы по порядку (среднее значение для отношения  $\overline{\epsilon/\epsilon_{\text{exp}}} \approx 1.4$ ), что говорит о разумности развитой нами теории.

## 4.6 Заключение главы

Нами развита теория, описывающая структуру долгоживущих геострофических вихрей, образующихся в турбулентном потоке вращающейся жидкости. В начале статистического описания взаимодействия вихря с короткими инерционными волнами в квазилинейном приближении, мы рассматривали влияние вязкости и аналитически оценили его как малую поправку при распространении волны. Сформулированная далее модель поглощения волн представляет собой предел бесконечно малой вязкости. Модель успешно применена к описанию экспериментально наблюдающихся вихрей. Результаты разумно согласуются с независимыми измерениями мощности возбуждения, поддерживающего течение.

При более низких скоростях вращения перестает работать линейное приближение для динамики волн. Признаком возрастания роли нелинейного взаимодействия волн является все менее крутой энергетический спектр при уменьшении частоты вращения куба. Качественная смена режима динамики инерционных волн сопровождается установлением антициклона. На периферии антициклона [47], в области циклонического течения, энергетический спектр в плоскости  $E_k \propto k^{-5/2}$  как у прямого каскада (1.10). Наш дополнительный анализ показывает, что там действительно нарушается первое из условий (4.4). При скорости вращения  $\Omega \approx 0.38 \text{ с}^{-1}$  темп сдвига  $\Sigma \approx 0.1 \text{ с}^{-1}$ , а темп нелинейного взаимодействия волн можно оценить как  $1/\tau_{tr} = \langle \varpi_z^2 \rangle / 2\Omega \approx 0.3 \text{ с}^{-1}$ , по среднему квадрату вертикальной завихренности  $\langle \varpi_z^2 \rangle$ . Иерархия  $2\Omega > 1/\tau_{tr} > \Sigma$  свидетельствует о прямом каскаде турбулентности инерционных волн, возмущенном наложенным крупномасштабным сдвиговым течением.

Существенность нелинейного взаимодействия волн между собой следует и из нашей теории. Существенность межволнового взаимодействия следует и из самой нашей теории. Построенная линейная модель поглощения не способна поддерживать профиль антициклона, у которого  $W(r)$  немонотонно убывает от максимума  $W > 0$  к отрицательным значениям в глубине вихря. В области между максимумом  $W$  и радиусом, где  $W = 0$ , передача момента импульса прекращается. Действительно, при уменьшении  $r$  каждая сходящаяся гармоника поглощается там, где условие  $W = \omega/m$  встречается в первый раз. При этом любое значение  $W$  из этой области достигается и на периферии вихря (где  $W > 0$  затухает). Поэтому уравнение (4.35) не может быть удовлетворено там, где  $W(r)$  меняет знак. Таким образом, для описания антициклона требуется теория, выходящая за рамки линейного описания волн.

## Заключение

В диссертации проведено теоретическое исследование характеристик переноса когерентным вихревым течением скалярного поля пассивной примеси и векторного поля инерционной волны. Для инерционных волн произведено построение статистической теории их взаимодействия с геострофическим вихрем во вращающейся турбулентности. Ниже сформулированы решенные задачи, на которых мы фокусировались в ходе исследования.

Первая часть работы посвящена статистическому описанию перемешивания пассивного скалярного поля в сдвиговом течении с гладкими возмущениями малой амплитуды, что моделирует локально структуру скорости в когерентном вихре. Было показано, как анизотропия, вносимая средним сдвигом, изменяет статистические свойства перемешивания по сравнению с изотропным случаем. Целью исследования было также установление статистических характеристик такого турбулентного потока по статистике пассивной примеси, которую он перемешивает. Полнее всего эта связь проявляется при распаде — свободном перемешивании исходного распределения скаляра до его полной гомогенизации. Мы показали, как парная корреляционная функция скаляра напрямую выражается через статистику расхождения в потоке близких лагранжевых траекторий, характеризуемой функцией Крамера, и потому позволяет восстанавливать ее из измерений. Также мы исследовали статистику моментов и отдельные свойства корреляционных функций более высокого порядка. Эта часть исследования представлена в Главе 2 диссертации.

Во второй части работы изучалось взаимодействие инерционной волны с когерентным геострофическим вихрем в быстро вращающейся жидкости. Ранее такое взаимодействие описывалось в локальной модели неограниченного течения, поддерживаемого равномерной по объему случайной накачкой. Нашей задачей было описание механизма передачи импульса и энергии от инерционной волны осесимметричному геострофическому вихрю; такая постановка расширяет теорию на случаи, когда существенны конечный размер вихря и пространственная локализация возбуждения. Мы установили, при каких условиях волна отражается от вихря, а при каких поглощается в соответствующем ее параметрам критическом слое, передавая свой момент импульса и энергию среднему течению, и описали динамику и эффективность этого поглощения. Анализ

включает учет влияния вязкости на поглощение как монохроматической волны, так и волнового пакета. Вдобавок мы получили правильное описание расщепления и динамики волнового пакета вблизи критического слоя, уточнив результаты общей теории распространения волновых пакетов в окрестности критического слоя. Эта часть исследования изложена в Главе 3 диссертации.

Наконец, на основе описанного механизма в заключительной части работы была развита статистическая квазилинейная теория, описывающая радиальный профиль средней скорости в когерентном геострофическом вихре. Ее предсказания мы сравниваем с данными измерений скорости когерентных циклонов в эксперименте со вращающимся турбулентным потоком. В соответствии с экспериментальными условиями предполагается, что течение вихря поддерживается за счет поглощения коротких инерционных волн, приходящих с его периферии. Опираясь на найденные условия передачи момента импульса, мы определили в модели касательное напряжение Рейнольдса, создаваемое ансамблем сходящихся волн, и рассмотрели решение уравнения Рейнольдса для среднего течения. Сравнение экспериментальных измерений с результатами численного счета огрубленной задачи показывает адекватность построенной модели. Эта часть исследования представлена в Главе 4 диссертации.

В заключение я выражаю глубокую благодарность своему научному руководителю Сергею Сергеевичу Вергелесу за приобщение к изучению вращающейся турбулентности, неизменное внимание и плодотворную совместную работу, переданный опыт и ценные советы. Отдельно благодарю его за внимательное прочтение рукописи и важные замечания по тексту диссертации. Я искренне признателен Владимиру Валентиновичу Лебедеву и Игорю Валентиновичу Колоколову за руководство, поддержку во всех возникающих вопросах и многочисленные обсуждения. Владимиру Валентиновичу я обязан многим из того, что знаю и умею; благодарю его за совместную работу над рядом задач, вошедших в диссертацию. Горячо благодарю своих родителей, Ольгу и Александра, вложивших огромные силы в мое воспитание и развитие, за неизменную поддержку и помощь.

## Публикации автора по теме диссертации

- A1. *Н.А. Ивченко, С.С. Вергелес* Статистика пассивного скаляра в двумерном сдвиговом течении с флуктуациями // ЖЭТФ. — 2023. — Т. 163, вып. 5. — С. 724—733.
- A2. *N.A. Ivchenko, V.V. Lebedev, S.S. Vergeles* Mixing in two-dimensional shear flow with smooth fluctuations // Physical Review E. — 2024. — Vol. 110, no. 1. — P. 015102.
- A3. *N.A. Ivchenko, S.S. Vergeles* Absorption and reflection of inertial waves by a geostrophic vortex // Physics of Fluids. — 2025. — Vol. 37, no. 12. — P. 126605.

## Список литературы

1. *Фриш, У.* Турбулентность. Наследие А.Н. Колмогорова. [Текст] / У. Фриш. — Москва : ФАЗИС, 1998. — 348 с.
2. *Колмогоров, А. Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса [Текст] / А. Н. Колмогоров // Доклады Академии Наук СССР. — 1941. — Т. 30, вып. 4. — С. 299.
3. *Kraichnan, R. H.* Inertial Ranges in Two-Dimensional Turbulence [Текст] / R. H. Kraichnan // The Physics of Fluids. — 1967. — Т. 10, № 7. — С. 1417—1423. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.1762301>.
4. *Leith, C. E.* Diffusion approximation for two-dimensional turbulence [Текст] / C. E. Leith // The Physics of Fluids. — 1968. — Т. 11, № 3. — С. 671—672.
5. Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence [Текст] // The Physics of Fluids. — 1969. — Т. 12, № 12. — С. 11—233.
6. *Boffetta, G.* Two-Dimensional Turbulence [Текст] / G. Boffetta, R. E. Ecke // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2012. — Т. 44, Volume 44, 2012. — С. 427—451. — URL: <https://www.annualreviews.org/content/journals/10.1146/annurev-fluid-120710-101240>.
7. *Smith, L. M.* Bose condensation and small-scale structure generation in a random force driven 2D turbulence [Текст] / L. M. Smith, V. Yakhot // Phys. Rev. Lett. — 1993. — Т. 71, вып. 3. — С. 352—355.
8. Dynamics of Energy Condensation in Two-Dimensional Turbulence [Текст] / M. Chertkov [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2007. — Т. 99, вып. 8. — С. 084501. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.99.084501>.
9. *Frishman, A.* Jets or vortices—What flows are generated by an inverse turbulent cascade? [Текст] / A. Frishman, J. Laurie, G. Falkovich // Phys. Rev. Fluids. — 2017. — Т. 2, вып. 3. — 032602(R). — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevFluids.2.032602>.

10. *Sommeria, J.* Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box [Текст] / J. Sommeria // Journal of fluid mechanics. — 1986. — Т. 170. — С. 139—168.
11. Inverse energy cascade and emergence of large coherent vortices in turbulence driven by Faraday waves [Текст] / N. Francois [et al.] // Physical Review Letters. — 2013. — Vol. 110, no. 19. — P. 194501.
12. *Orlov, A.* Large-Scale Coherent Vortex Formation in Two-Dimensional Turbulence [Текст] / A. Orlov, M. Brazhnikov, A. Levchenko // JETP Letters. — 2018. — Vol. 107, no. 3. — P. 157—162.
13. *Alexakis, A.* Cascades and transitions in turbulent flows [Текст] / A. Alexakis, L. Biferale // Physics Reports. — 2018. — Т. 767—769. — С. 1—101. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157318301935> ; Cascades and transitions in turbulent flows.
14. *Smith, L. M.* Transfer of energy to two-dimensional large scales in forced, rotating three-dimensional turbulence [Текст] / L. M. Smith, F. Waleffe // Physics of Fluids. — 1999. — Т. 11, № 6. — С. 1608—1622. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.870022>.
15. *Davidson, P.* The Dynamics of Rotating Fluids [Текст] / P. Davidson. — Oxford University Press, 2024.
16. Dimensional transition in rotating turbulence [Текст] / E. Deusebio [и др.] // Phys. Rev. E. — 2014. — Т. 90, вып. 2. — С. 023005.
17. *Pestana, T.* Regime transition in the energy cascade of rotating turbulence [Текст] / T. Pestana, S. Hickel // Phys. Rev. E. — 2019. — Т. 99, вып. 5. — С. 053103.
18. *Godeferd, F. S.* Structure and dynamics of rotating turbulence: a review of recent experimental and numerical results [Текст] / F. S. Godeferd, F. Moisy // Applied Mechanics Reviews. — 2015. — Т. 67, № 3. — С. 030802.
19. *Bühler, O.* Waves and Mean Flows [Текст] / O. Bühler. — Cambridge University Press, 2009.
20. The quasi-biennial oscillation [Текст] / M. P. Baldwin [и др.] // Reviews of Geophysics. — 2001. — Т. 39, № 2. — С. 179—229.
21. *Монин А.С., Я. А.* Статистическая гидромеханика, механика турбулентности. Ч.1 [Текст] / Я. А. Монин А.С. — М. : Наука, 1965. — 641 с.

22. *Marston, J.* Recent Developments in Theories of Inhomogeneous and Anisotropic Turbulence [Текст] / J. Marston, S. Tobias // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2023. — Т. 55, Volume 55, 2023. — С. 351–375.
23. *Sutherland, B.* Internal Gravity Waves [Текст] / B. Sutherland. — Cambridge University Press, 2010.
24. *Booker, J. R.* The critical layer for internal gravity waves in a shear flow [Текст] / J. R. Booker, F. P. Bretherton // Journal of Fluid Mechanics. — 1967. — Т. 27, № 3. — С. 513–539.
25. The instability of a forced standing wave in a viscous stratified fluid- A laboratory analogue of the quasi-biennial oscillation [Текст] / R. Plumb, A. McEwan [и др.] // Journal of the atmospheric sciences. — 1978. — Т. 35, № 10. — С. 1827–1839.
26. *Peters, N.* Turbulent combustion [Текст] / N. Peters // Measurement Science and Technology. — 2001. — Т. 12, № 11. — С. 2022–2022.
27. *Davidson, P.* Turbulence in Rotating, Stratified and Electrically Conducting Fluids [Текст] / P. Davidson. — Cambridge University Press, 2013.
28. *Яглом, А. М.* О локальной структуре поля температур в турбулентном потоке [Текст] / А. М. Яглом // Докл. АН СССР. — 1949. — Т. 69, № 6. — С. 743–746.
29. *Corrsin, S.* On the spectrum of isotropic temperature fluctuations in an isotropic turbulence [Текст] / S. Corrsin // Journal of Applied Physics. — 1951. — Т. 22, № 4. — С. 469–473.
30. *Batchelor, G. K.* Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid Part 1. General discussion and the case of small conductivity [Текст] / G. K. Batchelor // Journal of Fluid Mechanics. — 1959. — Т. 5, № 1. — С. 113–133.
31. *Kraichnan, R. H.* Anomalous scaling of a randomly advected passive scalar [Текст] / R. H. Kraichnan // Physical review letters. — 1994. — Т. 72, № 7. — С. 1016.
32. *Kraichnan, R. H.* Scaling relations for a randomly advected passive scalar field [Текст] / R. H. Kraichnan, V. Yakhot, S. Chen // Physical review letters. — 1995. — Т. 75, № 2. — С. 240.

33. The role of chaotic orbits in the determination of power spectra of passive scalars [Текст] / Т. М. Antonsen Jr [и др.] // *Physics of Fluids*. — 1996. — Т. 8, № 11. — С. 3094—3104.
34. *Balkovsky, E.* Universal long-time properties of Lagrangian statistics in the Batchelor regime and their application to the passive scalar problem [Текст] / E. Balkovsky, A. Fouxon // *Physical Review E*. — 1999. — Vol. 60, no. 4. — P. 4164.
35. *Falkovich, G.* Particles and fields in fluid turbulence [Текст] / G. Falkovich, K. Gawędzki, M. Vergassola // *Reviews of Modern Physics*. — 2001. — Т. 73, № 4. — С. 913—975.
36. Frontiers of chaotic advection [Текст] / H. Aref [и др.] // *Rev. Mod. Phys.* — 2017. — Т. 89, вып. 2. — С. 025007.
37. Universal Profile of the Vortex Condensate in Two-Dimensional Turbulence [Текст] / J. Laurie [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2014. — Т. 113, вып. 25. — С. 254503.
38. *Kolokolov, I.* Structure of coherent vortices generated by the inverse cascade of two-dimensional turbulence in a finite box [Текст] / I. Kolokolov, V. Lebedev // *Physical Review E*. — 2016. — Т. 93, № 3. — С. 033104.
39. *Kolokolov, I.* Velocity statistics inside coherent vortices generated by the inverse cascade of 2-D turbulence [Текст] / I. Kolokolov, V. Lebedev // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2016. — Т. 809.
40. *Kolokolov, I. V.* Coherent vortex in two-dimensional turbulence: Interplay of viscosity and bottom friction [Текст] / I. V. Kolokolov, V. V. Lebedev // *Phys. Rev. E*. — 2020. — Т. 102, вып. 2. — С. 023108. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.102.023108>.
41. *Parfenyev, V.* Profile of a two-dimensional vortex condensate beyond the universal limit [Текст] / V. Parfenyev // *Physical Review E*. — 2022. — Т. 106, № 2. — С. 025102.
42. Coherent vortex in a spatially restricted two-dimensional turbulent flow in absence of bottom friction [Текст] / A. N. Doludenko [и др.] // *Physics of Fluids*. — 2021. — Т. 33. — С. 011704.

43. *Hopfinger, E.* Turbulence and waves in a rotating tank [Текст] / E. Hopfinger, F. Browand, Y. Gagne // Journal of Fluid Mechanics. — 1982. — Vol. 125. — P. 505—534.
44. Extraction of coherent structures in a rotating turbulent flow experiment [Текст] / J. E. Ruppert-Felsot [и др.] // Phys. Rev. E. — 2005. — Т. 72, вып. 1. — С. 016311. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.72.016311>.
45. *Morize, C.* Decaying grid-generated turbulence in a rotating tank [Текст] / C. Morize, F. Moisy, M. Rabaud // Physics of Fluids. — 2005. — Т. 17, № 9. — С. 095105. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.2046710>.
46. Two Dynamical Regimes of Coherent Columnar Vortices in a Rotating Fluid [Текст] / D. Tumachev [и др.] // JETP Letters. — 2023. — Т. 118, № 6. — С. 426—432.
47. Observation of a large stable anticyclone in rotating turbulence [Текст] / D. D. Tumachev [и др.] // Physics of Fluids. — 2024. — Т. 36, № 12. — С. 126620. — URL: <https://pubs.aip.org/aip/pof/article-abstract/36/12/126620/3325686/Observation-of-a-large-stable-anticyclone-in>.
48. *Seshasayanan, K.* Condensates in rotating turbulent flows [Текст] / K. Seshasayanan, A. Alexakis // Journal of Fluid Mechanics. — 2018. — Т. 841. — С. 434—462.
49. *Gomé, S.* Waves Maintain Large-Scale 2D Flows in Rotating Turbulence and Cause Their Demise [Текст] / S. Gomé, A. Frishman // Phys. Rev. X. — 2026. — Т. 16, вып. 3. — С. 031013. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/rjxp-psy2>.
50. Disentangling inertial waves from eddy turbulence in a forced rotating-turbulence experiment [Текст] / A. Campagne [и др.] // Physical Review E. — 2015. — Т. 91, № 4. — С. 043016.
51. Interplay between geostrophic vortices and inertial waves in precession-driven turbulence [Текст] / F. Pizzi [и др.] // Physics of Fluids. — 2022. — Т. 34, № 12.

52. *Kolokolov, I. V.* Structure of coherent columnar vortices in three-dimensional rotating turbulent flow [Текст] / I. V. Kolokolov, L. L. Ogorodnikov, S. S. Vergeles // Phys. Rev. Fluids. — 2020. — Т. 5, вып. 3. — С. 034604. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevFluids.5.034604>.
53. Velocity profiles of cyclones and anticyclones in a rotating turbulent flow [Текст] / V. M. Parfenyev [и др.] // Physics of Fluids. — 2021. — Т. 33, № 6. — С. 065117. — URL: <https://doi.org/10.1063/5.0054586>.
54. *Ogorodnikov, L. L.* Structure function of velocity in a geostrophic vortex under strong rotation [Текст] / L. L. Ogorodnikov, S. S. Vergeles // Physics of Fluids. — 2022. — Т. 34, № 12. — С. 125111. — URL: <https://doi.org/10.1063/5.0130409>.
55. *Ogorodnikov, L. L.* Long-range spatial velocity statistics in a rotating coherent turbulent vortex [Текст] / L. L. Ogorodnikov, S. S. Vergeles // Phys. Rev. Fluids. — 2025. — Т. 10, вып. 12. — С. 124702.
56. *Son, D.* Turbulent decay of a passive scalar in the Batchelor limit: Exact results from a quantum-mechanical approach [Текст] / D. Son // Physical Review E. — 1999. — Т. 59, № 4. — R3811.
57. *Fereday, D.* Scalar decay in two-dimensional chaotic advection and Batchelor-regime turbulence [Текст] / D. Fereday, P. Haynes // Physics of Fluids. — 2004. — Т. 16, № 12. — С. 4359—4370.
58. *Sukhatme, J.* Decay of passive scalars under the action of single scale smooth velocity fields in bounded two-dimensional domains: From non-self-similar probability distribution functions to self-similar eigenmodes [Текст] / J. Sukhatme, R. T. Pierrehumbert // Physical Review E. — 2002. — Т. 66, № 5. — С. 056302.
59. *Duplat, J.* A nonsequential turbulent mixing process [Текст] / J. Duplat, C. Innocenti, E. Villermaux // Physics of Fluids. — 2010. — Т. 22, № 3.
60. Shear effects on passive scalar spectra [Текст] / A. Celani [и др.] // Journal of Fluid Mechanics. — 2005. — Т. 523. — С. 99—108.
61. *Groisman, A.* Efficient mixing at low Reynolds numbers using polymer additives [Текст] / A. Groisman, V. Steinberg // Nature. — 2001. — Т. 410. — С. 905—908.

62. *Steinberg, V.* Elastic Turbulence: An Experimental View on Inertialess Random Flow [Текст] / V. Steinberg // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2021. — Т. 53. — С. 27–58.
63. *Falkovich, G.* Turbulence appearance and nonappearance in thin fluid layers [Текст] / G. Falkovich, N. Vladimirova // Physical Review Letters. — 2018. — Vol. 121, no. 16. — P. 164501.
64. *Parfenyev, V.* Influence of Ekman friction on the velocity profile of a coherent vortex in a three-dimensional rotating turbulent flow [Текст] / V. Parfenyev, S. Vergeles // Physics of Fluids. — 2021. — Т. 33. — С. 115128.
65. *Greenspan, H.* The theory of rotating fluids [Текст] / H. Greenspan. — Cambridge University Press, U.K., 1968.
66. *Proudman, J.* On the motion of solids in liquids possessing vorticity [Текст] / J. Proudman // Proc. R. Soc. A. — 1916. — Т. 92, № 642. — С. 408–424.
67. *Taylor, G. I.* Experiments with rotating fluids [Текст] / G. I. Taylor // Proc. R. Soc. A. — 1921. — Т. 100, № 703. — С. 114–121.
68. *Taylor, G. I.* The motion of a sphere in a rotating liquid [Текст] / G. I. Taylor // Proc. R. Soc. A. — 1922. — Т. 102, № 715. — С. 180–189.
69. *Taylor, G. I.* Experiments on the motion of solid bodies in rotating fluids [Текст] / G. I. Taylor // Proc. R. Soc. A. — 1923. — Т. 104, № 725. — С. 213–218.
70. *Педлоски, Д.* Геофизическая гидродинамика [Текст]. Т. 1/2 / Д. Педлоски ; под ред. В. М. Каменкович, А. С. Монин. — Москва: Мир, 1984. — Пер. с англ.
71. Experimental evidence of a triadic resonance of plane inertial waves in a rotating fluid [Текст] / G. Bordes [и др.] // Physics of Fluids. — 2012. — Т. 24, № 1. — С. 014105.
72. *P. Sagaut, C. C.* Homogeneous Turbulence Dynamics [Текст] / C. C. P. Sagaut. — Cambridge University Press, 2009.
73. *Moffatt, H. K.* The degree of knottedness of tangled vortex lines [Текст] / H. K. Moffatt // Journal of Fluid Mechanics. — 1969. — Т. 35, № 1. — С. 117–129.

74. *Moffatt, H. K.* Vortex- and Magneto-Dynamics — a Topological Perspective [Текст] / H. K. Moffatt // Mathematical Physics 2000. — С. 170—182.
75. *Alexakis, A.* Quasi-two-dimensional turbulence [Текст] / A. Alexakis // Reviews of Modern Plasma Physics. — 2023. — Т. 7. — С. 1—101. — URL: <https://doi.org/10.1007/s41614-023-00134-3>.
76. *Greenspan, H. P.* On the non-linear interaction of inertial modes [Текст] / H. P. Greenspan // Journal of Fluid Mechanics. — 1969. — Т. 36, № 2. — С. 257—264.
77. *Galtier, S.* Weak inertial-wave turbulence theory [Текст] / S. Galtier // Phys. Rev. E. — 2003. — Т. 68, вып. 1. — 015301(R).
78. *Gelash, A. A.* Complete Hamiltonian formalism for inertial waves in rotating fluids [Текст] / A. A. Gelash, V. S. L’vov, V. E. Zakharov // Journal of Fluid Mechanics. — 2017. — Т. 831. — С. 128—150.
79. *Le Reun, T.* Evidence of the Zakharov-Kolmogorov spectrum in numerical simulations of inertial wave turbulence [Текст] / Le Reun, T., Favier, B., Le Bars, M. // EPL. — 2020. — Т. 132, № 6. — С. 64002. — URL: <https://doi.org/10.1209/0295-5075/132/64002>.
80. Anisotropy and nonuniversality in scaling laws of the large-scale energy spectrum in rotating turbulence [Текст] / A. Sen [и др.] // Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. — 2012. — Т. 86, № 3. — С. 036319.
81. Energy transfer in turbulence under rotation [Текст] / M. Buzzicotti [и др.] // Physical Review Fluids. — 2018. — Т. 3, № 3. — С. 034802.
82. *David, V.* Locality of triad interaction and Kolmogorov constant in inertial wave turbulence [Текст] / V. David, S. Galtier // Journal of Fluid Mechanics. — 2023. — Т. 955. — R2.
83. *Zeman, O.* A note on the spectra and decay of rotating homogeneous turbulence [Текст] / O. Zeman // Physics of Fluids. — 1994. — Т. 6, № 10. — С. 3221—3223. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.868053>.
84. *Gallet, B.* Exact two-dimensionalization of rapidly rotating large-Reynolds-number flows [Текст] / B. Gallet // Journal of Fluid Mechanics. — 2015. — Т. 783. — С. 412—447.

85. Coherent structures and extreme events in rotating multiphase turbulent flows [Текст] / L. Biferale [et al.] // Physical Review X. — 2016. — Vol. 6, no. 4. — P. 041036.
86. *Guervilly, C.* Jets and large-scale vortices in rotating Rayleigh-Bénard convection [Текст] / C. Guervilly, D. W. Hughes // Phys. Rev. Fluids. — 2017. — Т. 2, вып. 11. — С. 113503. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevFluids.2.113503>.
87. *Ekman, V.* On the Influence of the Earth's Rotation on Ocean currents. [Текст] / V. Ekman // Arkiv för Matematik, Astronomy Och Fysik. — 1905. — Т. 2. — С. 1—53.
88. *Greenspan, H. P.* On a time-dependent motion of a rotating fluid [Текст] / H. P. Greenspan, L. N. Howard // Journal of Fluid Mechanics. — 1963. — Т. 17, № 3. — С. 385—404.
89. *Sansón, L. Z.* Nonlinear Ekman effects in rotating barotropic flows [Текст] / L. Z. Sansón, G. J. F. van Heijst // Journal of Fluid Mechanics. — 2000. — Т. 412. — С. 75—91.
90. *Proudman, I.* The almost-rigid rotation of viscous fluid between concentric spheres [Текст] / I. Proudman // Journal of Fluid Mechanics. — 1956. — Т. 1, № 5. — С. 505—516.
91. *Stewartson, K.* On almost rigid rotations [Текст] / K. Stewartson // Journal of Fluid Mechanics. — 1957. — Т. 3, № 1. — С. 17—26.
92. *McEwan, A.* Angular momentum diffusion and the initiation of cyclones [Текст] / A. McEwan // Nature. — 1976. — Vol. 260, no. 5547. — P. 126—128.
93. *Hopfinger, E. J.* Vortices in Rotating Fluids [Текст] / E. J. Hopfinger, G. J. F. van Heijst // Annual Review of Fluid Mechanics. — 1993. — Т. 25. — С. 241—289.
94. *Yarom, E.* Experimental quantification of inverse energy cascade in deep rotating turbulence [Текст] / E. Yarom, Y. Vardi, E. Sharon // Physics of Fluids. — 2013. — Т. 25, № 8. — С. 085105. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.4817666>.

95. *А. А. Веденов Е. П. Велихов, Р. З. С.* Устойчивость плазмы [Текст] / Р. З. С. А. А. Веденов Е. П. Велихов // Усп. физ. наук. — 1961. — Т. 73, № 4. — С. 701—766. — URL: <https://ufn.ru/ru/articles/1961/4/h/>.
96. *А. А. Веденов Е. П. Велихов, Р. З. С.* Нелинейные колебания разреженной плазмы [Текст] / Р. З. С. А. А. Веденов Е. П. Велихов // Ядерный синтез. — 1961. — Т. 1, № 2. — С. 82—100. — URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0029-5515/1/2/003>.
97. *А. А. Веденов Е. П. Велихов, Р. З. С.* Квазилинейная теория колебаний плазмы [Текст] / Р. З. С. А. А. Веденов Е. П. Велихов // Ядерный синтез. — 1962. — Т. 2, № 2. — С. 465—475.
98. *Власов, А. А.* О вибрационных свойствах электронного газа [Текст] / А. А. Власов // ЖЭТФ. — 1938. — Т. 8, № 3. — С. 291—318. — URL: <https://ufn.ru/ru/articles/1967/11/f/>.
99. *Ландау, Л. Д.* О колебаниях электронной плазмы [Текст] / Л. Д. Ландау // ЖЭТФ. — 1946. — Т. 16, № 7. — С. 574. — URL: <https://ufn.ru/ru/articles/1967/11/m/>.
100. *Лифшиц, Е. М.* Физическая кинетика [Текст]. Т. 10 / Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. — 2-е изд., испр. — М. : Физматлит, 2007. — С. 536. — (Теоретическая физика: в 10 т.)
101. *Drummond, W. E.* Non-linear stability of plasma oscillations [Текст] / W. E. Drummond, D. Pines // Nuclear Fusion, Supplement. — 1962. — Т. Part 3. — С. 1049.
102. *Herring, J. R.* Investigation of problems in thermal convection [Текст] / J. R. Herring // Journal of the Atmospheric Sciences. — 1963. — Т. 20, № 4. — С. 325—338.
103. *Villermaux, E.* Mixing versus stirring [Текст] / E. Villermaux // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2019. — Vol. 51, no. 1. — P. 245—273.
104. *Thiffeault, J.-L.* Scalar Decay in Chaotic Mixing [Текст] / J.-L. Thiffeault // Transport and Mixing in Geophysical Flows: Creators of Modern Physics / под ред. J. B. Weiss, A. Provenzale. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2008. — С. 3—36.

105. *Фрик, П. Г.* Турбулентность: подходы и модели [Текст] / П. Г. Фрик. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва–Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. — С. 332.
106. *Обухов, А. М.* Структура температурного поля в турбулентном потоке [Текст] / А. М. Обухов // Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз. — 1949. — Т. 13, № 1. — С. 58—69.
107. *Kraichnan, R. H.* Small-scale structure of a scalar field convected by turbulence [Текст] / R. H. Kraichnan // The Physics of Fluids. — 1968. — Vol. 11, no. 5. — P. 945—953.
108. *Оселедец, В. И.* Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем [Текст] / В. И. Оселедец // Тр. ММО. — 1968. — Т. 19. — С. 179—210.
109. *Bernard, D.* Slow Modes in Passive Advection [Текст] / D. Bernard, K. Gawędzki, A. Kupiainen // Journal of Statistical Physics. — 1998. — Т. 90. — С. 519—569.
110. *Ellis, R. S.* The theory of large deviations: from Boltzmann’s 1877 calculation to equilibrium macrostates in 2D turbulence [Текст] / R. S. Ellis // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1999. — Т. 133, № 1—4. — С. 106—136.
111. *Cencini, M.* Chaos: from simple models to complex systems [Текст] / M. Cencini, F. Cecconi, A. Vulpiani. — World Scientific, 2009.
112. The fourth-order correlation function of a randomly advected passive scalar [Текст] / E. Balkovsky [и др.] // JETP Letters. — 1995. — Т. 61, вып. 12. — С. 1012—1017.
113. Statistics of a passive scalar advected by a large-scale two-dimensional velocity field: Analytic solution [Текст] / M. Chertkov [и др.] // Physical Review E. — 1995. — Т. 51, № 6. — С. 5609.
114. *Vergeles, S.* Spatial dependence of correlation functions in the decay problem for a passive scalar in a large-scale velocity field [Текст] / S. Vergeles // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2006. — Т. 102, № 4. — С. 685—701.

115. *Вергелес, С. С.* Корреляционные функции пассивного скаляра как мера статистики градиента скорости [Текст] / С. С. Вергелес // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 2024. — Т. 120, № 4. — С. 288—295.
116. *Kolokolov, I. V.* Statistical geometry of chaotic two-dimensional transport. [Текст] / I. V. Kolokolov // JETP letters. — 2010. — Т. 92, № 2.
117. *Iwasawa, K.* On some types of topological groups [Текст] / K. Iwasawa // Annals of Mathematics. — 1949. — Vol. 50. — P. 507—558.
118. *Jiménez, J.* Near-wall turbulence [Текст] / J. Jiménez // Physics of Fluids. — 2013. — Т. 25, № 10.
119. *Smits, A. J.* High-Reynolds number wall turbulence [Текст] / A. J. Smits, B. J. McKeon, I. Marusic // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2011. — Т. 43. — С. 353—375.
120. *Sreenivasan, K. R.* Turbulent mixing: A perspective [Текст] / K. R. Sreenivasan // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 2019. — Т. 116, № 37. — С. 18175—18183.
121. *Germaine, E.* Persistence of local anisotropy of passive scalars in wall-bounded flows [Текст] / E. Germaine, L. Mydlarski, L. Cortelezzi // Physical Review Fluids. — 2018. — Т. 3, № 1. — С. 014606.
122. *Groisman, A.* Elastic turbulence in a polymer solution flow [Текст] / A. Groisman, V. Steinberg // Nature. — 2000. — Т. 405. — С. 53—55.
123. *Donzis, D. A.* The Batchelor spectrum for mixing of passive scalars in isotropic turbulence [Текст] / D. A. Donzis, K. Sreenivasan, P. Yeung // Flow, turbulence and combustion. — 2010. — Т. 85, № 3. — С. 549—566.
124. Mixing lamellae in a shear flow [Текст] / M. Souzy [и др.] // Journal of Fluid Mechanics. — 2018. — Т. 838.
125. *Ivchenko, N. A.* Statistics of a Passive Scalar in a 2D Shear Flow with Fluctuations [Текст] / N. A. Ivchenko, S. S. Vergeles // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2023. — Vol. 136, no. 5. — P. 644—652.
126. *Ivchenko, N. A.* Mixing in two-dimensional shear flow with smooth fluctuations [Текст] / N. A. Ivchenko, V. V. Lebedev, S. S. Vergeles // Phys. Rev. E. — 2024. — Июль. — Т. 110, вып. 1. — С. 015102.

127. Polymer statistics in a random flow with mean shear [Текст] / M. Chertkov [и др.] // Journal of Fluid Mechanics. — 2005. — Т. 531. — С. 251—260.
128. *Puliafito, A.* Numerical study of polymer tumbling in linear shear flows [Текст] / A. Puliafito, K. Turitsyn // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2005. — Т. 211, № 1/2. — С. 9—22.
129. *Turitsyn, K.* Polymer dynamics in chaotic flows with a strong shear component [Текст] / K. Turitsyn // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2007. — Т. 105, № 3. — С. 655—664.
130. *Liu, Y.* Stretching of polymer in a random flow: Effect of a shear rate [Текст] / Y. Liu, V. Steinberg // EPL (Europhysics Letters). — 2010. — Т. 90, № 4. — С. 44005.
131. *Searles, D. J.* Fluctuation theorem for stochastic systems [Текст] / D. J. Searles, D. J. Evans // Physical Review E. — 1999. — Т. 60, № 1. — С. 159.
132. *Evans, D. J.* The fluctuation theorem [Текст] / D. J. Evans, D. J. Searles // Advances in Physics. — 2002. — Т. 51, № 7. — С. 1529—1585.
133. *Haynes, P. H.* What controls the decay of passive scalars in smooth flows? [Текст] / P. H. Haynes, J. Vanneste // Physics of Fluids. — 2005. — Т. 17, № 9.
134. *Zinn-Justin, J.* Quantum field theory and critical phenomena [Текст]. Т. 171 / J. Zinn-Justin. — Oxford university press, 2021.
135. *Øksendal, B.* Stochastic differential equations [Текст] / B. Øksendal // Stochastic differential equations: an introduction with applications. — Springer, 2003. — С. 65—84.
136. *Wick, G.* The evaluation of the collision matrix [Текст] / G. Wick // Physical Review. — 1950. — Т. 80. — С. 268—272.
137. *Avellaneda, M.* Superdiffusion in nearly stratified flows [Текст] / M. Avellaneda, A. J. Majda // Journal of statistical physics. — 1992. — Т. 69, № 3. — С. 689—729.
138. *Vanneste, J.* Intermittency of passive-scalar decay: Strange eigenmodes in random shear flows [Текст] / J. Vanneste // Physics of fluids. — 2006. — Т. 18, № 8.

139. *Majda, A. J.* The random uniform shear layer: an explicit example of turbulent diffusion with broad tail probability distributions [Текст] / A. J. Majda // Physics of Fluids A: Fluid Dynamics. — 1993. — Т. 5, № 8. — С. 1963—1970.
140. *Chertkov, M.* Strong effect of weak diffusion on scalar turbulence at large scales [Текст] / M. Chertkov, I. Kolokolov, V. Lebedev // Physics of Fluids. — 2007. — Т. 19, № 10.
141. *Baruteau, C.* Inertial waves in a differentially rotating spherical shell [Текст] / C. Baruteau, M. Rieutord // Journal of Fluid Mechanics. — 2013. — Т. 719. — С. 47—81.
142. The complex interplay between tidal inertial waves and zonal flows in differentially rotating stellar and planetary convective regions. I. Free waves [Текст] / A. Astoul [и др.] // Astronomy & Astrophysics. — 2021. — Т. 647. — A144.
143. *Hazel, P.* The effect of viscosity and heat conduction on internal gravity waves at a critical level [Текст] / P. Hazel // Journal of Fluid Mechanics. — 1967. — Т. 30, № 4. — С. 775—783.
144. *Bretherton, F. P.* Wavetrains in inhomogeneous moving media [Текст] / F. P. Bretherton, C. J. R. Garrett // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. — 1968. — Т. 302, № 1471. — С. 529—554.
145. *Andrews, D. G.* On wave-action and its relatives [Текст] / D. G. Andrews, M. McIntyre // Journal of Fluid Mechanics. — 1978. — Т. 89, № 4. — С. 647—664.
146. *Dörnbrack, A.* A note on the Application of Linear Wave Theory at a Critical Level [Текст] / A. Dörnbrack, C. J. Nappo // Boundary-Layer Meteorology. — 1997. — Т. 82, вып. 3. — С. 399—416.
147. *Ivchenko, N. A.* Absorption and reflection of inertial waves by a geostrophic vortex [Текст] / N. A. Ivchenko, S. S. Vergeles // Physics of Fluids. — 2025. — Дек. — Т. 37, № 12. — С. 126605.
148. *Salhi, A.* An analysis of rotating shear flow using linear theory and DNS and LES results [Текст] / A. Salhi, C. Cambon // Journal of Fluid Mechanics. — 1997. — Т. 347. — С. 171—195.

149. *Drazin, P. G.* Hydrodynamic Stability [Текст] / P. G. Drazin, W. H. Reid. — 2-е изд. — Cambridge University Press, 2004. — (Cambridge Mathematical Library).
150. *Miles, J. W.* On the stability of heterogeneous shear flows [Текст] / J. W. Miles // Journal of Fluid Mechanics. — 1961. — Т. 10, № 4. — С. 496—508.
151. *Howard, L. N.* Note on a paper of John W. Miles [Текст] / L. N. Howard // Journal of Fluid Mechanics. — 1961. — Т. 10, № 4. — С. 509—512.
152. *Berry, M. V.* Semiclassical approximations in wave mechanics [Текст] / M. V. Berry, K. E. Mount // Reports on Progress in Physics. — 1972. — ЯНВ. — Т. 35, № 1. — С. 315.
153. *Fabrikant, A.* Propagation of Waves in Shear Flows [Текст] / A. Fabrikant, I. Stepanyants. — World Scientific, 1998. — (Series on Nonlinear Science). — URL: <https://books.google.ru/books?id=UgzUgsBHFy8C>.
154. *Gage, K.* The stability of thermally stratified plane Poiseuille flow [Текст] / K. Gage, W. Reid // Journal of Fluid Mechanics. — 1968. — Т. 33, № 1. — С. 21—32.
155. *Maslowe, S.* A study of singular modes associated with over-reflection and related phenomena [Текст] / S. Maslowe, R. Spiteri // Journal of Fluid Mechanics. — 2013. — Т. 728. — С. 120—145.
156. *Schmid, P. J.* Nonmodal Stability Theory [Текст] / P. J. Schmid // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2007. — Т. 39. — С. 129—162.
157. *Benney, D. J.* The Evolution in Space and Time of Nonlinear Waves in Parallel Shear Flows [Текст] / D. J. Benney, S. A. Maslowe // Studies in Applied Mathematics. — 1975. — Т. 54, № 3. — С. 181—205.
158. *Maslowe, S. A.* Critical Layers in Shear Flows [Текст] / S. A. Maslowe // Annual Review of Fluid Mechanics. — 1986. — Т. 18, Volume 18, 1986. — С. 405—432. — URL: <https://www.annualreviews.org/content/journals/10.1146/annurev.fl.18.010186.002201>.
159. *Thorpe, S. A.* An experimental study of critical layers [Текст] / S. A. Thorpe // Journal of Fluid Mechanics. — 1981. — Т. 103. — С. 321—344.

160. *Campbell, L. J.* Nonlinear critical-layer evolution of a forced gravity wave packet [Текст] / L. J. Campbell, S. A. Maslowe // Journal of Fluid Mechanics. — 2003. — Т. 493. — С. 151—179.
161. *Lam, H.* Supply mechanisms of the geostrophic mode in rotating turbulence: interactions with self, waves and eddies [Текст] / H. Lam, A. Delache, F. Godeferd // Journal of Fluid Mechanics. — 2023. — Т. 971. — А10.
162. *Kloosterziel, R.* An experimental study of unstable barotropic vortices in a rotating fluid [Текст] / R. Kloosterziel, G. Van Heijst // Journal of fluid mechanics. — 1991. — Т. 223. — С. 1—24.
163. *Van Heijst, G.* Laboratory experiments on the tripolar vortex in a rotating fluid [Текст] / G. Van Heijst, R. Kloosterziel, C. Williams // Journal of fluid mechanics. — 1991. — Т. 225. — С. 301—331.
164. Maintenance of a columnar vortex by inertial waves in rotational turbulence [Текст] / N. A. Ivchenko [и др.]. — 2026. — arXiv: [2609.06158](https://arxiv.org/abs/2609.06158) [[physics.flu-dyn](#)].
165. *Bender, C. M.* Advanced mathematical methods for scientists and engineers: Asymptotic methods and perturbation theory [Текст]. Т. 1 / C. M. Bender, S. A. Orszag. — Springer, 1999.
166. *Ghatak, A. K.* Modified Airy function and WKB solutions to the wave equation [Текст] / A. K. Ghatak, R. Gallawa, I. Goyal // NASA STI/Recon Technical Report N. — 1991. — Т. 92. — С. 20427.
167. *Badulin, S.* The trapping and vertical focusing of internal waves in a pycnocline due to the horizontal inhomogeneities of density and currents [Текст] / S. Badulin, V. Shrira, L. S. Tsimring // Journal of Fluid Mechanics. — 1985. — Т. 158. — С. 199—218.
168. *Zhang, K.* Theory and modeling of rotating fluids: convection, inertial waves and precession [Текст] / K. Zhang, X. Liao. — Cambridge University Press, 2017.
169. *Kleinert, H.* Path integrals in quantum mechanics, statistics, polymer physics, and financial markets [Текст] / H. Kleinert. — World Scientific Publishing Company, 2006.

170. *Schechter, D. A.* Conditions that inhibit the spontaneous radiation of spiral inertia-gravity waves from an intense mesoscale cyclone [Текст] / D. A. Schechter, M. T. Montgomery // Journal of the atmospheric sciences. — 2006. — Т. 63, № 2. — С. 435—456.

## Список рисунков

- 1.1 Направления векторов движения для плоской инерционной волны. Слева: горизонтальное поле скорости  $v^x$ , создаваемое генератором волн в опыте [71]. Здесь обозначены векторы фазовой  $\mathbf{c}_\varphi$  и групповой скорости  $\mathbf{c}_g$  волны, см. (1.7), а угол  $\theta$  отмеряется между волновым вектором  $\mathbf{k}$  и осью вращения  $\mathbf{\Omega}$ . Справа: схема распространения инерционной волны с отрицательной и положительной спиральностью из книги [27]. . . . . 20
- 1.2 Измерения каскадов во вращающейся турбулентности. Вверху: проверка анизотропного спектра Колмогорова-Захарова в [79] для зависимостей от  $k_\perp, k_z$  по отдельности (графики а и б, соотв.), где серой линией отложен скейлинг решения Галтиера (1.10). Внизу: обратный каскад энергии в численных экспериментах со случайной накачкой. Графики а, б взяты из эксперимента [80] и демонстрируют зависимость спектра  $E$  (а) и потока энергии  $\Pi$  (б) от величины волнового числа в плоскости  $k_\perp$ . График справа (с) получен в эксперименте [81]. На присутствие обратного каскада энергии указывает отрицательное значение потока энергии  $\Pi(k)$  (см. вставку графика). . . . . 24
- 1.3 Примеры реализации двумерного конденсата в численном моделировании: на графиках представлена вертикальная компонента завихренности турбулентного течения. Столбовые вихри наблюдались как в виде отдельных колонн [85] (слева, параметры накачки:  $Ro = 0.25$ ,  $Re = 460$  при  $\Omega = 10$ ), так и в форме вихревого диполя [48] (посередине, параметры  $Ro = 0.02$ ,  $Re = 100$ ), подавляющего трехмерные флуктуации. Справа: вертикальная завихренность в горизонтальной (прямоугольной) плоскости когерентной струи в работе [49] ( $Ro = 0.011$ ,  $Re = 9.3$ ). . . . . 27
- 1.4 Экспериментальные наблюдения когерентных вихрей во вращающейся турбулентности. а) фотография эксперимента [43] со схемой установки. Взято из работы [93]. Правее: распределения вертикальной завихренности в эксперименте [47] при: б)  $\Omega = 0.06$  об./с, где реализовался крупномасштабный антициклон в центре. с)  $\Omega = 0.18$  об./с в режиме с циклонами. . . . . 31

- 1.5 Схема потока столбового вихря в исходных цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$  и во введенной локальной декартовой системе  $(x, y, z)$ , следующей вместе с течением вихря. Изображение адаптировано из [52]. . . . . 35
- 1.6 Профиль течения столбового вихря  $U_G(r)$  как решения (1.39). Черным пунктиром отмечены ближняя (1.38) и дальняя асимптотики (1.40). Численное значение  $R_v = 3.22R_\alpha$  найдено фитом численного решения (синяя кривая). Центральная зона вязкой области, где реализуется асимптотика твердотельного вращения, закрашена цветом. График из работы [64]. . . . . 42
- 1.7 Диаграммы распределения для безразмерного коэффициента эффективности передачи  $F$  из численного расчета в [53]. Слева: случай антициклона (положительные числа Россби). Справа: случай циклона (отрицательные числа Россби). Изолинии  $q = 1$  (черный пунктир) обозначают контуры, на которых напряжение  $\langle u^r u^\varphi \rangle$  обращается в ноль. . . . . 44
- 2.1 Примеры реализации ланжевендовской динамики углов и провороты для  $\varphi(t)$ . Параметры:  $\Sigma = 1$ ,  $D = 10^{-3}$ , так что  $\psi_* = 0.1$ ; шаг по времени при решении стохастического уравнения  $\Delta t = 0.1$ . . . . . 62
- 2.2 Стационарная PDF  $P_s$  для угла  $\phi$  в модели белого шума (2.28). . . . . 67
- 3.1 Схема распространения инерционной волны: поглощение на критическом слое  $r = r_*$  и полное отражение на поверхности отражения  $r = r_t$ . Для прямолинейной модели Раздела 3.3 мы переходим к декартовым координатам при обращенной оси  $Oy$ , сохраняя подстрочные обозначения особых точек. . . . . 94
- 3.2 График численного решения (3.42) для волны  $v_\sigma$  при  $\sigma = 1$ , проходящей вязкий внутренний слой. Решение получено интегрированием (3.43) при  $\beta = 4$ . Красная и синяя линии отвечают соответственно вещественной и мнимой частям решения. Штриховые линии в обеих областях  $|\eta/\eta_v| \gg 1$  обозначают скейлинг  $|v_+| \propto \sqrt{|\eta|}$  для абсолютной величины согласно асимптотике (3.33). Вертикальное смещение между штриховыми асимптотами отвечает абсолютной величине коэффициента прохождения (3.36). . . . . 106

- 3.3 Эволюция волнового пакета  $v_\sigma$  в окрестности критического слоя в невязкой стадии распространения, полученная численным интегрированием (3.46) при параметрах ширины  $l_0/\bar{\eta}_0 \approx 0.4$  в (3.48) и  $\beta = 25$ . Функция  $\text{Re } v_+$  построена в моменты времени  $|\Sigma k_x \bar{\eta}_0| t = 0, 15, 75$ , см. описание ниже (3.50). . . . . 109
- 4.1 Профиль среднего течения циклона для эксперимента при  $\Omega = 2.62 \text{ с}^{-1}$ . Радиальная зависимость приведена для азимутальной скорости  $U(r)$ , а также для угловой скорости  $W(r)$  и сдвига  $\Sigma(r)$ . . . . . 119
- 4.2 Сравнение угловой скорости  $W(r)$  циклонов с численным решением (4.35) в экспериментах при медленном вращении в логарифмическом масштабе. Черный пунктир приближает экспериментальные данные экспоненциальным поведением. . . . . 128
- 4.3 Сравнение угловой скорости  $W(r)$  циклонов с численным решением (4.35) в экспериментах при быстром вращении; обе оси логарифмические. . . . . 128
- 4.4 Экспериментальные значения средней мощности диссипации энергии в объеме (синий) и значения  $\epsilon$  на основе параметров численного решения (4.35) (желтый). Все физические величины измеряются в единицах СГС. . . . . 130
- Б.1 Вещественная и мнимая части  $(-\gamma_n)$  у ветвей собственных значений  $\gamma_n$  в оператора  $M$  для фурье-представления (Б.1) (здесь  $\eta = iq$ ). . . . 160
- Б.2 Интеграл обратного преобразования Фурье в комплексной плоскости переменной  $\eta$ . Непрерывные синие и красные прямые линии вдоль мнимой оси обозначают начальные контуры интегрирования. Пунктирные черные линии — разрезы ветвей для особых точек. . . . . 161
- Г.1 Затухание логарифма модуля  $|\eta^{-1/2} v_+|$  для нормированного решения (3.43) при  $\sigma = 1$  и толщина вязкого подслоя при различных значениях параметра  $\beta \approx 2/\rho$ . . . . . 167

- Д.1 График положения экстремума  $\xi_*$  выражения (4.30), значения  $B$ , рассчитанные для циклона при  $\Omega = 2.63 \text{ с}^{-1}$ . Данные  $W(r)$  (справа) приближались аналитической функцией на интервале (2,44) см, с которой численно решалось уравнение на точку минимума выражения в (4.30) при  $k_f = 0.44 \text{ см}^{-1}$ . . . . . 170

## Приложение А

### Симметрия PDF для показателя растяжения в случайном гладком потоке

В этом Приложении мы рассмотрим следствие из стохастической системы (2.8–2.9) для случайного шума  $\zeta$  с однородной по времени статистикой, инвариантной относительно инверсии времени. Симметрия означает, что все корреляционные функции  $\zeta(\tau)$  инвариантны относительно преобразования  $\tau \rightarrow -\tau$ . Тогда для  $\Pi(\varrho)$  справедливо соотношение (2.16). Рассмотрим ланжевенговскую эволюцию переменных  $\varrho, \phi$  на некотором конечном интервале времени  $(0, T)$  и обозначим за  $\varrho$  значение переменной в конечный момент времени  $\varrho(T)$ . Как следствие уравнения (2.8), эта величина может быть записана через интегрирование по времени (где мы предполагаем начальное условие  $\varrho(0) = 0$ ):

$$\varrho = \int_0^T d\tau (1 + \zeta) \cos \phi \sin \phi. \quad (\text{A.1})$$

Редуцированную плотность распределения вероятности  $\Pi(\varrho)$  можно представить в виде функционального интеграла [169] по реализациям случайного процесса  $\phi(\tau)$ , где угол  $\phi$  определен на всей вещественной оси:

$$\Pi(\varrho) = \left\langle \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}p e^{i \int_0^T d\tau p(\tau) (\partial_\tau \phi + A)} \det \left( \partial_\tau + \frac{\partial A}{\partial \phi} \right) \right. \quad (\text{A.2})$$

$$\left. \times \delta \left[ \varrho - \int_0^T d\tau (1 + \zeta) \cos \phi \sin \phi \right] \right\rangle; \quad A[\phi, \zeta] = (\sin \phi)^2 - \zeta (\cos \phi)^2. \quad (\text{A.3})$$

где  $p(\tau)$  — вспомогательное поле, а угловые скобки означают усреднение по статистике шума  $\zeta(\tau)$ . Во второй строке оставлен усредняемый объект, определенный согласно (A.1); выше в (A.2) записан интеграл с весом отдельной траектории  $\phi(\tau)$  при усреднении. Интегрирование по полю  $p(\tau)$  приводит к выполнению уравнения (2.9), а функциональный определитель правее обеспечивает нормировку распределения вероятности угла. Продолжим работать со стохастической системой в соглашении Стратоновича, которое подразумевает симметричную схему дискретизации случайного процесса во времени. В этом

случае функциональный детерминант сводится к экспоненте от интеграла (симметричная схема соответствует множителю  $1/2$  перед ним), см. в [134, §4.8.2]:

$$\det \left( \partial_\tau + \frac{\partial A}{\partial \phi} \right) = \exp \left[ \frac{1}{2} \int_0^T d\tau \frac{\partial A}{\partial \phi} \right]. \quad (\text{A.4})$$

В результате, строка (A.2) сводится к экспоненте от эффективного действия  $\mathcal{I}$  по углу  $\phi(\tau)$ ; распишем его в явном виде и добавим ниже его представление в дискретизованном времени:

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}p e^{i\mathcal{I}}, \quad i\mathcal{I} &= i \int_0^T d\tau p [\partial_\tau \phi + A] + \frac{1}{2} \int_0^T d\tau \frac{\partial A}{\partial \phi} \\ &= i \int_0^T d\tau p [\partial_\tau \phi + (\sin \phi)^2 - \zeta (\cos \phi)^2] + \int_0^T d\tau (1 + \zeta) \sin \phi \cos \phi; \\ i\mathcal{I}_N &= i \sum_{j=1}^N p_j (\phi_j - \phi_{j-1} + \varepsilon A[\bar{\phi}_j, \zeta_j]) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \varepsilon \frac{\partial A}{\partial \phi}[\bar{\phi}_j, \zeta_j], \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

где  $\varepsilon = T/N$  обозначает шаг по времени, а  $p_j, \zeta_j, \phi_j$  соответствуют значениям полей в момент времени  $\tau_j = j\varepsilon$ , а  $\bar{\phi}_j = \frac{1}{2}(\phi_j + \phi_{j-1})$ . Значение  $\phi_0$  фиксировано как начальное условие. Обратим внимание, что второе слагаемое, возникшее из функционального детерминанта в соглашении Стратоновича (A.4), в точности равно  $\varrho(T) \equiv \varrho$ .

Применим преобразование, не меняющее уравнения (2.8–2.9) исходной динамики

$$\tau \rightarrow T - \tau, \quad \phi \rightarrow -\phi, \quad \varrho \rightarrow -\varrho, \quad (\text{A.7})$$

где последнее означает перестановку  $\varrho(0) \leftrightarrow \varrho(T)$ . Оно сводится к подстановке  $\zeta(\tau) \rightarrow \zeta(T - \tau)$  в эффективном действии  $\mathcal{I}$  и внутри  $\delta$ -функции в (A.3). Для статистики  $\zeta$ , инвариантной относительно обращения времени, средние по  $\zeta(\tau)$  и по  $\zeta(T - \tau)$  совпадают. Тогда можно рассмотреть PDF  $\Pi(-\varrho)$  через преобразование (A.7) функционального интеграла (A.2). В дискретизованном действии  $\mathcal{I}_N$ , см. (A.6), инверсия времени означает преобразование узлов  $j \rightarrow N - j + 1$ , причем теперь фиксировано конечное значение  $\phi_{N+1}$ . Для первой суммы эквивалентная (A.6) симметричная запись восстанавливается для значений полей  $p_k, \zeta_k$  (взятых в точке  $k = N - j + 1$ ) и  $\phi_k$  (взятых в точке  $k = N - j + 2$ ). При этом вторая сумма от детерминанта (A.4), как обсуждалось выше, преобразуется как

$\varrho \rightarrow -\varrho$  согласно определению во второй строке (A.1). Полное эффективное действие (A.5) преобразуется как  $\mathcal{I} \rightarrow \tilde{\mathcal{I}}$  при (A.7); инвариантность первого члена (с  $p(\tau)$ ) в его выражении может быть представлена в виде формулы:

$$i\mathcal{I} - \varrho = i\tilde{\mathcal{I}} + \varrho. \quad (\text{A.8})$$

В контексте функционального интеграла (A.2,A.3) для  $\Pi$  данное соотношение дает формулу симметрии  $\Pi(\varrho)e^{-\varrho} = \Pi(-\varrho)e^{\varrho}$  для плотности распределения (2.16) в основном тексте работы.

## Приложение Б

### Преобразование Фурье совместной PDF в модели с белым шумом

В этом приложении мы анализируем свойства фурье-образа совместной плотности распределения  $\mathcal{P}(\tau, \varrho, \phi)$ , определенного формулой (2.35). Уравнение (2.34) можно записать в виде

$$\partial_\tau \tilde{\mathcal{P}} = -\hat{M} \tilde{\mathcal{P}}, \quad (\text{Б.1})$$

$$\hat{M}(\eta) = (\eta - 1) \cos \phi \sin \phi - \sin \phi \partial_\phi \sin \phi - [\cos \phi \sin \phi (\eta - 1) + \cos \phi \partial_\phi \cos \phi]^2, \quad (\text{Б.2})$$

тем самым перейдя к формулировке задачи только в терминах угла  $\phi$ . Общее решение уравнения (Б.1) записывается в виде разложения

$$\tilde{\mathcal{P}}(\tau, \phi, \eta) = \sum_n a_n \exp(-\gamma_n(\eta)\tau) \tilde{\mathcal{P}}_n(\phi, \eta) \quad (\text{Б.3})$$

в ряд по собственным функциям  $\tilde{\mathcal{P}}_n$  оператора  $\hat{M}(\eta)$  с соответствующими собственными значениями  $\gamma_n(\eta)$ . Здесь коэффициенты разложения  $a_n$  определяются начальным условием к (2.34). Дискретность спектра оператора  $\hat{M}(\eta)$  обусловлена периодическими граничными условиями задачи.

Если  $\gamma_n$  есть собственное число оператора  $\hat{M}$  при заданном значении  $\eta$ , то такое же собственное число  $\gamma_n$  отвечает и значению  $2-\eta$ . Докажем это утверждение, перейдя от углового представления оператора к разложению в терминах фурье-гармоник. Его матричные элементы задаются формулой

$$M_{mn}(\eta) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\phi}{\pi} \exp(-2im\phi) \hat{M}(\eta) \exp(2in\phi); \quad m, n \in \mathbb{Z}. \quad (\text{Б.4})$$

Рассмотрим транспонированную матрицу  $M_{nm}$ . Сделав преобразование  $\phi \rightarrow -\phi$  в интеграле (Б.4) для  $M_{nm}$  и применив к нему взятие по частям, находим  $M_{nm}(\eta) = M_{mn}(2-\eta)$ . Поскольку собственные значения матрицы не изменяются при транспонировании, приходим к выводу, что наборы собственных значений операторов  $\hat{M}(\eta)$  и  $\hat{M}(2-\eta)$  совпадают, что завершает доказательство утверждения.

Будем упорядочивать собственные значения  $\gamma_n$  по возрастанию вещественной части  $\text{Re } \gamma_n \geq 0$  при  $\eta$ , близких к нулю. На больших временах основной

вклад в сумму (Б.3) при заданном  $\eta$  вносит член с  $\gamma_n$ , вещественная часть которого будет наименьшей (обозначим это собственное число как  $\gamma$ ). Именно он будет определять асимптотику затухания образа редуцированной PDF  $\tilde{\Pi}$  в (2.23) согласно

$$\tilde{\Pi} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{d\phi}{\pi} \tilde{\mathcal{P}}(\tau, \phi, \eta).$$

Это позволяет находить  $\gamma(\eta)$  и  $S(\xi)$  через (2.24, 2.25) численно, решая задачу на собственные значения  $\hat{M}\tilde{\mathcal{P}}_n = \gamma_n\tilde{\mathcal{P}}_n$ . Доказанная выше симметрия собственных значений  $\gamma_n$  влечет за собой соотношение (2.26) на показатель  $\gamma(\eta)$ , что обеспечивает симметрию функции Крамера (2.20) в модели. Графики численного расчета зависимости собственных чисел (отложены  $(-\gamma_n)$  как в показателях экспоненты в (Б.3)) от мнимого значения аргумента  $\eta = iq$ , что соответствует стандартному фурье-преобразованию, приведены на Рис. Б.1. Нулевое собственное значение  $\gamma_0$  является невырожденным, оно вещественно вдоль  $Oq$  ( $\text{Re } \eta = 0$ ) и отвечает условию  $\gamma_0(0) = 0$ : в этом случае собственная функция  $\tilde{\mathcal{P}}_0(\phi, 0)$  в (Б.3) сводится к стационарному распределению (2.32). Более того, оно является вещественным на прямой  $\text{Im } \eta = 0$  и обладает наименьшей вещественной частью в ее окрестности. Последующие ветви собственных значений идут парами,  $\gamma_{n\pm}$ , см. Рис. Б.1; поскольку оператор  $\hat{M}$  в угловом представлении (Б.1) вещественный, они связаны друг с другом симметрией  $(\gamma_{n\pm}(\eta))^* = \gamma_{n\mp}(\eta^*)$ .

Однако на комплексной плоскости  $\eta$  есть особые точки, в которых пересекаются ветви собственных значений  $\gamma_i(\eta)$  и  $\gamma_j(\eta)$ . В частности, нулевое собственное значение  $\gamma_0$  совпадает со следующими ветвями  $\gamma_{1\pm}$  в точках  $\eta - 1 \approx$

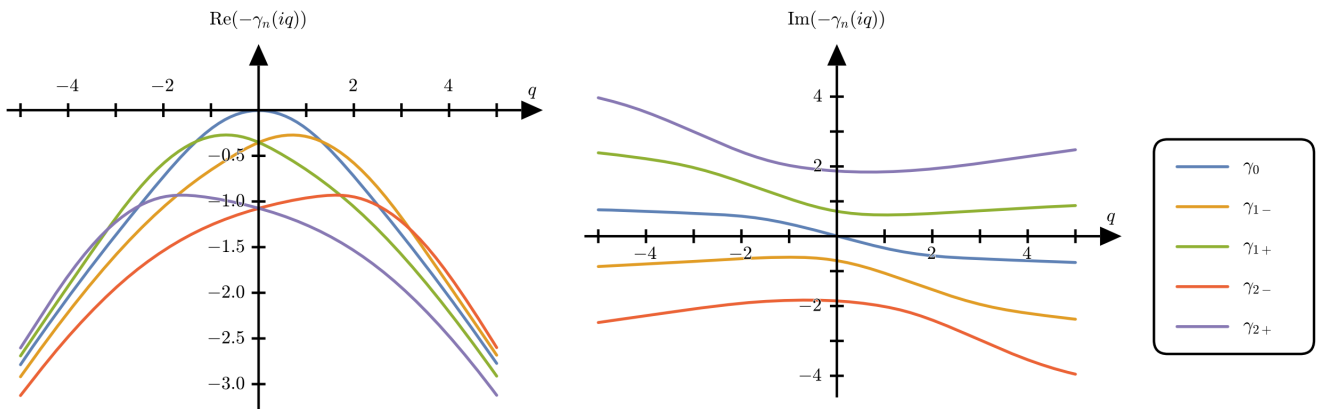


Рисунок Б.1 — Вещественная и мнимая части  $(-\gamma_n)$  у ветвей собственных значений  $\gamma_n$  в оператора  $M$  для фурье-представления (Б.1) (здесь  $\eta = iq$ ).

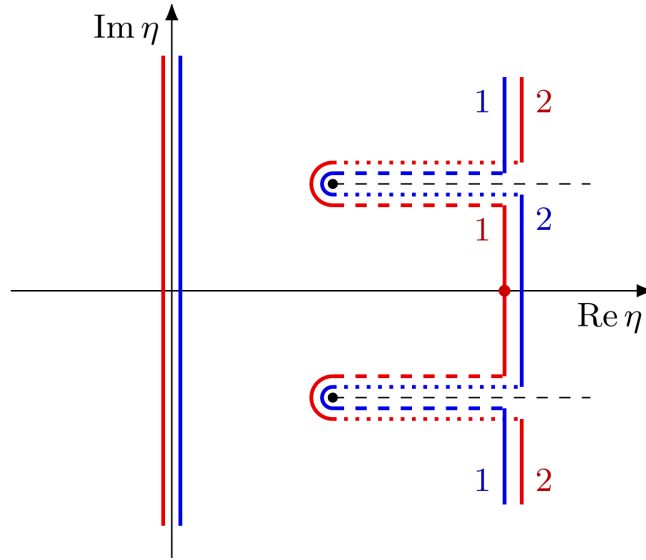


Рисунок Б.2 — Интеграл обратного преобразования Фурье в комплексной плоскости переменной  $\eta$ . Непрерывные синие и красные прямые линии вдоль мнимой оси обозначают начальные контуры интегрирования. Пунктирные черные линии — разрезы ветвей для особых точек.

$\pm 2.1 \pm 1.6i$ , а ветви пары  $\gamma_{1\pm}$  пересекаются со следующими,  $\gamma_{2\pm}$ , в точках  $\eta - 1 \approx \pm 5.0$ . В окрестности такой точки пересечения двух чисел  $\gamma_i$  каждая ведет себя как отдельная регулярная ветвь при особенности типа квадратного корня. Важно отметить, что сингулярности не вносят вклад в обратное преобразование Фурье для функции PDF

$$\mathcal{P} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \exp(i\rho q) \tilde{\mathcal{P}} = \int_C \frac{d\eta}{2\pi i} \exp(\rho\eta) \tilde{\mathcal{P}} \quad (\text{Б.5})$$

в пределе больших  $|\xi| = |\rho|/\tau$ . Положим  $\rho$  отрицательно; этот случай соответствует порядку взятия контурного интеграла в комплексной плоскости, представленной на Рис. Б.2. Тогда мы можем деформировать оба контура интегралов  $C_i$  и  $C_j$ , соответствующие рассматриваемым собственным значениям  $\gamma_i$  и  $\gamma_j$ , в сторону правой полуплоскости. Подынтегральные выражения, включая предэкспоненты, равны друг другу на пунктирных участках деформированных контуров, но интегрирования проходят в противоположных направлениях вдоль контуров, поэтому результаты интегрирования по пунктирным участкам контуров компенсируют друг друга. То же самое верно отдельно и для штриховых участков контуров. Из-за того, что в точках ветвления функция имеет вид квадратного корня, контуры интегрирования после прохождения точек ветвления можно перестроить из отрезков в новую пару контуров, обозначенных

на Рис. Б.2 цифрами ‘1’ и ‘2’. Таким образом, за счет попарного перемещения контуров интегрирования в комплексной плоскости точки ветвления не дают вклада в выражение (Б.5).

Поэтому на больших временах обратное преобразование Фурье (Б.5) асимптотически определяется нулевым собственным значением  $\gamma_0$  и соответствующей собственной функцией  $\tilde{\mathcal{P}}_0$ , взятых в точке перевала  $\eta$ . Точка определяется выражением  $\partial_\eta \gamma_0 = \varrho/\tau = \xi$ , см. (2.25) и расположена на вещественной оси; перевальное вычисление восстанавливает функцию Крамера  $S(\xi)$  как преобразование Лежандра (2.24). Разложение  $\gamma_0$  около  $\eta = 0$  определяет тело (2.36) плотности распределения  $\Pi(\varrho)$ . Результат согласуется со статистическими данными, полученными в ходе численного моделирования уравнений Ланжевена (2.8, 2.9). Отметим, что для больших значений  $|\eta| \gg 1$  собственные числа выходят на асимптотический рост  $\gamma \sim \eta^{4/3}$ , что соответствует поведению  $S(\xi) \propto \xi^4$  на  $|\xi| \gg 1$ . Это быстрое затухание хвостов распределения  $\Pi(\varrho)$  останавливается на большом масштабе  $|\xi| \sim (\Sigma/D)^{2/3}$  за счет членов с флуктуациями  $\partial_i u_j$  в (2.4), которыми пренебрегали в дальнейшем анализе.

## Приложение В

### Уравнения инерционной волны в плоскости геострофического течения

В этом приложении мы выводим уравнения волновой динамики в плоскости, перпендикулярной оси вращения, в которой присутствует геострофическое течение  $\mathbf{U}(\mathbf{r}_\perp)$ . Применив оператор  $\text{rot rot} = (\text{grad div} - \Delta^{3D})$  к уравнению (3.1), рассмотрим двумерный вектор скорости  $\mathbf{c}$  с компонентами, отвечающими плоскости  $Oxy$ , где присутствует  $\mathbf{U}$ . Для обозначения координат  $\mathbf{r}_\perp = (x^1, x^2)$  в этой плоскости используется индекс “ $\perp$ ”.

$$\Delta^{3D} \left( \frac{d\mathbf{c}}{dt} - \nu \Delta^{3D} \mathbf{c} + (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{U} + 2 [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{c}] \right) = \text{grad}_\perp \text{div}_\perp \left( \frac{d\mathbf{c}}{dt} - \nu \Delta^{3D} \mathbf{c} + (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{U} + 2 [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{c}] \right) + \text{grad}_\perp \left( \frac{d}{dt} - \nu \Delta^{3D} \right) \partial_z w. \quad (\text{B.1})$$

Выше мы отделили  $Oz$ -компоненту от остальных в члене с  $\text{grad div}$ . Условие несжимаемости  $\text{div } \mathbf{u} = 0$  позволяет выразить последний член  $\partial_z w$  через  $\text{div}_\perp \mathbf{c}$ . Двумерная дивергенция  $\text{div}_\perp$  не коммутирует лишь с членом  $(\mathbf{U} \cdot \nabla)$ , содержащимся в конвективной производной  $d/dt = \partial_t + (\mathbf{U} \cdot \nabla)$  вдоль среднего течения. Их коммутатор  $-\text{tr}(\Sigma^t \sigma) = -(\nabla_j U^k)(\nabla_k c^j)$  выражается через планарные компоненты градиентов скорости волны и геострофического течения в горизонтальной плоскости ( $j, k = 1, 2$ ). Это приводит нас к уравнению, записанному через двумерные операции с набла, которые ковариантно преобразуются при замене координат  $(x^1, x^2)$  в плоскости; начиная с этого момента индекс “ $\perp$ ” опускается:

$$\Delta^{3D} \left( \frac{d\mathbf{c}}{dt} - \nu \Delta^{3D} \mathbf{c} + (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{U} + 2 [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{c}] \right) - \text{grad} \left\{ \text{div} ((\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{U} + 2 [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{c}]) + \text{tr} (\Sigma^t \sigma) \right\} = 0. \quad (\text{B.2})$$

Чтобы получить уравнение (3.2) основного текста, нужно собрать члены в конструкцию  $\text{curl curl} ((\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{U} + 2 [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{c}])$  и выразить ее с помощью исходного уравнения (3.1). Здесь и далее по ходу приложения  $\text{curl}$  будет обозначать операцию ротора для вектора в горизонтальной плоскости (с результатом — отдельная вертикальная компонента), т.ч. комбинация  $\text{grad div} - \text{curl curl} = \Delta$  определяет двумерный оператор Лапласа, см. ниже (3.2).

Кроме того, в работе регулярно используется  $z$ -компонента ротора (3.1),

$$\operatorname{curl} \left( \frac{d\mathbf{c}}{dt} - \nu \Delta^{3D} \mathbf{c} + (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{U} + 2 [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{c}] \right) = 0, \quad (\text{B.3})$$

которая в цилиндрических координатах имеет вид:

$$\partial_r \left[ r \frac{du^\varphi}{dt} + (2\tilde{\Omega} + \Sigma) r u^r \right] - \partial_\varphi \left( \frac{du^r}{dt} - 2\tilde{\Omega} u^\varphi \right) = \nu r \Delta^{3D} \frac{1}{r} [\partial_r (r u_\varphi) - \partial_\varphi u_r]. \quad (\text{B.4})$$

Оно представляет собой уравнение динамики вертикальной завихренности  $\varpi_z \equiv \varpi = \operatorname{curl} \mathbf{c}$

$$\left( \frac{d}{dt} - \nu \Delta_0^{3D} \right) \varpi + \operatorname{div} (2\Omega + \operatorname{curl} \mathbf{U}) \mathbf{c} = 0, \quad (\text{B.5})$$

где  $\Delta_0^{3D}$  для вертикальной компоненты уже совпадает со скалярным оператором Лапласа (индекс “0” далее отмечает скалярный лапласиан). Получим другое уравнение, оператор Лапласа которого тоже будет скалярным — возьмем дивергенцию (3.2):

$$\Delta_0^{3D} \left( \frac{d}{dt} - \nu \Delta_0^{3D} \right) \operatorname{div} \mathbf{c} + 2\partial_z^2 \{ \operatorname{tr} (\Sigma^t \sigma) + \operatorname{div} [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{c}] \} = 0. \quad (\text{B.6})$$

Получается, мы можем составить систему (B.5–B.6) уравнений вязкой динамики для инерционной волны в терминах вектора ее скорости в плоскости геострофического течения. В случае осесимметричного вихря  $\mathbf{U} = U(r) \mathbf{e}^\varphi$  введем обозначения компонент  $\mathbf{u} = (v, u, w)$  в цилиндрических ортонормированных координатах и запишем в явном виде их выражения в полярной системе для  $\mathbf{c} = (v, u)$ : так, вертикальная завихренность может быть представлена  $\varpi = \operatorname{div} (u, -v)$  как дивергенция дуального вектора. Сначала выпишем покомпонентно значения тензора градиентов  $\hat{\Sigma}$  с матрицей вращения  $\hat{\Omega}$  в системе для определения членов в (B.6):

$$\Sigma_{ij}^i = \begin{pmatrix} 0 & -U/r \\ U'(r) & 0 \end{pmatrix}_{ij}, \quad \hat{\Omega} + \hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega - U/r \\ \Omega + U' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\tilde{\Omega} \\ \tilde{\Omega} + \Sigma & 0 \end{pmatrix};$$

$$\operatorname{tr} (\Sigma^t \sigma) = (U' \partial_\varphi v - U' u - U \partial_r u) / r = [U' \partial_\varphi v - \partial_r (U u)] / r = \operatorname{div} \begin{pmatrix} -U u / r \\ U' v \end{pmatrix}.$$

В результате, приходим к динамической системе вида:

$$\left( \frac{d}{dt} - \nu \Delta_0^{3D} \right) \operatorname{div} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} + \operatorname{div} (2\tilde{\Omega} + \Sigma) \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{B.7})$$

$$\Delta_0^{3D} \left( \frac{d}{dt} - \nu \Delta_0^{3D} \right) \operatorname{div} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} + 2\partial_z^2 \operatorname{div} \begin{pmatrix} -\tilde{\Omega} u \\ (\tilde{\Omega} + \Sigma) v \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{B.8})$$

где  $d/dt = \partial_t + U/r \partial_\varphi$  — (скалярный) оператор переноса азимутальным течением, а  $\tilde{\Omega}(r) = \Omega + U/r$  — локальная угловая скорость вращения системы.

Для невязкой динамики цилиндрической волны следует уравнение на гармонику  $p$

$$\left[ (2\tilde{\Omega} + \Sigma) m + \tilde{\omega} r \partial_r \right] \frac{1}{2\tilde{\Omega} (2\tilde{\Omega} + \Sigma) - \tilde{\omega}^2} \left[ 2\tilde{\Omega} m - \tilde{\omega} r \partial_r \right] p - r^2 k_\perp^2 p = 0, \quad (\text{B.9})$$

которое в отсутствие среднего течения упрощается до (3.6). Аналогичное уравнение для двумерной задачи было выведено в [170, (22)] в рамках модели для изучения излучения плоских спиральных инерционно-гравитационных волн.

## Приложение Г

### Вязкий профиль монохроматической волны в окрестности критического слоя

В данном приложении мы выводим решение вязких уравнений в окрестности критического слоя. Их можно получить методом Лапласа для дифференциальных уравнений, отыскивая решение в виде интеграла вдоль контура  $L$  в плоскости комплексной переменной  $\chi$ :

$$v(\eta) = \int_L d\chi e^{-i\sigma\chi\eta} v(\chi). \quad (\text{Г.1})$$

Выполнив подстановку в исходное уравнение, где при некоторых членах стоит множитель, пропорциональный  $\eta$ , можно перейти к другому дифференциальному уравнению, собирающемуся в подынтегральном выражении для функции-образа  $v(\chi)$ . При этом члены с  $\eta$  преобразуются интегрированием по частям в предположении, что попутно возникающие краевые члены вне интеграла не дадут вклада — это должно обеспечиваться надлежащим выбором контура интегрирования  $L$ .

Для решения  $v_{\pm}$  уравнения (3.42) получается обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка для  $v(\chi)$ . В обозначениях Приложения А2 книги [149] оно пропорционально линейной комбинации функций  $A_k(z, p)$ :

$$A_1(z, p) + A_2(z, p) + A_3(z, p) \propto \int_L d\chi \frac{e^{-i\sigma\chi\eta - (\eta_v\chi)^3/3}}{\chi^{(3 \pm i\beta)/2}}, \quad (\text{Г.2})$$

$$z = -i\sigma\eta/\eta_v, \quad p = (3 \pm i\beta)/2.$$

В (Г.2) стоит контурный интеграл в комплексной плоскости  $\chi$  с разрезом вдоль полуоси  $(0, +\infty)$ . Контур интегрирования  $L$  начинается и заканчивается на бесконечности  $\text{Re } \chi \rightarrow +\infty$ ; он обходит точку ветвления  $\chi = 0$  с другой стороны от разреза. Чтобы сделать особенность  $\chi = 0$  интегрируемой, применим интегрирование по частям, получая попутно производную экспоненты. После этого контурный интеграл может быть заменен интегралом вдоль полуоси, поскольку разность значений подынтегрального выражения по разные стороны разреза пропорциональна самому этому выражению. Таким образом мы получаем интегральное представление (3.43) на вещественной оси.

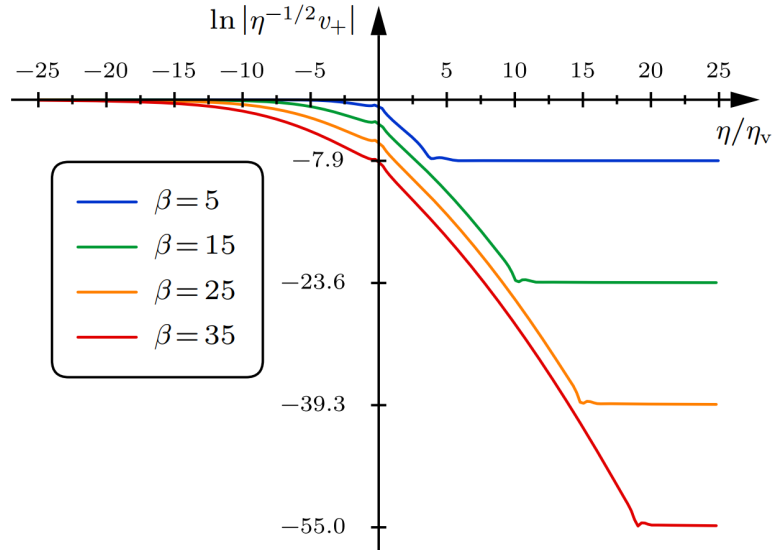


Рисунок Г.1 — Затухание логарифма модуля  $|\eta^{-1/2} v_+|$  для нормированного решения (3.43) при  $\sigma = 1$  и толщина вязкого подслоя при различных значениях параметра  $\beta \approx 2/\rho$ .

Отметим, что толщина вязкого подслоя определяется не только масштабом  $\eta_v$ . Изучим ее зависимость от  $\rho$  в коротковолновом пределе ( $\rho \approx 2/\beta \ll 1$ ), пренебрегая  $1/2$  по сравнению с  $i/\rho$  при рассмотрении (3.42). Для определенности выберем  $\sigma = 1$ . Запишем уравнение в терминах локального волнового числа  $k_y(\eta)$  в экспоненте (3.23) WKБ-представления для  $v_+(\eta)$ :

$$i\eta k_y + \eta_v^3 k_y^3 - \frac{i}{\rho} = \eta_v^3 (3i k_y k_y' + k_y''), \quad (\text{Г.3})$$

где слева мы удержали алгебраическую часть — основную в WKБ-приближении данной задачи. Для решения (3.43) на далеких расстояниях реализуется невязкая асимптотика  $k_y \approx i/\rho\eta$ , обсуждавшаяся в Подразделе 3.4.2. Левая часть уравнения обезразмеривается, если перейти к перемасштабированной координате  $\tilde{\eta}$  и волновому числу  $\tilde{k}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\eta} &= \rho^{2/3} \eta / \eta_v, & \tilde{k} &= \rho^{1/3} \eta_v k_y : \\ i\tilde{\eta} \tilde{k} + \tilde{k}^3 - i &= \rho [3i \tilde{k} \tilde{k}'(\tilde{\eta}) + \rho \tilde{k}''(\tilde{\eta})]. \end{aligned} \quad (\text{Г.4})$$

В непосредственной близости точки  $\eta = 0$  членами в правой части (в первую очередь с  $k_y k_y'$ ) нельзя пренебрегать для восстановления сшитого описания, как в (Г.2), по разные стороны от критического слоя. В пределе  $\rho \ll 1$  вне этой области на  $\tilde{\eta} \gtrsim 1$  их роль уже ослабляется. На основе выбора масштабов (Г.4) получаем оценку  $\delta\eta \sim \rho^{-2/3} \eta_v$  для толщины подслоя, на котором происходит

поглощение волны с учетом вязкости. Для проверки этого рассматривалось поведение численного решения задачи на Рис. Г.1. Чтобы исключить корневой рост амплитуды решения (3.43) на отдалении, см. (3.33), на график вынесен логарифм  $\ln|\eta^{-1/2}v|$ , который выходит на постоянную асимптотику на далеких расстояниях: 1 и  $-\pi\beta/2$ , соответственно (3.36). С уменьшением  $\rho$  ширина области поглощения растет согласно приведенной асимптотике.

Восстановление членов с  $k_\perp^2$ , присутствующих в операторах  $\Delta^{3D}$ , в модели линеаризованного течения вблизи критического слоя  $c\tilde{\omega} = \Sigma k_x \eta$  приводит к модифицированному уравнению:

$$(\eta + i\sigma\eta_v^3\Delta^{3D})^2 \Delta^{3D}v + \frac{1+\beta^2}{4}v = 0. \quad (\text{Г.5})$$

Для решения  $v_\pm$  уравнения (Г.5) получается дифференциальное уравнение для  $v(\chi)$ ,

$$[\partial_\chi + \eta_v^3(\chi^2 + k_\perp^2)]^2 (\chi^2 + k_\perp^2)v + \frac{1+\beta^2}{4}v = 0, \quad (\text{Г.6})$$

которое сводится к гипергеометрическому уравнению Гаусса. Переходя к функции  $f(p)$  от новой переменной  $p$ , приходим к каноническому виду уравнения для  ${}_2F_1(a, b; c; p)$ , где параметры равны

$$\begin{aligned} p &= \frac{k_\perp^2}{\chi^2 + k_\perp^2}, \quad v = \frac{e^{-\eta_v^3(\chi^3/3 + k_\perp^2\chi)} f}{(\chi^2 + k_\perp^2)^{(3-i\beta)/4}}; \\ (1-p)pf'' + (c - p(a+b+1))f' - abf &= 0, \\ a &= -\frac{1+i\beta}{4}, \quad b = \frac{3-i\beta}{4}, \quad c = 1 - \frac{i\beta}{2}. \end{aligned} \quad (\text{Г.7})$$

Интегральная формула Лапласа (Г.1) для искомого решения имеет вид

$$v_\pm(\eta) \propto \int_L d\chi \frac{e^{-i\sigma\chi\eta - \eta_v^3(\chi^3/3 + k_\perp^2\chi)}}{(\chi^2 + k_\perp^2)^{(3\pm i\beta)/4}} {}_2F_1\left(-\frac{1 \mp i\beta}{4}, \frac{3 \pm i\beta}{4}, 1 \pm \frac{i\beta}{2}, \frac{k_\perp^2}{\chi^2 + k_\perp^2}\right), \quad (\text{Г.8})$$

который в пределе  $k_\perp \rightarrow 0$  упрощается до (Г.2). Контур  $L$  выбирается тем же способом: в комплексной плоскости  $\chi$  с двумя разрезами, выходящими из каждой точки ветвления  $\chi_{1,2} = \pm ik_\perp$  в направлении  $\text{Re } \chi \rightarrow +\infty$ . Контур  $L$  охватывает оба разреза сразу, начинаясь при  $\chi \rightarrow +\infty - i(k_\perp + 0)$  и уходя в  $\chi \rightarrow +\infty + i(k_\perp + 0)$  с другой стороны от них.

В решении (Г.8) подынтегральное выражение остается регулярным при  $\chi = 0$  благодаря  $k_\perp$ . Учет  $k_\perp$  в модели обеспечивает в (Г.8) дальнейший переход от степенной асимптотики (3.33) на удалении от критического слоя, когда основной

вклад в интеграл дает окрестность точек ветвления  $\chi_{1,2}$ . В то же время интеграл зависит, помимо перемасштабированной координаты  $\eta/\eta_v$  и  $\beta$ , от единственного параметра  $\mu = k_\perp \eta_v$ , что становится очевидным при переходе к переменной интегрирования  $\chi = \xi/\eta_v$ . При  $\mu \ll 1$  мы приходим к формуле (3.44) для поправки к (3.43), взяв разложение в главном порядке по  $\mu$  и затем снова проинтегрировав по частям, чтобы сделать выражение интегрируемым при  $\chi = 0$ .

## Приложение Д

### Подробный анализ зависимости экстремума $\xi_*(r)$ и обрезки $m_*(r)$ по азимутальным числам

Рассмотрим решение уравнения на экстремум (4.32) — выведем из него выражение, как смещается  $\xi_*(r)$  (конструкция  $B$  заведена в (4.34)):

$$\frac{d\xi_*(r)}{dr} = \frac{-W'(r) [1 + 2B\xi_* W'(\xi_*)/W(r)]}{(1+B)\xi_* W''(\xi_*) + 3BW'(\xi_*)}. \quad (\text{Д.1})$$

Полагая положение  $\xi_*$  достаточно отдаленным, так что выполнены условия

$$W(\xi_*) \ll W(r), \quad \gamma(\xi_*)\xi_* \gg 1,$$

можно получить приближенную формулу

$$\frac{d\xi_*(r)}{dr} \approx \frac{\gamma(r)}{\gamma(\xi_*)} \cdot \frac{1-B}{1+B}, \quad (\text{Д.2})$$

где  $\gamma(r)$  — локальный декремент затухания профиля, определенный в (4.33). Вдалеке, когда  $\xi_*$  уже приближается к минимуму  $R_v$  угловой скорости  $W$ , движение сменяет асимптотику на медленное движение: из общей формулы (Д.1) следует

$$\frac{d\xi_*(r)}{dr} \approx -\frac{W'(r)}{R_v W''(R_v)}.$$

Поведение экстремума для типичной волны в ансамбле (с  $k = k_f$ ) представлено на Рис. Д.1 на примере данных по профилю циклона в опыте при  $\Omega = 2.63 \text{ с}^{-1}$ .

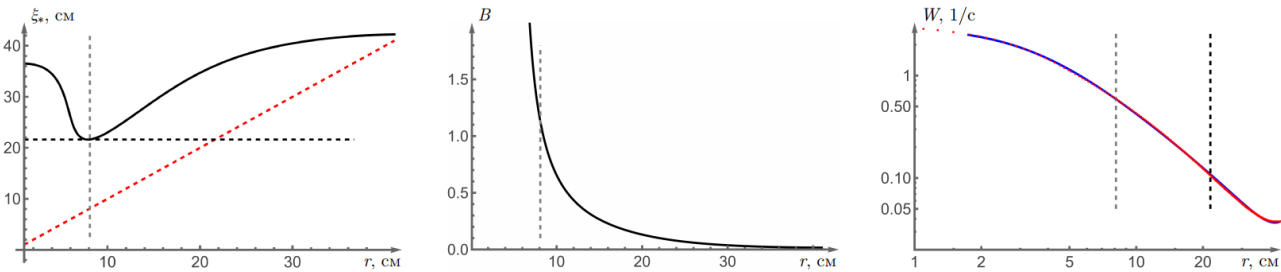


Рисунок Д.1 — График положения экстремума  $\xi_*$  выражения (4.30), значения  $B$ , рассчитанные для циклона при  $\Omega = 2.63 \text{ с}^{-1}$ . Данные  $W(r)$  (справа) приближались аналитической функцией на интервале (2,44) см, с которой численно решалось уравнение на точку минимума выражения в (4.30) при  $k_f = 0.44 \text{ см}^{-1}$ .

Красной пунктирной линией обозначена  $\xi = r$  для сравнения с  $\xi_*(r)$ , а серой — положение  $r_m = 8.1$  см, в котором реализуется минимум  $\xi_*(r_m) = 21.6$  см (черный пункт). В точке минимума значение  $B = 1.1$ ; отклонение от 1 вызвано близостью к оси вихря — там значение  $\sqrt{2\tilde{\Omega}(2\tilde{\Omega} + \Sigma)}$  еще отличается от  $2\Omega$  на 13%. Эти координаты для наглядности отмечены на профиле  $W(r)$  справа (взяты из Рис. 4.3).

Ограничение на  $m^2(\xi)$ , которое задает неравенство (4.30) (надо взять выражение в правой части с множителем  $(2\Omega/W)^2$  согласно (4.31)), будет изменяться с  $\xi$  мало вдали от центра вихря: значение логарифмической производной там, где  $2\tilde{\Omega}(2\tilde{\Omega} + \Sigma)(\xi_*) \approx (2\Omega)^2$

$$\frac{\partial \ln m^2}{\partial \xi} \approx 2 \left[ \frac{W'(\xi)}{(W - W(\xi))} + \frac{1}{\xi} \frac{1}{1 + B} \right] \quad (\text{Д.3})$$

предполагает характерный масштаб его изменения

$$\min \left[ (1 + B)\xi, \gamma(\xi)^{-1}(W - W(\xi))/W(\xi) \right].$$

Его значение в экстремуме  $\xi = \xi_*(r)$ , являющееся обрезкой суммы по гармоникам, удовлетворяет уравнению

$$\frac{d \ln m_*}{dr} = \frac{W'}{W} \cdot \frac{\xi_* W'(\xi_*) - W(\xi_*)}{W - W(\xi_*)}. \quad (\text{Д.4})$$