

ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ИМ. Л.Д. ЛАНДАУ РАН
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

На правах рукописи
УДК 538.945

Побойко Игорь Валерьевич

**КИНЕТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В КВАНТОВЫХ
НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ СИСТЕМАХ**

Специальность 01.04.02 —
«Теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Фейгельман Михаил Викторович

Черноголовка — 2020

	Стр.
.....	5
1.	
1/2 XXZ	13
1.1 Введение	13
1.2 Модель	15
1.3 Теория возмущений	19
1.3.1 Вычисление в наинизшем порядке теории возмущений .. .	21
1.3.2 Самосогласованное вычисление	25
1.3.3 Диаграммы старших порядков	29
1.4 Корреляционные функции	35
1.5 Совместный эффект беспорядка и нелинейности спектра	37
1.5.1 Ширина линии	37
1.5.2 Транспортные свойства	38
1.6 Выводы	39
2.	
.....	41
2.1 Введение	41
2.2 Модель и диаграммная техника	45
2.2.1 Температура перехода и параметр порядка в приближении среднего поля	47
2.2.2 Семионное описание и Келдышевская диаграммная техника	50
2.2.3 Электрический ток	52
2.3 Гауссовы флуктуации и парапроводимость	53
2.3.1 Пропагатор параметра порядка	53
2.3.2 Флуктуационная проводимость	57
2.4 Эффекты локального шума	60
2.4.1 Спиновая релаксация и перенормировка	61
2.4.2 Поправки к пропагатору параметра порядка	65

2.4.3	Влияние на парапроводимость	67
2.5	Другие типы флуктуационных поправок	68
2.5.1	Поправки к $L(\omega, \mathbf{q})$	69
2.5.2	Пространственные флуктуации проводимости	70
2.6	Выводы	72
3.		
	75
3.1	Введение	75
3.2	Модель и теория среднего поля	76
3.3	Высокотемпературная фаза и фазовый переход	80
3.4	Низкотемпературная фаза в приближении одноступенчатого нарушения репличной симметрии	83
3.5	Физические свойства низкотемпературной фазы.	85
3.6	Выводы	88
	90
	94
	103
	103
A.1	Вычисление мнимой части собственной энергии	103
A.2	Вычисление корреляционной функции в пространственно-временном представлении	106
	110
B.1	Приближение среднего поля и влияние конечности R на величину T_c	110
B.2	Келдышевская диаграммная техника для псевдоспинов	114
B.3	“Примесная” диаграммная техника	116
B.4	Вычисление корреляционной функции проводимости	117
	120
V.1	Тождества Швингера-Дайсона	120
V.1.1	Флуктуации поляризуемости	121
V.2	Вывод функционала Гинзбурга-Ландау	122

В.3	Одноступенчатое нарушение репличной симметрии	124
В.3.1	Анализ уравнений при $T \ll T_c$	126
В.3.2	Распределение локального потенциала для вихрей	127
В.3.3	Энтропия при низких температурах	128

Изучение квантовых когерентных свойств макроскопических систем представляет собой одно из основных направлений исследований в современной физике конденсированного состояния. При этом образцы, изучаемые в различных экспериментах, часто неидеальны — это может быть вызвано как различными примесями и дефектами, которые в том или ином количестве присутствуют в любых образцах, так и полным отсутствием кристаллической структуры (в качестве примера приведём аморфные тонкие плёнки InO_x , изучению которых посвящена часть этой диссертации). В основополагающей работе Андерсона [1] было предсказано, что такой замороженный беспорядок может значительно повлиять на свойства системы, приводя к так называемой локализации: часть или все волновые функции системы в отсутствие взаимодействия между частицами оказываются локализованными. Это обстоятельство значительно влияет на кинетические свойства таких систем: весь транспорт через систему, будь то транспорт заряда (проводимость), тепла (теплопроводность) или спина, оказывается экспоненциально подавленным по размеру системы (при нулевой температуре).

Андерсоновская локализация по своей природе является квантовым интерференционным эффектом, и поэтому она в значительной мере чувствительна к наличию в системе неупругих процессов — таких как взаимодействие между частицами, или наличие связи с внешним резервуаром. Когда беспорядок в каком-то смысле слаб, взаимодействие приводит к сбою фазы частиц, подавляя интерференционные эффекты, что приводит к слаболокализационным поправкам к проводимости [2]. Изучение этих поправок позволяет приблизиться к локализационному переходу со стороны металлической фазы, и демонстрирует ключевую роль пространственной размерности системы. В частности, в одномерных системах слаболокализационные поправки расходятся, что означает, что режим “слабого беспорядка” в одномерии попросту отсутствует; это является следствием того факта, что в одномерии всякий беспорядок приводит к локализации. Двумерные системы представляют собой пограничный случай: в них слаболокализационные поправки расходятся лишь логарифмически. Хотя сколь угодно слабый беспорядок в отсутствие взаимодействий и приводит к локализации всех волновых функций, длина локализации оказывается экспоненциально

большой и различные возмущения (в роли таковых могут выступать взаимодействие между частицами, спин-орбитальное взаимодействие и т.п.) могут привести к изменению этой картины. Наконец, в трёхмерной системе предсказывается наличие квантового фазового перехода металл-изолятор, при котором с одной стороны перехода волновые функции делокализованы, с другой — локализованы, а в самой точке перехода наблюдается явление мультифрактальности волновых функций [3]. Из-за вышеперечисленных обстоятельств, низкоразмерные системы представляют наибольший интерес с точки зрения локализации.

В случае, если беспорядок сильный, взаимодействие всё равно может привести к наличию в системе конечной проводимости при ненулевой температуре, посредством механизма, известного как «прыжковая проводимость», предсказанного Моттом и обобщённым на случай наличия кулоновского дальнего действия Эфросом и Шкловским. В их картине, неупругие процессы, вызванные Кулоновским взаимодействием между электронами или взаимодействием с внешней фононной баней, приводят к туннелированию электронов между локализованными состояниями, из-за чего проводимость при $T > 0$ оказывается ненулевой (которая, однако, зануляется при $T = 0$).

Однако, сейчас известно, что и эта картина также может нарушаться. Баско, Алейнер и Альтшулер [4] предсказали, что в замкнутых системах даже при наличии взаимодействия (но в отсутствие взаимодействия, скажем, с внешним фононным резервуаром) может существовать переход металл-изолятор при положительных температурах, который был назван многочастичной локализацией. Авторы исследовали многочастичные фоковские состояния, построенные на одночастичных локализованных состояниях, и изучали вопрос, могут ли матричные элементы взаимодействия привести к делокализации этих состояний по всему фоковскому пространству. Из приведённых ими оценок следовало, что это происходит не всегда, и что в системе может присутствовать многочастичный порог мобильности — что, в частности, приводит к занулению проводимости при ненулевых температурах. Многочастичная локализация вызвала бурный интерес в научном сообществе, поскольку она также соответствует нарушению эргодичности и отходу поведения термодинамики таких систем от описываемого распределением Гиббса — наречённого в литературе "нарушением гипотезы о термальности собственных состояний" (Eigenstate Thermalization Hypothesis). Эта гипотеза представляет собой квантомеханический аналог эквивалентности

между микроканоническим и каноническим ансамблями, известному в классической статистической механике.

В свете описанных выше обстоятельств становится понятно, что одновременный учёт эффектов взаимодействия и локализации приводит к богатому многообразию всевозможных физических явлений, наблюдаемых в различных системах. По этой причине, вероятно, построение общей теории, описывающей взаимодействующие неупорядоченные системы, невозможно. Тем самым целью данной диссертации было избрано оказание посильного вклада в эту область научных знаний путём исследования набора конкретных примеров таких систем, представлявших интерес для автора в течение его работы над одной.

Глава 1 посвящена изучению спинового и теплового транспорта через одномерные неупорядоченные спиновые цепочки, описываемые XXZ -гамильтонианом. Данная модель эквивалентна модели взаимодействующих бесспиновых фермионов, и она хорошо приспособлена для изучения совместных эффектов от беспорядка и взаимодействия в одномерных системах. Модель жидкости Латтинджера позволяет точно учесть даже сильное взаимодействие в одномерных системах [5] (такому учёту также способствует интегрируемость спинового XXZ гамильтониана); она представляет собой свободную бозонную теорию, описывающую возбуждения спиновой плотности — плазмоны. Пертурбативный учёт беспорядка был произведён используя метод ренормгруппы в работе [6], в которой было продемонстрировано наличие параметрической области, в которой беспорядок представляет собой иррелевантное возмущение; как следствие, в этой области имеет место делокализация и система обладает конечной проводимостью (бесконечной в пределе $T \rightarrow 0$). Такой учёт также позволяет вычислить кинетические коэффициенты в этой области, что было произведено в работе [7]. Однако, это вычисление упускает учёт эффектов нелинейности спектра исходных фермионов. Соответствующие эффекты могут быть описаны как нелинейные вершины взаимодействия плазмонных полей. Константы взаимодействия, описывающие эти вершины, малы и иррелевантны в смысле ренормгруппы, однако, из-за особенностей одномерной кинематики, эффекты от них непертурбативны: линейный спектр плазмонов фактически означает, что продукты распада плазмона всегда движутся с одинаковой скоростью и их эффективное время взаимодействия бесконечно. Эта

проблема была решена путём разработки процедуры самосогласованного пере-
суммирования ряда сингулярных диаграмм, что, в конечном итоге, позволило
оценить влияние этого эффекта на транспортные свойства системы.

В главе 2 изучается другая система: сильно неупорядоченный сверхпро-
водник (как объёмный, так и тонкая плёнка) при температурах слегка выше
температуры сверхпроводящего перехода. Для такой системы изучается прово-
димость, связанная с наличием в ней флуктуационных Куперовских пар (т.н.
“парапроводимость”). Из-за того, что одночастичные состояния в такой системе
локализованы, в ней возникает феномен названный “псевдощелью” [8] — щель
в туннельной одноэлектронной плотности состояний, связанная с преформи-
рованными Куперовскими парами выше сверхпроводящего перехода. При даль-
нейшем охлаждении, эти пары конденсируются, что приводит к переходу сверх-
проводник-изолятор. Целью нашего изучения являлось построение количествен-
ной теории таких — достаточно экзотических — систем в окрестности фазового
перехода и изучение флуктуационной проводимости — аналог проводимости
Асламазова-Ларкина [9] в обычных неупорядоченных сверхпроводниках.

В главе 3 продолжается изучение сильно неупорядоченных сверхпроводя-
щих плёнок, но с несколько другой стороны. Когда к таким системам прикла-
дывается поперечное магнитное поле, оно частично проникает в плёнку в виде
сверхпроводящих вихрей Абрикосова. В чистой системе эти вихри формируют
треугольную решётку; однако сильный беспорядок разрушает даже ближний
порядок. С точки зрения транспорта, если через такую систему пропускается
сверхток, то на вихри начинает действовать “сила Лоренца”, которая приво-
дит к движению вихрей и в конечном итоге к диссипации. Однако, недавние
эксперименты [10] продемонстрировали, что в аморфных плёнках InO_x имеет-
ся отличное от нуля значение критического тока даже при магнитных полях
близких ко второму критическому, что было проинтерпретировано как образо-
вание вихрями коллективно запиннированного стекольного состояния. В главе
описывается первая попытка описать подобное стекольное вихревое состояние
аналитически, используя методы из теории спиновых стёкол.

данной работы является изучение транспортных свойств в кванто-
вых мезоскопических неупорядоченных сильно-коррелированных системах на
серии конкретных примеров таких систем.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие :

1. Исследовать влияние поправок, возникающих при учёте эффектов нелинейности спектра, на ширину спектральной линии в чистой ХХZ спиновой цепочке, а также на спиновый транспорт и транспорт тепла через такую цепочку при наличии случайных магнитных полей.
2. Вывести эффективное действие, описывающее флуктуации сверхпроводящего параметра порядка в сверхпроводниках с развитой псевдощелью.
3. Исходя из выведенного действия, разработать диаграммную технику для систематического изучения динамики флуктуаций и вычислить величину флуктуационной проводимости в такой система.
4. Построить модель, описывающую коллективный пиннинг вихрей в сильно неоднородных сверхпроводящих тонких плёнках. Вывести эффективное описание построенной модели, используя методы квантовой теории поля.
5. Исследовать фазовый переход в стекольную фазу в предложенной модели.
6. Изучить физические свойства стекольной фазы, включая величину сверхтекучей плотности в ней.

1. Построена процедура самосогласованного учёта эффектов нелинейности спектра на динамику в ХХZ спиновой цепочке. Вычислена величина ширины спектральной линии спиновой корреляционной функции при низких частотах в отсутствие и в присутствии приложенного однородного магнитного поля. Изучено асимптотическое поведение спиновой корреляционной функции при больших временах. Произведена оценка влияния этих эффектов на транспортные свойства неупорядоченной цепочки.
2. Выведено динамическое действие, описывающее флуктуации параметра порядка для модели сверхпроводника с сильно развитой псевдощелью. Идентифицировано наличие трёх релевантных температурных областей в окрестности критической температуры: область гауссовых флуктуаций, промежуточная область и область критических флуктуа-

- ций. Изучена величина парапроводимости Асламазова-Ларкина в области гауссовых флуктуаций. Приведена оценка той же величины в промежуточной температурной области. Обнаружена сильная пространственная неоднородность проводимости в области критических флуктуаций.
3. Предложена модель, описывающая коллективный пиннинг системы сверхпроводящих вихрей, обладающей конечной плотностью, в пространственно сильно неоднородной тонкой сверхпроводящей плёнке. Идентифицировано наличие стекольного фазового перехода в такой системе. Продемонстрировано наличие сильного пиннинга и восстановления сверхтекучего отклика при низких температурах.

:

1. Впервые получено выражение для ширины спектральной линии при низких частотах для чистой XXZ спиновой цепочки в отсутствие магнитного поля.
2. Впервые оценено влияние эффектов нелинейности спектра на транспортные свойства такой цепочки.
3. Впервые изучен теоретически вопрос о виде флуктуационных поправок в сильно неупорядоченных сверхпроводниках с развитой псевдощелью.
4. Впервые разработан систематический аналитический подход к задаче о сильном коллективном пиннинге системы сверхпроводящих вихрей с конечной плотностью в сильно неупорядоченных тонких сверхпроводящих плёнках.

,

. Квантовые неупорядоченные одномерные спиновые цепочки представляют живой научный интерес с точки зрения изучения проблемы многочастичной локализации, которая активно изучается в научном сообществе в течение последних лет; поэтому изучение базовых физических свойств таких систем является актуальной и интересной задачей. Изучение сильно неупорядоченных сверхпроводников в первую очередь мотивировано серией недавних экспериментов на аморфных тонких плёнках InO_x и других схожих системах. Исследование температурной зависимости проводимости $\sigma(T)$ в таких системах представляет интерес с экспериментальной точки зрения, поскольку такого рода эксперименты позволяют извлекать значения величин, характеризующих сверхпроводящее состояние — к примеру, температуру сверхпроводящего пе-

рехода T_c ; прямое определение этой величины как температуры, при которой сопротивление обращается в ноль, затруднено из-за того, что сопротивление спадает до нуля в очень широком температурном интервале. Наконец, необходимость изучения вихревого стекла также вызвана недавними экспериментами на плёнках InO_x , которые демонстрировали наличие в такой системе ненулевого значения величины критического тока при больших величинах приложенного поперечного магнитного поля (вплоть до второго критического).

. Основные результаты работы докладывались на:

- Симпозиум "*Localization, Interactions and Superconductivity*", Черногловка, Россия, 27 июня – 1 июля 2016 г.; постер «Spin correlations and decay of quasiparticles in XXZ model at $T > 0$ »
- Симпозиум CPTGA "*Strongly disordered and inhomogeneous superconductivity*", Гренобль, Франция, 21 – 22 ноября 2016 г.; доклад «Spin correlation functions and quasiparticle decay»
- Симпозиум *Winter workshop/school on localization, interactions and superconductivity*, Черногловка, Россия, 19 – 22 декабря 2016 г.; доклад «Spin correlation functions and quasiparticle decay»
- Конференция *Landau Days 2017*, Черногловка, Россия, 26 – 29 июня 2017 г.; постер «Paraconductivity in pseudogapped superconductors»
- Школа *School on Fundamentals on Quantum Transport*, Триест, Италия, 31 июля – 4 августа 2017 г.; постер «Paraconductivity in pseudogapped superconductors»
- Школа *Frontiers of condensed matter*, Лез Уш, Франция, 18 – 29 сентября 2017 г.; постер «Paraconductivity in pseudogapped superconductors»
- Симпозиум *Winter workshop/school on localization, interactions and superconductivity*, Черногловка, Россия, 18 – 21 декабря 2017 г.; доклад «Paraconductivity in pseudogapped superconductors»
- Симпозиум *Localization, Interactions and Superconductivity*, Черногловка, Россия, 30 июня – 4 июля 2018 г.; постер «Paraconductivity in pseudogapped superconductors»
- Школа *Summer School on Collective Behaviour in Quantum Matter*, Триест, Италия, 27 августа – 14 сентября 2018 г.; постер «Paraconductivity in pseudogapped superconductors»

- Конференция *A. A. Abrikosov Memorial Conference*, Черногоровка, Россия, 24 – 28 июня 2018 г.; доклад «Paraconductivity in pseudogapped superconductors»
- Конференция *International Conference for Professionals & Young Scientists "Low Temperature Physics"*, Харьков, Украина, 3 – 7 июня 2019 г.; доклад «Paraconductivity in pseudogapped superconductors»
- Конференция *Landau Days 2020*, Черногоровка, Россия, 22 – 25 июня 2020 г.; доклад «2D Coulomb glass as a model of strong vortex pinning in thin-film superconductors»

Кроме этого, все результаты докладывались на научных семинарах учёного совета ИТФ им. Л.Д. Ландау РАН.

. Все результаты, приведённые в данной диссертационной работе, получены лично автором или при его непосредственном участии.

. Основные результаты по теме диссертации изложены в следующих работах:

1. *Poboiko I., Feigel'man M.* Spin correlation functions and decay of quasiparticles in XXZ spin chain at $T > 0$ // *Phys. Rev. B.* — 2016. — нояб. — т. 94, вып. 19. — с. 195420. — DOI: [10.1103/PhysRevB.94.195420](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.94.195420).
2. *Poboiko I., Feigel'man M.* Paraconductivity of pseudogapped superconductors // *Phys. Rev. B.* — 2018. — янв. — т. 97, вып. 1. — с. 014506. — DOI: [10.1103/PhysRevB.97.014506](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.97.014506).
3. ., . Двумерное кулоновское стекло как модель пиннинга вихрей в сверхпроводящих пленках // *Письма в ЖЭТФ.* — 2020. — т. 112, вып. 4.

Работы изданы в 3 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК.

. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и трёх приложений. Полный объём диссертации составляет 129 страниц с 14 рисунками. Список литературы содержит 77 наименований.

1.1

Одномерные неупорядоченные спиновые цепочки представляют собой пример сильно коррелированных квантовых систем, и прекрасно подходят для изучения базовых свойств таких систем. В последнее время, изучение таких цепочек стало одним из важнейших направлений в области многочастичной локализации (many-body localization, MBL) [4; 11–17]. Один из недавних примеров изучения подобного рода систем представлен в нашей недавней работе [7], в которой изучалась теплопроводность анизотропной цепочке спинов $1/2$ со слабым беспорядком в пределе низких температур $T \ll J$ в области параметров анизотропии $1/2 < \Delta = J^{zz}/J < 1$. В этой работе мы применили преобразование Йордана-Вигнера, позволяющее перейти к описанию системы на фермионном языке, и использовали стандартную технику бозонизации [5], применимость которой ограничена приближением жидкости Латтинджера с линейным спектром. В работе [7] были приведены аргументы в пользу того, что такое приближение применимо в пределе низких температур только при условиях $\Delta < \cos \frac{\pi}{5} \approx 0.81$ и условии малой величины в замороженного беспорядка, $\langle h^2 \rangle \ll J^2$; и при больших значениях Δ оно становится неприменимым.

Эффекты от нелинейности спектра в одномерных квантовых жидкостях активно изучались с различных позиций, см. недавний обзор [18] и работы [19–22]. К этой задаче есть два различных подхода, соответствующие использованию либо фермионного, либо бозонного представления. В фермионном представлении, исходный спектр квазичастиц имеет вид $\epsilon(q) = uq + \delta\epsilon(q)$, где $\delta\epsilon(q) \ll uq$ при малых q . Для слабого взаимодействия между фермионами, построение бозонной корреляционной функции, составленной из пар фермионных операторов, является несложной задачей. В таком случае, спектральная функция $g(\omega, q)$, соответствующая любому бозонному оператору, может быть получена как свёртка двух фермионных спектральных функций, и тем самым

в ней будет присутствовать конечная ширина $\sim \delta\epsilon(q)$. Однако, этот подход неприменим если взаимодействие между фермионами не является слабым.

С другой стороны, сильное взаимодействие между фермионами может быть учтено используя бозонное представление, в котором, однако, нелинейность исходного фермионного спектра приводит к наличию нелинейных членов взаимодействия между бозонными модами. Эти вершины являются кубическими $\delta\epsilon(q) \propto q^2$ (что более или менее является случаем общего положения), либо четверными в случае наличия частично-дырочной симметрии, когда $\delta\epsilon(q) \propto q^3$. Проблема учёта таких вершин в рамках приближения жидкости Латтинджера нетривиальна, поскольку все одномерные частицы с линейным спектром обладают одинаковой групповой скоростью, из-за чего их взаимодействие имеет резонансный характер — к примеру, продукты распада находятся в контакте в течение бесконечно долгого времени. Как следствие, прямое применение второго порядка теории возмущений приводит к расходимостям в мнимой части собственной энергетической части на “световом конусе”: $\text{Im } \Sigma(\omega, q) \propto \delta(\omega - uq)$.

В данной Главе мы разработаем подход, основывающийся на диаграммной технике, для вычисления $\text{Im } \Sigma(\omega \approx uq)$ для бозонных возбуждений, энергия которых ω мала по сравнению с температурой T , и оценим влияние этого эффекта на транспортные свойства неупорядоченной цепочки. Будет показано, что в пределе $\omega \ll T$ скорость распада квазичастиц $\Gamma(\omega, q)$ может быть определена самосогласованным образом в окрестности светового конуса, что приводит к конечным (хоть и неаналитическим) результатам. Ниже будут рассмотрены два случая: обменный гамильтониан спиновой цепочки, обладающий симметрией по отношению к инверсии $S^z \rightarrow -S^z$, а также спиновая цепочка, к которой приложено однородное магнитное поле вдоль оси z , величина которого $h \gg T$, нарушающее эту симметрию. Последний случай оказывается похож на случай, разобранный в работе А.Ф. Андреева [23] для флуктуационной поправки к вязкости одномерной классической жидкости, и разобранный в контексте жидкости Латтинджера в работе [19]. Нам неизвестны аналогичные вычисления, которые учитывали бы эффекты нелинейности спектра для симметричного случая $h = 0$.

Стоит обратить внимание, что скорость распада бозонных возбуждений $\Gamma(\omega)$, вычисленная в данной главе, не совпадает с скоростью неупругой релаксации; напротив, она является мерной когерентности конкретного типа бозонных

возбуждений, которые мы изучаем. Физический смысл величины $\Gamma(\omega)$ заключается в том, что она определяет форму динамической спиновой корреляционной функции $\langle S^z(x,t)S^z(0,0) \rangle$ при $x \approx \pm ut$ (в силу локальной связи между бозонными и спиновыми переменными).

Условие $\omega \ll T$ является критически необходимым для построения само-согласованного диаграммного подхода. В обратном пределе необходим другой подход, подобный разработанному в работах [18; 21; 24] для формы бозонной спектральной функции при $T = 0$.

Также стоит упомянуть другие работы, связанные с наличием так называемого “веса Друде” — коэффициента при $\delta(\omega)$ при вещественной части проводимости — в таких спиновых цепочках [25]. Этот интересный вопрос выходит за рамки данной работы, поскольку он относится к скорости затухания пространственно однородного тока — величине $\Gamma(\omega, 0)$, в то время как мы занимаемся изучением $\Gamma(\omega, q)$ при $\omega \approx uq$.

Данная глава организована следующим образом. В разделе 1.2 будет сформулирована модель, на основе которой в разделе 1.3.1 будет разработана диаграммная теория возмущений, и которая будет развита для проведения само-согласованного вычисления в разделе 1.3.2; в нём будут получены основные результаты для скорости распада Γ . Раздел 1.4 посвящен вычислению динамической спиновой корреляционной функции $\langle S^z(x,t)S^z(0,0) \rangle$ в окрестности $x \approx \pm ut$, и которая описывает уширение возбуждений за счёт процессов рассеяния на температурных возбуждениях. В разделе 1.5 обсуждается совместный эффект беспорядка и нелинейности спектра, включая их влияние на транспортные свойства системы. Наконец, в разделе 1.6 будут приведены выводы.

1.2

Мы изучаем анизотропную цепочку спинов 1/2 с XXZ-взаимодействием, к которой приложено внешнее магнитное поле вдоль оси z , и которая описывается следующим гамильтонианом:

$$\hat{H} = -J \sum_n \left(\hat{S}_n^x \hat{S}_{n+1}^x + \hat{S}_n^y \hat{S}_{n+1}^y + \Delta \hat{S}_n^z \hat{S}_{n+1}^z + \frac{h_n}{J} \hat{S}_n^z \right), \quad (1.1)$$

$$\langle h_n \rangle \equiv h, \quad \langle \langle h_n h_m \rangle \rangle \equiv W^2 \delta_{nm} \quad (1.2)$$

Знак обменной константы связи в плоскости XY может быть тривиально изменён, используя каноническое преобразование $\hat{S}_n^x \mapsto (-1)^n \hat{S}_n^x$, $\hat{S}_n^y \mapsto (-1)^n \hat{S}_n^y$, и $\hat{S}_n^z \mapsto \hat{S}_n^z$; это позволяет нам считать, не умаляя общности, что $J > 0$. Положительная величина Δ тем самым соответствует ферромагнитному обмену, а отрицательная — антиферромагнитному.

Используя преобразование Йордана-Вигнера, гамильтониан (1.1) может быть преобразован к следующему виду, описывающему взаимодействующие бесспиновые фермионы:

$$\hat{H} = -J \sum_n \left(\frac{1}{2} c_n^\dagger c_{n+1} + h.c. + \Delta \rho_n \rho_{n+1} + \frac{h_n}{J} \rho_n \right), \quad (1.3)$$

в котором оператор фермионной плотности имеет вид $\rho_n = c_n^\dagger c_n - \frac{1}{2} \equiv \hat{S}_n^z$.

В случае, когда приложенные магнитные поля малы по сравнению с шириной зоны $h_n \ll J$ и для значений параметра анизотропии $-1 < \Delta < 1$, низкоэнергетические свойства модели (1.3) описываются моделью жидкости Латтинджера [5]. Эта модель описывает возбуждения фермионной плотности, которые связаны с бозонными полями $\phi(x)$ следующим образом: $\rho(x) = -\frac{1}{\pi} \partial_x \phi(x) + \frac{1}{\pi a} \cos(2k_F x - 2\phi)$. Первый и второй члены в этой формуле соответствуют плавному ($q \sim 0$) и быстро-осциллирующему ($q \sim 2k_F$) вкладам, а величина a представляет собой ультрафиолетовую обрезку теории, имеющую порядок постоянной решётки. Случайный потенциал, возникающий из-за случайного магнитного поля, естественным образом распадается на $h(x) = h + \eta(x) + (\xi(x)e^{2ik_F x} + c.c.)$, где $\eta(x)$ и $\xi(x)$ соответствуют “медленной” и “быстрой” составляющим этого потенциала, с корреляционными функциями $\langle \xi(x)\xi^*(y) \rangle = \langle \eta(x)\eta(y) \rangle = D\delta(x-y)$, где $D \simeq W^2 a$.

В качестве следующего шага, введём канонически сопряжённый импульс $\Pi(x)$ с коммутационным соотношением $[\phi(x), \Pi(y)] = i\delta(x-y)$. В таком случае, квадратичная часть плотности гамильтониана, включая зависимость от магнитного поля, может быть записана следующим образом:

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{u}{K} (\partial_x \phi)^2 + uK (\pi\Pi)^2 \right), \quad \hat{\mathcal{H}}_h = \frac{1}{\pi} (h + \eta(x)) \partial_x \phi, \quad (1.4)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{dis}} = -\frac{1}{2\pi a}(\xi(x)e^{-2i\phi} + c.c.), \quad (1.5)$$

где u представляет собой групповую скорость возбуждений, а K — безразмерный параметр взаимодействия Латтинджера. Их значения могут быть напрямую выражены через константу связи J , постоянную решётки a и параметр анизотропии Δ следующим образом:

$$\Delta = \cos \frac{\pi}{2K}, \quad u = \frac{Ja \sin \frac{\pi}{2K}}{2 \left(1 - \frac{1}{2K}\right)} \quad (1.6)$$

В случае чисто квадратичного гамильтониана, зависимость от магнитного поля, а также от “медленной” составляющей случайного потенциала, может быть убрана тривиальным фазовым сдвигом $\partial_x \phi \mapsto \partial_x \phi - \frac{K}{u} h$. Однако, учёт нелинейных членов бозонных полей уже нарушает это свойство: подобный сдвиг генерирует дополнительные члены в гамильтониан, в том числе и модифицируя квадратичную его часть.

Альтернативное описание может быть проведено с использованием разделения поля плотности $\rho(x)$ на компоненту возбуждений, движущихся вправо $R(x)$ и влево $L(x)$, что соответствует гармоникам с $k > 0$ и $k < 0$ соответственно. Для дальнейших вычислений будет удобно перемасштабировать эти поля фактором \sqrt{K} , так что $\rho(x) = \sqrt{K}(R(x) + L(x))$. Явное выражение для этих полей даётся следующими формулами: $R(x), L(x) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{K}}\partial_x \phi(x) \pm \frac{\sqrt{K}}{2}\Pi(x)$, где верхний знак соответствует «правым», а нижний — «левым» возбуждениям. Квадратичная часть гамильтониана выражается через эти поля следующим образом:

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \pi u(R^2 + L^2), \quad \hat{\mathcal{H}}_h = (h + \eta(x))\sqrt{K}(R + L) \quad (1.7)$$

Ниже мы сфокусируемся на чистом случае $W = 0$, и вернёмся к обсуждению неупорядоченной цепочки в разделе 1.5.

Помимо квадратичной части, в гамильтониане также присутствуют irrelevantные в смысле ренормгруппы члены, которые сохраняют информацию о решёточной природе исходной модели [26], наиболее важными из которых являются члены, соответствующие процессам переброса и кривизне спектра.

Член, соответствующий процессам переброса, записывается следующим образом:

$$\hat{\mathcal{H}}_u = \lambda \frac{u}{a^2} \cos(4\phi(x)), \quad (1.8)$$

Скейлинговая размерность этого члена равна $2 - 4K$, и тем самым он является иррелевантным при $K > 1/2$, что соответствует $\Delta > -1$. Влияние такого члена на динамику возбуждений плотности при ненулевой температуре изучалось в работе [25], где было показано, что он приводит к конечной ширине спектральной линии $\Gamma \propto \lambda^2 T^{8K-3}$, и для достаточно больших K , которыми мы интересуемся, данный вклад оказывается чрезвычайно мал и может быть выброшен.

Член, соответствующий кривизне спектра, удобнее всего записывается как раз при помощи полей $R(x)$ и $L(x)$, введённых выше [26]:

$$\hat{\mathcal{H}}_{b.c.}^{(4)} = -\frac{\alpha}{2}(\lambda_+ R^2 L^2 + \lambda_-(R^4 + L^4)), \quad (1.9)$$

с параметрами

$$\alpha = 4\pi^3 u a^2 \quad (1.10)$$

$$\lambda_+ = \frac{1}{2\pi} \tan \frac{\pi K}{2K-1}, \quad (1.11)$$

$$\lambda_- = \frac{1}{24\pi K} \frac{\Gamma\left(\frac{3K}{2K-1}\right) \Gamma^3\left(\frac{1}{4K-2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4K-2}\right) \Gamma^3\left(\frac{K}{2K-1}\right)}. \quad (1.12)$$

Данные члены также являются иррелевантными, их скейлинговая размерность не зависит от K и равна -2 . Однако, при конечных температурах они оказываются важнее члена, соответствующего процессам переброса, уже при $K > 1$, что соответствует $\Delta > 0$. С случае общего положения, в системе могут также присутствовать следующие иррелевантные члены, с такой же скейлинговой размерностью и которые также разрешены электрон-дырочной симметрией: $(\nabla R)^2$ и $(\nabla L)^2$. Однако, конкретно в случае модели XXZ они не возникают, поскольку их наличие противоречило бы интегрируемости этой модели [27]. Таким образом, в отсутствие магнитного поля мы будем рассматривать только область $K > 1$, которая может быть описана гамильтонианом $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_{b.c.}^{(4)}$.

Приложенное магнитное поле выступает в роли химического потенциала для фермионов Йордана-Вигнера. Сдвиг последнего с точки половинного заполнения, в которой присутствует частично-дырочная симметрия, приводит к её нарушению и возникновению квадратичных членов в дисперсии квазичастиц $\delta\epsilon(q) \propto q^2$, которые на бозонном языке соответствуют кубическим вершинам взаимодействия. Такие члены естественным образом возникают в результате

фазового сдвига $R, L \mapsto R, L - \frac{\sqrt{K}}{2\pi u} h$, которое убирает магнитное поле из квадратичной части гамильтониана (1.4), если принять во внимание также нелинейные члены (1.9). Они имеют следующий вид:

$$\mathcal{H}_{b.c.}^{(3)} = \frac{\alpha_1}{3}(R^3 + L^3) + \frac{\alpha_2}{2}(R^2 L + RL^2), \quad (1.13)$$

с константами

$$\alpha_1 = \frac{3\alpha\sqrt{K}\lambda_- h}{\pi u}, \quad \alpha_2 = \frac{\alpha\sqrt{K}\lambda_+ h}{\pi u}. \quad (1.14)$$

Влияние квадратичной кривизны спектра на транспортные свойства системы изучались в работах [19; 20]. При достаточно слабых магнитных полях, соответствующие им кубические члены менее важны, чем четверные; ниже будет показано, что кроссовер между двумя режимами происходит при $h \sim T$. Тем самым, в присутствии магнитного поля полный гамильтониан задачи может быть записан в виде $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_{b.c.}^{(3)} + \hat{\mathcal{H}}_{b.c.}^{(4)}$, причём последний член может быть отброшен в случае, если величина приложенного магнитного поля достаточно мала.

Ниже мы изучим влияние членов, соответствующих кривизне спектра, на затухание бозонных возбуждений, ограничиваясь областью $K > 1$, где эффект от них при низких температурах больше, чем эффект от членов, соответствующих процессам переброса.

1.3

В данном разделе мы разработаем теорию возмущений по отношению к нелинейным членам в гамильтониане. Для начала мы введём запаздывающие корреляционные функции (тут и дальше используются короткие обозначения $\mathbf{x} = (x, t)$ и $\mathbf{q} = (q, \omega)$):

$$g_{ret}^{(R)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = -i\theta(t_1 - t_2) \langle [R(\mathbf{x}_1), R(\mathbf{x}_2)] \rangle \quad (1.15)$$

$$g_{ret}^{(L)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = -i\theta(t_1 - t_2) \langle [L(\mathbf{x}_1), L(\mathbf{x}_2)] \rangle \quad (1.16)$$

затравочные выражения для которых, вычисленные с использованием гамильтониана $\hat{\mathcal{H}}_0$,ы даются:

$$g_{ret}^{(R/L,0)}(\mathbf{q}) = \pm \frac{q}{2\pi} \frac{1}{\omega \mp uq}, \quad (1.17)$$

где верхний знак соответствует R , а нижний — L .

Для пересуммирования всех одночастично-приводимых диаграмм в ряду теории возмущений, мы будем пользоваться стандартным уравнением Дайсона. Это уравнение, а также его решение, могут быть записаны в следующем виде (для обоих типов возбуждений):

$$g_{ret} = g_{ret}^{(0)} + g_{ret}^{(0)} \Sigma_{ret} g_{ret} \quad (1.18)$$

$$g_{ret}^{(R/L)}(\mathbf{q}) = \pm \frac{q}{2\pi} \frac{1}{\omega - uq + i0 \mp \frac{q}{2\pi} \Sigma_{ret}^{(R/L)}(\mathbf{q})} \quad (1.19)$$

Мы интересуемся скоростью затухания квазичастичных возбуждений, которая определяется мнимой частью собственной энергетической части. Пренебрегая перенормировкой спектра и амплитуды волновой функции, которые соответствуют её вещественной части, мы видим, что функции Грина принимают следующий вид:

$$g_{ret}^{(R/L)}(\mathbf{q}) = \pm \frac{q}{2\pi} \frac{1}{\omega \mp uq + i\Gamma^{(R/L)}(\mathbf{q})} \quad (1.20)$$

$$\Gamma^{(R/L)}(\mathbf{q}) = \mp \frac{q}{2\pi} \text{Im} \Sigma_{ret}^{(R/L)}(\mathbf{q}) \quad (1.21)$$

В последующих вычислениях мы будем использовать келдышевскую диаграммную технику для ненулевых температур. В этой технике вводится дополнительное — келдышевское — пространство. Функции Грина в этом пространстве представляют собой матрицы 2 на 2, со следующей структурой:

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} g_K & g_{ret} \\ g_{adv} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

В равновесии, келдышевская компонента функции Грина может быть выражена через функцию распределения $f(\omega) = \coth \frac{\omega}{2T}$ следующим образом:

$$g_K(\omega) = f(\omega)(g_{ret}(\omega) - g_{adv}(\omega)) = 2if(\omega) \text{Im} g_{ret}(\omega) \quad (1.23)$$

Вершины взаимодействия в рамках келдышевской техники представляют собой симметричные тензора в келдышевском пространстве, со следующими компонентами (мы пользуемся стандартной нотацией “классических” и “квантовых” полей, см. к примеру [28], так что индексы пробегает значения $a, b, c \in \{cl, q\}$):

$$\hat{\gamma}_{q,q,q}^{(3R)} = \hat{\gamma}_{cl,q,q}^{(3R)} = -\sqrt{2}\alpha_1, \quad \hat{\gamma}_{abc}^{(3L)} \equiv \hat{\gamma}_{abc}^{(3R)}, \quad (1.24)$$

$$\hat{\gamma}_{q,q,q}^{(2R,L)} = \hat{\gamma}_{cl,q,q}^{(2R,L)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_2, \quad \hat{\gamma}_{abc}^{(R,2L)} \equiv \hat{\gamma}_{abc}^{(2R,L)}, \quad (1.25)$$

$$\hat{\gamma}_{cl,cl,cl,q}^{(4R)} = \hat{\gamma}_{cl,q,q,q}^{(4R)} = 6\alpha\lambda_-, \quad \hat{\gamma}_{abcd}^{(4L)} \equiv \hat{\gamma}_{abcd}^{(4R)}, \quad (1.26)$$

$$\hat{\gamma}_{cl,cl,cl,q}^{(2R,2L)} = \hat{\gamma}_{cl,q,q,q}^{(2R,2L)} = \alpha\lambda_+, \quad (1.27)$$

Ниже мы сфокусируемся на вычислении запаздывающей компоненты собственной энергетической части только для “правых” квазичастиц; соответствующие выражения для “левых” может быть получено прямолинейно заменой $q \mapsto -q$ в выражении для $\Sigma_{ret}^{(R)}(q)$ из-за L-R симметрии.

1.3.1

Во втором порядке теории возмущений, имеются две диаграммы для «правых» квазичастиц, которые возникают от членов R^4 и R^2L^2 в (1.9), см. рис. 1.1. Мы изучим мнимую часть собственной энергетической части, которая определяет скорость затухания этих квазичастиц.

Вклад в мнимую часть собственной энергетической части, приходящий от первой диаграммы, может быть выражен через спектральный вес $\text{Im } g_{ret}^{(R,L)}(\mathbf{q})$:

$$\begin{aligned} \text{Im } \Sigma_{ret}^{(R \rightarrow 3R)}(\mathbf{q}) &= \frac{3\alpha^2\lambda^2}{2\pi^4} \int d^2\mathbf{q}_1 d^2\mathbf{q}_2 \times \\ &\quad \times \text{Im } g_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_1) \text{Im } g_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_2) \text{Im } g_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_3) \times \\ &\quad \times (1 + f(\omega_2)f(\omega_3) + f(\omega_1)f(\omega_3) + f(\omega_1)f(\omega_2)) \quad (1.28) \end{aligned}$$

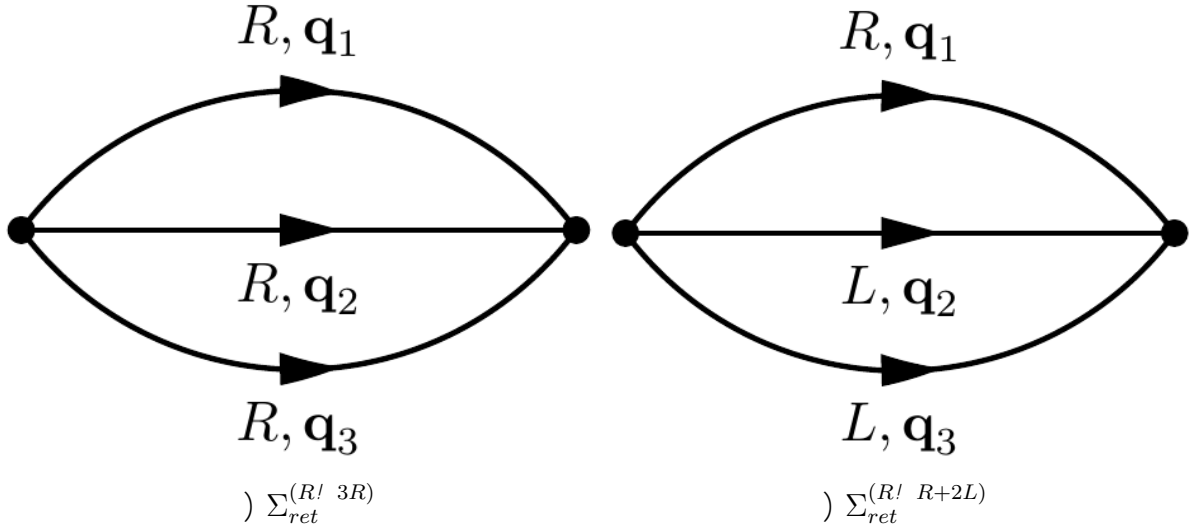


Рисунок 1.1 — Диаграммы для собственной энергетической части $\Sigma_{ret}^{(R)}$, возникающие от учёта членов (1.9). Линии соответствуют функциям Грина, представляющим собой матрицы размера 2×2 в Келдышевском пространстве; вершины в этом пространстве также обладают тензорной структурой

Затравочный спектральный вес представляет собой дельта-пик на массовой поверхности, $\text{Im } g_{ret}^{(R,L)}(\mathbf{q}) \propto \delta(\omega \mp uq)$. Совместно с законами сохранения энергии и импульса, это обстоятельство приводит также и к сингулярному поведению собственной энергетической части на массовой поверхности:

$$\text{Im } \Sigma_{ret}^{(R \rightarrow 3R)}(\mathbf{q}) = -\frac{\alpha^2 \lambda_-^2}{160\pi^4} \delta(\omega - uq) q \left[q^2 + \left(\frac{2\pi T}{u} \right)^2 \right] \left[q^2 + 4 \left(\frac{2\pi T}{u} \right)^2 \right]. \quad (1.29)$$

Эта сингулярность в (1.28) является следствием использования наинизшего порядка теории возмущений; ниже будет показано, что правильное вычисление приводит к конечному результату, который, однако, является неаналитической функцией константы связи $\alpha \lambda_-$.

Для того, чтобы получить более осмысленный результат при вычислении данной диаграммы, необходимо вычислить (1.28) самосогласованным образом, заменяя затравочные функции Грина “одетыми”, поскольку известно, что точный спектральный вес обладает конечной шириной и высотой [18]. Эта процедура соответствует пересуммированию бесконечной серии Фейнмановских диаграмм, которые наиболее сингулярны на массовой поверхности; это пересуммирование будет проведено ниже, в разделе 1.3.2.

Аналитическое выражение для второй диаграммы на рис. 1.1, сосчитанной с «затравочными» функциями Грина, может быть выражено через полилогарифмическую спецфункцию; однако, в трёх наиболее интересных случаях — при нулевой температуре $T = 0$, при высокой температуре $T \gg \omega, uq$ а также на массовой поверхности $\omega = uq$, можно получить простые асимптотические выражения. При нулевой температуре мы получаем:

$$\text{Im} \Sigma_{ret}^{(R \rightarrow R+2L)}(\mathbf{q}) \approx -\frac{\alpha^2 \lambda_+^2}{3072\pi^4 u^5} (\omega - uq)(\omega + uq)^3 \theta(\omega^2 - u^2 q^2) \text{sign} \omega, \quad (1.30)$$

в то время для случаев высокой температуры $T \gg \omega, uq$, и на массовой поверхности $\omega = uq$ получаем:

$$\text{Im} \Sigma_{ret}^{(R \rightarrow R+2L)}(\mathbf{q}) \approx -\frac{\alpha^2 \lambda_+^2}{48\pi^2 u^5} T^3 \omega \quad (1.31)$$

Согласно уравнению (1.21), эти выражения соответствуют ширине $\Gamma(\omega = uq) \propto \omega^2 T^3 / J^4$. Как мы увидим ниже, этот вклад будет пренебрежимо мал по сравнению с сингулярным вкладом, приходящим от первой диаграммы.

В этом разделе мы проведём вычисления, аналогичные описанным в предыдущем разделе, но по отношению к возмущению (1.13). Вклад в мнимую часть собственной энергетической части дают две диаграммы, изображённые на рис. 1.2.

Вклад первой диаграммы, аналогично предыдущему случаю, может быть выражен через спектральный вес $\text{Im} g_{ret}^{(R)}(\mathbf{q})$ следующим образом:

$$\text{Im} \Sigma_{ret}^{(R \rightarrow 2R)}(\mathbf{q}) = -\frac{\alpha_1^2}{2\pi^2} \int d^2 \mathbf{q}_1 \times \text{Im} g_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_1) \text{Im} g_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_2) (f(\omega_1) + f(\omega_2)) \quad (1.32)$$

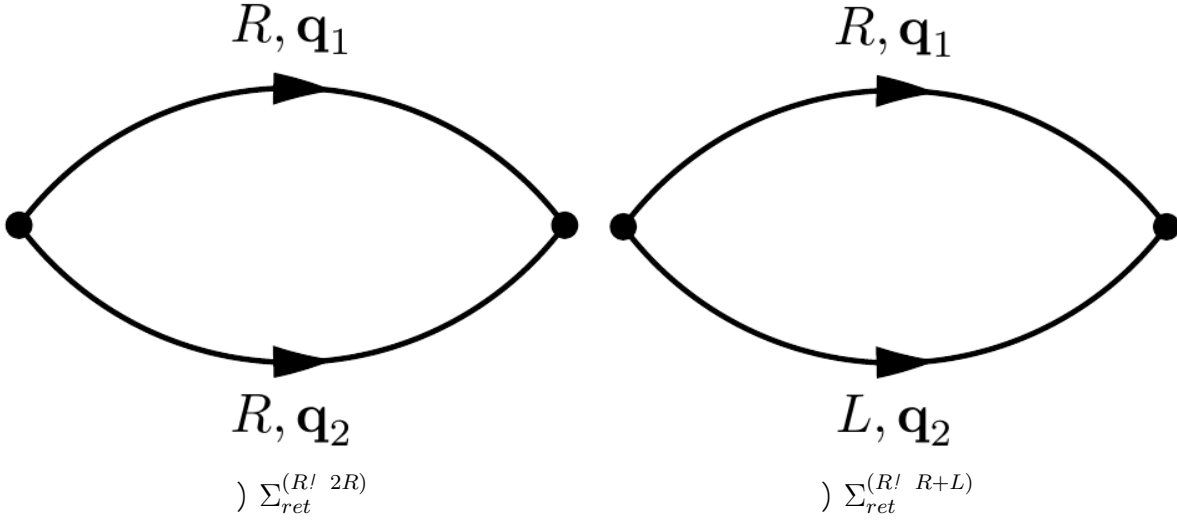


Рисунок 1.2 — Диаграммы для собственной энергетической части $\Sigma_{ret}^{(R)}$, возникающие от учёта членов (1.13) в присутствии ненулевого магнитного поля.

Прямое вычисление (см. приложение A.1) по описанным выше причинам приводит к аналогичному дельта-пику на массовой поверхности:

$$\text{Im } \Sigma_{ret}^{(R \rightarrow 2R)} = -\frac{\alpha_1^2}{24\pi^2} \delta(\omega - uq) q \left(q^2 + \left(\frac{2\pi T}{u} \right)^2 \right) \quad (1.33)$$

Правильный способ учёта этой диаграммы заключается в самосогласованном решении уравнения (1.32), используя “одетые” функции Грина вместо затраченных.

Вычисление второй диаграммы даёт:

$$\text{Im } \Sigma_{ret}^{(R \rightarrow R+L)}(\mathbf{q}) = -\frac{\alpha_2^2}{128\pi^2 u^3} (\omega^2 - u^2 q^2) \left(f\left(\frac{\omega - uq}{2}\right) + f\left(\frac{\omega + uq}{2}\right) \right) \quad (1.34)$$

Для этого выражения можно провести такой же асимптотический анализ для случаев $T = 0$, $T \gg \omega, uq$ и $\omega = uq$ как и для случая четверных вершин взаимодействия. При нуле температур получаем:

$$\text{Im } \Sigma_{ret}^{(R \rightarrow R+L)}(\mathbf{q}) \approx -\frac{\alpha_2^2}{64\pi^2 u^3} (\omega^2 - u^2 q^2) \theta(\omega^2 - u^2 q^2) \text{sign } \omega, \quad (1.35)$$

в то время как для $T \gg \omega, uq$ и для $\omega = uq$ получаем:

$$\text{Im } \Sigma_{ret}^{(R \rightarrow R+L)}(\mathbf{q}) = -\frac{\alpha_2^2}{16\pi^2 u^3} T \omega \quad (1.36)$$

Согласно (1.21), этот вклад приводит к вкладу в скорость распада квазичастиц $\Gamma(\omega) \propto \hbar^2 \omega^2 T / J^4$. Однако, стоит ещё раз отметить, что подобный вклад оказывается пренебрежимо мал по сравнению с сингулярным вкладом, приходящим от первой диаграммы, и который даётся уравнением (1.32).

Кубические вершины R^2L и RL^2 также приводят к появлению недиагональных компонент функции Грина, таких как $\langle R(\mathbf{x}_1)L(\mathbf{x}_2) \rangle_{ret}$ [20]. Они могут проявиться при вычислении спиновой корреляционной функции, см. раздел 1.4; однако, они пропорциональны квадрату “константы связи” α_2 и тем самым параметрически меньше по сравнению с диагональным вкладом.

1.3.2

В этом разделе мы займёмся самосогласованным вычислением, которое было описано выше, в разделе 1.3.1. Основной вклад в ширину спектральной линии Γ на массовой поверхности $\omega = uq$ приходит от (1.32) и (1.28), и вкладами от остальных процессов мы пренебрегаем. Мы также пренебрегаем эффектами перенормировки квазичастичного спектра из-за конечной температуры и предполагаем, что «одетые» функции Грина имеют вид (1.20). Ниже будут отдельно рассмотрены случаи нулевого и ненулевого магнитного поля.

Подставим функции Грина в виде (1.20) в уравнение (1.28), и введём новые переменные: отклонение от массовой поверхности мы обозначим за $\epsilon \equiv \omega - uq$; поскольку в интересующем нас пределе квазичастичные возбуждения хорошо определены, то $\omega, uq \gg \Gamma(\omega, q)$, что позволяет нам заменить $q/2\pi$ префактор на $\omega/2\pi u$. После этих замен, мы приходим к следующему интегральному уравне-

нию для величины $\Gamma(\omega, \epsilon)$:

$$\Gamma(\omega, \epsilon) = \frac{3\alpha^2 \lambda_-^2}{32\pi^5 u^5} q \int d\omega_i \omega_1 \omega_2 \omega_3 J_1(\epsilon, \omega_i) \times \\ \times (1 + f(\omega_2)f(\omega_3) + f(\omega_1)f(\omega_3) + f(\omega_1)f(\omega_2)) \quad (1.37)$$

$$J_1(\epsilon, \omega_i) = \int d\epsilon_i \frac{1}{\pi^3} \frac{\Gamma(\omega_1, \epsilon_1)}{\epsilon_1^2 + \Gamma^2(\omega_1, \epsilon_1)} \frac{\Gamma(\omega_2, \epsilon_2)}{\epsilon_2^2 + \Gamma^2(\omega_2, \epsilon_2)} \frac{\Gamma(\omega_3, \epsilon_3)}{\epsilon_3^2 + \Gamma^2(\omega_3, \epsilon_3)} \quad (1.38)$$

Интегрирование происходит по всем ω_i и ϵ_i , с учётом закона сохранения энергии $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \omega$ и импульса $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \epsilon$.

Величины ϵ_i в интеграле J_1 имеют порядок $\Gamma(\omega) \equiv \Gamma(\omega, \epsilon = 0)$. Для дальнейшего анализа мы предположим, что $\Gamma(\omega, \epsilon \sim \Gamma) \approx \text{const}$, что позволит нам пренебречь зависимостью от ϵ и произвести интегрирование по ϵ_i (это предположение будет впоследствии проверено). Соответственно, мы можем положить $\epsilon = 0$ в левой части уравнения и получить следующее замкнутое уравнение на $\Gamma(\omega)$. Прямое вычисление даёт:

$$J_1(\epsilon, \omega_i) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma(\omega_1) + \Gamma(\omega_2) + \Gamma(\omega_3)}{\epsilon^2 + (\Gamma(\omega_1) + \Gamma(\omega_2) + \Gamma(\omega_3))^2} \quad (1.39)$$

Уравнение может быть обезразмерено заменой $\Gamma(\omega) = \frac{\alpha \lambda_-}{u^3} T \omega^2 \cdot \gamma(z \equiv \frac{\omega}{T})$; в таком случае уравнение на безразмерную ширину линии $\gamma(z)$ устроено следующим образом:

$$\gamma(z) = \frac{3}{32\pi^6} \cdot \frac{1}{z} \int dz_i \frac{z_1 z_2 z_3}{\gamma(z_1) z_1^2 + \gamma(z_2) z_2^2 + \gamma(z_3) z_3^2} \times \\ \times (1 + f(z_2)f(z_3) + f(z_1)f(z_3) + f(z_1)f(z_2)) \quad (1.40)$$

Если предположить слабую зависимость $\gamma(z)$ от своего аргумента при малых z , мы немедленно увидим, что интеграл в правой части расходится логарифмически по z , и основной вклад в него приходит от $z \sim z_i \sim 1$, что соответствует $\omega < \omega_i < T$. Поскольку мы интересуемся $\epsilon \sim \Gamma(\omega) \ll \Gamma(\omega_i)$, мы немедленно видим, что зависимость от ϵ в J_1 , а следовательно и в $\Gamma(\omega, \epsilon)$ действительно пренебрежимо мала, что оправдывает сделанные выше предположения.

Сингулярный член может быть получен раскладывая $f(z) = \coth(z/2) \approx 2/z$, что приводит к следующему уравнению:

$$\gamma(z) \approx \frac{3}{8\pi^6} \int_{|z_i|}^1 \frac{dz_i}{\gamma(z_1)z_1^2 + \gamma(z_2)z_2^2 + \gamma(z_3)z_3^2} \quad (1.41)$$

Поскольку при постоянной $\gamma(z)$ интеграл ведёт себя логарифмически, мы можем подставить асимптотическое поведение в виде $\gamma(z \ll 1) = C_1 \sqrt{\ln \frac{1}{|z|}}$ и получить явное значение для константы $C_1 = \sqrt{\sqrt{3}/2\pi^5} \approx 5.3 \cdot 10^{-2}$. Это приводит нас к окончательному результату для затухания квазичастиц на массовой поверхности $\omega = uq$:

$$\Gamma(\omega) = C_1 \frac{\alpha \lambda_-}{u^3} T \omega^2 \sqrt{\ln \frac{T}{|\omega|}} \sim T \frac{\omega^2}{J^2} \sqrt{\ln \frac{T}{|\omega|}} \quad (1.42)$$

Это — один из основных результатов данной главы.

Теперь мы займёмся самосогласованным вычислением скорости затухания квазичастиц в присутствии магнитного поля. Соответствующее этому случаю уравнение Дайсона на величину $\Gamma(\omega, \epsilon)$ записывается следующим образом:

$$\Gamma(\omega, \epsilon) = \frac{\alpha_1^2 q}{16\pi^3 u^3} \int d\omega_i \omega_1 \omega_2 J_2(\epsilon, \omega_i) (f(\omega_1) + f(\omega_2)) \quad (1.43)$$

$$J_2(\epsilon, \omega_i) = \int d\epsilon_i \frac{1}{\pi^2} \frac{\Gamma(\omega_1, \epsilon_1) \Gamma(\omega_2, \epsilon_2)}{[\epsilon_1^2 + \Gamma^2(\omega_1, \epsilon_1)] [\epsilon_2^2 + \Gamma^2(\omega_2, \epsilon_2)]} \quad (1.44)$$

Интегрирование производится по всем ω_i и ϵ_i с учётом ограничений $\omega_1 + \omega_2 = \omega$ и $\epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon$. Делая предположение о том, что зависимостью от ϵ в величине $\Gamma(\omega, \epsilon)$ можно пренебречь, мы можем провести интегрирование по ϵ_i и получить:

$$J_2(\epsilon, \omega_i) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma(\omega_1) + \Gamma(\omega_2)}{\epsilon^2 + (\Gamma(\omega_1) + \Gamma(\omega_2))^2}. \quad (1.45)$$

Наконец, вводя безразмерную скорость затухания, определённую следующим образом: $\Gamma(\omega) = \frac{|\alpha_1|}{u^2} \omega^2 \gamma(z \equiv \frac{\omega}{T})$, самосогласованное уравнение на $\gamma(z)$ записывается следующим образом:

$$\gamma(z) = \frac{1}{16\pi^4} \frac{1}{z} \int dz_i \frac{z_1 z_2}{z_1^2 \gamma(z_1) + z_2^2 \gamma(z_2)} (f(z_1) + f(z_2)) \quad (1.46)$$

Аналогично предыдущим рассуждениям, мы сперва предполагаем величину $\gamma(z)$ слабо зависящей от своего аргумента на малых z ; это предположение даёт нам зависимость $J_2(z) \sim 1/z$, и основной вклад приходит от области $z_i \sim z \ll 1$. Это опять позволяет нам разложить функции распределения $f(z) \approx 2/z$ и записать следующее уравнение на $\gamma(z \ll 1)$:

$$\gamma(z) = \frac{1}{8\pi^4} \int \frac{dz_i}{z_1^2 \gamma(z_1) + z_2^2 \gamma(z_2)} \quad (1.47)$$

Окончательно, подстановка $\gamma(z) = C_2/\sqrt{|z|}$ и последующее интегрирование даёт следующее значение величины C_2 :

$$C_2^2 = \frac{1}{8\pi^4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{|x|^{3/2} + |1-x|^{3/2}}, \quad C_2 \approx 7.08 \cdot 10^{-2}, \quad (1.48)$$

что, в свою очередь, приводит к следующему ответу для скорости затухания:

$$\Gamma(\omega) = C_2 \frac{|\alpha_1|}{u^2} T^{1/2} |\omega|^{3/2} \sim \frac{|h| T^{1/2} |\omega|^{3/2}}{J^2} \quad (1.49)$$

Обсудим полученный результат. Основной вклад в скорость затухания приходит от мод $\omega_i \sim \omega \ll T$. Это достаточно удивительный результат: эти моды в действительности соответствуют классическому пределу. И действительно, данный результат был исходно получен для

в работе [23]; и аналогичный результат был относительно недавно перевыведен в рамках модели жидкости Латтинджера в другой работе [19].

Однако, то обстоятельство что основной вклад приходит от $\omega_i \sim \omega$ в действительности несовместно с пренебрежимо слабой зависимостью от величины ϵ . Ниже мы приведём аргументы в пользу того, что учёт такой зависимости ϵ приведёт к аналогичной зависимости для ширины линии $\Gamma(\omega) \propto T^{1/2} |\omega|^{3/2}$, но, возможно, с какой-то другой величиной для константы C_2 .

Стоит отметить работу [29], в которой обсуждалось, что данная задача, в действительности, асимптотически эквивалентная нелинейной модели Кардара-Паризи-Жанга (KPZ, [30—32]) для классической динамики в присутствии шума. В этой модели имеющийся скейлинг ширины фоновой линии $\Gamma(k) \propto k^{3/2}$ находится в согласии с нашими результатами для случая наличия кубических вершин взаимодействия.

Выше были сосчитаны скорости затухания квазичастиц для нулевого и относительно большого магнитного поля, см. уравнения (1.42) и (1.49) соответственно. Для того, чтобы описанная выше самосогласованная процедура работала, необходимо, чтобы один из двух приведённых механизмов распада доминировал над другим.

Для возбуждений с произвольной энергией $\omega \ll T$, имеется промежуточная величина магнитного поля $h_c(\omega)$, где оба вклада в скорость затухания совпадают; сравнивая их, мы получаем $h_c(\omega) \propto \sqrt{\omega T \ln \frac{T}{\omega}}$. Таким образом, кроссовер между ответами (1.42) и (1.49) происходит при магнитных полях $h_c(\omega)$, ниже которых можно применять первый ответ, а выше — второй. При $h \gg h_c(T) \sim T$ практически все возбуждения “чувствуют” магнитное поле.

1.3.3

В предыдущем разделе был разработан самосогласованный подход, соответствующий пересуммированию бесконечного ряда Фейнмановских диаграмм. Вообще говоря, априори неизвестно, какие именно диаграммы дают основной вклад в ширину спектральной линии, и поэтому необходимо провести проверку. При этом естественно ожидать, что все виртуальные частицы, участвующие в процессе распада и дающие вклад в наиболее сингулярную часть спектрального веса для, скажем, “правых” частиц, тоже являются “правыми”.

В этом разделе мы рассмотрим диаграммы, возникающие в старших порядках теории возмущений и выясним, содержится ли в них дополнительная малость по отношению к уже учтённым диаграммам.

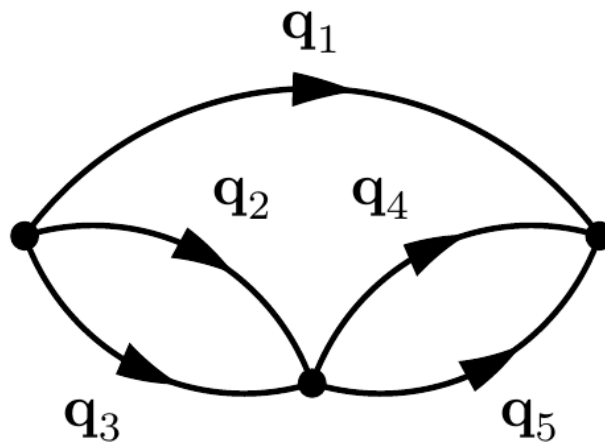


Рисунок 1.3 — Фейнмановская диаграмма следующего порядка для величины $\Sigma_{ret}^{(R)}(\mathbf{q})$, дающая вклад в $\Gamma(\omega)$ в отсутствие магнитного поля. Линии отвечают “одетым” келдышевским функциям Грина для “правых” возбуждений (чья запаздывающая компонента даётся выражением (1.20)).

Диаграмма следующего порядка, возникающая в третьем порядке теории возмущений, нарисована на рис. 1.3. Все частицы на ней — “правые”, поэтому ниже для сокращения мы опустим верхний индекс R для функций Грина.

Диаграмма соответствует следующему аналитическому выражению:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{ret}^{(3)}(\mathbf{q}) = & 54i\alpha^3\lambda_-^3 \int \frac{d^2\mathbf{q}_i}{(2\pi)^2} \\
& \times \left(g_{ret}(\mathbf{q}_1)g_K(\mathbf{q}_2)g_K(\mathbf{q}_3) [g_K(\mathbf{q}_4)g_{adv}(\mathbf{q}_5) + g_{adv}(\mathbf{q}_4)g_K(\mathbf{q}_5)] \right. \\
& + g_{ret}(\mathbf{q}_1) [g_K(\mathbf{q}_2)g_{ret}(\mathbf{q}_3) + g_{ret}(\mathbf{q}_2)g_K(\mathbf{q}_3)] g_{ret}(\mathbf{q}_4)g_{ret}(\mathbf{q}_5) + \\
& + g_{ret}(\mathbf{q}_1) [g_K(\mathbf{q}_2)g_{ret}(\mathbf{q}_3) + g_{ret}(\mathbf{q}_2)g_K(\mathbf{q}_3)] g_{adv}(\mathbf{q}_4)g_{adv}(\mathbf{q}_5) + \\
& + g_{ret}(\mathbf{q}_1) [g_K(\mathbf{q}_2)g_{ret}(\mathbf{q}_3) + g_{ret}(\mathbf{q}_2)g_K(\mathbf{q}_3)] g_K(\mathbf{q}_4)g_K(\mathbf{q}_5) + \\
& + g_{ret}(\mathbf{q}_1)g_{ret}(\mathbf{q}_2)g_{ret}(\mathbf{q}_3) [g_{adv}(\mathbf{q}_4)g_K(\mathbf{q}_5) + g_K(\mathbf{q}_4)g_{adv}(\mathbf{q}_5)] + \\
& \left. + g_K(\mathbf{q}_1) [g_K(\mathbf{q}_2)g_{ret}(\mathbf{q}_3) + g_{ret}(\mathbf{q}_2)g_K(\mathbf{q}_3)] [g_K(\mathbf{q}_4)g_{ret}(\mathbf{q}_5) + g_{ret}(\mathbf{q}_4)g_K(\mathbf{q}_5)] \right)
\end{aligned} \tag{1.50}$$

Интегрирование происходит по всем $\mathbf{q}_i = (q_i, \omega_i)$ с учётом ограничений $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_4 + \mathbf{q}_5 = \mathbf{q}$. Подставляя равновесное соотношение для функций Грина (1.23), и отбрасывая зануляющиеся в силу причинности члены, мы приходим к следующему выражению (тут $f_i \equiv f(\omega_i)$):

$$\begin{aligned}
\Sigma_{ret}^{(3)}(\mathbf{q}) \simeq & 54i\alpha^3\lambda_-^3 \int \frac{d^2\mathbf{q}_i}{(2\pi)^2} \left(g_{ret}(\mathbf{q}_1)g_{ret}(\mathbf{q}_2)g_{ret}(\mathbf{q}_3)g_{adv}(\mathbf{q}_4)g_{adv}(\mathbf{q}_5) \times \right. \\
& \times ((f_2 + f_3)(1 + f_4f_5) - (f_4 + f_5)(1 + f_2f_3)) + \\
& \left. + g_{ret}(\mathbf{q}_1)g_{ret}(\mathbf{q}_2)g_{ret}(\mathbf{q}_3)g_{ret}(\mathbf{q}_4)g_{ret}(\mathbf{q}_5)(f_2 + f_3) ((1 + f_4f_5) + f_1(f_4 + f_5)) \right).
\end{aligned} \tag{1.51}$$

Аналогичное предположение о том, что основной вклад в эту диаграмму происходит от классических мод с $\omega \ll T$, позволяет нам заменить $f(\omega) \approx 2T/\omega$. Первый член таким образом сокращается в ведущем порядке по T/ω . Наконец, подставляя “одетые” функции Грина и заменяя q_i на ω_i/u в префакторах, мы получаем (тут $\Gamma_i \equiv \Gamma(\omega_i)$)

$$\Sigma_{ret}^{(3)}(\omega = uq) \simeq \frac{432\alpha^3\lambda_-^3 T^3}{(2\pi)^5 u^8} \omega \int \frac{d\omega_i}{2\pi} \frac{\omega_2 + \omega_3}{(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3)(\Gamma_1 + \Gamma_4 + \Gamma_5)}. \tag{1.52}$$

Выписанный выше результат чисто вещественный и соответствует перенормировке спектра, а не ширины линии, которую мы изучаем. Таким образом,

вклад в ширину линии от диаграммы с тремя вершинами не

содержит мнимую часть. Другими словами, вклад в $\text{Im } \Sigma$ от этой диаграммы в действительности параметрически меньше величины (1.42).

Тем не менее, продолжим наше вычисление. Простой подсчёт степеней показывает, что интеграл опять логарифмический (интегрирование происходит по трём независимым величинам ω_i из 5, поскольку имеются два независимых закона сохранения). Однако, логарифмически расходящаяся часть является нечётной функцией ω и сокращается. Это сокращение означает, что вклад в $\Gamma(\omega)$ происходит от мод $\omega_i \sim \omega$, что позволяет нам заменить логарифмы в $\Gamma(\omega_i)$ эффективно на константу, $\ln \frac{T}{\omega_i} \mapsto \ln \frac{T}{\omega}$. Окончательно, подставляя (1.42), мы приходим к следующему результату:

$$\Sigma_{ret}^{(3)}(\omega) = C'_1 \frac{\alpha \lambda_-}{u^2} \frac{T\omega}{\ln \frac{T}{|\omega|}}, \quad (1.53)$$

с численной константой

$$C'_1 = \frac{9\sqrt{2}}{16\pi^5 C_1^2} = \frac{3\sqrt{6}}{8} \approx 0.91 \quad (1.54)$$

Результат, даваемый уравнениями (1.53,1.54), имеет тот же порядок по константе связи $\alpha \lambda_-$, что и $\Gamma(\omega)$, сосчитанный самосогласованным образом по диаграмме нижнего порядка (1.42), что, вообще говоря, было ожидаемо. Однако, он содержит дополнительную параметрическую малость, по параметру $\ln^{-3/2} \frac{T}{|\omega|} \ll 1$.

Диаграммы старшего порядка (к примеру, происходящие из четвёртого порядка теории возмущений), по-прежнему будут содержать сингулярные вклады той же степени константы связи $\alpha \lambda_-$, что и $\Gamma(\omega)$, приходящая от первой диаграммы (1.42). Непосредственное вычисление диаграмм старших порядков является очень трудоёмкой задачей; однако, мы ожидаем (по аналогии с диаграммой третьего порядка, подробно обсуждённой выше), что эти диаграммы не будут содержать логарифмически больших факторов и будут параметрически меньше, с зависимостью от $\ln \frac{T}{|\omega|} \gg 1$ в отрицательной степени.

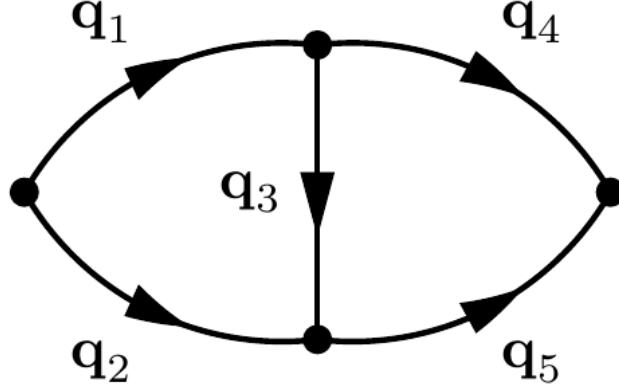


Рисунок 1.4 — Фейнмановская диаграмма следующего порядка для величины $\Gamma(\omega)$ в случае отличного от нуля магнитного поля.

Первая диаграмма, неучтённая в результате самосогласованного вычисления, происходит от четвёртого порядка теории возмущений и изображена на рис. 1.3. Соответствующее ей аналитическое выражение для вклада в запаздывающую собственную энергетическую часть записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{ret}^{(4)}(\mathbf{q}) = & -2\alpha_1^4 \int \frac{d^2\mathbf{q}_i}{(2\pi)^2} \\
 & \times \left(g_{ret}(\mathbf{q}_1)g_K(\mathbf{q}_2)g_K(\mathbf{q}_3)g_{ret}(\mathbf{q}_4)g_{adv}(\mathbf{q}_5) + g_K(\mathbf{q}_1)g_{ret}(\mathbf{q}_2)g_{adv}(\mathbf{q}_3)g_{ret}(\mathbf{q}_4)g_K(\mathbf{q}_5) + \right. \\
 & + g_K(\mathbf{q}_1)g_{ret}(\mathbf{q}_2)g_{adv}(\mathbf{q}_3)g_K(\mathbf{q}_4)g_{ret}(\mathbf{q}_5) + g_{ret}(\mathbf{q}_1)g_{ret}(\mathbf{q}_2)g_{ret}(\mathbf{q}_3)g_{ret}(\mathbf{q}_4)g_{adv}(\mathbf{q}_5) + \\
 & + g_{ret}(\mathbf{q}_1)g_{ret}(\mathbf{q}_2)g_K(\mathbf{q}_3)g_{ret}(\mathbf{q}_4)g_K(\mathbf{q}_5) + g_K(\mathbf{q}_1)g_{ret}(\mathbf{q}_2)g_K(\mathbf{q}_3)g_{adv}(\mathbf{q}_4)g_{ret}(\mathbf{q}_5) + \\
 & + g_{ret}(\mathbf{q}_1)g_K(\mathbf{q}_2)g_{ret}(\mathbf{q}_3)g_K(\mathbf{q}_4)g_{ret}(\mathbf{q}_5) + g_{ret}(\mathbf{q}_1)g_K(\mathbf{q}_2)g_{ret}(\mathbf{q}_3)g_{ret}(\mathbf{q}_4)g_K(\mathbf{q}_5) + \\
 & \left. + g_{ret}(\mathbf{q}_1)g_{ret}(\mathbf{q}_2)g_{adv}(\mathbf{q}_3)g_{adv}(\mathbf{q}_4)g_{ret}(\mathbf{q}_5) + g_{ret}(\mathbf{q}_1)g_{ret}(\mathbf{q}_2)g_K(\mathbf{q}_3)g_K(\mathbf{q}_4)g_{ret}(\mathbf{q}_5) \right). \tag{1.55}
 \end{aligned}$$

Интегрирование производится по всем $\mathbf{q}_i = (q_i, \omega_i)$, не закреплённым законами сохранения энергии и импульса, которые записываются следующим образом: $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_4 + \mathbf{q}_5 = \mathbf{q}$, $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4$ (таким образом, только пара энергий и импульсов являются независимыми). Используя равновесное соотношение (1.23) и замечая, что часть вкладов зануляются в силу причинности, мы можем пере-

группировать члены следующим образом (здесь, как и раньше, $f_i \equiv f(\omega_i)$):

$$\begin{aligned} \Sigma_{ret}^{(4)}(\mathbf{q}) = & -2\alpha_1^4 \int \frac{d^2 \mathbf{q}_i}{(2\pi)^2} \\ & \times \left(g_{ret}(\mathbf{q}_1)g_{ret}(\mathbf{q}_2)g_{ret}(\mathbf{q}_3)g_{ret}(\mathbf{q}_4)g_{adv}(\mathbf{q}_5)(1 + f_2f_3 - f_3f_5 - f_2f_5) + \right. \\ & + g_{ret}(\mathbf{q}_1)g_{ret}(\mathbf{q}_2)g_{adv}(\mathbf{q}_3)g_{adv}(\mathbf{q}_4)g_{ret}(\mathbf{q}_5)(1 + f_3f_4 - f_1f_4 - f_1f_3) + \\ & + g_{ret}(\mathbf{q}_1)g_{ret}(\mathbf{q}_2)g_{adv}(\mathbf{q}_3)g_{ret}(\mathbf{q}_4)g_{ret}(\mathbf{q}_5)(f_1 - f_3)(f_4 + f_5) + \\ & \left. + g_{ret}(\mathbf{q}_1)g_{ret}(\mathbf{q}_2)g_{ret}(\mathbf{q}_3)g_{ret}(\mathbf{q}_4)g_{ret}(\mathbf{q}_5)(f_2 + f_3)(f_4 + f_5) \right). \end{aligned} \quad (1.56)$$

Применяя опять предположение о том, что основной вклад приходит от классических мод, и заменяя $f(\omega) \approx 2T/\omega$, мы немедленно видим, что первые два члена зануляются в ведущем порядке. Мы подставляем “одетые” функции Грина (1.20) и проводим интегрирование по q_i , пренебрегая зависимостью от ϵ величины $\Gamma(\omega, \epsilon)$, как было описано выше, и получаем:

$$\begin{aligned} \Sigma_{ret}^{(4)}(\omega = uq) = & i \frac{8\alpha_1^4 T^2}{(2\pi)^5 u^7} \omega \int \frac{d\omega_i}{2\pi} \times \\ & \times \frac{1}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)(\Gamma_4 + \Gamma_5)} \left(\frac{\omega_2 \omega_4}{\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_5} + \frac{\omega_1 \omega_5}{\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4} \right) \end{aligned} \quad (1.57)$$

Подстановка (1.49) приводит нас к следующему результату для поправки:

$$\delta\Gamma(\omega) = -C'_2 \frac{|\alpha_1| T^{1/2}}{u^2} |\omega|^{3/2}, \quad (1.58)$$

с численной константой $C'_2 \approx 1.6 \cdot 10^{-2}$. Видно, что результат имеет тот же порядок, что и полученный в наименьшем порядке; он также имеет противоположный знак и почти в 4 раза меньше. В отличие от случая $h = 0$ описанного выше, все энергии возбуждений имеют порядок $\omega_i \sim \omega$, из-за чего все диаграммы имеют один и тот же порядок величины.

1.4

Выше была вычислена скорость затухания квазичастиц на массовой поверхности. В этом разделе мы обсудим, как это затухание влияет на вид спиновой корреляционной функции $\langle \hat{S}_{x_1}^z(t_1) \hat{S}_{x_2}^z(t_2) \rangle$, сосчитанной в пространственно-временном представлении. Эта корреляционная функция эквивалентна (посредством преобразования Йордана-Вигнера) корреляционной функции плотностей фермионов, которая, в свою очередь, напрямую выражается через пропагатор бозонных возбуждений. Более конкретно:

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}^z(x_1, t_1) \hat{S}^z(x_2, t_2) \rangle &= K a^2 \langle (R + L)(x_1, t_1) (R + L)(x_2, t_2) \rangle = \\ &= K a^2 (g_{<}^{(R)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + g_{<}^{(L)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)), \end{aligned} \quad (1.59)$$

где $\mathbf{x}_i = (x_i, t_i)$ и a представляет собой постоянную решётки. В этом выражении мы пренебрегли недиагональной функцией Грина $\langle RL \rangle_{ret}$, которая возникает в присутствии магнитного поля; как обсуждалось ранее в разделе 1.3.1, этот вклад содержит дополнительную параметрическую малость. Корреляционная функция “левых” и “правых” возбуждений связаны друг с другом сменой знака групповой скорости $u \mapsto -u$. Поэтому ниже мы сфокусируемся на вычислении $g_{<}^{(R)}(x, t)$.

Без учёта эффектов нелинейности спектра, мнимая часть функции Грина даётся выражением $\text{Im } g_{ret}^{(R)} = -\frac{q}{2} \delta(\omega - uq)$. Обращая преобразование Фурье, мы воспроизводим известный из теории жидкости Латтинджера результат [5]:

$$g_{<}^{(R)}(x, t) = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{\pi^2 T^2}{u^2 \sinh^2 \frac{\pi T(x-ut)}{u}} \quad (1.60)$$

Это выражение описывает волновой пакет, центр которого движется по закону $x = ut$, и который имеет фиксированную ширину $l_T \equiv \frac{u}{T}$.

Скорости затухания квазичастиц были сосчитаны в предположении $\omega \ll T$, что приводит к модификации результата (1.60). Детали вычисления вынесены в приложение A.2; полученный результат показывает, что модифицированный ответ устроен как квази-диффузионный волновой пакет, центр которого по-прежнему движется по закону $x = ut$, но ширина которого зависит от вре-

мени следующим образом:

$$l_D = \begin{cases} (C_1 \alpha \lambda - T|t|/u)^{1/2}, & h \ll T \\ (T/u)^{1/3} (C_2 \alpha_1 |t|)^{2/3}, & h \gg T \end{cases}, \quad (1.61)$$

что может быть переписано через параметры исходной модели следующим образом:

$$l_D \sim \begin{cases} a \cdot (T|t|)^{1/2}, & h \ll T \\ a \cdot (T/J)^{1/3} (h|t|)^{2/3}, & h \gg T \end{cases} \quad (1.62)$$

Для дальнейших вычислений удобно ввести безразмерное расстояние до “светового конуса” $\delta = (x - ut)/l_D$. В таком случае, “высота” соответствующего волнового пакета ведёт себя следующим образом:

$$g_{<}^{(R)}(|x - ut| \ll l_D) \approx \frac{1}{l_T l_D} \cdot \begin{cases} \frac{\Gamma(5/3)}{2\pi^2}, & h \ll T \\ \frac{1}{4\pi^{3/2} \ln^{1/4}(l_D/l_T)}, & h \gg T \end{cases}, \quad (1.63)$$

а “хвосты” устроены как:

$$g_{<}^{(R)}(|x| \gg |x - ut| \gg l_D) \approx \frac{1}{l_T l_D} \begin{cases} \frac{1}{4\pi^{3/2} \ln^{1/4}(\delta l_D/l_T)} \exp\left(-\frac{\delta^2}{4 \ln^{1/4}(\delta l_D/l_T)}\right), & h \ll T \\ \frac{3}{8\sqrt{2}\pi^{3/2}} \frac{1}{|\delta|^{5/2}}, & h \gg T \end{cases} \quad (1.64)$$

Все вышенаписанные асимптотики работают на достаточно больших временах, при которых $l_D(t) \gg l_T$.

Для спиновой корреляционной функции эти выражения соответствуют следующему поведению. На “световом конусе” (для $|n \mp ut/a| \ll l_D/a$), в отсутствие магнитного поля, имеем:

$$\langle S_n^z(t) S_0^z(0) \rangle = \frac{1}{4\pi^{3/2}} \frac{a^2}{l_T l_D} \frac{1}{\ln^{1/4}(l_D/l_T)}, \quad (1.65)$$

в то время как при наличии магнитного поля имеем:

$$\langle S_n^z(t) S_0^z(0) \rangle \approx \frac{\Gamma(5/3)}{2\pi^2} \cdot \frac{a^2}{l_T l_D}. \quad (1.66)$$

Вдали от светового конуса (что соответствует $|n \mp ut/a| \gg l_D/a$), для нулевого магнитного поля имеем:

$$\begin{aligned} \langle S_n^z(t) S_0^z(0) \rangle &= \frac{1}{4\pi^{3/2}} \frac{a^2}{l_T l_D} \ln^{-1/4} \left(\frac{|na \mp ut|}{l_T} \right) \times \\ &\times \exp \left(-\frac{1}{4} \frac{(na \mp ut)^2}{l_D^2} \ln^{-1/4} \left(\frac{|na \mp ut|}{l_T} \right) \right), \end{aligned} \quad (1.67)$$

а в отсутствие магнитного поля имеем:

$$\langle S_n^z(t) S_0^z(0) \rangle \approx \frac{3}{8\sqrt{2}\pi^{3/2}} \frac{l_D^{3/2}}{l_T a^{1/2}} \frac{1}{|n \mp ut/a|^{5/2}} \quad (1.68)$$

1.5

1.5.1

Теперь займёмся анализом совместного влияния эффектов нелинейности спектра и беспорядка на кинетические свойства исследуемой спиновой цепочки, который также применим и к жидкости Латтинджера вообще. Беспорядок, напомним, рассматривается в виде случайного магнитного поля, направленного вдоль оси z , и в рамках модели жидкости Латтинджера он описывается двумя плавными дельта-коррелированными полями $\xi(x)$ и $\eta(x)$, см. уравнение (1.4) и (1.5).

Транспортные свойства в рамках приближения жидкости Латтинджера с линейным спектром обсуждались в нашей предыдущей работе [7], где было показано, что рассеяние назад приводит к конечному времени релаксации бозонных возбуждений, соответствующему следующей ширине линии:

$$\Gamma_{\text{dis}} = \frac{DK}{u} \frac{\Gamma^2(K)}{\Gamma(2K)} \left(\frac{2\pi a T}{u} \right)^{2K-2} \sim \frac{\langle h^2 \rangle}{J} \left(\frac{T}{J} \right)^{2K-2} \quad (1.69)$$

Если учитывать нелинейность спектра и беспорядок совместно, результирующая ширина линии должна определяться по правилу Матиссена $\Gamma(\omega) =$

$\Gamma_{\text{dis}} + \Gamma_{\text{nl}}(\omega)$. Строго говоря, ширина линии, связанная с беспорядком, может повлиять на самосогласованную процедуру, разработанную выше, в результате чего правило Матиссена будет неприменимо; однако это может произойти только в случае $\Gamma_{\text{dis}} \& \Gamma_{\text{nl}}(\omega)$, для которого вклад от беспорядка в любом случае будет доминировать.

1.5.2

В работе [7] было показано, что проводимость (электрическая проводимость для фермионной задачи или спиновая проводимость для XXZ спиновой цепочки) напрямую связана с корреляционной функцией полей ϕ следующим образом:

$$\sigma(\omega) = \frac{i\omega}{\pi^2} \langle \phi\phi \rangle_{\omega, q=0}^{\text{ret}} = \frac{uK}{\pi} \frac{1}{-i\omega + 2\Gamma(\omega)} \quad (1.70)$$

Поскольку вклад, связанный с нелинейностью спектра, пропадает на нулевой частоте $\Gamma_{\text{nl}}(\omega = 0) = 0$, мы видим, что проводимость полностью определяется лишь вкладом, приходящим от беспорядка (1.69):

$$\sigma = \frac{uK}{2\pi\Gamma_{\text{dis}}} \underset{T \rightarrow 0}{\sim} a \frac{J^2}{\langle\langle h^2 \rangle\rangle} \left(\frac{J}{T} \right)^{2-2K}, \quad (1.71)$$

Напротив, теплопроводность выражается через четырёхточечную корреляционную функцию полей ϕ , и может быть оценена следующим образом:

$$\kappa \sim \frac{uT}{\Gamma(\omega \sim T)} \underset{T \rightarrow 0}{\sim} \begin{cases} J^3 a / T^2, & K > 5/2, \quad h \simeq 0, \\ J^3 a / |h| T, & K > 2, \quad h \& T, \\ J^3 a (J/T)^{2K-3} / \langle\langle h^2 \rangle\rangle, & \text{иначе} \end{cases}, \quad (1.72)$$

В случае, когда $\Gamma_{\text{nl}}(\omega \sim T) \ll \Gamma_{\text{dis}}$ (при достаточно низких температурах этот критерий соответствует $K < 5/2$ в отсутствие магнитного поля или $K < 2$ при его наличии), эта оценка верна.

С другой стороны, взаимодействие, которое приводит к ширине линии Γ_{nl} , вообще говоря, сохраняет энергию и импульс, и, тем самым, не может привести

к конечной теплопроводности. Это утверждение также связано с интегрируемостью XXZ спиновой цепочки: в отсутствие беспорядка, ток энергии является сохраняющейся величиной, из-за чего κ должна обратиться в бесконечность. На диаграммном языке это соответствовало бы сокращению между петлевой диаграммой для κ , разобранный в работе [7], и диаграммами для перенормировки вершинной части, возникающими в старших порядках. Однако, можно ожидать, что, поскольку беспорядок очевидным образом разрушает интегрируемость цепочки, такое сокращение может оказаться лишь частичным, из-за чего результат (1.72) может оказаться применимым и в области достаточно больших K .

1.6

В данной главе была сосчитана динамическая спиновая корреляционная функция $\langle \hat{S}^z(x_1, t_1) \hat{S}^z(x_2, t_2) \rangle$ для спиновой цепочки с ферромагнитным XXZ взаимодействием, $\Delta > 0$, в квазиклассическом режиме, который определяется условием малости частоты ω по сравнению с температурой T . Основные результаты содержатся в формулах (1.42) и (1.49) для предельных случаев слабого $h \ll T$ и сильного $h \gg T$ величин приложенного магнитного поля соответственно. Физически эти результаты описывают движение и уширение “волнового пакета” спиновых возбуждений из-за их рассеяния на температурных флуктуациях в цепочке.

Также было оценено влияние эффектов нелинейности спектра на транспортные свойства цепочки, см. уравнения (1.71) и (1.72). Статическая проводимость в области параметров $\frac{1}{2} < \Delta < 1$ совпадает с сосчитанной ранее в работе [7]. Напротив, мы привели аргументы, что для достаточно больших величин K (и Δ соответственно), эффекты кривизны спектра могут значительно повлиять на теплопроводность.

Ключевой величиной, которая определяет эти результаты, является скорость затухания $\Gamma(\omega)$ бозонных квазичастиц с энергией ω , которая естественным образом возникает в рамках описания взаимодействующей фермионной задачи, эквивалентной исходной XXZ спиновой цепочке посредством преобразо-

вания Йордана-Вигнера, на языке модели жидкости Латтинджера. Время жизни бозонных возбуждений конечно из-за нелинейного взаимодействия между ними. Это взаимодействие возникает из-за нелинейности фермионного спектра вблизи уровня Ферми. Стоит ещё раз уточнить, что сосчитанная скорость затухания $\Gamma(\omega)$ не является скоростью неупругого затухания истинных квазичастиц в исходной спиновой задаче; она лишь определяет форму спиновой корреляционной функции.

Если исходная спиновая задача симметрична по отношению к отражению $S_z \rightarrow -S_z$, то это соответствует электрон-дырочной симметрии в фермионном представлении; и как следствие, в низшем порядке нелинейность фермионного спектра кубическая, $\delta\epsilon(q) \propto q^3$. После бозонизации, это соответствует четверным нелинейным вершинам взаимодействия между бозонными модами. Автором была сосчитана результирующая ширина линии $\Gamma(\omega)$ при $\omega \ll T$ путём пересуммирования основного набора диаграмм, результат которого содержится в формуле (1.42). Было показано, что вклад диаграмм старших порядков содержат дополнительную малость в виде отрицательных степеней $\ln \frac{T}{\omega}$.

Наличие отличного от нуля магнитного поля h нарушает описанную выше симметрию, из-за чего в бозонном представлении возникают кубические нелинейные вершины взаимодействия. Относительный вклад этих кубических и четверных вершин, вообще говоря, зависят от трёх параметров ω , T и h . В частности, кубическая линейность доминирует при $h^2 \gg \omega T \ln \frac{T}{\omega}$. В этой области параметров полученные результаты для $\Gamma(\omega)$ совпадают (с точностью до численного множителя порядка 1) с полученными ранее в работах [19; 23]. Область применимости данных результатов относительно недавно обсуждалась в работе [21], в которой утверждалось, что “гидродинамический” скейлинг вида (1.49) применим лишь в достаточно узкой полосе частот $\omega \leq \omega^* = 1/\tau(T) \propto T^7$, в то время как на более высоких частотах, $\Gamma(\omega) \sim 1/\tau(T)$, см. рис. 1 работы [21]. Этот результат вызывает сомнения, поскольку прямая подстановка $\omega = 1/\tau(T)$ в Eq.(1.49) приводит к оценке $\Gamma(1/\tau(T)) \sim T^{11} \ll 1/\tau(T)$. В связи с этим мы считаем, что вопрос об области применимости полученного результата (1.49) по-прежнему открыт. Ситуация в данной задаче, по-видимому, похожа на обычную диссипативную проводимость в металлах: всегда неявно предполагается наличие какого-нибудь неупругого канала релаксации в системе, хотя его сила никак не входит в результат для проводимости Друде.

2.

2.1

В последнее время, большой научный интерес представляют сильно неупорядоченные сверхпроводники, находящиеся вблизи квантового фазового перехода сверхпроводник-изолятор [8; 33–44]. Экспериментальный интерес [36–45], среди прочего, вызван появлением новых экспериментальных методик, таких как низкотемпературная туннельная спектроскопия, которая позволяет изучать локальные свойства сверхпроводников с нанометровым разрешением. Как следствие, в работах [40; 41] было обнаружено сильное подавление плотности состояний в окрестности уровня Ферми при температурах сильно выше температуры сверхпроводящего перехода T_c . Этот феномен был назван ν , по грубой аналогии с аналогичным феноменом, известным в контексте недодопированных оксидных высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП); стоит, однако, подчеркнуть, что механизм возникновения псевдощели [8; 33] в обычных сильно неупорядоченных сверхпроводниках, таких как InO_x никак не связан с механизмом, возникающим в ВТСП.

Подробная полуколичественная теория сверхпроводимости, подобная теории Бардина, Купера и Шриффера (БКШ), однако стартующая с локализованных одноэлектронных состояний (в окрестности трёхмерного локализационного перехода Андерсона) была разработана в работах [8; 33], которые развивают подход, исходно предложенный в работе [46] и развитый численно в работе [47].

Флуктуационная проводимость (парапроводимость) является одним из наиболее общих явлений, которое свойственно всем неупорядоченным сверхпроводникам. Это явление было предсказано в работе Асламазова и Ларкина [9], и связано оно с флуктуационными Куперовскими парами, которые при температурах слегка выше критической имеют конечное, но большое время жизни. Парапроводимость Асламазова и Ларкина для двумерных систем имеет совершенно универсальный характер; флуктуационная добавка в проводимость на

квадрат имеет вид:

$$\sigma_{AL} = \frac{e^2}{16} \frac{T}{T - T_c},$$

который совершенно не зависит от микроскопических параметров системы (таких как постоянная диффузии или длина свободного пробега, плотность состояний, и т.п.). Как правило, этот результат верен только покуда σ_{AL} представляет собой малую поправку к друдевской проводимости металлической фазы σ_0 , что соответствует критерию Гинзбурга $\epsilon \equiv T/T_c - 1 \gg Gi = e^2/16\sigma_0$; эта область соответствует гауссовой статистике сверхпроводящих флуктуаций. Поведение парапроводимости в объёмных сверхпроводниках менее сингулярно, $\sigma_{AL} \propto (T - T_c)^{-1/2}$, а кроме того, оказывается менее универсальным и зависит от микроскопических параметров системы (сверхпроводящей длины когерентности).

В непосредственной окрестности сверхпроводящей точки, внутри флуктуационной области $\epsilon \leq Gi$, взаимодействие между сверхпроводящими флуктуациями оказывается сильным, что приводит к универсальному скейлингу различных термодинамических величин [48], который определяется лишь симметрией параметра порядка и размерностью пространства. Менее известно, однако, что происходит с кинетическими свойствами системы (такими как проводимость). К примеру, в работе [49] приводилась аргументация в пользу того, что парапроводимость, в действительности, более чувствительна к нелинейным эффектам и отличается от результата Асламазова и Ларкина уже при $\epsilon \leq \sqrt{Gi}$ — то есть параметрически дальше от области Гинзбурга. Эта аргументация основывалась на подавлении электронной плотности состояний сверхпроводящими флуктуациями, которая, в свою очередь, приводит к подавлению скорости неупругой релаксации электронов. Это обстоятельство увеличивает время жизни флуктуаций сверхпроводящего параметра порядка τ_{GL} по сравнению со значением, сосчитанном в гауссовом приближении $\tau_{GL}^{(0)} = \pi/8(T - T_c)$. Поскольку в общем случае парапроводимость пропорциональна произведению $T\tau_{GL}$, этот эффект приводит к усилению сингулярности. Однако, вычисления в работе [49] были проведены для случая наличия достаточно сильного распаривания, и наблюдаемый эффект, в действительности, оказывается достаточно слабым. В результате вопрос о том, меняется ли парапроводимость количественно в области температур $\epsilon \leq \sqrt{Gi}$, остался выясненным не до конца.

Данная глава посвящена анализу схожей проблемы, но с использованием другого подхода. Мы изучаем сильно неупорядоченный сверхпроводник с развита псевдощелью Δ_P . Её наличие вызвано следующими обстоятельствами:

- одноэлектронные состояния $\psi_i(\mathbf{r})$ локализованы в результате наличия в системе сильного замороженного беспорядка,
- притяжение между электронами, индуцированное фононами, приводит к формированию локализованных электронных пар (с противоположными спинами), занимающих состояния $\psi_i(\mathbf{r})$.

Энергетический выигрыш за счёт формирования такой пары как раз соответствует псевдощели Δ_P . Далее, наличие гибридизации между различными состояниями, описываемой матричными элементами J_{ij} , приводит к виртуальным “прыжкам” пар электронов между различными локализованными состояниями. В случае, когда эти матричные элементы достаточно велики, в такой системе при температуре ниже критической T_c возникает сверхпроводящее когерентное состояние (детальное описание псевдощелевой сверхпроводимости приведено в работе [8]).

Мы исследуем случай $\Delta_P \gg T_c$, что было обнаружено в экспериментах на достаточно толстых плёнках InO_x , см. [40]. В ведущем приближении по $T_c/\Delta_P \ll 1$ это позволяет пренебречь наличием одноэлектронных состояний — соответствующую им плотность состояний мы положим нулём. Тем не менее, мы покажем, что в области гауссовых флуктуаций, качественная картина критических флуктуаций, включая их динамические свойства, оказывается схожей с картиной, наблюдаемой в обычных сверхпроводниках. Главное отличие заключается в том, что в предложенной модели $\tau_{GL}^{(0)} = \pi/4(T - T_c)$, т.е. в два раза больше по сравнению со стандартной теорией.

Этот результат применим только при условии малости тепловых флуктуаций, покуда их взаимодействие пренебрежимо мало. Для существования такой области при $\epsilon \leq 1$ в псевдощелевом сверхпроводнике необходимо сделать дополнительное приближение: матрица J_{ij} должна обладать достаточно большим координационным числом $Z \gg 1$ для состояний с энергиями ϵ_i, ϵ_j находящихся в полосе энергии ширины порядка T_c около энергии Ферми. Наличие этого дополнительного параметра позволяет вывести динамический функционал Гинзбурга-Ландау для сверхпроводящих флуктуаций при температурах в окрестности критической, и сосчитать парапроводимость при $\epsilon \geq \epsilon_1$, где величина

$\epsilon_1 \ll 1$ оказывается зависящей как от Z , так и от размерности пространства d (в работе рассматриваются случаи $d = 2, 3$). При меньших значениях ϵ , взаимодействие между флуктуациями оказывается достаточно сильным, что влияет на кинетический коэффициент функционала Гинзбурга-Ландау. Хотя соответствующая кинетическая задача и не может быть решена аналитически, мы тем не менее приводим аргументы в пользу того, что степенная сингулярность ответа $\sigma_{AL} \propto (T - T_c)^{(d-4)/2}$ сохраняется вплоть до меньших значений $\epsilon \geq \epsilon_2$. Величина ϵ_2 ограничивает область сильных термодинамических флуктуаций, и является аналогом параметра Гинзбурга в стандартной теории фазовых переходов второго рода; важно, что при выполнении условия $Z \gg 1$ эта область является параметрически более узкой по сравнению с предыдущей, т.е. $\epsilon_2 \ll \epsilon_1$.

Оставшаяся часть главы организована следующим образом. В разделе 2.2 будет сформулирована модель, основывающаяся на псевдоспиновом представлении Андерсона [50], описывающая чётный сектор гамильтониана БКШ для локализованных электронных состояний; далее, в разделе 2.2.1 будет проведён анализ этой модели в рамках модели среднего поля. Раздел 2.2.2 посвящён разработке диаграммной техники, использующей семионное представление Федотова и Попова для спиновых операторов, которая будет использована в дальнейшем для исследования свойств модели вблизи критической точки с точки зрения больших пространственных и временных масштабов. Затем в разделе 2.3 будет выведен динамический функционал Гинзбурга-Ландау, который затем будет использован для вычисления парапроводимости в рамках гауссового приближения для двумерных и трёхмерных систем. Ведущие нелинейные поправки будут изучены в разделе 2.4; будут приведены оценки для характерной температуры ϵ_1 , которые для двумерных и трёхмерных систем даются выражениями $Z^{-1/2}$ и $Z^{-2/3}$ соответственно; также будет оценено влияние этих эффектов на температурную зависимость парапроводимости. В разделе 2.5 будут изучены остальные ведущие поправки к гауссовому приближению, связанные с: а) отсутствием самоусредняемости в системе, связанной с сильными пространственными флуктуациями замороженного беспорядка, и б) ведущим характером вкладов от инфракрасных температурных флуктуаций коллективных мод. Будет показано, что соответствующая область температур обладает зависимостью $\epsilon_2 \propto 1/Z$ для двумерных систем и $\propto 1/Z^2$ для трёхмерных; заметим, что таким же скейлингом обладает стандартное число Гинзбурга G_i в обыкновенной

теории фазовых переходов второго рода. Наконец, в разделе 2.6 будут представлены наши выводы. Часть технических деталей вынесена в приложения Б.1-Б.4.

2.2

Исходной точкой в нашем подходе является представление системы электронов в терминах псевдоспиновых операторов, предложенное Андерсоном в работе [50]:

$$S_i^- = a_{i\downarrow}a_{i\uparrow} \quad S_i^+ = a_{i\uparrow}^\dagger a_{i\downarrow}^\dagger \quad 2S_i^z = a_{i\uparrow}^\dagger a_{i\uparrow} + a_{i\downarrow}^\dagger a_{i\downarrow} - 1 \quad (2.1)$$

Операторы $a_{i\uparrow}$ и $a_{i\downarrow}$, а также $a_{i\uparrow}^\dagger$ и $a_{i\downarrow}^\dagger$ представляют собой операторы уничтожения и рождения электронов в локализованном собственном состоянии $\psi_i(\mathbf{r})$. Операторы S_i^α из формулы (2.1) удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям для спина 1/2. Гильбертово пространство, порождённое этими операторами, соответствует лишь части пространства для двух электронных состояний: а именно, мы отбрасываем состояния, для которых в каких-либо собственных состояниях $\psi_i(\mathbf{r})$ находится ровно один электрон. Это приближение оправдано предположением о том, что локальная энергия связи Δ_P много больше остальных энергетических и температурных масштабов, важных с физической точки зрения, см. работу [8].

Минимальный гамильтониан, в рамках которого можно получить и описать сверхпроводящие корреляции между локализованными электронами, может быть представлен в следующем виде:

$$H = -2 \sum_i \varepsilon_i S_i^z - \frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} (S_i^+ S_j^- + h.c.), \quad (2.2)$$

где ε_i представляют собой энергии одночастичных состояний, которые предполагаются независимыми случайными величинами, распределёнными с функцией распределения $P(\varepsilon) = \frac{1}{2W} \theta(W - |\varepsilon|)$. Явный вид функции распределения важен лишь для определения T_c ; как мы покажем далее, критическое поведение в

окрестности фазового перехода (включая парапроводимость) зависят от формы функции распределения только на масштабах $\varepsilon \cdot |T - T_c|$. Покуда плотность состояний $\nu_0 = P(0)$ остаётся конечной, все результаты данной главы останутся верными.

Подчеркнём, что спиновые операторы не имеют отношения к спинам исходных электронов, а являются лишь удобным представлением исходных фермионных операторов для данной задачи. Для дальнейших рассуждений спиновые индексы исходных фермионов рассматриваться не будут (они содержатся в операторах S_i), и термином “спины” мы будем обозначать именно андерсоновские псевдоспины. В этом смысле, “эффективное магнитное поле”, действующее на отдельные псевдоспины, не будет иметь никакого отношения к реальному магнитному полю, приложенному к системе.

Вообще говоря, матричные элементы $J_{ij} \equiv J(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \propto \int d^d r \psi_i^2(\mathbf{r}) \psi_j^2(\mathbf{r})$ зависят нетривиальным образом как от расстояния $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, так и от разности энергии $\varepsilon_i - \varepsilon_j$. Для упрощения задачи, мы сделаем предположение о большом радиусе взаимодействия $R \gg 1$ в матричных элементах J_{ij} , Фурье-преобразование которых в длинноволновом пределе имеет вид $J(\mathbf{p}) = J(1 - p^2 R^2)$. Здесь и дальше концентрация локализованных состояний n положена равной единице, что соответствует измерению длины в единицах $n^{-1/d}$; в этом смысле приближение $R \gg 1$ в действительности соответствует большой концентрации этих состояний, которое позволяет заменять суммирование по локализованным состояниям $\sum_i f(\mathbf{r}_i)$ на интегралы вида $\int d\mathbf{r} f(\mathbf{r})$. Стоит отметить, что константа J в таком представлении соответствует нулевой Фурье-гармонике $J(\mathbf{r})$, и параметрически отличается от величины $J_{ij} \sim J/R^d$.

Большая часть результатов, полученных в данной главе, основываются на возможности вывести эффективный динамический функционал Гинзбурга-Ландау для температур в окрестности T_c . С этой точки зрения естественным кажется ожидать, что выброшенная зависимость матричных элементов от энергии не должна значительно сказаться на результатах, покуда эффективное число соседей Z предполагается большим. Условие $Z \gg 1$ действительно является ключевым для построения нашей теории. Неизвестно, можно ли вывести это предположение из микроскопической модели для сверхпроводника вблизи локализационного перехода, развитой в работе [8]; тем не менее, мы считаем, что и в отсутствие микроскопического обоснования этого параметра, анализ, про-

ведённый для предложенной модели будет тем не менее представлять научную ценность.

Кроме этого, величина беспорядка предполагается самым большим параметром в задаче, а температуры, напротив, предполагаются достаточно низкими, так что выполнена цепочка неравенств $W \gg J \gg T$.

2.2.1

Параметр порядка БКШ представляет собой аномальное среднее от фермионных операторов. На псевдоспиновом языке это соответствует возникновению поляризации в плоскости $x - y$: $\langle S_i^{x,y} \rangle \neq 0$. Поэтому естественный выбор для параметра порядка в рамках предложенной модели даётся следующим выражением:

$$\Phi_i^\alpha = \sum_j J_{ij} \langle S_j^\alpha \rangle, \quad \alpha = x, y, \quad (2.3)$$

при этом стандартный комплексный параметр порядка может быть выражен как $\Delta = \Phi^x + i\Phi^y$.

Приближение среднего поля заключается в замене взаимодействия между спиновыми переменными на независимое взаимодействие отдельных спинов с «магнитным полем» создаваемым самосогласованным образом остальными спинами:

$$H_{MF} = - \sum_{i,\alpha} h_i^\alpha \sigma_i^\alpha, \quad (2.4)$$

где введены матрицы Паули $\sigma_i^\alpha = 2S_i^\alpha$, а эффективное магнитное поле имеет вид $\mathbf{h}_i = (\Phi_i^x, \Phi_i^y, \varepsilon_i)$. Из гамильтониана (2.4) следует тривиальная статсумма для отдельных спинов $Z_i = 2 \cosh(\beta |h_i|)$, где β обозначает обратную температуру $\beta = T^{-1}$. Среднее значение намагничённости, следующее из этого выражения для статсуммы, имеет вид $\langle S_i^\alpha \rangle = \frac{T}{2} \frac{\partial \ln Z_i}{\partial h_i^\alpha}$; это позволяет нам замкнуть модель

следующим условием самосогласования:

$$\sum_j J_{ij} \eta_j \Phi_j^\alpha = \Phi_i^\alpha, \quad \eta_j = \frac{\tanh \beta \sqrt{\varepsilon_j^2 + \Phi_j^2}}{2\sqrt{\varepsilon_j^2 + \Phi_j^2}}. \quad (2.5)$$

Отметим, что матрица $J_{ij} \eta_j$, входящая в эту систему уравнений, неэрмитова; однако её можно сделать таковой тривиальной заменой $\Phi_i \mapsto \Phi_i / \sqrt{\eta_i}$, после которой матрица принимает вид $\sqrt{\eta_i \eta_j} J_{ij}$. У этих уравнений существует нетривиальное решение когда одно из собственных чисел матрицы равно единице. Соответственно, критическая температура T_c может быть определена как самая большая температура, при которой такое собственное число возникает при $\Phi = 0$.

Используя приближение большого радиуса взаимодействия R , мы можем провести независимое усреднение всех стоящих тут величин η_i по случайным переменным ε_i , и предположить, что параметр порядка однороден в пространстве: $\Phi_i^\alpha \equiv \Phi^\alpha$. Эти упрощения приводят к следующему уравнению самосогласования, которое оказывается практически эквивалентным стандартному, возникающему в рамках теории БКШ:

$$1 = \frac{J}{2} \int d\varepsilon P(\varepsilon) \frac{\tanh \left(\beta \sqrt{\varepsilon^2 + \Phi^2} \right)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Phi^2}}. \quad (2.6)$$

Для рассматриваемой прямоугольной функции распределения $P(\varepsilon)$, критическая температура, следующая из этого уравнения, принимает следующий вид:

$$T_c = \frac{4e^\gamma}{\pi} W e^{-1/g}, \quad g = \nu_0 J. \quad (2.7)$$

Тут $\gamma \approx 0.577$ — постоянная Эйлера-Маскерони. Параметрическая зависимость вида $T_c \sim W e^{-1/g}$ в действительности чувствительна к явной форме потенциала, который, однако, определяет численный префактор. Важными параметрами функции распределения являются лишь отличная от нуля плотность состояний $\nu_0 = P(0)$ и её типичная ширина W .

Отсутствие фактора 2 в знаменателе аргумента \tanh в уравнении (2.6) является следствием отсутствия нечётных состояний в Гильбертовом простран-

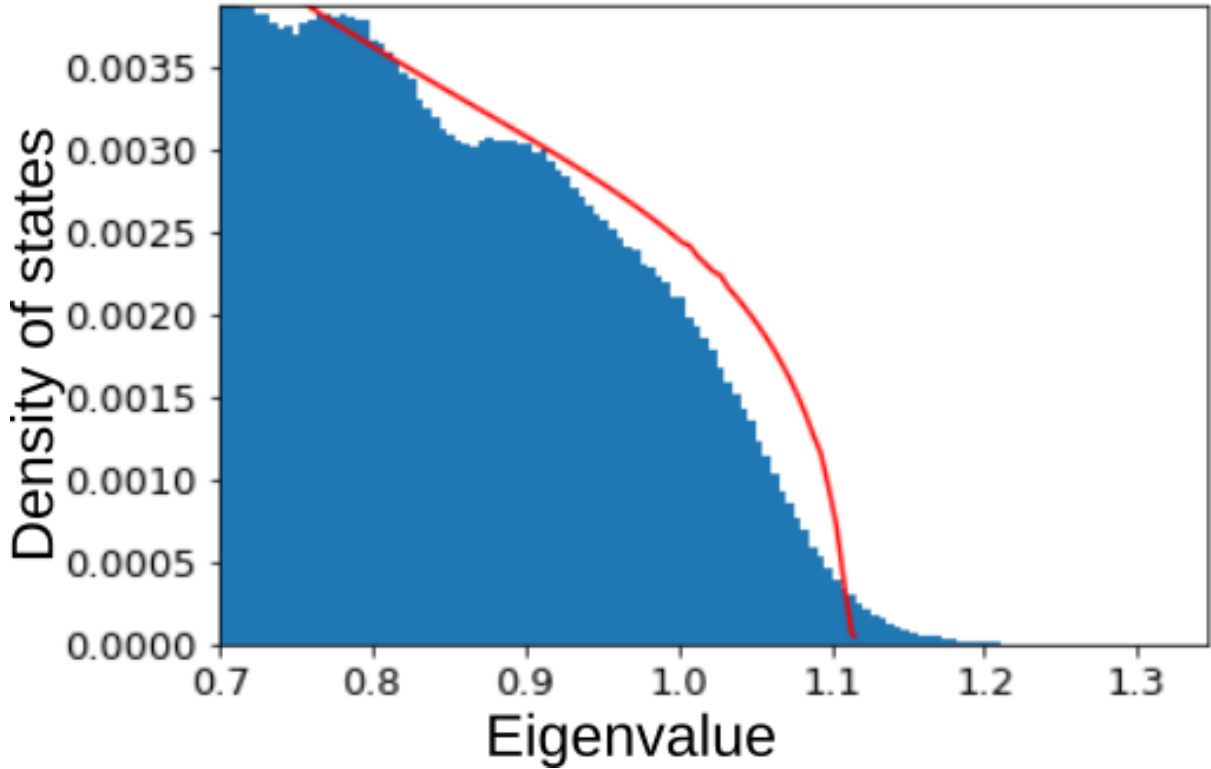


Рисунок 2.1 — Плотность собственных чисел случайной матрицы $J_{ij}\sqrt{\eta_i\eta_j}$ для системы размером 200×200 узлов со следующими параметрами: $R = 5$, $J = 1$, $W = 3$, $\beta \approx \beta_c \approx 60$. Красная кривая соответствует аналитической аппроксимации, следующей из самосогласованного Борновского приближения (SCBA), детали см. в приложении [Б.1](#).

стве нашей модели. Как следствие, величина T_c оказывается в два раза больше по сравнению с теорией БКШ.

Значение параметра порядка при $T = 0$ даётся стандартной формулой из теории БКШ:

$$\Phi(0) = 2We^{-1/g} \quad (2.8)$$

Строго говоря, уравнение (2.6) является точным лишь в пределе $R \rightarrow \infty$. Для конечного радиуса взаимодействия, необходимо рассматривать матрицу $J_{ij}\sqrt{\eta_i\eta_j}$ при фиксированной реализации $\{\varepsilon_i\}$ и искать величину β , при которой максимальное собственное число равняется единице. Ниже мы приведём основные результаты проведённого нами численного анализа (детали анализа вынесены в приложение [Б.1](#)).

Учёт конечности величины R приводит к сдвигу величины T_c по сравнению с величиной, даваемой уравнением (2.7), в область более высоких температур. Типичный вид плотности собственных значений матрицы при больших значениях R , полученный при помощи численной диагонализации с последующим усреднением по беспорядку, приведён на рис. 2.1. Основная часть спектра достаточно хорошо согласуется с предсказываемой самосогласованным Борновским приближением, разработанным в приложении Б.1; ширина экспоненциального «хвоста» оказывается пропорциональной параметру Гинзбурга $G_i \sim \rho^{2/(4-d)}$, где ρ даётся выражениями (2.38) и (2.39). Наличие осцилляций на рис. 2.1 связано с конечностью размеров системы.

2.2.2

Для изучения динамических свойств параметра порядка и вывода диаграммной техники, мы используем представление Федотова и Попова для операторов спина 1/2, см. [51; 52]. А именно, для каждого узла мы вводим двухкомпонентный спинор $\psi = (\psi_\uparrow, \psi_\downarrow)$, описывающий пару фермионов (по причинам, которые будут описаны ниже, они называются семионами), и представим спиновые операторы через семионные следующим образом (ниже, $\hat{\sigma}^\alpha$ представляют собой матрицы Паули, действующие на семионном пространстве (\uparrow, \downarrow)):

$$S_i^\alpha = \frac{1}{2} \psi_i^\dagger \hat{\sigma}^\alpha \psi_i. \quad (2.9)$$

Физическое подпространство содержит два состояния и соответствует условию наличия на узле ровно одного семиона: $\psi_\alpha^\dagger \psi_\alpha = 1$; для того, чтобы избавиться от остальных — нефизических — степеней свободы, для семионов вводится мнимый химический потенциал $\mu = -\frac{i}{2}\pi T$, см. работу [51]. В Мацубаровском представлении, этот химический потенциал приводит к модификации граничных условий в мнимом времени для фермионных полей: $\psi_\alpha(\tau + \beta) = (\pm i)\psi_\alpha(\tau)$; именно из-за этого обстоятельства эти фермионы носят название семионов, т.е. полуфермионов.

Гамильтониан (2.2) может быть выражен через семионные степени свободы следующим образом:

$$H = - \sum_i \varepsilon_i \psi_i^\dagger \hat{\sigma}^z \psi_i - \frac{1}{4} \sum_{ij, \alpha} (\psi_i^\dagger \hat{\sigma}^\alpha \psi_i) J_{ij} (\psi_j^\dagger \hat{\sigma}^\alpha \psi_j). \quad (2.10)$$

Это представление гамильтониана уже пригодно для построения на его основе келдышевской диаграммной техники. Расцепляя четырёх-семионное взаимодействие при помощи преобразования Хаббарда-Стратановича, вводя динамическое поле параметра порядка Φ (детали вынесены в приложение Б.2), мы приходим к следующему келдышевскому действию, описывающему степени свободы как семионов, так и параметра порядка:

$$iS[\bar{\psi}, \psi, \Phi] = i \int dt \left(- \Phi^\alpha \hat{J}^{-1} \check{\tau}_x \Phi^\alpha + \bar{\psi} \left(\hat{G}^{-1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \check{\Gamma}_\mu \hat{\sigma}^\alpha \Phi_\mu^\alpha \right) \psi \right). \quad (2.11)$$

Индекс $\mu \in \{cl, q\}$ относится к “классическим” и “квантовым” компонентам в келдышевском пространстве; вершины имеют вид $\check{\Gamma}_{cl} = \check{\tau}_0$, $\check{\Gamma}_q = \check{\tau}_x$, где $\check{\tau}_\alpha$ представляют собой матрицы Паули, действующие на этом келдышевском пространстве; а $\hat{G}^{-1} = i\partial_t + \varepsilon_i \hat{\sigma}^z$ представляет собой обратную «затравочную» семионную функцию Грина, которая диагональна в пространстве.

Из квадратичной части действия следуют выражение для «затравочного» пропагатора параметра порядка $L^{\alpha\beta}(t-t') = i \langle \Phi^\alpha(t) \Phi^\beta(t') \rangle$ (который обладает диагональной структурой в спиновом пространстве $(L^{(0)})^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} L^{(0)}$):

$$L_{R/A}^{(0)}(\omega, \mathbf{q}) = J(\mathbf{q})/2. \quad (2.12)$$

В свою очередь, для семионного пропагатора $G_{\sigma\sigma'}(t-t') = -i \langle \psi_\sigma(t) \psi_{\sigma'}^\dagger(t') \rangle$ (тут $\sigma, \sigma' \in \{\uparrow, \downarrow\}$) получается следующее выражение:

$$\hat{G}_{R/A}^{(0)}(\omega) = \begin{pmatrix} (\omega \pm i\gamma + \varepsilon)^{-1} & 0 \\ 0 & (\omega \pm i\gamma - \varepsilon)^{-1} \end{pmatrix} = \hat{P}^\uparrow G_{R/A}^\uparrow(\omega) + \hat{P}^\downarrow G_{R/A}^\downarrow(\omega). \quad (2.13)$$

Тут $\hat{P}^{\uparrow, \downarrow} = \frac{1}{2}(1 \pm \hat{\sigma}^z)$ представляют собой проекторы на собственные спиновые состояния в z -базисе, а мнимая часть γ инфинитезимальна и положительна.

Кроме того, в равновесии также имеются стандартные келдышевские соотношения:

$$L_K(\omega) = \mathbf{B}(\omega)\Delta L(\omega), \quad \mathbf{B}(\omega) = \coth \frac{\beta\omega}{2}, \quad (2.14)$$

и

$$G_K(\omega) = \mathbf{F}(\omega)\Delta G(\omega), \quad \mathbf{F}(\omega) = \mathbf{f}(\omega) - \frac{i}{\cosh \frac{\beta\omega}{2}}, \quad \mathbf{f}(\omega) = \tanh \beta\omega, \quad (2.15)$$

где введено сокращённое обозначение $\Delta(\dots) = (\dots)_R - (\dots)_A$. Нестандартным обстоятельством тут является возникновение мнимой части у семионной функции распределения, которая возникает из-за наличия мнимого химического потенциала. Само по себе это не является какой-либо проблемой, поскольку семионы не представляют собой физические степени свободы; таковыми являются исходные спиновые переменные.

Ниже мы применим разработанную диаграммную технику для вычисления корреляционной функции параметра порядка $L(\omega, \mathbf{q})$ при температуре, слегка большей критической, при которой уже проявляется критическое замедление.

2.2.3

Псевдоспиновые операторы S_i^\pm создают и уничтожают пару электронов на узле i ; поэтому влияние электромагнитного калибровочного $U(1)$ преобразования на эти операторы может быть записано как $S_i^\pm \mapsto S_i^\pm e^{\pm 2ie\alpha(\mathbf{r}_i)}$ (тут e представляет собой заряд электрона, а скорость света положена равной единице). Действие (2.11) должно быть инвариантным относительно таких преобразований, если при этом также преобразовать электромагнитный вектор-потенциал согласно $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \mapsto \mathbf{A}(\mathbf{r}) - \nabla\alpha$.

Пространственная структура задачи содержится в матрице $\hat{J} = J(\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla)$. Калибровочное поле \mathbf{A} тем самым может быть введено путём замены импульса на “ковариантную производную” $\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{p}} - 2e\mathbf{A}\hat{\sigma}^y$. Тем самым, длинноволновой предел даётся выражением $\hat{J}^{-1} \equiv \hat{J}^{-1}(\hat{\mathbf{P}}) \approx J^{-1}(1 + \hat{\mathbf{P}}^2 R^2)$.

Выражение для электрического тока, переносимого куперовскими парами, может быть получено из действия следующим образом:

$$\mathbf{j} = \frac{\delta S}{\delta \mathbf{A}} = \frac{4eR^2}{J} \Phi^\alpha \left[\hat{\sigma}_{\alpha\beta}^y \hat{\mathbf{p}} - 2e\mathbf{A}\delta_{\alpha\beta} \right] \Phi^\beta. \quad (2.16)$$

Это соотношение имеет смысл тождества для соответствующий классической теории поля, и операторного тождества на языке квантовой теории поля.

2.3

В этом разделе мы изучим флуктуационный пропагатор $L(\omega, \mathbf{q})$ в рамках простого гауссового приближения, и вычислим соответствующий ему флуктуационный вклад в электрическую проводимость.

2.3.1

В рамках гауссового приближения, флуктуационный пропагатор параметра порядка \check{L} определяется уравнением Дайсона, изображённым на рис. 2.2, аналитическая форма которого даётся следующими выражениями:

$$\check{L}^{-1} = (\check{L}^{(0)})^{-1} - \check{S}, \quad (2.17)$$

$$S_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(\omega) = \frac{i}{2} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \text{Tr}(\check{\Gamma}_\mu \hat{\sigma}^\alpha \hat{G}(\Omega + \omega) \check{\Gamma}_\nu \hat{\sigma}^\beta \hat{G}(\Omega)) \quad (2.18)$$

Выражение для собственной энергетической части совпадает с невозмущённой спиновой корреляционной функцией $S_i^{\alpha\beta}(t - t') = i \langle \hat{\sigma}_i^\alpha(t) \hat{\sigma}_i^\beta(t') \rangle$. Величина \hat{S} представляет собой диагональную в координатном представлении матрицу, чья структура зависит от случайных энергий ε_i . Мы ищем $\langle L \rangle_\varepsilon$, поэтому, вообще говоря, нам необходимо произвести совместное усреднение по случайным величинам всего ряда теории возмущений (рис. 2.2). Используя приближение

The diagram consists of two parts. The top part shows a Dyson series for the Green's function L . On the left, a wavy line labeled L is equated to a sum of terms. The first term is a dashed wavy line labeled $L^{(0)}$. The second term is a dashed wavy line labeled $L^{(0)}$ connected to a crossed circle labeled S , which is then connected to another dashed wavy line labeled $L^{(0)}$. This is followed by an ellipsis. The bottom part shows an equation for a crossed circle with indices α and β . This is equated to a diagram with two vertices, $\hat{\sigma}^\alpha$ and $\hat{\sigma}^\beta$, connected by two dashed arcs. The upper arc is labeled $\hat{G}(\Omega + \omega)$ and the lower arc is labeled $\hat{G}(\Omega)$.

Рисунок 2.2 — Сверху: ряд теории возмущений для функции Грина параметра порядка, даваемый уравнением Дайсона (2.17); пунктирная волнистая линия соответствует $\hat{L}^{(0)} = \hat{J}/2$. Перечёркнутый круг, показанный на нижнем рисунке, представляет собой спиновую корреляционную функцию \hat{S} , даваемую выражением (2.18). Она выступает в роли “поляризационного оператора” для пропагатора параметра порядка. Такое представление демонстрирует, что этот объект диагонален в координатном представлении (хоть и обладает нетривиальной структурой во временном представлении). Спиновые индексы $\alpha, \beta \in \{x, y, z\}$; вершины обладают Келдышевской структурой $\check{\Gamma}_\mu$, $\mu \in \{cl, q\}$. Пунктирные линии отвечают семионным функциям Грина, см. уравнение (2.13)

большого радиуса взаимодействия R , мы можем утверждать, что пропагатор меняется на больших пространственных масштабах. При этом корреляционный объём содержит большое количество отдельных псевдоспинов S_i ; это позволяет нам построить аналог крестовой диаграммной техники для усреднения по величинам ε_i .

Для усреднённого пропагатора $\langle \check{L} \rangle$, уравнение Дайсона принимает вид:

$$\langle \check{L} \rangle_\varepsilon^{-1} = (\check{L}^{(0)})^{-1} - \check{\Pi}. \quad (2.19)$$

В ведущем порядке по большому радиусу взаимодействия R , величины \check{S}_i могут быть усреднены независимо, что позволяет нам заменить $\check{\Pi} \approx \langle \check{S} \rangle_\varepsilon$. Поправки к этому приближению будут исследованы ниже, в разделе 2.5.

Займёмся вычислением собственной энергетической части (2.18). Келдышевская структура может быть тривиально учтена; запаздывающая компонента ($\mu = q, \nu = cl$) даётся следующим выражением:

$$S_R^{\alpha\beta}(\omega) = \frac{i}{2} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \text{Tr} \left(\hat{\sigma}^\alpha \hat{G}_R(\Omega + \omega) \hat{\sigma}^\beta \hat{G}_K(\Omega) + \hat{\sigma}^\alpha \hat{G}_K(\Omega + \omega) \hat{\sigma}^\beta \hat{G}_A(\Omega) \right). \quad (2.20)$$

Все вычисления будут проведены предполагая, что величина $\gamma > 0$ — они пригодятся нам в дальнейшем, в разделе 2.4.2; в рамках же гауссового приближения достаточно предела $\gamma \rightarrow +0$. Члены, возникающие после подстановки затравочных семионных пропагаторов, даваемых уравнением (2.13), могут быть разделены на две группы. В первой группе содержатся члены, в которых семионные пропагаторы соответствуют одной поляризации, $\propto G^\uparrow G^\uparrow$ или $\propto G^\downarrow G^\downarrow$. В пределе $\gamma \rightarrow 0$ они зануляются, а для конечных γ , они хоть и конечны, но нечётны по отношению к замене $\varepsilon \mapsto -\varepsilon$ и, тем самым, зануляются при усреднении по ε . Вторая группа, в которой семионные пропагаторы соответствуют различным поляризациям, в свою очередь естественным образом делится на диагональную и недиагональную компоненты в спиновом пространстве. Вводя единичный вектор, направленный вдоль оси z , $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$, и проводя интегрирование по энергии, мы получаем:

$$S_R^{\alpha\beta}(\omega) = (\delta^{\alpha\beta} - n^\alpha n^\beta) S_R^{(diag)}(\omega) + i \varepsilon^{\alpha\beta\mu} n^\mu S_R^{(off)}(\omega), \quad (2.21)$$

где в пределе $\gamma \ll T, \varepsilon$ имеем:

$$S_R^{(diag)}(\omega) \approx \frac{f(\varepsilon)\varepsilon}{\varepsilon^2 - (\omega/2 + i\gamma)^2} \quad (2.22)$$

$$S_R^{(off)}(\omega) \approx \frac{f(\varepsilon)\omega/2}{\varepsilon^2 - (\omega/2 + i\gamma)^2}, \quad (2.23)$$

и $f(\varepsilon)$ даётся уравнением (2.15). В пределе $\gamma \rightarrow +0$ эти корреляционные функции описывают тривиальную динамику, отвечающую прецессии отдельного спина в постоянном магнитном поле $\varepsilon \mathbf{n}$.

В качестве следующего шага, для вычисления $\Pi_R(\omega) \approx \langle S_R(\omega) \rangle_\varepsilon$ мы должны провести усреднение по ε . Недиagonalная часть нечётна по отношению к замене $\varepsilon \mapsto -\varepsilon$ даже при конечных значениях γ и пропадает после усреднения. Тем самым, единственный нетривиальный вклад соответствует величине $S_R^{(diag)}(\omega)$. В пределе $\omega \ll T$, удобным оказывается независимо рассмотреть её вещественную и мнимую части. Вещественная часть практически не зависит от частоты, и определяет критическую температуру перехода; мнимая же часть зависит от ω существенно и определяет диссипативную динамику флуктуаций параметра порядка:

$$\langle \text{Re } S_R^{(diag)}(\omega) \rangle \approx \left\langle \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} \right\rangle_\varepsilon = \frac{1}{W} \ln \frac{4e^\gamma W}{\pi T} \quad (2.24)$$

$$\langle \text{Im } S_R^{(diag)}(\omega) \rangle = \pi \nu_0 f\left(\frac{\omega}{2}\right) \approx \frac{\pi \omega}{4WT} \quad (2.25)$$

Отметим, что основной логарифмический вклад в статическую составляющую определяется широкой областью энергией $T \ll \varepsilon \ll W$, в то время как мнимая часть определяется $\varepsilon \sim \omega$. Она возникает из-за наличия реальных резонансных процессов переворота отдельных спинов, которые и приводят к диссипации флуктуаций параметра порядка. Наличие линейного члена по ω тем самым является прямым следствием ненулевой плотности состояний $\nu_0 = P(\varepsilon \ll T)$.

Вышенаписанное позволяет нам записать пропагатор параметра порядка в следующем виде:

$$L_R(\omega, \mathbf{q}) = \frac{1/2\nu_0}{\varepsilon + q^2 \xi_0^2 - i\omega\tau}, \quad (2.26)$$

где

$$\varepsilon = \ln \frac{T}{T_c} \approx \frac{T - T_c}{T_c} \ll 1, \quad \xi_0 = \frac{R}{\sqrt{g}}, \quad \tau = \frac{\pi}{4T}, \quad (2.27)$$

и T_c определяется полученным ранее выражением (2.7). Безразмерный параметр ϵ описывает близость к сверхпроводящему переходу, величина ξ_0 определяет “нуль-температурную длину когерентности”, а τ^{-1} определяет скорость затухания флуктуаций параметра порядка вдали от T_c . При малых значениях ϵ , длина когерентности и время релаксации расходятся как $\xi(\epsilon) = \xi_0/\sqrt{\epsilon}$ и τ/ϵ , соответственно.

Стоит ещё раз отметить, что вид пропагатора (2.26) нечувствителен к явной форме функции распределения, покуда плотность состояний на нулевой энергии конечна $\nu_0 = P(\epsilon = 0)$ и не обладает существенной дисперсией при $\epsilon \rightarrow 0$. Форма функции распределения определяет лишь величину T_c .

Такой вид пропагатора соответствует стандартному динамическому функционалу Гинзбурга-Ландау (TDGL; см. [53]), который описывает динамику параметра порядка в металле вблизи сверхпроводящего перехода. Отличие заключается в том, что в рамках нашей теории, величина ξ_0 не зависит от T_c как это происходит в обычных неупорядоченных металлах: $\xi_0 \sim \sqrt{D/T_c}$; другое важное отличие заключается в том, что найденная величина параметра τ в два раза больше значения, известного для неупорядоченных металлов $\tau = \pi/8T$.

2.3.2

В предыдущем разделе мы показали, что в рамках нашей модели динамика флуктуаций параметра порядка похожа на возникающую при стандартном рассмотрении в рамках TDGL. Флуктуационная проводимость в сверхпроводниках, находящихся при температуре выше T_c была сосчитана Асламазовым и Ларкиным в работе [9]; вычисление с использованием TDGL может быть найдено в книге [53]. В этом разделе мы вкратце воспроизведём известные результаты, а также обсудим особенности, связанные с наличием в системе псевдощели.

Проводимость может быть найдена с использованием стандартной формулы Кубо:

$$\sigma^{ij}(\omega, \mathbf{q}) = i \frac{Q_R^{ij}(\omega, \mathbf{q}) - Q_R^{ij}(0, \mathbf{q})}{\omega}. \quad (2.28)$$

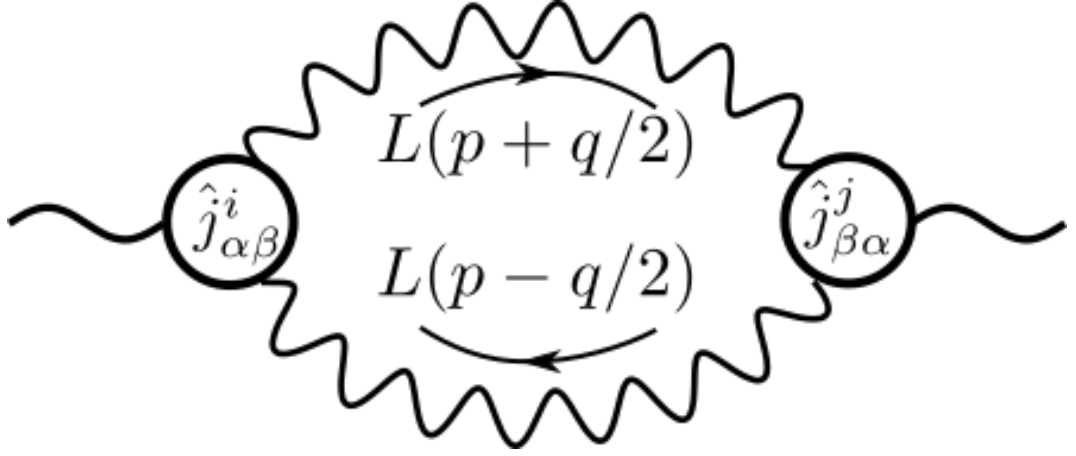


Рисунок 2.3 — Диаграммное представление для ядра Q , даваемого выражением (2.29). Волнистые линии соответствуют флуктуационному пропагатору $L(\omega, \mathbf{q})$, а токовые вершины даются выражением

$$\hat{j}_{\alpha\beta}^i = \frac{4R^2}{J} \hat{\sigma}_{\alpha\beta}^y (-i\nabla^i), \text{ см. уравнение (2.16)}$$

и корреляционная функция электрического тока в пространственно-временном представлении может быть записана в следующем виде:

$$Q_{\mu\nu}^{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = -i \langle j_{\mu}^i(\mathbf{r}, t) j_{\nu}^j(\mathbf{r}', t') \rangle. \quad (2.29)$$

В уравнение (2.28) входит частотно-энергетическое (\mathbf{q}, ω) Фурье-преобразование этой корреляционной функции.

В рамках гауссового приближения, единственная диаграмма, дающая вклад в ядро Q , изображена на рис. 2.3; аналитическое выражение для неё записывается следующим образом (тут $p_{\pm} = p \pm \frac{q}{2}$, $p = (\Omega, \mathbf{p})$ и $q = (\omega, \mathbf{q})$):

$$Q_R^{ij}(\omega, \mathbf{q}) = 32i\nu_0^2 \xi_0^2 e^2 \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} p^i p^j (L_R(p_+) L_K(p_-) + L_K(p_+) L_A(p_-)) \quad (2.30)$$

В статическом и пространственно-однородном пределе пределе $\omega \rightarrow 0$, ($q = 0$) парапроводимость Асламазова-Ларкина диагональна и даётся формулой $\sigma_{AL} = i\partial Q_R / \partial \omega$, которая может быть переписана в следующем виде:

$$\sigma_{AL} = \frac{16}{d} \nu_0^2 \xi_0^4 e^2 \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \mathbf{p}^2 \mathbf{B}'(\Omega) (\Delta L(\Omega, \mathbf{p}))^2 \quad (2.31)$$

Подставляя флуктуационный пропагатор (2.26), проводя интегрирование по энергии используя вычеты и переходя к безразмерному импульсу $P =$

$p\xi_0/\sqrt{\epsilon}$, мы получаем:

$$\sigma_{AL} = \frac{e^2}{\xi_0^{d-2}\epsilon^{2-d/2}} \frac{8}{d} T\tau \int \frac{d^d \mathbf{P}}{(2\pi)^d} \frac{P^2}{(1+P^2)^3} \equiv \frac{e^2 s_d}{\xi_0^{d-2}\epsilon^{2-d/2}}, \quad (2.32)$$

где $s_2 = \frac{1}{8}$ и $s_3 = \frac{1}{16}$. Это позволяет нам окончательно записать выражение для парапроводимости в следующем виде:

$$\sigma_{AL} = \frac{e^2}{\sim} \times \begin{cases} 1/8\epsilon, & (2D) \\ 1/16\xi_0\sqrt{\epsilon}, & (3D) \end{cases} \quad (2.33)$$

(величина \sim была восстановлена по размерности). Полученный результат оказался в два раза больше по сравнению со стандартным результатом Асламазова и Ларкина, полученным в работе [9]. Несложно проследить, что расхождение это вызвано расхождениями в величине τ , которое было отмечено выше. Важно заметить, что в обычных сверхпроводниках, парапроводимость Асламазова и Ларкина должна представлять собой малую поправку к друдевской проводимости σ_D , в то время как в нашей системе с развитой псевдощелью, вклад в проводимость σ_{AL} может быть доминирующим: другой вклад происходит от одноэлектронных переходов между локализованными состояниями, который подавлен при $T_c \ll \Delta_P$. По этой же причине нет необходимости рассматривать остальные флуктуационные поправки к проводимости (Маки-Томпсона или возникающие за счёт перенормировки одноэлектронной плотности состояний) которые имеются [53] в обыкновенных неупорядоченных сверхпроводниках. Как правило, эти поправки имеют отношение к модификации одноэлектронного вклада в проводимость из-за флуктуаций параметра порядка, в то время как в нашем случае одноэлектронный транспорт подавлен наличием псевдощели.

Ниже будут изучены различные поправки к используемому гауссовому приближению, и будет показано, что выражение (2.33) является хорошим приближением при условии $\epsilon \geq \epsilon_1$, см. уравнения (2.38, 2.39). А затем будут изучены поправки, возникающие при ещё меньших значениях ϵ .

2.4

Известно, что негауссовы эффекты, вызванные взаимодействием коллективных флуктуационных мод, определяют температурные зависимости термодинамических величин в непосредственной близости критической точки, при $\epsilon \leq Gi$, где число Гинзбурга даётся $Gi \sim Z^{-2/(4-d)}$. Однако, ранее в работе [49] было отмечено, что поправки к динамическим величинам (в частности, парапроводимость) могут оказаться большими в параметрически более широкой области значений ϵ . В данном разделе будет показано, что похожее явление имеет место и в рамках нашей модели. Конкретнее, мы изучим особый вид поправок, влияющих на температурную зависимость времени релаксации $\tau_{GL}(\epsilon)$, и которые оказываются релевантными уже при $\epsilon \leq \epsilon_1 \sim Gi^{1/d}$, в то время как статические величины в этой области по-прежнему могут быть описаны в рамках Гауссового приближения.

Об этом особом виде поправок, важных при $\epsilon \leq \epsilon_1$, можно думать как об обратном действии сверхпроводящих флуктуаций на динамику отдельных псевдоспинов S_i . Келдышевское действие (2.11) в действительности описывает их динамику под действием локального “магнитного поля” $(\Phi_i^x(t), \Phi_i^y(t), \epsilon_i)$. Локальная корреляционная функция полей $\Phi_i(t)$ совпадает с флуктуационным пропагатором $L(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$, сосчитанном при совпадающих пространственных индексах $\mathbf{r} = \mathbf{r}' = \mathbf{r}_i$; поэтому действие (2.11) совместно с уравнением Дайсона (2.17) составляют замкнутую систему самосогласованных уравнений. Решение этих уравнений будет включать в себя: i) вычисление динамической корреляционной функции отдельных псевдоспинов S_i под действием флуктуирующего “магнитного поля”, описываемого корреляционной функцией $C_i(t-t') = \langle \Phi_i^\alpha(t) \Phi_i^\beta(t') \rangle$; ii) вычисление пропагатора $L(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ используя уравнение Дайсона; iii) самосогласованное вычисление корреляционной функции флуктуаций на каждом узле i . Приведённая выше схема включает в себя макроскопическое количество переменных и поэтому трудно реализуема. Однако, задача может быть значительно упрощена в рамках предположения о пространственной независимости корреляционной функции “шума” $C_i(t-t') \rightarrow C(t-t')$. Ниже, в разделе 2.5, будет продемонстрировано, что такое приближение корректно при $Gi \ll \epsilon \leq \epsilon_1$. А пока займёмся изучением эффекта такого попереч-

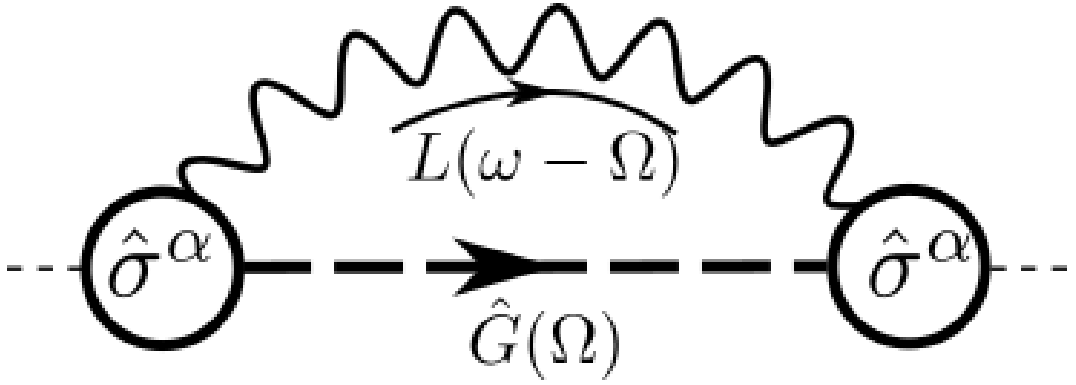


Рисунок 2.4 — Семионная собственная энергетическая часть $\hat{\Sigma}(\omega)$, возникающая от их взаимодействия с параметром порядка.

ного шума на локальную спиновую динамику, динамику параметра порядка и, затем — на парапроводимость. Ключевые характеристики шума определяются пропагатором, сосчитанным в совпадающих точках $L(\omega, \mathbf{r} = \mathbf{r}')$. Хотя эта величина сама по себе ультрафиолетово расходится (с обрезкой интегрирования по импульсу на значениях $\Lambda \sim R^{-1}$), её частотная и температурные зависимости могут быть отделены и определяются длинноволновыми флуктуациями:

$$L_R(\omega) \approx \frac{1}{8\pi\nu_0\xi_0^d} \begin{cases} \ln(\Lambda^2\xi_0^2) - \ln(\epsilon - i\omega\tau), & (2D) \\ \Lambda\xi_0 - \sqrt{\epsilon - i\omega\tau}, & (3D) \end{cases}. \quad (2.34)$$

“Локальный шум”, описываемый этим пропагатором, является слабым при достаточно больших значениях ξ_0 .

2.4.1

Эффекты “шума”, вызванного флуктуациями параметра порядка на спиновую корреляционную функцию, могут быть изучены пертурбативно используя келдышевскую диаграммную технику для действия (2.11). Имеются два типа поправок: поправки к пропагатору и вершинные поправки; мы начнём исследование с первых.

Простейшая поправка к семионному пропагатору изображена на рис. 2.4. Ниже для простоты мы будем изучать только “ \downarrow ” поляризацию семионов; выражения для поляризации “ \uparrow ” могут быть получены тривиальной заменой $\epsilon \rightarrow -\epsilon$.

Аналитическое выражение для запаздывающей компоненты собственной энергетической части может быть записано следующим образом:

$$\Sigma_R^\downarrow(\omega, \varepsilon) = -\frac{i}{2} \int \frac{d\Omega}{2\pi} (G_R^\uparrow(\Omega) L_K(\omega - \Omega) + G_K^\uparrow(\omega - \Omega) L_R(\Omega)) \quad (2.35)$$

При $\omega \ll T$, второй член пропорционален семионной “функции распределения” $F(\omega)$ и является параметрически малым по сравнению с первым из-за сингулярности бозонной функции распределения $\mathbf{B}(\omega) \approx 2T/\omega$. Выбрасывая её, мы получаем, что собственная энергетическая часть зависит только от комбинации ω и ε вида $\Sigma_R^{\downarrow, \uparrow}(\omega, \varepsilon) \equiv \Sigma_R(\Omega = \omega \pm \varepsilon)$, где:

$$\Sigma_R(\Omega) = \frac{T}{8\pi\nu_0\xi_0^d\Omega} \begin{cases} \ln \frac{\varepsilon - i\Omega\tau}{\varepsilon}, & (2D) \\ \sqrt{\varepsilon - i\Omega\tau} - \sqrt{\varepsilon}, & (3D) \end{cases} \quad (2.36)$$

Хотя семионы и не являются квазичастицами, их свойства, тем не менее, определяют физические корреляции псевдоспиновых переменных. В частности, $\text{Im } \Sigma_R$ соответствует процессам спиновой релаксации, а $\text{Re } \Sigma_R$ даёт перенормировку частоты прецессии. В нижнем порядке теории возмущений, эти два эффекта могут рассматриваться независимым образом; начнём с изучения релаксации.

Скорость переворота спина входит в семионную функцию Грина в точности так же, как и величина γ в уравнении (2.13) (которая ранее предполагалась инфинитезимальной). Она определяется как мнимая часть Σ_R , вычисленная на “массовой поверхности” $\omega = \varepsilon \Rightarrow \Omega = 2\varepsilon$:

$$\gamma(\varepsilon) \approx \frac{T}{8\pi\nu_0\xi_0^d} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \begin{cases} \arctan \frac{2\varepsilon\tau}{\varepsilon}, & (2D) \\ \text{Im } \sqrt{\varepsilon + 2i\varepsilon\tau} & (3D) \end{cases} \quad (2.37)$$

Эта скорость была сосчитана в рамках теории возмущений и тем самым может быть применена только покуда она меньше частоты когерентной прецессии, $\gamma(\varepsilon) \ll \varepsilon$. Этот критерий, очевидным образом, не может быть выполнен для всех ε , поскольку $\gamma(\varepsilon \rightarrow 0)$ выходит на константное значение. Из-за этого в задаче возникает новый энергетический масштаб ω_c , который отделяет спины, для которых преобладает диссипативная динамика (для которых $\varepsilon \ll \omega_c$) от спинов, чья динамика по большей части когерентна ($\varepsilon \gg \omega_c$). Это обстоятель-

ство может повлиять на величину флуктуационной проводимости только если этот масштаб достаточно большой, а именно, при $\omega_c \gg \epsilon T$ (обратите внимание, что сама величина ω_c тоже, вообще говоря, зависит от ϵ). Вышенаписанный критерий можно переписать как условие близости к переходу $\epsilon \ll \epsilon_1$, где:

$$\epsilon_1 = \rho^{1/2}, \quad \rho = \frac{1}{16\nu_0\xi_0^2 T} = \frac{gW}{8R_0^2 T_c}, \quad (2D) \quad (2.38)$$

$$\epsilon_1 = \rho^{2/3}, \quad \rho = \frac{1}{16\sqrt{\pi}\nu_0\xi_0^3 T} = \frac{g^{3/2}W}{8\sqrt{\pi}R_0^3 T_c}, \quad (3D) \quad (2.39)$$

Сама величина ω_c зависит от безразмерной близости к переходу ϵ следующим образом:

$$\epsilon \gg \epsilon_1 : \quad \omega_c = \begin{cases} T\rho/\epsilon & (2D) \\ T\rho\sqrt{\pi/4\epsilon} & (3D) \end{cases} \quad (2.40)$$

$$\epsilon \ll \epsilon_1 : \quad \omega_c = \begin{cases} T\rho^{1/2}, & (2D) \\ T\rho^{2/3}, & (3D) \end{cases} \quad (2.41)$$

Для самосогласованности вышенаписанного анализа, необходимо условие $\rho \ll 1$. Параметр ρ обратно пропорционален координационному числу, $\rho \sim 1/Z$.

Вещественная часть собственной энергетической части $\text{Re } \Sigma_R$ перенормирует спектральный вес спиновой корреляционной функции $\text{Im } S_R$ следующим образом::

$$\text{Im } S_R^{(diag)}(\omega) = \frac{1}{4} \int \frac{d\Omega}{2\pi} (\Delta G^\downarrow(\Omega + \omega) \Delta G^\uparrow(\Omega) + \{\uparrow \leftrightarrow \downarrow\}) \times \\ \times (F(\Omega) - F(\Omega + \omega)) \quad (2.42)$$

Поскольку, как было написано выше, мы можем изучать эффекты от $\text{Im } \Sigma_R$ и $\text{Re } \Sigma_R$ независимо, то нам достаточно заменить $\Delta G^{\uparrow,\downarrow}(\omega) = -2\pi i \delta(\omega \pm \epsilon - \text{Re } \Sigma_R(\omega \mp \epsilon))$; на низких частотах тем самым мы получаем:

$$\text{Im } S_R^{(diag)}(\omega) = \frac{\pi\omega}{2T} \left[(1 - \text{Re } \Sigma'_R(2\epsilon))^{-1} \times \right. \\ \left. \times \delta(2\epsilon - \omega + \text{Re } \Sigma_R(2\epsilon) - \text{Re } \Sigma_R(\omega)) + \{\epsilon \mapsto -\epsilon\} \right] \quad (2.43)$$

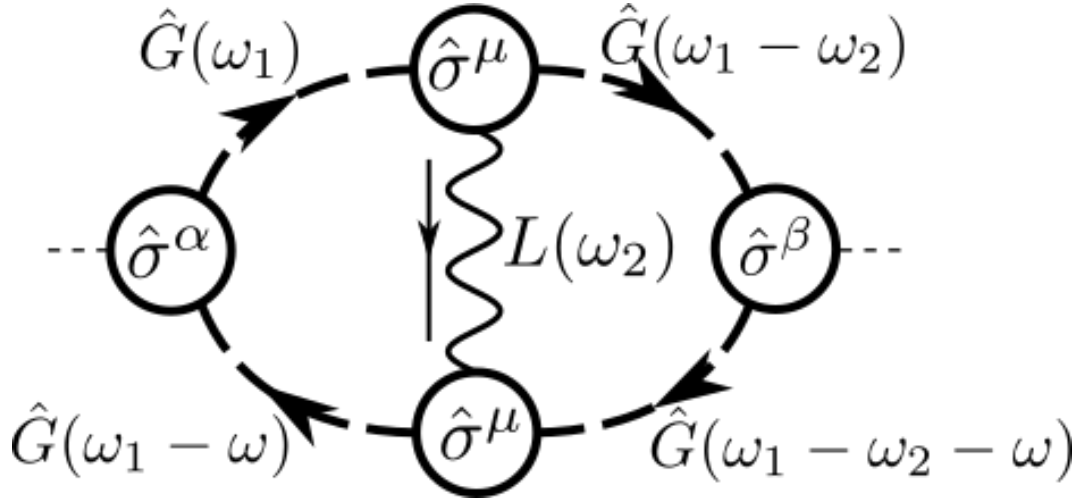


Рисунок 2.5 — Вершинная поправка к собственной энергетической части параметра порядка (рис. 2.2), соединяющая верхнюю и нижнюю семионные линии. Эта диаграмма зануляется в силу особенностей её спиновой структуры.

Время релаксации параметра порядка τ выражается через спектральный вес согласно следующему соотношению:

$$\omega\tau = \frac{1}{2\nu_0} \left\langle \text{Im } S_R^{(diag)}(\omega) \right\rangle_\varepsilon \quad (2.44)$$

Однако, из уравнения (2.44) следует, что Гауссово значение для параметра $T\tau = \pi/4$ не изменяется вследствие этого эффекта. Таким образом, в низшем порядке теории возмущений, эффекты, приходящие от $\text{Re } \Sigma_R$ не изменяют динамику параметра порядка (и тем самым не влияют на парапроводимость), и поэтому нам достаточно сфокусироваться лишь на процессах релаксации.

Наконец, займёмся изучением вершинных поправок к спиновой корреляционной функции, в низшем порядке изображённых на рис. 2.5; соответствующее аналитическое выражение даётся:

$$\delta S_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(\omega) = -\frac{1}{4} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_2}{2\pi} L_{\lambda\rho}^{\gamma\delta}(\omega_2) \text{Tr} \left(\check{\Gamma}_\mu \hat{\sigma}^\alpha \hat{G}(\omega_1) \hat{\sigma}^\gamma \check{\Gamma}_\lambda \times \right. \\ \left. \times \hat{G}(\omega_1 - \omega_2) \check{\Gamma}_\nu \hat{\sigma}^\beta \hat{G}(\omega_1 - \omega_2 - \omega) \hat{\sigma}^\delta \check{\Gamma}_\rho \hat{G}(\omega_1 - \omega) \right). \quad (2.45)$$

Исследование спиновой структуры этого выражения показывает, что нетривиальные вклады пропорциональны $\text{Tr}(\hat{\sigma}^\alpha \hat{\rho}^\uparrow \hat{\sigma}^\mu \hat{\rho}^\downarrow \hat{\sigma}^\beta \hat{\rho}^\uparrow \hat{\sigma}^\mu \hat{\rho}^\downarrow)$ (и аналогично для $\uparrow \leftrightarrow \downarrow$); однако, после суммирования по $\mu = x, y$, эти вклады тождественно зануляются. Из этого мы делаем вывод, что нетривиальные поправки возника-

ют только при “одевании” семионных функций Грина в петле, как изображено на рис. 2.4.

2.4.2

Перенормировка семионных пропагаторов, описанная выше, влияет на спиновую корреляционную функцию, которая входит в уравнение Дайсона для параметра порядка. Это влияние наиболее сильно проявляется при изучении диссипативной части пропагатора параметра порядка $L(\omega, \mathbf{q})$, которая определяется спектральным весом спиновой корреляционной функции, см. уравнение (2.44). Основной вклад при усреднении по энергиям ε происходит от энергий $\varepsilon \sim \omega \ll T$, и линейный по частоте вклад возникает от разложения фермиевской функции распределения ω , $f(\omega) \approx \beta\omega$. Это позволяет нам записать следующую общую формулу для важного безразмерного параметра $T\tau$, который теперь, вообще говоря, зависит от частоты ω (напомним, парапроводимость пропорциональна этому параметру, и в рамках гауссового приближения он был равен $\pi/4$):

$$T\tau(\omega) = -\frac{1}{4\nu_0} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \langle \Delta G^\downarrow(\Omega + \omega) \Delta G^\uparrow(\Omega) \rangle_\varepsilon \quad (2.46)$$

В предыдущем разделе было продемонстрировано, что вещественная часть семионной собственной энергетической части не влияет на произведение $T\tau$, в то время как мнимая часть $\text{Im} \Sigma_R$ может быть учтена, используя пропагаторы в виде (2.13) для ненулевой γ , даваемые уравнением (2.37):

$$T\tau(\omega) = \frac{1}{4} \int \frac{d\varepsilon \cdot \gamma(\varepsilon)}{\gamma^2(\varepsilon) + (\varepsilon - \omega/2)^2} \quad (2.47)$$

Это интегрирование может быть произведено численно, результаты изображены на рис. 2.6. Интересной особенностью всех кривых является то, что они демонстрируют немонотонное поведение. Проведённый анализ является самосогласованным покуда $\omega \geq \omega_c$, что соответствует малому отклонению $T\tau$ от значения $\pi/4$.

При более низких частотах $\omega < \omega_c$, кинетический член пропагатора $L(\omega, \mathbf{q})$ определяется вкладом псевдоспинов, находящихся в магнитных полях $\varepsilon < \omega_c$,

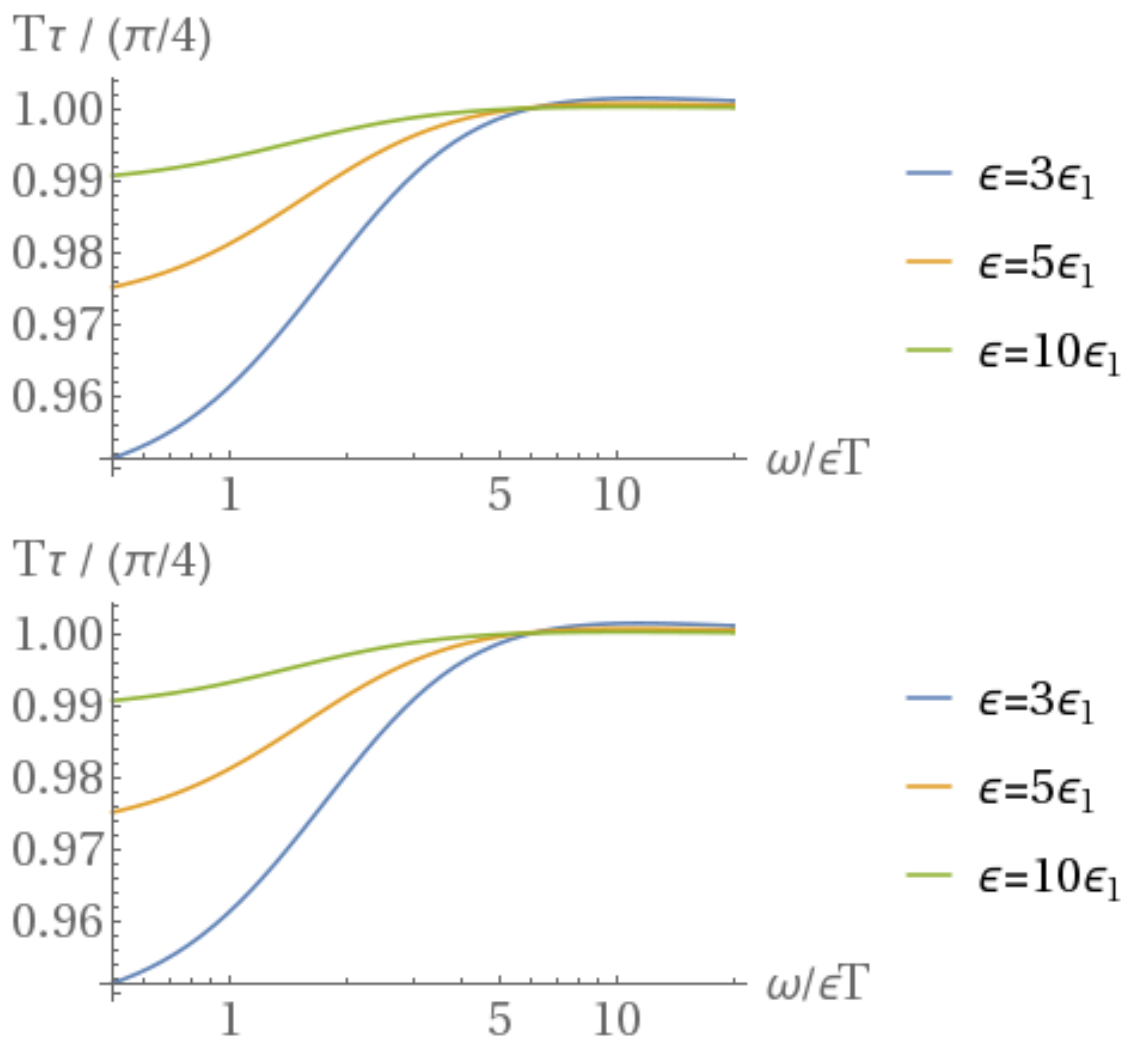


Рисунок 2.6 — Зависимость от частоты величины $T\tau(\omega)$ для двумерной (верхний рисунок) и трёхмерной (нижний рисунок) систем при $\epsilon = 3\epsilon_1$ (синий), $\epsilon = 5\epsilon_1$ (оранжевый) и $\epsilon = 10\epsilon_1$ (зелёный), даваемая уравнением (2.47)

динамика которых по большей части диссипативна, и которые тяжело изучать аналитически. Однако, мы всё равно может привести качественные аргументы в пользу того, что произведение $T\tau$ не изменяется по порядку величины, а может лишь измениться лишь численно. Во-первых, мы заметим, что при $\varepsilon \ll \omega_c$, когерентная динамика спинов пренебрежимо мала (формально, для этих спинов можно положить $\varepsilon = 0$) и единственный энергетический масштаб, определяющий динамику этих спинов, задаётся самой величиной ω_c . Симметризованная спиновая корреляционная функция тем самым принимает вид $C(t - t') = \langle \{S^+(t), S^-(t')\} \rangle = \varphi(\omega_c |t - t'|)$ причём $\varphi(z)$ затухает достаточно быстро при $z \gg 1$, и $\varphi(0) = 1$. В частотном представлении это соответствует тому, что келдышевская компонента спиновой корреляционной функции имеет вид $S_K^{(diag)}(\omega) \simeq \frac{1}{\omega_c} \tilde{\varphi}(\frac{\omega}{\omega_c})$, где $\tilde{\varphi}(z)$ является чётной функцией своего аргумента. Используя флуктуационно-диссипационную теорему, мы заключаем, что спектральный вес устроен следующим образом: $\text{Im} S_R^{(diag)}(\omega) \simeq -\frac{\omega}{\omega_c T} \tilde{\varphi}(\frac{\omega}{\omega_c})$. Используя это выражение совместно с уравнением (2.44), мы можем оценить величину параметра $T\tau$. Доля спинов, находящихся в слабых эффективных полях $\varepsilon_i \leq \omega_c$ имеет порядок $\sim \nu_0 \omega_c$. Умножая её на $\text{Im} S_R^{(diag)}(\omega)$ и используя (2.44), мы приходим к выводу $T\tau \sim \tilde{\varphi}(0) \sim 1$. Приведённая аргументация показывает, что $T\tau(\omega \ll \omega_c)$ по-прежнему даётся константой порядка единицы, которая, однако, может отличаться от значения $\pi/4$.

2.4.3

Обсудим теперь следствия негауссовых эффектов, изученных в этом разделе, на парапроводимость. Для этого нам необходимо рассмотреть ядро Q , даваемое диаграммой на рис. 2.3. В ведущем порядке достаточно рассмотреть такую же диаграмму, но с “одетыми” флуктуационными пропагаторами, которые были изучены в предыдущем разделе.

Из вычисления, проведённого в разделе 2.3.2 следует, что основной вклад в парапроводимость определяется флуктуациями параметра порядка на энергиях $\omega\tau \sim \epsilon$ с импульсом $p\xi_0 \sim \sqrt{\epsilon}$. В предыдущем разделе было показано, что диссипативная динамика спинов влияет на значение константы $T\tau(\omega)$ только

на частотах $\omega \sim \omega_c$. Таким образом, мы приходим к выводу, что перенормировка пренебрежимо мала при $\omega_c \ll \epsilon T = |T - T_c|$, что, в свою очередь, приводит к критерию применимости результата (2.33) в виде $\epsilon \geq \epsilon_1$, где ϵ_1 даётся уравнениями (2.38, 2.39).

При меньших значениях ϵ , вклад “диссипативных” спинов становится доминирующим. Однако, из вышеприведённой аргументации следует, что этот эффект не может повлиять на величину кинетического коэффициента τ сильнее численного фактора порядка единицы; тем самым мы ожидаем, что парапроводимость Асламазова-Ларкина будет качественно описываться уравнением (2.33) и при более маленьких значениях ϵ , вплоть до $\epsilon \geq \rho^{2/(4-d)}$. Остальные поправки, которые оказываются значительными при более маленьких значениях ϵ , будут разобраны в следующем разделе.

2.5

В предыдущем разделе был исследован особый вид флуктуационных поправок, который значительно влияет на кинетические свойства исследуемой системы в широком интервале температур $\epsilon \leq \epsilon_1$, где $\epsilon_1 \sim \rho^{1/2}$ для двумерных систем, и $\epsilon_1 \sim \rho^{2/3}$ для трёхмерных. С другой стороны, стандартный критерий Гинзбурга для ширины флуктуационной области в окрестности фазового перехода второго рода имеет вид $\epsilon \leq \epsilon_2 \equiv Gi \sim Z^{-\frac{2}{4-d}}$, где $Z \sim 1/\rho$ представляет собой эффективное число “взаимодействующих соседей”, см. уравнения (2.38, 2.39). Таким образом, мы заключаем, что для $d = 2, 3$, $\epsilon_2 \sim \epsilon_1^d \ll \epsilon_1$.

Ниже в этом разделе мы исследуем дополнительные поправки к гауссовому приближению из раздела 2.3, которые специфичны для сильного беспорядка, имеющегося в нашей модели; будет показано, что эти эффекты сильны только при $\epsilon \leq \epsilon_2$. А именно, мы изучим поправки к приближению $\check{\Pi} = \langle \check{S} \rangle_\epsilon$ для собственной энергетической части усреднённого по беспорядку параметра порядка $L(\omega, \mathbf{q})$, даваемого уравнением Дайсона (2.19), используя семионную диаграммную технику.

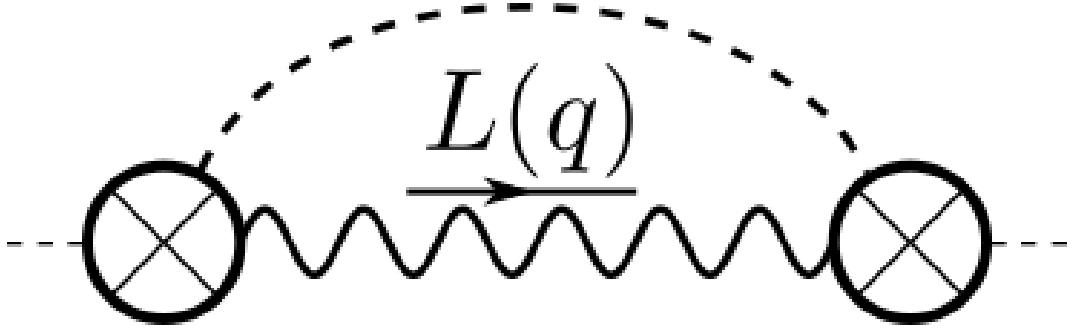


Рисунок 2.7 — Поправка к собственной энергетической части усреднённого по беспорядку пропагатора параметра порядка $\check{\Pi} - \langle \check{S} \rangle_\varepsilon$. Штрихованная “примесная линия” соответствует совместному усреднению двух спиновых корреляционных функций \check{S} по ε

2.5.1 $L(\omega, \mathbf{q})$

Локаторное разложение для зависящего от случайных величин $\{\varepsilon_i\}$ пропагатора $L(\omega, \mathbf{q})$ содержит члены вида $\check{L}^{(0)} \check{S} \check{L}^{(0)} \check{S} \dots \check{S} \check{L}^{(0)}$. Ранее мы усредняли все \check{S} в этом разложении независимо. Ведущая поправка к этому приближению содержит совместное усреднение двух локаторов \check{S} , показанное на рис. 2.7; соответствующее аналитическое выражение даётся $\langle S_R^{\alpha\mu}(\omega_1) S_R^{\nu\beta}(\omega_2) \rangle_\varepsilon$. Вычисление этого объекта, использующее формулы (2.21, 2.22, 2.23), вынесено в приложение Б.3. Для наших целей достаточно рассмотреть предел $\omega_{1,2} \rightarrow 0$, и получить:

$$\langle (S_R^{(diag)}(0))^2 \rangle_\varepsilon \approx \frac{14\zeta(3)}{\pi^2 WT} \quad (2.48)$$

Поправка к собственной энергетической части, даваемая диаграммой на рис. 2.7, оказывается диагональной в спиновом (α, β) пространстве: $\delta\Pi_R^{\alpha\beta}(\omega) = (\delta^{\alpha\beta} - n^\alpha n^\beta) \delta\Pi_R(\omega)$; она даётся следующим выражением:

$$\delta\Pi_R(\omega) = L_R(\omega) \langle (S_R^{(diag)}(0))^2 \rangle \quad (2.49)$$

Статический ($\omega = 0$) вклад в $\delta\Pi_R(\omega)$ соответствует перенормировке величины T_c и был исследован ранее, в приложении Б.1 (см. уравнение Б.12 и комментарии ниже). Частотно-зависящая часть при $\omega\tau \ll \varepsilon$ содержит сингулярность на малых ε :

$$\delta\Pi_R(\omega) - \delta\Pi_R(0) \approx -\frac{i\omega\tau}{4\pi T\xi_0^d} \times \begin{cases} \frac{14\zeta(3)}{\pi^2\epsilon}, & (2D) \\ \frac{7\zeta(3)}{\pi^2\sqrt{\epsilon}}, & (3D) \end{cases}. \quad (2.50)$$

Эта сингулярность должна сравниваться с «затравочным» зависящим от ω вкладом в $L^{-1}(\omega, \mathbf{q})$, см. уравнение (2.26). Таким образом, мы заключаем, что поправка (2.50) мала при выполнении следующего условия:

$$\begin{cases} \epsilon \gg \frac{W}{T\xi_0^2} \sim \rho, & (2D) \\ \epsilon \gg \left(\frac{W}{T\xi_0^3}\right)^2 \sim \rho^2, & (3D) \end{cases}. \quad (2.51)$$

Это условие совпадает со стандартным критерием Гинзбурга, который обсуждался в начале этого раздела.

2.5.2

При вычислении паропроводимости в разделе 2.3.2 (и при дальнейшем обсуждении в разделе 2.4.3) неявно предполагалось, что проводимость однородна в пространстве и может быть описано ядром $\sigma(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ в соотношении $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \int \sigma(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathbf{E}(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'$, даваемым теорией линейного отклика. В неупорядоченной среде, вообще говоря, проводимость пространственно флуктуирует, и ядро является независимой функцией двух координат $\sigma(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rightarrow \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. Для того, чтобы удовлетворить уравнение непрерывности для электрического тока, $\partial_\alpha j_\alpha = 0$, который теперь определяется уравнением $j_\alpha(\mathbf{r}) = \int \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}')E_\alpha(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'$, локальное электрическое поле E_α также должно флуктуировать в пространстве:

$$\delta E_\alpha(\mathbf{r}) = -\frac{1}{d\bar{\sigma}}\bar{E}_\alpha \int \delta\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}')d\mathbf{r}', \quad (2.52)$$

Как следствие [54] имеется также дополнительный вклад в среднее значение проводимости, имеющий вид:

$$\frac{\delta\sigma}{\bar{\sigma}} = -\frac{1}{d}K(r=0) \quad (2.53)$$

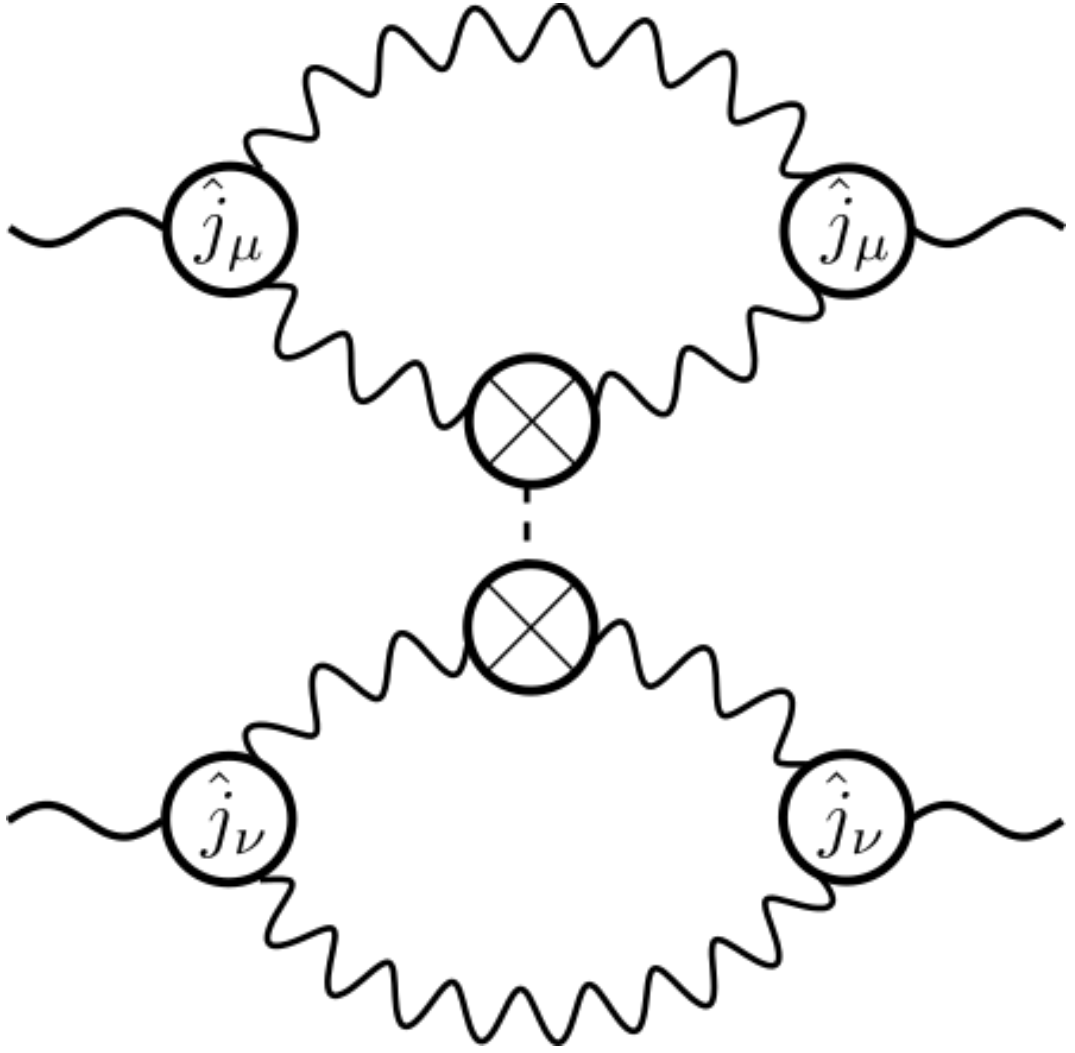


Рисунок 2.8 — Диаграмма в низшем порядке теории возмущений, определяющая пространственные флуктуации проводимости $K(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$

где корреляционная функция $K(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ определена следующим образом:

$$K(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{\bar{\sigma}^2} \int d\mathbf{x}d\mathbf{y} \langle \delta\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \delta\sigma(\mathbf{r}', \mathbf{y}) \rangle \quad (2.54)$$

Ниже мы вычислим корреляционную функцию $K(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Диаграмма, возникающая в низшем порядке теории возмущений, показана на рис. 2.8. Эта диаграмма состоит из двух частей: двух независимых петлевых интегралов, похожих на ядро Q , даваемое уравнением (2.30) и которые мы обозначим $\mathcal{R}^{ij}(\omega, \mathbf{q})$; и “примесной линии”, которая в ведущем приближении может быть взята в статическом пределе $\langle (S_R^{(diag)}(0))^2 \rangle$. Поскольку “примесь” может быть добавлена как к верхней, так и к нижней функции Грина (что соответствует замене $q \mapsto -q$ в выражении для $\mathcal{R}^{\mu\nu}(\omega, \mathbf{q})$), выражение для флуктуаций проводимости, вообще

говоря, содержит четыре члена:

$$K(\mathbf{q}) = \left\langle (S_R^{(diag)}(0))^2 \right\rangle \left[\frac{i\partial_\omega(\mathcal{R}^{ii}(\omega, \mathbf{q}) + \mathcal{R}^{ii}(\omega, -\mathbf{q}))}{d\sigma_{AL}} \right]_{\omega=0}^2 \quad (2.55)$$

Вычисление величины \mathcal{R} вынесено в приложение Б.4; используя безразмерную функцию $\mathcal{F}(\mathbf{Q} = \mathbf{q}\xi_0/\sqrt{\epsilon})$ и подставляя затравочные выражения для проводимости, даваемые уравнением (2.32), мы приходим к следующему выражению:

$$K(\mathbf{q}) = \frac{28\zeta(3)}{\pi^2 s_d^2} \frac{1}{\nu_0 T \epsilon^2} \mathcal{F}^2(\mathbf{Q}). \quad (2.56)$$

Таким образом, величина $K(r=0)$ определяет относительную величину пространственных флуктуаций проводимости. Асимптотики, даваемые выражениями (Б.27) и (Б.30) (для $d=2$ и $d=3$ соответственно) показывают, что интеграл по импульсам, определяющий $K(r=0)$, сходится, и даёт:

$$K(\mathbf{r}=0) = \frac{c_d}{\nu_0 T \epsilon^{2-d/2} \xi_0^d}, \quad (2.57)$$

с численным префактором c , численное значение для которого даётся:

$$c_d = \frac{28\zeta(3)}{\pi^2 s_d^2} \int \frac{d^d \mathbf{Q}}{(2\pi)^d} \mathcal{F}^2(\mathbf{Q}) = \begin{cases} 0.141, & (2D) \\ 0.049, & (3D) \end{cases} \quad (2.58)$$

Обсудим полученный результат. Формула Асламазова-Ларкина (2.33) применима только при условии $K(r=0) \ll 1$. Этот критерий совпадает с полученным в начале этого раздела: поправки малы покуда выполняется условие (2.51).

2.6

В этой главе было продемонстрировано, что флуктуационная проводимость, предсказанная Асламазовым и Ларкиным около 50 лет назад, устроена практически аналогично и для сверхпроводников с большой псевдощелью, и с практически нулевой одночастичной плотностью состояний. Роль одноэлек-

тронных состояний теперь выполняют локализованные электронные пары, что приводит лишь к дополнительному фактору 2 по отношению к классическому результату Асламазова и Ларкина для численных коэффициентов s_d в уравнениях (2.32,2.33). Степенная же зависимость парапроводимости от $\epsilon = \ln(T/T_c)$ сохраняется. Наши результаты были выведены в предположении что “прыжки” исходно локализованных пар происходят в большом “координационном объёме” $Z \sim \rho^{-1}$, см. уравнения (2.38,2.39).

Универсальный вид парапроводимости Асламазова и Ларкина (в особенности, в двумерных системах) даёт удобный способ экспериментального определения величины T_c в системах с существенно широкой зависимостью $R(T)$; именно таким свойством, в частности, обладают сильно неупорядоченные сверхпроводники. По этой причине, значение численного коэффициента s_d представляет интерес. Во-первых, было получено, что он не зависит от формы функции распределения энергий локализованных состояний $P(\epsilon)$, покуда её можно считать плоской на очень маленьких энергетических масштабах $\epsilon \sim T_c$. Нетривиальная структура на этом энергетическом масштабе можно возникнуть при рассмотрении обобщённой модели, включающей в себя дальнодействующее Кулоновское взаимодействие между локализованными парами вида $S_i^z U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) S_j^z$. Этот вопрос представляет интерес для будущих исследований.

Условие большой величины псевдощели $\Delta_P \gg T_c$ может оказаться слишком сильным в практических приложениях; поэтому интерес может также представлять обобщение наших результатов на промежуточный случай $\Delta_P \sim T_c$. Это делается прямолинейно, поскольку коэффициент s_d в основном определяется разложением эффективной функции распределения спинов $f(\omega) = \tanh \beta\omega$ на малых частотах. В рамках стандартной релаксационной теории Гинзбурга-Ландау [53] для неупорядоченных сверхпроводников, вместо $f(\omega)$ используется фермионная функция распределения $f(\omega) = \tanh \frac{\beta\omega}{2}$, из-за чего величина $T\tau$ оказывается в два раза меньше по сравнению с нашей задачей, см. (2.27). Для случая общего положения $\Delta_P \sim T_c$, можно использовать следующее наблюдение из приложения В статьи [8]: для произвольного значения Δ_P/T , можно использовать обобщённую функцию распределения в следующем виде:

$$f(\omega, \Delta_P) = \frac{\sinh \beta\omega}{\cosh \beta\omega + e^{-\Delta_P/T}}$$

которая интерполирует между $\tanh \frac{\beta\omega}{2}$ и $\tanh \beta\omega$ по мере увеличения отношения Δ_P/T . Как следствие, для промежуточных величин Δ_P , увеличение коэффициента s_d по отношению к результату Асламазова и Ларкина, даётся формулой $2/(1 + e^{-\Delta_P/T_c})$; это увеличение становится близким к 2 уже при относительно небольших значениях $\Delta_P/T \geq 1.5$.

Вышеизложенное обсуждение относится в первую очередь к области гауссовых флуктуаций $\epsilon \geq \epsilon_1$, даваемой соотношениями (2.38, 2.39). При меньших значениях ϵ , нелинейные поправки к динамике параметра порядка, которые обсуждались в разделе 2.4, становятся важными. Однако, мы привели аргументы, что степенной сингулярный вид зависимости $\sigma_{AL}(\epsilon)$ не затрагивается эффектами “локального шума”, хотя коэффициент s_d изменяется. По мере дальнейшего приближения к T_c , при $\epsilon \leq \epsilon_2 = Gi$, остальные флуктуационные поправки становятся большими, что делает вычисление $\sigma_{AL}(\epsilon)$ сложной задачей. Более того, в окрестности T_c , сама проводимость становится сильно пространственно неоднородной, на что указывает уравнение (2.57) — соответствующая величина $K(\mathbf{r})$, характеризующая флуктуации проводимости, оказывается большой.

Особенностью флуктуационной проводимости в системах, находящихся вблизи перехода сверхпроводник-изолятор, является то обстоятельство, что её величина может превысить “затравочную” (не связанную со сверхпроводящими флуктуациями) величину проводимости уже в области $\epsilon \geq \epsilon_1$, в которой гауссово приближение всё ещё корректно. Это связано с отсутствием в нашей модели стандартного вклада Друде в проводимость нормального состояния. Вместо него имеется вклад от туннелирования отдельных электронов между локализованными состояниями, подавленный при $T \ll \Delta_P$. Наконец, мы ещё раз подчёркиваем, что вклад Асламазова и Ларкина является единственным флуктуационным вкладом в проводимость для сверхпроводников с развитой псевдощелью. В частности, это позволяет также учесть нелинейные (по величине приложенного электрического поля) эффекты, используя подход [55] применимый для любой модели, описываемой релаксационной моделью Гинзбурга-Ландау.

3.

3.1

В предлагаемой главе исследована проблема очень сильно неупорядоченного сверхпроводника в магнитном поле $B \ll H_{c2}$ и при низких температурах. Интерес к такой постановке задачи связан с активными экспериментальными исследованиями в данной области (см. напр. обзорную статью [56]; более подробно некоторые из этих экспериментов [10; 57] обсуждаются в заключительной части этой главы). Существо изучаемой проблемы состоит в конкуренции между сильным пиннингом каждого отдельного вихря беспорядком и отталкиванием между вихрями. Сильный пиннинг здесь означает, что энергия кора вихря меняется на величину порядка самой этой энергии при сдвиге вихря на расстояние порядка размера его кора ξ . Столь сильный пиннинг возникает из-за того, что флуктуации параметра порядка в пространстве превышают его среднее значение [8]. Регулярная решетка вихрей при таких условиях не образуется, нет даже и ближнего решеточного порядка, однако плотность вихрей в среднем постоянна и задана магнитным полем с хорошей точностью. Для существования такого состояния важно, что энергия сдвиговых деформаций решетки вихрей много меньше, чем энергия деформаций сжатия (согласно [58], энергия правильной треугольной решетки лишь на 2% ниже, чем для квадратной решетки). Отсутствие даже ближнего решеточного порядка не позволяет строить теорию известными методами, восходящими к работе А.И.Ларкина [59] (см. также статью [60] и обзоры [61–63]), поскольку все они рассматривают потенциал дефектов как возмущение по сравнению с энергией упругой деформации решетки вихрей (в модели коллективного слабого пиннинга), либо же рассматривают пиннинг отдельных вихрей без учета межвихревого взаимодействия; оба эти подхода неприменимы в интересующем нас случае. Отдельно следует также упомянуть теорию сильного пиннинга [64–66], где рассматриваются сильные примеси, а межвихревое взаимодействие учитывается в рамках теории упругости вихревой решетки: это оказывается возможным в силу предположения о

малости концентрации сильных дефектов. Отличие нашей ситуации в том, что дефекты сильные, и концентрация их велика.

Наша задача состоит в построении теории вихревого стекла в ситуации, которая в значительной мере напоминает “кулоновское стекло” модели кулоновской щели Эфроса-Шкловского [67; 68], но в ситуации, когда взаимодействие частиц (в данном случае - вихрей) является логарифмическим отталкиванием, $U(r) = U_0 \ln \frac{a}{r}$, а не обычным кулоновским. Постоянная $U_0 = \frac{\Phi_0^2 d}{8\pi^2 \lambda^2}$ для пленки сверхпроводника толщиной d много меньше, чем лондоновская глубина проникновения λ . Строго говоря, на самых больших расстояниях $r \geq \lambda_{2D} = 2\lambda^2/d$ энергия взаимодействия вихрей описывается уже не логарифмическим законом, а убывает $\propto 1/r$, однако мы будем интересоваться пределом очень больших отношений $\lambda/d \geq 100$ (легко реализуемым в тонких пленках сильно грязных сверхпроводников), когда конечность величины λ_{2D} не играет никакой роли.

Феноменологический подход к задаче о вихрях в пленке, подобный использованному в [67; 68], был развит в работе [69], см. также [70]. Мы здесь развиваем другой подход, опирающийся на работу Мюллера и Иоффе [71] (см. также ряд последующих работ [72; 73]), где задача о развитии кулоновской щели изучалась методами теории спиновых стекол, и предсказывался фазовый переход в неэргодическое состояние с нарушенной репличной симметрией. Однако, в отличие от работы [71] и последующих за ней, мы не будем закладывать в нашу теорию предположения о возможности представить ее в полностью локальном виде, не содержащем пространственных зависимостей матричных полей, описывающих стекольное упорядочение.

3.2

Мы сделаем модельное приближение о том, что вихри могут занимать положения дискретной регулярной решётки с шагом a . Описывать вихревую конфигурацию мы будем набором «чисел заполнения» каждого узла $\{n_r\}$. Поскольку к системе приложено магнитное поле, и тем самым имеется конечная концентрация вихрей $\langle n_r \rangle \equiv K = Ba^2/\Phi_0$, мы будем пренебрегать возможностью возникновения антивихрей в системе, а также вихрей с зарядом $n_r > 1$.

В рамках модели эту концентрацию мы будем фиксировать введением химического потенциала μ . Наконец, беспорядок в нашей модели будет учитываться в виде случайной энергии координат вихря u_r с коррелятором $\overline{u_r u_{r'}} = W^2 \delta_{rr'}$. Это приводит нас к следующему гамильтониану:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{r,r'} \delta n_r J_{rr'} \delta n_{r'} + \sum_r (u_r - \mu) \delta n_r, \quad (3.1)$$

где $\delta n_r \equiv n_r - K$ и $J_{rr'} = U_0 \ln \frac{L}{|r-r'|}$. Величина беспорядка предполагается большой, $W \gg U_0$. Фактически в рассматриваемых сверхпроводниках $W \sim U_0$; в конце главы мы поясним, почему модельное предположение $W \gg U_0$ не влияет на наши основные результаты. Усредняя свободную энергию по беспорядку при помощи метода реплик, и проводя преобразование Хаббарда-Стратановича для нелокального члена при помощи вспомогательного поля φ (имеющего смысл дуальной переменной к сверхпроводящей фазе), мы приходим к следующему выражению для статсуммы:

$$\begin{aligned} \overline{Z^n} = & \int \mathcal{D}\varphi \exp \left(-\frac{1}{2} \varphi (\beta \hat{J})^{-1} \varphi \right) \times \\ & \times \prod_r \text{Tr}_v \exp \left(\sum_a (\beta \mu + i\varphi_r^a) \delta n_r^a + \frac{\beta^2 W^2}{2} \delta n_r \hat{\mathcal{I}} \delta n_r \right), \quad (3.2) \end{aligned}$$

где обозначено $\text{Tr}_v \equiv \sum_{n_r=0,1}$; латинские индексы отвечают за репличное пространство $a = 1, \dots, n$ ($n \rightarrow 0$), матрица $\mathcal{I}^{ab} = 1$ описывает замороженный беспорядок, одинаковый для всех реплик, а взаимодействие $\hat{J} = \delta^{ab} J_{rr'}$ диагонально по репликам. Отметим, что в такой постановке «вихревая» часть действия стала сугубо локальной.

Мы будем описывать стекольное состояние при помощи диагональной в пространстве (но зависящей от координат) матрицы \mathcal{G}_r^{ab} описывающей корреляции медленной в пространстве части билинейной комбинации полей $= -\varphi_r^a \varphi_r^b$. Стекольный переход будет соответствовать спонтанному нарушению репличной симметрии в этой матрице. Введём параметр порядка при помощи тождества (интегрирование по \mathcal{Q} происходит вдоль мнимой оси):

$$1 = \int \mathcal{D}\mathcal{G} \prod_r \delta(\mathcal{G}_r^{ab} + \varphi_r^a \varphi_r^b) = \int \mathcal{D}\mathcal{G} \mathcal{D}\mathcal{Q} \exp \left(-\frac{1}{2} \text{Tr} (\hat{\mathcal{G}} \hat{\mathcal{Q}}) - \frac{1}{2} \varphi \hat{\mathcal{Q}} \varphi \right) \quad (3.3)$$

Флуктуации поля φ описывается пропагатором с длиной экранировки $l \sim a\sqrt{W/U_0}$. Разумно предполагать, что в стекольной фазе и вблизи перехода, флуктуации параметра порядка $\hat{\mathcal{G}}_r$ будут скоррелированы на гораздо больших длинах.

Чтобы учесть взаимодействие между числами заполнения вихрей $n_{\mathbf{r}}^a$ и полем $\varphi_{\mathbf{r}}^a$, мы разложим $\exp(i \sum_a \varphi_{\mathbf{r}}^a \delta n_{\mathbf{r}}^a)$ в ряд Тейлора, и запишем произвольный член в импульсном представлении:

$$e^{i \sum_a \varphi_{\mathbf{r}}^a \delta n_{\mathbf{r}}^a} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{q}_1+\dots+\mathbf{q}_k=0} \frac{i^k}{k!} \delta n_{\mathbf{r}}^{a_1} \dots \delta n_{\mathbf{r}}^{a_k} \varphi_{\mathbf{q}_1} \dots \varphi_{\mathbf{q}_k} \quad (3.4)$$

Мы хотим описать флуктуации мягких мод параметра порядка $\hat{\mathcal{G}}_r$ с импульсами, много меньшими чем типичные импульсы для поля φ , $q_i \sim l^{-1}$. Основной вклад в такие флуктуации будет даваться теми членами в выражении (3.4), в которых какие-то пары импульсов аномально близки, $|\mathbf{q}_i + \mathbf{q}_j| \ll l^{-1}$ — такие «спаривания» мы будем заменять на $\mathcal{G}_{\mathbf{q}_i+\mathbf{q}_j}^{a_i a_j}$ (имея в виду малость суммарного импульса). В таком случае, для выделения основного вклада в динамику мягких мод, нам необходимо рассмотреть все возможные «спаривания» полей φ в этом выражении. Члены с нечётными k в таком случае описывают взаимодействие мягких мод и массивных, и в ведущем приближении могут быть выброшены. Это позволяет нам свести взаимодействие поля $\varphi(\mathbf{r})$ и вихревых степеней свободы к эффективному локальному члену взаимодействия вихрей вида $\delta n_{\mathbf{r}} \hat{\mathcal{G}}_r \delta n_{\mathbf{r}}/2$ в экспоненте.

Наконец, беря оставшийся гауссов интеграл по $\varphi(\mathbf{r})$, мы приходим к следующей теории поля, которая описывает флуктуации мягких мод матричного параметра порядка:

$$\overline{Z^n} = \int \mathcal{D}\mathcal{G}\mathcal{D}\mathcal{Q} \exp\left(-nS[\hat{\mathcal{G}}, \hat{\mathcal{Q}}]\right) \quad (3.5)$$

$$nS[\hat{\mathcal{G}}, \hat{\mathcal{Q}}] = \frac{1}{2} \text{Tr}(\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{Q}}) + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln(1 + \beta \hat{J}\hat{\mathcal{Q}}) + \beta n \sum_{\mathbf{r}} F_{\mathbf{V}}[\hat{\mathcal{G}}_{\mathbf{r}}] \quad (3.6)$$

где локальная свободная энергия определяется следующим образом:

$$e^{-\beta n F_{\mathbf{V}}[\hat{\mathcal{G}}]} = \text{Tr}_{\mathbf{V}} \exp\left(\frac{1}{2} \delta n (\beta^2 W^2 \hat{\mathcal{I}} + \hat{\mathcal{G}}) \delta n + \beta \mu \sum_a \delta n^a\right) \quad (3.7)$$

Мы начнём анализ действия (3.6) с исследования пространственно одно-родных седловых точек:

$$\frac{\delta S}{\delta \hat{\mathcal{G}}} = \frac{1}{2}(\hat{\mathcal{Q}} - \hat{Q}) = 0, \quad Q_{ab} = \langle \delta n_a \delta n_b \rangle_{\mathcal{G}}, \quad (3.8)$$

где \hat{Q} — локальная корреляционная функция плотности, сосчитанная в локальной модели (3.7).

Второе уравнение, в полном согласии с определением матрицы \mathcal{G} , даёт:

$$\frac{\delta S}{\delta \hat{\mathcal{Q}}} = \frac{1}{2}(\hat{\mathcal{G}} + \hat{G}_{rr}) = 0, \quad \hat{G} = ((\beta \hat{J})^{-1} + \hat{\mathcal{Q}})^{-1} \quad (3.9)$$

Для того, чтобы прояснить физический смысл матрицы \hat{G} , рассмотрим результат добавления пары инфинитезимальных вихрей с зарядами $q_{1,2} \ll 1$ в точки $\mathbf{r}_{1,2}$ в репликах $a_{1,2}$. Такая операция описывается следующим возмущением:

$$V = \sum_{\mathbf{r}} (q_1 J_{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}} \delta n_{\mathbf{r}}^{a_1} + q_2 J_{\mathbf{r}_2 \mathbf{r}} \delta n_{\mathbf{r}}^{a_2}) + q_1 q_2 J_{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2} \quad (3.10)$$

Рассмотрим отклик свободной энергии на такое возмущение — этот отклик имеет физический смысл энергии взаимодействия двух вихрей. После преобразования Хаббарда-Стратановича, к формуле (3.2) в экспоненте будет поправка к действию $-i(q_1 \varphi_{\mathbf{r}_1}^a + q_2 \varphi_{\mathbf{r}_2}^b)$. Соответственно, после взятия гауссового интеграла по φ в выражении (3.6) возникнет поправка к действию, имеющая вид:

$$\delta S = \frac{1}{2} (q_1^2 G_{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1}^{a_1 a_1} + q_2^2 G_{\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_2}^{a_2 a_2}) + q_1 q_2 G_{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2}^{a_1 a_2} \quad (3.11)$$

Таким образом, матрица \hat{G} (а точнее, её среднее значение) может быть отождествлена с перенормированным взаимодействием двух «инфинитезимальных» вихрей:

$$U_{a_1 a_2}^{(e)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv \left. \frac{\partial^2 F}{\partial q_1 \partial q_2} \right|_{q_{1,2}=0} = T \langle G_{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2}^{a_1 a_2} \rangle \quad (3.12)$$

Наконец, можно также сразу записать уравнение, определяющее химический потенциал:

$$\left\langle \frac{\partial S}{\partial (\beta \mu)} \right\rangle = \sum_a \langle \delta n^a \rangle_{\mathcal{G}} = 0 \quad (3.13)$$

Поскольку параметр W предполагается самым большим в задаче, то химический потенциал определяется в первую очередь «затравочной» плотностью состояний $\nu(u) = \exp(-u^2/2W^2)/\sqrt{2\pi}W$ и следующим уравнением:

$$1 - 2K = \int \nu(u) du \tanh \frac{\beta(u - \mu)}{2} \approx \int \nu(u) du \cdot \text{sign}(u - \mu) \quad (3.14)$$

откуда следуют асимптотики:

$$\mu \approx -W \cdot \begin{cases} \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{2} - K\right), & |K - 1/2| \ll 1 \\ \left(2 \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}K}\right)^{1/2}, & K \ll 1 \end{cases} \quad (3.15)$$

3.3

Мы начнём исследование седловых уравнений с высокотемпературной фазы, которая соответствует реплично-симметричным решениям $\mathcal{G}_{ab} = \mathcal{G}_0\delta_{ab} + \mathcal{G}_1\mathcal{I}_{ab}$ (и аналогично для \mathcal{Q}). Сразу отметим, что поскольку вихревые переменные δn подобны изинговским спинам (принимают два значения), то для них имеет место тождество $\delta n^2 = \delta n(1 - 2K) + K(1 - K)$ (при $K = 1/2$ оно вырождается в $s^2 = 1/4$ для буквально изинговских спинов). Как следствие, диагональная часть \mathcal{G}_0 попросту перенормирует химический потенциал $\mu \mapsto \mu + T\mathcal{G}_0 \left(\frac{1}{2} - K\right)$, а недиагональная — беспорядок $W \mapsto \sqrt{W^2 + T^2\mathcal{G}_1}$. Оба этих эффекта будут незначительны, поскольку $\mu \sim W \gg T, U_0$.

Тогда получаем:

$$\mathcal{Q}_0 = \int \frac{\nu(u) du}{\left(2 \cosh \frac{\beta(u - \mu)}{2}\right)^2} \approx T\nu_0. \quad (3.16)$$

$$\mathcal{Q}_1 = K(1 - K) - \mathcal{Q}_0. \quad (3.17)$$

Отметим, что в силу большого W , плотность состояний $\nu(u)$ может быть заменена на константу:

$$\nu_0 \equiv \nu(\mu) \approx \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi W}}, & |K - 1/2| \ll 1 \\ \frac{K}{W} \left(2 \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi K}}\right)^{1/2}, & K \ll 1 \end{cases} \quad (3.18)$$

Как следствие, в пропагаторе $G_{ab}(\mathbf{k}) = G_0(\mathbf{k})\delta_{ab} + G_1(\mathbf{k})\mathcal{I}_{ab}$ возникает экранировка:

$$G_0(\mathbf{k}) = \frac{2\pi\beta U_0}{k^2 + l^{-2}}, \quad G_1(\mathbf{k}) = -\mathcal{Q}_1 G_0^2(\mathbf{k})/a^2 \quad (3.19)$$

где $l = a(2\pi\nu_0 U_0)^{-1/2} \sim a\sqrt{W/U_0}$. Наконец, параметр порядка принимает следующее значение:

$$\mathcal{G}_0 \approx -\frac{\beta U_0}{2} \ln \frac{1}{\nu_0 U_0}, \quad \mathcal{G}_1 \approx \frac{\beta^2 U_0}{\nu_0} K(1 - K) \quad (3.20)$$

Для исследования устойчивости реплично-симметричного решения и нахождения температуры замерзания, нам необходимо изучить гессиан — квадратичное разложение действия (3.6):

$$\begin{aligned} nS^{(2)}[\delta\hat{\mathcal{G}}, \delta\hat{\mathcal{Q}}] &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\delta\hat{\mathcal{G}}\delta\hat{\mathcal{Q}}) - \frac{1}{4} \text{Tr}(\hat{G}\delta\hat{\mathcal{Q}}\hat{G}\delta\hat{\mathcal{Q}}) \\ &\quad - \frac{1}{8} \sum_r \mathcal{Q}_{(a_1 b_1)(a_2 b_2)} \delta\mathcal{G}_r^{a_1 b_1} \delta\mathcal{G}_r^{a_2 b_2} \end{aligned} \quad (3.21)$$

где введена корреляционная функция:

$$\mathcal{Q}_{(a_1 b_1)(a_2 b_2)} \equiv \langle \delta n_{a_1} \delta n_{b_1} \delta n_{a_2} \delta n_{b_2} \rangle_{\mathcal{G}} - \langle \delta n_{a_1} \delta n_{b_1} \rangle_{\mathcal{G}} \langle \delta n_{a_2} \delta n_{b_2} \rangle_{\mathcal{G}} \quad (3.22)$$

По мере понижения температуры, сингулярность возникает в так называемой репликонной моде. Эта мода соответствует линейному подпространству матриц с нулевыми диагональными элементами: $\delta\mathcal{G}_{aa} = 0$ и $\sum_a \delta\mathcal{G}_{ab} = 0$. Действие, описывающее репликонные флуктуации сводится к следующему:

$$nS^{(2)} \approx \int \frac{(d\mathbf{q})}{4a^2} \text{tr} \begin{pmatrix} \delta\hat{\mathcal{G}}_{\mathbf{q}} & \delta\hat{\mathcal{Q}}_{\mathbf{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathcal{Q}_{22} & 1 \\ 1 & -\mathcal{B}_2(\mathbf{q}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\hat{\mathcal{G}}_{-\mathbf{q}} \\ \delta\hat{\mathcal{Q}}_{-\mathbf{q}} \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

где символ tr отвечает следу лишь по репличным индексам; а также введены обозначения:

$$\mathcal{B}_2(\mathbf{q}) = \int (d\mathbf{k}) G_0(\mathbf{k}) G_0(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \approx \pi(\beta U_0 l)^2 (1 - q^2 l^2 / 6) \quad (3.24)$$

$$Q_{22} = \int \frac{\nu(u) du}{\left(2 \cosh \frac{\beta(u-\mu)}{2}\right)^4} \approx T \nu_0 / 6 \quad (3.25)$$

Квадратичное разложение (3.23) соответствует лестничному суммированию диаграммного ряда для четырёхточечной функции Грина поля φ . Из действия (3.23) следуют пропагаторы:

$$\left\langle \left\langle \mathcal{G}_r^{ab} \mathcal{G}_{r'}^{a'b'} \right\rangle \right\rangle_{\mathbf{q}} \approx \frac{12\beta a^2 / \nu_0}{\tau + q^2 l^2 / 6} P_{bb'}^{aa'}, \quad (3.26)$$

$$\left\langle \left\langle \mathcal{Q}_r^{ab} \mathcal{Q}_{r'}^{a'b'} \right\rangle \right\rangle_{\mathbf{q}} \approx \frac{a^2 \nu_0 T^2 / 3T_c}{\tau + q^2 l^2 / 6} P_{bb'}^{aa'}, \quad (3.27)$$

где введена температура замерзания $T_c \equiv U_0 / 12$; при этой температуре величина $\tau \equiv T / T_c - 1$ меняет знак, а в теории (3.23) возникает неустойчивость по отношению к спонтанному нарушению репличной симметрии. Тензор $P_{bb'}^{aa'}$ представляет собой проектор на репликонную моду.

Как показано в приложении B.1, корреляционная функция $\langle\langle \mathcal{Q}\mathcal{Q} \rangle\rangle$ имеет наглядный физический смысл: она представляет собой длинноволновую асимптотику среднеквадратичной флуктуации поляризуемости:

$$\overline{\langle \delta n_r \delta n_{r'} \rangle^2} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n(n-1)} \sum_{a \neq b} \left\langle \left\langle \hat{\mathcal{Q}}_r^{ab} \hat{\mathcal{Q}}_{r'}^{ab} \right\rangle \right\rangle \quad (3.28)$$

Наконец, можно убедиться, что учёт репличной структуры проектора на репликонную моду даёт дополнительный фактор $\lim_{n \rightarrow 0} P_{bb}^{aa} / n(n-1) = 3/2$ к выражению (3.27).

В окрестности перехода при $\tau \ll 1$, квадратичная часть действия (3.23) приближённо диагонализуется следующим преобразованием:

$$\begin{pmatrix} \hat{\Psi} \\ \hat{\Phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 Q_{22} \\ 1/2 & -1/2 Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \hat{\mathcal{G}} \\ \delta \hat{\mathcal{Q}} \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

При этом мода Ψ оказывается мягкой, а мода Φ обладает щелью в спектре и должна быть отброшена. Проводя разложение функционала по $\hat{\Psi}$, мы приходим (вывод приведен в Приложении В.2) к следующему функционалу Гинзбурга-Ландау:

$$nS[\hat{\Psi}] = \nu_0 T_c \left(\frac{1}{24} \text{Tr}(\tau \hat{\Psi}^2 + (\nabla \hat{\Psi})^2 l^2 / 6) - \frac{1}{2160} \left(7 \text{Tr} \hat{\Psi}^3 + 6 \sum_{ab,r} \Psi_{ab,r}^3 \right) - \frac{1}{2016} \sum_{ab,r} \Psi_{ab,r}^4 \right) \quad (3.30)$$

Несмотря на наличие в задаче формально большого радиуса взаимодействия $l \gg a$, все коэффициенты при нелинейных членах одного порядка $\sim \nu_0 T_c \sim U_0/W$. Как следствие, в полученной теории Гинзбурга-Ландау отсутствует малый параметр, и область Гинзбурга, где флуктуационные эффекты сильны, имеет ширину $\text{Gi} = O(1)$, так что область применимости теории среднего поля в окрестности точки перехода отсутствует. Этот же вывод относится и к трехмерному аналогу той же задачи, который был исследован в работе [71]. Поэтому мы не будем останавливаться на окрестности T_c и сразу перейдем к области низких температур $T \ll T_c$, где флуктуационные эффекты подавлены.

3.4

Соотношение между коэффициентами при двух кубических членах действия (3.30), $c_1/c_2 = 6/7 < 1$, предсказывает непрерывное нарушение репличной симметрии в духе схемы Паризи [74], в то время как теории, в которых это отношение > 1 , описываются одноступенчатым нарушением (1-RSB) репличной симметрии [75]. Имея в виду, что в нашей задаче отношение c_1/c_2 довольно близко к единице, мы попробуем ограничиться 1-RSB и покажем, что полученное решение является очень хорошим приближением. В рамках такой схемы

$$\mathcal{G}_{ab} = \mathcal{G}_0 \delta_{ab} + \mathcal{G}_1 \mathcal{R}_{ab} + \mathcal{G}_2 \mathcal{I}_{ab} \quad (3.31)$$

$$\mathcal{Q}_{ab} = \mathcal{Q}_0 \delta_{ab} + \frac{1}{m} (\mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}_0) \mathcal{R}_{ab} + \mathcal{Q}_2 \mathcal{I}_{ab} \quad (3.32)$$

Матрица $\mathcal{R}_{ab} = \delta_{[a/m],[b/m]}$ (где $[\dots]$ обозначает целую часть) представляет собой блочно-диагональную матрицу, в которой диагональные блоки размера $m \times m$ заполнены единицами, а вне-диагональные блоки — нулями. В репличном пределе $n \rightarrow 0$ параметр $m \in (0,1)$ становится дополнительным вариационным параметром теории. Функция Грина \hat{G} , см. ур.(3.9), параметризуется аналогично:

$$G_{ab}(\mathbf{k}) = G_0(\mathbf{k}) \delta_{ab} + \frac{1}{m} (G_1(\mathbf{k}) - G_0(\mathbf{k})) \mathcal{R}_{ab} + G_2(\mathbf{k}) \mathcal{I}_{ab} \quad (3.33)$$

при этом:

$$G_{0,1}(\mathbf{k}) = \frac{2\pi\beta U_0}{k^2 + l_{0,1}^{-2}}, \quad G_2(\mathbf{k}) = -\mathcal{Q}_2 G_1^2(\mathbf{k})/a^2 \quad (3.34)$$

где введены две различные длины экранировки $l_{0,1} = a(2\pi\beta U_0 \mathcal{Q}_{0,1})^{-1/2}$. Тогда первая серия седловых уравнений следует из (3.9):

$$\begin{cases} \mathcal{G}_0 & \approx -\beta U_0 \ln(l_0/a) \approx \beta U_0 \ln(\beta U_0 \mathcal{Q}_0)/2 \\ \mathcal{G}_1 & = \beta U_0 \ln(l_0/l_1)/m = \beta U_0 \ln(\mathcal{Q}_1/\mathcal{Q}_0)/2m \\ \mathcal{G}_2 & = \pi \mathcal{Q}_2 (\beta U_0 l_1/a)^2 = \beta U_0 \mathcal{Q}_2/2\mathcal{Q}_1 \end{cases} \quad (3.35)$$

Второй набор седловых уравнений, следующих из (3.8) с учётом $W \gg U_0$, может быть выражен (вывод приведен в приложении B.3) через вспомогательную безразмерную функцию $f_v(m, \mathcal{G}_1)$:

$$\begin{cases} \mathcal{Q}_0 & = \frac{\nu_0 T}{1-m} \partial f_v / \partial \mathcal{G}_1 \\ \mathcal{Q}_1 & = \nu_0 T \\ \mathcal{Q}_2 & = K(1-K) + \left(\frac{1}{m} - 1\right) \mathcal{Q}_0 - \frac{1}{m} \mathcal{Q}_1 \end{cases}, \quad (3.36)$$

а сама функция определяется следующим образом:

$$f_v(m, \mathcal{G}_1) = \frac{2}{m} \int dz \left(\ln \Xi(z, m, \mathcal{G}_1) - m \ln 2 \cosh \frac{z}{2} - \frac{m^2 \mathcal{G}_1}{8} \right) \quad (3.37)$$

$$\Xi(z, m, \mathcal{G}_1) = \int \frac{dy e^{-y^2/2\mathcal{G}_1}}{\sqrt{2\pi\mathcal{G}_1}} \left[2 \cosh \frac{y-z}{2} \right]^m \quad (3.38)$$

Последнее уравнение в (3.36) - тривиальное следствие того, что диагональные элементы фиксированы соотношением $Q_{aa} = K(1-K)$; второе уравнение утверждает, что длина экранировки l_1 совпадает с таковой в реплично-симметричной фазе. Наконец, система уравнений замыкается, если добавить условие экстремума действия по m , которое, с учётом остальных седловых уравнений, может быть записано в следующей форме:

$$-\frac{6T_c}{mT} \left(1 - \frac{1}{1-m} \frac{\partial f_v}{\partial \mathcal{G}_1} \right) + \mathcal{G}_1 \frac{\partial f_v}{\partial \mathcal{G}_1} - m \frac{\partial f_v}{\partial m} = 0 \quad (3.39)$$

Отметим, что среди уравнений (3.35, 3.36, 3.39) в действительности нетривиальные — лишь уравнения на (m, \mathcal{G}_1, Q_0) .

При низких температурах система уравнений (3.35, 3.36, 3.39) допускает (вывод этого утверждения содержится в Приложении В.3.1) следующее решение:

$$m \approx 1.09 (T/T_c), \quad \mathcal{G}_1 \approx 61.0 (T_c/T)^2 \quad (3.40)$$

$$Q_0 \approx 1.43 \cdot 10^{-5} \nu_0 T \quad (3.41)$$

3.5

Как было показано ранее (ур. (3.12)), матрица \hat{G} представляет собой фактически энергию взаимодействия двух внесённых в систему вихрей. Из теории спиновых стёкол [74] известно, что нарушение репличной симметрии физически соответствует нарушению эргодичности и зависимость состояния системы от её предыстории. В частности, для подобных возмущений, как правило, выделяют два различных протокола: так называемое «охлаждение в нулевом поле» (Zero Field Cooling, ZFC), что соответствует внесению в систему пары вихрей перехода в стекольное состояние, и «охлаждение в поле» (Field Cooling, FC), что соответствует внесению в системы пары вихрей её замерзания. В

репличной технике это соответствует следующим двум функциям отклика:

$$U_{\text{ZFC}}^{(e)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \lim_{b \rightarrow a} \left[U_{aa}^{(e)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - U_{ab}^{(e)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \right] = TG_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (3.42)$$

$$U_{\text{FC}}^{(e)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{n} \sum_{ab} U_{ab}^{(e)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = TG_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (3.43)$$

Чрезвычайная малость (см. (3.41)) величины \mathcal{Q}_0 и соотношение (3.34) приводит к выводу об очень большой длине экранировки для ZFC-отклика в замёрзшей фазе $l_0 \approx 260l_1$ (напомним, l_1 фактически совпадает с длиной экранировки в высокотемпературной фазе). В почти любой экспериментальной ситуации такую величину l_0 можно считать бесконечной. Как следствие, при низких температурах $T \ll T_c$ фактически восстанавливается логарифмическое взаимодействие между вихрями, и эта фаза обладает конечной сверхтекучей плотностью:

$$\rho_{\text{ZFC}}^{(s)} = \frac{T}{4\pi^2} \lim_{k \rightarrow 0} k^2 G_0(\mathbf{k}) \simeq \frac{U_0}{2\pi} \quad (3.44)$$

Важной физической величиной является функция распределения $P(u)$ локального потенциала для отдельного вихря. Подробное вычисление функции распределения при низких температурах вынесено в Приложение В.3.2; приведём тут приближённый результат, работающий при низких температурах:

$$P\left(h \equiv \frac{u - \tilde{\mu}}{T_c}\right) \approx \nu_0 \cdot \frac{1}{2} \text{erfc}(3.03 - 0.09|h|). \quad (3.45)$$

При низких температурах в этой величине возникает щель. Полуширина щели $\sim 30T_c = 2.5U_0$, а плотность состояний в щели проваливается хоть и не до нуля, но до значений, имеющих порядок $\sim 10^{-5}$. Именно такая малая плотность состояний и приводит к столь малому значению \mathcal{Q}_0 (ур. (3.41)), которая выражается через неё следующим образом:

$$\mathcal{Q}_0 = \int \frac{P(u) du}{\left(2 \cosh \frac{\beta(u - \tilde{\mu})}{2}\right)^2} \approx TP_0, \quad P_0 \equiv P(\tilde{\mu}). \quad (3.46)$$

Последнее равенство учитывает то обстоятельство, что плотность состояний на масштабах $|u - \tilde{\mu}| \sim T$ может считаться постоянной.

Сама низкотемпературная фаза в приближении 1-RSB оказывается неустойчивой — репликонная мода, отвечающая дальнейшему нарушению репличной симметрии, оказывается отрицательной. Однако, формулы (3.23-3.27) оказываются пригодными и для описания репликонной моды при низких температурах, только лишь с тем отличием, что длину экранировки l необходимо заменить на l_0 , а значение ν_0 — на её перенормированное значение P_0 . Это связано с тем, что хотя функция распределения и имеет глубокий провал, но его характерный масштаб - порядка $30T_c$, и на интересующих нас масштабах $\sim T$ функция распределения с хорошей точностью может считаться константой. В частности, при $T \ll T_c$ величина $\tau \equiv T/T_c - 1 \approx -1$, и поэтому мода $q = 0$ действительно неустойчива. Однако, из-за того что величина $l_0 = a/\sqrt{2\pi\beta U_0 Q_0}$ содержит большой параметр ~ 250 , фазовый объём неустойчивых мод с $q \sim 1/l_0$ оказывается очень мал. Поэтому естественно ожидать, что сделанное тут приближение описывает систему с хорошей точностью.

Энтропия в приближении 1-RSB при произвольной температуре может быть записана в следующем виде:

$$S = \nu_0 T \left[f_V(m, \mathcal{G}_1) + \frac{1}{2} m \frac{\partial f_V}{\partial m} - \mathcal{G}_1 \frac{\partial f_V}{\partial \mathcal{G}_1} + \frac{\pi^2}{3} \right] - 3\beta T_c Q_0 \quad (3.47)$$

При низких температурах поведение энтропии разобрано в приложении B.3.3; сразу приведём результат. Энтропия при нулевой температуре хоть и получается отрицательная, но в действительности численно она очень мала (в меру малости плотности состояний):

$$S(T = 0) = -3\beta T_c Q_0 \approx -4.29 \cdot 10^{-5} \nu_0 T_c \quad (3.48)$$

Фазовый переход замерзания вихревого стекла может быть рассмотрен также совсем иным образом, как задача о статистической механике частицы в логарифмически коррелированном случайном потенциале [76]. Действительно, хотя «затравочный» случайный потенциал коррелирован локально, но эффективный случайный потенциал, который чувствует отдельный вихрь, имеет вид:

$$u_e(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}) + \sum_{\mathbf{r}'} J_{\mathbf{r}\mathbf{r}'} \delta n_{\mathbf{r}'}, \quad (3.49)$$

и его флуктуация на масштабах $l_0 \gg r \gg l_1$ может быть оценена (с использованием (3.34) и (3.40)) как:

$$\overline{\langle u_e(\mathbf{r}) - u_e(0) \rangle^2}_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \gg l_1} = \frac{2(1-m)}{m} T^2 (G_0(\mathbf{r}) - G_0(0)) \approx 11T_c^2 \ln \frac{r}{a}, \quad T \ll T_c \quad (3.50)$$

Критерий замерзания [76], согласно которому система находится в замёрзшем состоянии при $T < \sqrt{5.5T_c^2} \propto T_c$, подтверждает наш вывод о реализации стекольного состояния при $T \ll T_c$.

3.6

Развитая теория применима (качественно) к экспериментальным результатам [10; 57] где исследовались очень сильно неупорядоченные сверхпроводящие пленки InO_x и MoGe . В работе [57] измерялась кинетическая индуктивность L_K пленки на низкой частоте в широком диапазоне магнитных полей и температур; показано, что граница существования сверхпроводящего состояния со сверхтекучей плотностью $\rho_s \propto 1/L_K > 0$ определяется условием, близким к критерию перехода Березинского-Костерлица-Таулеса, т.е. $\rho_s/T_c \approx \text{const}$. В работе [10] исследовался критический ток j_c пленок InO_x при $T \ll T_c$ и магнитных полях близких к верхнему критическому полю. Оказалось, что зависимость $j_c(B)$ близка к “среднеполевому” результату $j_c(B) \propto (H_{c2} - B)^{3/2}$. В работе [10] были приведены качественные аргументы, объясняющие такое поведение. Главное, о чем говорят эксперименты [10; 57] - это наличие сверхтекучей плотности ρ_s и критического тока j_c в сильном магнитном поле, означающее, что плотная система вихрей в 2D системе находится в стекольном состоянии. Теории такого состояния ранее не существовало. В данной главе мы впервые предложили последовательный аналитический подход в описанию такого стекла.

Мы использовали модельное предположение об очень сильном локальном беспорядке, $W \gg U_0$. Фактически в рассматриваемых системах в области слабых магнитных полей $B \ll H_{c2}$ величина беспорядка $W \sim 0.5U_0$. Снятие требования $W \gg U_0$ не повлияет на наши основные результаты для стекольной фазы.

Это следует из большой величины (см.(3.45)) “щели” в функции распределения $P(h)$ локальных энергий пиннинга, имеющей полуширину $30T_c \approx 2.5U_0$. Кроме того (см. [60]), с приближением B к H_{c2} энергия пиннинга отдельных вихрей падает как $1 - B/H_{c2}$, в то время как энергия их взаимодействия - как $(1 - B/H_{c2})^2$, что еще увеличивает отношение W/U_0 .

Формально говоря, полученное нами 1-RSB решение является неустойчивым, что указывает на необходимость развития теории с полной непрерывной схемой Паризи. Однако отличие результатов такой полной теории от развитой нами здесь ожидается крайне малым, на что указывает величина энтропии на узел $-S_0 \approx 10^{-5}$. Кроме того, эти отличия должны на самом деле описываться при помощи динамической теории стекла, т.к. флуктуации на масштабах порядка l_0 при $T \ll T_c$ не могут происходить термодинамически равновесным образом. Заметим наконец, что для случая общего положения, $K \neq \frac{1}{2}$, в теории низкотемпературного состояния ожидается появление дополнительного члена в свободной энергии, который может сделать 1-RSB решение полностью устойчивым. Исследование этих вопросов мы также оставляем на будущее.

Целью данной диссертации было создание вклада в широкую область научных знаний, посвящённую изучению кинетических свойств мезоскопических неупорядоченных систем. Из-за общей сложности, а также громадности этой области, мы решили сфокусироваться на трёх конкретных задачах, которые представляли для нас интерес и результаты изучения которых будут обсуждены в данном заключении.

Первая часть диссертации посвящена изучению транспортных свойств неупорядоченных квантовых одномерных цепочек спина-1/2 с XXZ взаимодействием. Используя модель жидкости Латтинджера, но учитывая также и эффекты нелинейности спектра, мы изучали ширину $\Gamma(\omega)$ спектральной линии, которая определяет асимптотическое поведение корреляционной функции $\langle \hat{S}^z(x,t)S^z(0,0) \rangle$ на больших временах. Разработанная самосогласованная процедура позволила оценить ширину линии в отсутствие беспорядка, результат даётся формулами (1.42) и (1.49), а также определить форму самой корреляционной функции, см. формулы (1.65-1.68). Наконец, была проведена оценка влияния совместных эффектов от беспорядка и нелинейности спектра на спиновую проводимость (1.71) и теплопроводность (1.72), из которой следует, что эффекты нелинейности спектра могут значительно влиять на транспорт энергии при достаточно больших значениях параметра анизотропии Δ . Область применимости полученных результатов ограничена условием малости амплитуды беспорядка. Кроме того, в научном сообществе также поднимался вопрос о частотной области применимости полученных результатов, который на текущий день так и остаётся открытым (подробнее этот вопрос обсуждается в разделе 1.6).

Во второй части диссертации изучается вопрос о флуктуационных эффектах в сильно неупорядоченных сверхпроводниках вблизи перехода сверхпроводник-изолятор с сильно развитой псевдощелью. Для описания такой системы была разработана диаграммная техника, основывающаяся на келдышевской неравновесной технике. Применение приближения среднего поля, которое основывается на предположении большого локализационного объёма (которое оправдано тем, что система находится вблизи андерсоновского перехода, при

котором длина локализации расходится), совместно с систематическим изучением поправок к этому приближению, позволило идентифицировать наличие трёх различных температурных областей с различным поведением флуктуационной проводимости:

- “Гауссова” область, в которой сверхпроводящие флуктуации обладают гауссовой статистикой, описываются релаксационным уравнением Гинзбурга-Ландау, и в которой парапроводимость даётся формулой Асламазова-Ларкина с дополнительным фактором 2.
- Область Гинзбурга, в которой, наоборот, взаимодействие термодинамических флуктуаций очень сильно, и которая, среди прочего, характеризуется пространственной неоднородностью проводимости
- Промежуточная область, в которой флуктуации параметра порядка заметно изменяют диссипативную часть функционала Гинзбурга-Ландау, но при этом имеет место их пространственное самоусреднение; было показано, что ответ Асламазова и Ларкина в этой области модифицируется на неуниверсальный множитель порядка единицы.

Полученные результаты были выведены в рамках следующих приближений: не была учтена корреляция между величиной “прыжковых” матричных элементов, сосчитанных на паре локализованных состояний, и энергией этих состояний; из рассмотрения было выброшено Кулоновское взаимодействие между локализованными электронами; величина псевдощели предполагалась большой $\Delta_P \gg \Delta \sim T$; большим же предполагалось эффективное “координационное число” — эффективное число взаимодействующих соседей. Некоторые из этих предположений являются достаточно ограничивающими, поэтому вопрос о непосредственной применимости полученных результатов к реальным экспериментам отложен для дальнейшего изучения.

Наконец, последняя часть посвящена вопросу о коллективном пиннинге системы вихрей конечной плотности в сильно неупорядоченных сверхпроводящих тонких плёнках, к которым приложено большое магнитное поле. Был разработан аналитический подход к изучению подобной системы, базирующийся на теории спиновых стёкол, и продемонстрировано наличие стекольного фазового перехода, при котором система “замерзает” в одном из большого количества метастабильных состояний. Было также показано, что окрестность стекольного перехода характеризуется отсутствием малого параметра во взаимодействии

флуктуационных мод, из-за чего её аналитический анализ затруднён. Тем не менее, удалось провести анализ поведения системы при низких температурах, при которых было показано, что функция распределения локальных эффективных энергий пиннинга отдельных вихрей обладает достаточно широкой экспоненциальной щелью; физически это соответствует наличию коллективного пиннинга и конечной сверхтекучей плотности в системе. Предположение о большой силе беспорядка, необходимое для построения согласованной теории, тем не менее является достаточно ограничивающим, из-за чего непосредственная применимость полученных результатов для количественного описания экспериментов вызывает сомнения; однако, автор полагает, что качественные предсказания разработанной теории должны выполняться.

При работе над диссертацией, были сформулированы новые научные вопросы, изучение которых автор хотел бы отложить для будущих исследований. Во-первых, область применимости полученных результатов для ширины спектральной линии в чистой XXZ спиновой цепочке, полученных в главе 1, представляет собой открытый вопрос. К примеру, авторами работы [21] изучалась аналогичная величина для чистой системы, и были получены альтернативные ответы, которые, как ожидается, должны быть применимы при больших частотах. Однако, результат, полученный в данной диссертации и изученный в процитированной работе не совпадают при промежуточных частотах на границах своих ожидаемых областей применимости. Это противоречие должно быть разрешено в будущих исследованиях. Во-вторых, большой интерес представляет рассмотрение эффектов Кулоновского дальнего действия взаимодействия на сверхпроводящие флуктуации в сверхпроводниках с развитой псевдощелью, а также возможные применения полученных теоретических предсказаний к экспериментам на аморфных тонких плёнках оксида индия InO_x . Важные нерешённые вопросы возникли также и при изучении вихревого стекла. Хотя, формально, полученное решение оказалось нестабильным, хоть и с очень маленьким отрицательным собственным числом гессиана, интересно было бы построить стабильное решение с использованием иерархической схемы нарушения репличной симметрии, предложенной Паризи. Помимо этого, были идентифицированы дополнительные флуктуационные эффекты, возникающие из-за отсутствия “частично-дырочной” симметрии в задаче, и которые могут значительно повлиять на решение (также как и на его стабильность) при низких температурах.

Наконец, интересным с экспериментальной точки зрения вопросом является построение теории коллективного пиннинга в окрестности второго критического магнитного поля, которое наблюдалось в работе [10].

1. *Anderson P. W.* Absence of Diffusion in Certain Random Lattices // *Phys. Rev.* — 1958. — март. — т. 109, вып. 5. — с. 1492—1505. — DOI: [10.1103/PhysRev.109.1492](https://doi.org/10.1103/PhysRev.109.1492).
2. *Gor'kov L., Larkin A., Khmel'nitskii D.* Particle conductivity in a two-dimensional random potential // *JETP Letters.* — 1979. — т. 30, вып. 4. — с. 228.
3. *Janssen M.* Statistics and scaling in disordered mesoscopic electron systems // *Physics Reports.* — 1998. — т. 295, № 1. — с. 1—91. — DOI: [https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(97\)00050-1](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(97)00050-1).
4. *Basko D., Aleiner I., Altshuler B.* Metal–insulator transition in a weakly interacting many-electron system with localized single-particle states // *Annals of Physics.* — 2006. — т. 321, № 5. — с. 1126—1205. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aop.2005.11.014>.
5. *Giamarchi T.* Quantum physics in one dimension. — Oxford : Clarendon Press, 2004. — (Internat. Ser. Mono. Phys.) — DOI: [10.1093/acprof:oso/9780198525004.001.0001](https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198525004.001.0001).
6. *Giamarchi T., Schulz H. J.* Anderson localization and interactions in one-dimensional metals // *Phys. Rev. B.* — 1988. — янв. — т. 37, вып. 1. — с. 325—340. — DOI: [10.1103/PhysRevB.37.325](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.37.325).
7. *Poboiko I., Feigel'man M.* Thermal transport in disordered one-dimensional spin chains // *Phys. Rev. B.* — 2015. — дек. — т. 92, вып. 23. — с. 235448. — DOI: [10.1103/PhysRevB.92.235448](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.92.235448).
8. *Feigel'man M., Io e L., Kravtsov V., Cuevas E.* Fractal superconductivity near localization threshold // *Annals of Physics.* — 2010. — т. 325, № 7. — с. 1390—1478. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aop.2010.04.001>. — July 2010 Special Issue.
9. *Aslamazov L., Larkin A.* Effect of Fluctuations on the Properties of a Superconductor Above the Critical Temperature // *Sov. Phys. Solid State.* — 1968. — т. 10, вып. 4. — с. 875—880.

10. *Sacépé B., Seidemann J., Gay F., Davenport K., Rogachev A., Ovadia M., Michaeli K., Feigel'man M. V.* Low-temperature anomaly in disordered superconductors near B_{c2} as a vortex-glass property // *Nature Physics*. — 2019. — янв. — т. 15, № 1. — с. 48–53. — DOI: [10.1038/s41567-018-0294-6](https://doi.org/10.1038/s41567-018-0294-6).
11. *Gornyi I. V., Mirlin A. D., Polyakov D. G.* Interacting Electrons in Disordered Wires: Anderson Localization and Low- T Transport // *Phys. Rev. Lett.* — 2005. — нояб. — т. 95, вып. 20. — с. 206603. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.95.206603](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.95.206603).
12. *Nandkishore R., Huse D. A.* Many-Body Localization and Thermalization in Quantum Statistical Mechanics // *Annual Review of Condensed Matter Physics*. — 2015. — т. 6, № 1. — с. 15–38. — DOI: [10.1146/annurev-conmatphys-031214-014726](https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031214-014726). — eprint: <https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031214-014726>.
13. *Pal A., Huse D. A.* Many-body localization phase transition // *Phys. Rev. B*. — 2010. — нояб. — т. 82, вып. 17. — с. 174411. — DOI: [10.1103/PhysRevB.82.174411](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.82.174411).
14. *Serbyn M., Papić Z., Abanin D. A.* Local Conservation Laws and the Structure of the Many-Body Localized States // *Phys. Rev. Lett.* — 2013. — сент. — т. 111, вып. 12. — с. 127201. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.111.127201](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.111.127201).
15. *Serbyn M., Papić Z., Abanin D. A.* Universal Slow Growth of Entanglement in Interacting Strongly Disordered Systems // *Phys. Rev. Lett.* — 2013. — июнь. — т. 110, вып. 26. — с. 260601. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.110.260601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.260601).
16. *Berkovits R.* Entanglement entropy of low-lying excitation in localized interacting system: Signature of Fock space delocalization // *Phys. Rev. B*. — 2014. — май. — т. 89, вып. 20. — с. 205137. — DOI: [10.1103/PhysRevB.89.205137](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.89.205137).
17. *Bar Lev Y., Cohen G., Reichman D. R.* Absence of Diffusion in an Interacting System of Spinless Fermions on a One-Dimensional Disordered Lattice // *Phys. Rev. Lett.* — 2015. — март. — т. 114, вып. 10. — с. 100601. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.114.100601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.100601).

18. *Imambekov A., Schmidt T. L., Glazman L. I.* One-dimensional quantum liquids: Beyond the Luttinger liquid paradigm // *Rev. Mod. Phys.* — 2012. — сент. — т. 84, вып. 3. — с. 1253–1306. — DOI: [10.1103/RevModPhys.84.1253](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.84.1253).
19. *Samokhin K.* Lifetime of excitations in a clean Luttinger liquid // *Journal of Physics: Condensed Matter.* — 1998. — авг. — т. 10, № 31. — с. L533–L538. — DOI: [10.1088/0953-8984/10/31/002](https://doi.org/10.1088/0953-8984/10/31/002).
20. *Aristov D. N.* Luttinger liquids with curvature: Density correlations and Coulomb drag effect // *Phys. Rev. B.* — 2007. — авг. — т. 76, вып. 8. — с. 085327. — DOI: [10.1103/PhysRevB.76.085327](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.76.085327).
21. *Arzamasovs M., Bovo F., Gangardt D. M.* Kinetics of Mobile Impurities and Correlation Functions in One-Dimensional Superfluids at Finite Temperature // *Phys. Rev. Lett.* — 2014. — апр. — т. 112, вып. 17. — с. 170602. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.112.170602](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.170602).
22. *Protopopov I. V., Gutman D. B., Mirlin A. D.* Equilibration in a chiral Luttinger liquid // *Phys. Rev. B.* — 2015. — май. — т. 91, вып. 19. — с. 195110. — DOI: [10.1103/PhysRevB.91.195110](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.91.195110).
23. *Andreev A.* The hydrodynamics of two- and one-dimensional liquids // *Sov. Phys. JETP.* — 1980. — май. — т. 51, вып. 5. — с. 1038.
24. *Ristivojevic Z., Matveev K. A.* Decay of Bogoliubov excitations in one-dimensional Bose gases // *Phys. Rev. B.* — 2016. — июль. — т. 94, вып. 2. — с. 024506. — DOI: [10.1103/PhysRevB.94.024506](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.94.024506).
25. *Sirker J., Pereira R. G., A eck I.* Conservation laws, integrability, and transport in one-dimensional quantum systems // *Phys. Rev. B.* — 2011. — янв. — т. 83, вып. 3. — с. 035115. — DOI: [10.1103/PhysRevB.83.035115](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.83.035115).
26. *Lukyanov S.* Low energy effective Hamiltonian for the XXZ spin chain // *Nuclear Physics B.* — 1998. — т. 522, № 3. — с. 533–549. — DOI: [https://doi.org/10.1016/S0550-3213\(98\)00249-1](https://doi.org/10.1016/S0550-3213(98)00249-1).
27. *Lukyanov S.* — private communication.
28. *Kamenev A., Levchenko A.* Keldysh technique and non-linear σ -model: basic principles and applications // *Advances in Physics.* — 2009. — т. 58, № 3. — с. 197–319. — DOI: [10.1080/00018730902850504](https://doi.org/10.1080/00018730902850504). — eprint: <https://doi.org/10.1080/00018730902850504>.

29. *Kulkarni M., Lamacraft A.* Finite-temperature dynamical structure factor of the one-dimensional Bose gas: From the Gross-Pitaevskii equation to the Kardar-Parisi-Zhang universality class of dynamical critical phenomena // *Phys. Rev. A.* — 2013. — авг. — т. 88, вып. 2. — с. 021603. — DOI: [10.1103/PhysRevA.88.021603](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.88.021603).
30. *Kardar M., Parisi G., Zhang Y.-C.* Dynamic Scaling of Growing Interfaces // *Phys. Rev. Lett.* — 1986. — март. — т. 56, вып. 9. — с. 889–892. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.56.889](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.56.889).
31. *Kriecherbauer T., Krug J.* A pedestrian's view on interacting particle systems, KPZ universality and random matrices // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.* — 2010. — сент. — т. 43, № 40. — с. 403001. — DOI: [10.1088/1751-8113/43/40/403001](https://doi.org/10.1088/1751-8113/43/40/403001).
32. *Sasamoto T., Spohn H.* The 1+1-dimensional Kardar–Parisi–Zhang equation and its universality class // *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment.* — 2010. — нояб. — т. 2010, № 11. — P11013. — DOI: [10.1088/1742-5468/2010/11/p11013](https://doi.org/10.1088/1742-5468/2010/11/p11013).
33. *Feigel'man M. V., Io e L. B., Kravtsov V. E., Yuzbashyan E. A.* Eigenfunction Fractality and Pseudogap State near the Superconductor-Insulator Transition // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — янв. — т. 98, вып. 2. — с. 027001. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.98.027001](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.027001).
34. *Lemarié G., Kamlapure A., Bucheli D., Benfatto L., Lorenzana J., Seibold G., Ganguli S. C., Raychaudhuri P., Castellani C.* Universal scaling of the order-parameter distribution in strongly disordered superconductors // *Phys. Rev. B.* — 2013. — май. — т. 87, вып. 18. — с. 184509. — DOI: [10.1103/PhysRevB.87.184509](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.87.184509).
35. *Loh Y. L., Randeria M., Trivedi N., Chang C.-C., Scalettar R.* Superconductor-Insulator Transition and Fermi-Bose Crossovers // *Phys. Rev. X.* — 2016. — май. — т. 6, вып. 2. — с. 021029. — DOI: [10.1103/PhysRevX.6.021029](https://doi.org/10.1103/PhysRevX.6.021029).
36. *Chockalingam S. P., Chand M., Kamlapure A., Jesudasan J., Mishra A., Tripathi V., Raychaudhuri P.* Tunneling studies in a homogeneously disordered s-wave superconductor: NbN // *Phys. Rev. B.* — 2009. — март. — т. 79, вып. 9. — с. 094509. — DOI: [10.1103/PhysRevB.79.094509](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.79.094509).

37. *Sambandamurthy G., Engel L. W., Johansson A., Shahar D.* Superconductivity-Related Insulating Behavior // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — март. — т. 92, вып. 10. — с. 107005. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.92.107005](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.107005).
38. *Gantmakher V. F., Dolgoplov V. T.* Superconductor–insulator quantum phase transition // *Physics-Uspekhi.* — 2010. — янв. — т. 53, № 1. — с. 1–49. — DOI: [10.3367/ufne.0180.201001a.0003](https://doi.org/10.3367/ufne.0180.201001a.0003).
39. *Goldman A. M., Marković N.* Superconductor-Insulator Transitions in the Two-Dimensional Limit // *Physics Today.* — 1998. — нояб. — т. 51, № 11. — с. 39. — DOI: [10.1063/1.882069](https://doi.org/10.1063/1.882069).
40. *Sacépé B., Dubouchet T., Chapelier C., Sanquer M., Ovidia M., Shahar D., Feigel'man M., Io e L.* Localization of preformed Cooper pairs in disordered superconductors // *Nature Physics.* — 2011. — март. — т. 7, № 3. — с. 239–244. — DOI: [10.1038/nphys1892](https://doi.org/10.1038/nphys1892).
41. *Sacépé B., Chapelier C., Baturina T. I., Vinokur V. M., Baklanov M. R., Sanquer M.* Disorder-Induced Inhomogeneities of the Superconducting State Close to the Superconductor-Insulator Transition // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — окт. — т. 101, вып. 15. — с. 157006. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.101.157006](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.157006).
42. *Ovidia M., Sacépé B., Shahar D.* Electron-Phonon Decoupling in Disordered Insulators // *Phys. Rev. Lett.* — 2009. — апр. — т. 102, вып. 17. — с. 176802. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.102.176802](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.176802).
43. *Chand M., Saraswat G., Kamlapure A., Mondal M., Kumar S., Jesudasan J., Bagwe V., Benfatto L., Tripathi V., Raychaudhuri P.* Phase diagram of the strongly disordered *s*-wave superconductor NbN close to the metal-insulator transition // *Phys. Rev. B.* — 2012. — янв. — т. 85, вып. 1. — с. 014508. — DOI: [10.1103/PhysRevB.85.014508](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.85.014508).
44. *Driessen E. F. C., Coumou P. C. J. J., Tromp R. R., Visser P. J. de, Klapwijk T. M.* Strongly Disordered TiN and NbTiN *s*-Wave Superconductors Probed by Microwave Electrodynamics // *Phys. Rev. Lett.* — 2012. — сент. — т. 109, вып. 10. — с. 107003. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.109.107003](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.107003).

45. *Dubouchet T.* Local spectroscopy at low temperature of disordered superconducting systems : дис. ... канд. / Dubouchet Thomas. — Neel Institute, Grenoble, 10.2010.
46. *Ma M., Lee P. A.* Localized superconductors // *Phys. Rev. B.* — 1985. — нояб. — т. 32, вып. 9. — с. 5658—5667. — DOI: [10.1103/PhysRevB.32.5658](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.32.5658).
47. *Ghosal A., Randeria M., Trivedi N.* Inhomogeneous pairing in highly disordered s-wave superconductors // *Phys. Rev. B.* — 2001. — нояб. — т. 65, вып. 1. — с. 014501. — DOI: [10.1103/PhysRevB.65.014501](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.65.014501).
48. *Patashinskii A. Z., Pokrovskii V.* Fluctuation Theory of Phase Transitions. — Pergamon Press, 1979. — (International series in natural philosophy). — ISBN 0080216641.
49. *Larkin A. I., Ovchinnikov Y. N.* Nonlinear fluctuation phenomena in the transport properties of superconductors // *Journal of Experimental and Theoretical Physics.* — 2001. — март. — т. 92, № 3. — с. 519—528. — DOI: [10.1134/1.1364749](https://doi.org/10.1134/1.1364749).
50. *Anderson P. W.* Random-Phase Approximation in the Theory of Superconductivity // *Phys. Rev.* — 1958. — дек. — т. 112, вып. 6. — с. 1900—1916. — DOI: [10.1103/PhysRev.112.1900](https://doi.org/10.1103/PhysRev.112.1900).
51. *Popov V., Fedotov S.* The functional-integration method and diagram technique for spin systems // *Journal of Experimental and Theoretical Physics.* — 1988. — март. — т. 67, № 3. — с. 535.
52. *Shtyk A. V., Feigel'man M. V.* Collective modes and ultrasonic attenuation in a pseudogapped superconductor // *Phys. Rev. B.* — 2017. — авг. — т. 96, вып. 6. — с. 064523. — DOI: [10.1103/PhysRevB.96.064523](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.96.064523).
53. *Larkin A., Varlamov A.* Theory of fluctuations in superconductors. — Oxford : Clarendon Press, 2005. — (International series of monographs on physics). — DOI: [10.1093/acprof:oso/9780198528159.001.0001](https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198528159.001.0001).
54. *Landau L. D., Lifshitz E. M., Pitaevskii L. P.* Electrodynamics of continuous media; 2nd ed. // — Oxford : Butterworth, 1984. — т. 2. — (Course of theoretical physics).

55. *Mishonov T., Posazhennikova A., Indekeu J.* Fluctuation conductivity in superconductors in strong electric fields // *Phys. Rev. B.* — 2002. — янв. — т. 65, вып. 6. — с. 064519. — DOI: [10.1103/PhysRevB.65.064519](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.65.064519).
56. *Sacépé B., Feigel'man M., Klapwijk T. M.* Quantum breakdown of superconductivity in low-dimensional materials // *Nature Physics.* — 2020. — июль. — т. 16, № 7. — с. 734–746. — DOI: [10.1038/s41567-020-0905-x](https://doi.org/10.1038/s41567-020-0905-x).
57. *Misra S., Urban L., Kim M., Sambandamurthy G., Yazdani A.* Measurements of the Magnetic-Field-Tuned Conductivity of Disordered Two-Dimensional $\text{Mo}_{43}\text{Ge}_{57}$ and InO_x Superconducting Films: Evidence for a Universal Minimum Superfluid Response // *Phys. Rev. Lett.* — 2013. — янв. — т. 110, вып. 3. — с. 037002. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.110.037002](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.037002).
58. *Abrikosov A.* On the Magnetic Properties of Superconductors of the Second Group // *Journal of Experimental and Theoretical Physics.* — 1957. — дек. — т. 5, вып. 6. — с. 1174.
59. *Larkin A.* Effect of inhomogeneities on the structure of the mixed state of superconductors // *Journal of Experimental and Theoretical Physics.* — 1970. — т. 31, вып. 4. — с. 784.
60. *Larkin A. I., Ovchinnikov Y. N.* Pinning in type II superconductors // *Journal of Low Temperature Physics.* — 1979. — февр. — т. 34, № 3. — с. 409–428. — DOI: [10.1007/BF00117160](https://doi.org/10.1007/BF00117160).
61. *Brandt E. H.* Order parameter and magnetic field of the distorted vortex lattice and their application to flux pinning in type II superconductors. II. Curved flux lines // *Journal of Low Temperature Physics.* — 1977. — авг. — т. 28, № 3. — с. 291–315. — DOI: [10.1007/BF00668219](https://doi.org/10.1007/BF00668219).
62. *Blatter G., Feigel'man M. V., Geshkenbein V. B., Larkin A. I., Vinokur V. M.* Vortices in high-temperature superconductors // *Rev. Mod. Phys.* — 1994. — окт. — т. 66, вып. 4. — с. 1125–1388. — DOI: [10.1103/RevModPhys.66.1125](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.66.1125).
63. *Kwok W.-K., Welp U., Glatz A., Koshelev A. E., Kihlstrom K. J., Crabtree G. W.* Vortices in high-performance high-temperature superconductors // *Reports on Progress in Physics.* — 2016. — сент. — т. 79, № 11. — с. 116501. — DOI: [10.1088/0034-4885/79/11/116501](https://doi.org/10.1088/0034-4885/79/11/116501).

64. *Labusch R.* Calculation of the Critical Field Gradient in Type-II Superconductors // Cryst. Lattice Defects. — 1969. — дек. — т. 1, вып. 1. — с. 1—16.
65. *Blatter G., Geshkenbein V. B., Koopmann J. A. G.* Weak to Strong Pinning Crossover // Phys. Rev. Lett. — 2004. — февр. — т. 92, вып. 6. — с. 067009. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.92.067009](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.067009).
66. *Buchacek M., Willa R., Geshkenbein V. B., Blatter G.* Persistence of pinning and creep beyond critical drive within the strong pinning paradigm // Phys. Rev. B. — 2018. — сент. — т. 98, вып. 9. — с. 094510. — DOI: [10.1103/PhysRevB.98.094510](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.98.094510).
67. *Efros A. L., Shklovskii B. I.* Coulomb gap and low temperature conductivity of disordered systems // Journal of Physics C: Solid State Physics. — 1975. — февр. — т. 8, № 4. — с. L49—L51. — DOI: [10.1088/0022-3719/8/4/003](https://doi.org/10.1088/0022-3719/8/4/003).
68. *Efros A.* Coulomb gap in disordered systems // Journal of Physics C: Solid State Physics. — 1976. — июнь. — т. 9, № 11. — с. 2021—2030. — DOI: [10.1088/0022-3719/9/11/012](https://doi.org/10.1088/0022-3719/9/11/012).
69. *Täuber U. C., Nelson D. R.* Interactions and pinning energies in the Bose glass phase of vortices in superconductors // Phys. Rev. B. — 1995. — дек. — т. 52, вып. 22. — с. 16106—16124. — DOI: [10.1103/PhysRevB.52.16106](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.52.16106).
70. *Larkin A., Khmel'nitskii D.* Activation conductivity in disordered systems with large localization length // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 1982. — сент. — т. 56, вып. 3. — с. 647.
71. *Müller M., Io e L. B.* Glass Transition and the Coulomb Gap in Electron Glasses // Phys. Rev. Lett. — 2004. — дек. — т. 93, вып. 25. — с. 256403. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.93.256403](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.256403).
72. *Pankov S., Dobrosavljević V.* Nonlinear Screening Theory of the Coulomb Glass // Phys. Rev. Lett. — 2005. — февр. — т. 94, вып. 4. — с. 046402. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.94.046402](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.94.046402).
73. *Müller M., Pankov S.* Mean-field theory for the three-dimensional Coulomb glass // Phys. Rev. B. — 2007. — апр. — т. 75, вып. 14. — с. 144201. — DOI: [10.1103/PhysRevB.75.144201](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.75.144201).

74. *Mezard M., Parisi G., Virasoro M.* Spin Glass Theory and Beyond. — World Scientific, 1987. — (Lecture Notes in Physics Series). — ISBN 9789971501150.
75. *Gross D. J., Kanter I., Sompolinsky H.* Mean-field theory of the Potts glass // Phys. Rev. Lett. — 1985. — июль. — т. 55, вып. 3. — с. 304—307. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.55.304](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.55.304).
76. *Carpentier D., Le Doussal P.* Glass transition of a particle in a random potential, front selection in nonlinear renormalization group, and entropic phenomena in Liouville and sinh-Gordon models // Phys. Rev. E. — 2001. — янв. — т. 63, вып. 2. — с. 026110. — DOI: [10.1103/PhysRevE.63.026110](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.63.026110).
77. *Kiselev M. N., Oppermann R.* Schwinger-Keldysh Semionic Approach for Quantum Spin Systems // Phys. Rev. Lett. — 2000. — дек. — т. 85, вып. 26. — с. 5631—5634. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.85.5631](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.85.5631).

XXZ

.1

В этом приложении мы выведем выражения для мнимой части собственной энергии.

Мы стартуем с аналитического выражения для двух диаграмм, изображённых на рис. 1.1, возникающих во втором порядке теории возмущений (тут $\mathbf{q}_3 = \mathbf{q} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2$):

$$\begin{aligned} \Sigma_{ret}^{(R \rightarrow 3R)}(\mathbf{q}) &= -6\alpha^2 \lambda_-^2 \int \frac{d^2 \mathbf{q}_1}{(2\pi)^2} \frac{d^2 \mathbf{q}_2}{(2\pi)^2} \times \\ &\times \left[g_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_1) g_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_2) g_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_3) + g_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_1) g_K^{(R)}(\mathbf{q}_2) g_K^{(R)}(\mathbf{q}_3) + \right. \\ &\quad \left. + g_K^{(R)}(\mathbf{q}_1) g_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_2) g_K^{(R)}(\mathbf{q}_3) + g_K^{(R)}(\mathbf{q}_1) g_K^{(R)}(\mathbf{q}_2) g_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_3) \right] \quad (\text{A.1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{ret}^{(R \rightarrow R+2L)}(\mathbf{q}) &= -\frac{\alpha^2 \lambda_+^2}{2} \int \frac{d^2 \mathbf{q}_1}{(2\pi)^2} \frac{d^2 \mathbf{q}_2}{(2\pi)^2} \times \\ &\times \left[g_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_1) g_{ret}^{(L)}(\mathbf{q}_2) g_{ret}^{(L)}(\mathbf{q}_3) + g_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_1) g_K^{(L)}(\mathbf{q}_2) g_K^{(L)}(\mathbf{q}_3) + \right. \\ &\quad \left. + g_K^{(R)}(\mathbf{q}_1) g_{ret}^{(L)}(\mathbf{q}_2) g_K^{(L)}(\mathbf{q}_3) + g_K^{(R)}(\mathbf{q}_1) g_K^{(L)}(\mathbf{q}_2) g_{ret}^{(L)}(\mathbf{q}_3) \right] \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

Выразим запаздывающие функции Грина через их мнимые части, используя соотношения Крамерса-Кронига $g_{ret}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int d\omega' \frac{\text{Im} g_{ret}(\omega')}{\omega' - \omega - i0}$; также мы подставим выражения Келдышевских компонент функций Грина используя равновесное соотношение (1.23). Проинтегрируем по ω_i , используя известное положение полюсов $\omega_i = \omega'_i - i0$. Наконец, беря мнимую часть полученного выражения

используя правило Сохоцкого $\text{Im} \frac{1}{x-i0} = \pi\delta(x)$, мы получаем:

$$\begin{aligned} \text{Im} \Sigma_{ret}^{(R \rightarrow 3R)}(\mathbf{q}) &= \frac{3\alpha^2 \lambda_-^2}{2\pi^4} \int d^2 \mathbf{q}_1 d^2 \mathbf{q}_2 \times \\ &\quad \times \text{Im} g_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_1) \text{Im} g_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_2) \text{Im} g_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_3) \times \\ &\quad \times (1 + f(\omega_2)f(\omega_3) + f(\omega_1)f(\omega_3) + f(\omega_1)f(\omega_2)) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \text{Im} \Sigma_{ret}^{(R \rightarrow R+2L)}(\mathbf{q}) &= \frac{\alpha^2 \lambda_+^2}{8\pi^4} \int d^2 \mathbf{q}_1 d^2 \mathbf{q}_2 \times \\ &\quad \times \text{Im} g_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_1) \text{Im} g_{ret}^{(L)}(\mathbf{q}_2) \text{Im} g_{ret}^{(L)}(\mathbf{q}_3) \times \\ &\quad \times (1 + f(\omega_2)f(\omega_3) + f(\omega_1)f(\omega_3) + f(\omega_1)f(\omega_2)) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Для затравочной функции Грина (1.17), мнимая часть пропорциональна дельта-функции на массовой поверхности $\delta(\omega \mp uq)$, которая приводит к сингулярному поведению величины (1.28) на массовой поверхности:

$$\text{Im} \Sigma_{ret}^{(R \rightarrow 3R)}(\mathbf{q}) = -\frac{3\alpha^2 \lambda_-^2}{16\pi^4 u^5} \delta(\omega - uq) I_1(uq, T), \quad (\text{A.5})$$

где

$$\begin{aligned} I_1(\Omega, T) &= \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - \Omega) \times \\ &\quad \times (1 + f(\omega_1)f(\omega_2) + f(\omega_1)f(\omega_3) + f(\omega_2)f(\omega_3)) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

При нулевой температуре, $f(\omega) = \text{sign} \omega$, и взаимодействие происходит только в области, в которой все величины ω_i одного знака. В таком случае, вычисление достаточно прямолинейно и приводит к результату $I_1(\Omega, T = 0) = \frac{1}{30} \Omega^5$. Производная $\partial I_1 / \partial T$ может быть выражена через другой интеграл:

$$\frac{\partial I_1}{\partial T} = 3 \times \int d\omega_1 \frac{\partial f(\omega_1)}{\partial T} \omega_1 I_2(\Omega - \omega_1, T) \quad (\text{A.7})$$

где

$$I_2(\Omega, T) = \int d\omega_1 \omega_1 (\Omega - \omega_1) [f(\omega_1) + f(\Omega - \omega_1)] = \frac{1}{3} \Omega (\Omega^2 + (2\pi T)^2) \quad (\text{A.8})$$

Второй интеграл может быть сосчитан аналогичным способом. В частности, при нулевой температуре он даётся выражением $I_2(\Omega, T = 0) = \frac{1}{3}\Omega^3$; а его производная по температуре уже может быть сосчитана точно. Собирая всё вместе, мы получаем следующее окончательное выражение для исходного интеграла:

$$I_1(\Omega, T) = \frac{1}{30}\Omega [\Omega^2 + (2\pi T)^2] [\Omega^2 + 4(2\pi T)^2], \quad (\text{A.9})$$

что и приводит нас к ответу (1.29).

Выражение для второй диаграммы, (A.4), не является сингулярным на массовой поверхности, и поэтому представляет меньший интерес. Оно может быть переписано через другой вспомогательный интеграл:

$$\text{Im} \Sigma_{ret}^{(R \rightarrow R+2L)}(\mathbf{q}) = -\frac{\alpha^2 \lambda_+^2}{64\pi^4} I_3 \left(\frac{\omega - uq}{2}, \frac{\omega + uq}{2}, T \right) \quad (\text{A.10})$$

где

$$\begin{aligned} I_3(\Omega_1, \Omega_2, T) &= \frac{1}{2}\Omega_1 \int d\omega_2 \omega_2 (\Omega_2 - \omega_2) \times \\ &\times (1 + f(\Omega_1)f(\omega_2) + f(\Omega_1)f(\Omega_2 - \omega_2) + f(\omega_2)f(\Omega - \omega_2)) = \\ &= \frac{1}{2}\Omega_1 f(\Omega_1) I_1(\Omega_2, T) + 4\Omega_1 T^3 I_4 \left(\frac{\Omega_2}{2T} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$I_4(A) = \int dz \cdot z(A - z)(1 + \coth z \coth(A - z)) \quad (\text{A.12})$$

Последний интеграл может быть сосчитан точно только используя полилогарифмическую спецфункцию; однако, его асимптотическое поведение может быть извлечено достаточно просто:

$$I_4(A) \approx \begin{cases} \frac{\pi^2}{3}, & A \ll 1 \\ \frac{A^3}{3}, & A \gg 1 \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Собирая всё вместе, мы приходим к результатам (1.30) и (1.31).

Результаты для кубического взаимодействия между плазмонами изучались в работе [20]. В этом приложении мы продемонстрируем, как можно их воспроизвести в рамках предло-

женной техники. Стартуем с выражений для двух диаграмм, изображённых на рис. 1.2 (тут $\mathbf{q}_2 = \mathbf{q} - \mathbf{q}_1$):

$$\Sigma_{ret}^{(R \rightarrow 2R)}(\mathbf{q}) = i\alpha_1^2 \int \frac{d^2 \mathbf{q}_1}{(2\pi)^2} \times \left[g_K^{(R)}(\mathbf{q}_1) g_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_2) + g_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_1) g_K^{(R)}(\mathbf{q}_2) \right] \quad (\text{A.14})$$

$$\Sigma_{ret}^{(R \rightarrow R+L)}(\mathbf{q}) = \frac{i\alpha_2^2}{2} \int \frac{d^2 \mathbf{q}_1}{(2\pi)^2} \times (g_K^{(L)}(\mathbf{q}_1) g_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_2) + g_{ret}^{(L)}(\mathbf{q}_1) g_K^{(R)}(\mathbf{q}_2)), \quad (\text{A.15})$$

Выражения для мнимых их мнимых частей, полученное используя соотношения Краммера-Кронига, может быть записано следующим образом:

$$\text{Im} \Sigma_{ret}^{(R \rightarrow 2R)}(\mathbf{q}) = -\frac{\alpha_1^2}{2\pi^2} \int d^2 \mathbf{q}_1 \text{Im} g_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_1) \text{Im} g_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_2) (f(\omega_1) + f(\omega_2)) \quad (\text{A.16})$$

$$\text{Im} \Sigma_{ret}^{(R \rightarrow R+L)}(\mathbf{q}) = -\frac{\alpha_2^2}{4\pi^2} \int d^2 \mathbf{q}_1 \times \times \text{Im} g_{ret}^{(L)}(\mathbf{q}_1) \text{Im} g_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_2) (f(\omega_1) + f(\omega_2)) \quad (\text{A.17})$$

Подстановка невозмущённых функций Грина в первое выражение демонстрирует сингулярное поведение на массовой поверхности, как и раньше; префактор выражается через интеграл $I_2(\Omega, T)$, который был сосчитан ранее, следующим образом:

$$\text{Im} \Sigma_{ret}^{(R \rightarrow 2R)}(\mathbf{q}) = -\frac{\alpha_1^2}{8\pi^2 u^3} \delta(\omega - uq) I_1(uq, T), \quad (\text{A.18})$$

в то время как второе выражение представляет собой простое двукратное интегрирование пары дельта-функций и тем самым является тривиальным:

$$\text{Im} \Sigma_{ret}^{(R \rightarrow R+L)}(\mathbf{q}) = -\frac{\alpha_2^2}{128\pi^2 u^3} (\omega^2 - u^2 q^2) \left(f\left(\frac{\omega - uq}{2}\right) + f\left(\frac{\omega + uq}{2}\right) \right), \quad (\text{A.19})$$

что в точности соответствует результатам (1.33) и (1.34).

.2

-

В этом приложении мы выведем результаты, приведённые в разделе 1.4. Для этого нам необходимо сосчитать “меньшую” компоненту Келдышевской

функции Грина, которая в равновесии может быть записана следующим образом:

$$g_{<}^{(R)}(\mathbf{q}) = \frac{2 \operatorname{Im} g_{ret}^{(R)}(\mathbf{q})}{1 - e^{-\beta\omega}}. \quad (\text{A.20})$$

Используя общую формулу для одетой функции Грина (1.20), и пренебрегая зависимостью от $\epsilon = \omega - uq$ для скорости релаксации $\Gamma(\omega, \epsilon)$, мы можем провести интегрирование по импульсу и получить следующее общее выражение:

$$g_{<}^{(R)}(x, t) = \frac{T}{2\pi u^2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\omega + i\Gamma \operatorname{sign} x}{\omega} e^{(i\omega(x-ut) - \Gamma|x|)/u} \quad (\text{A.21})$$

После подстановки результата (1.49), удобно обезразмерить интеграл, введя пространственный масштаб l_D используя уравнение (1.61), согласно $\delta = (x - ut)/l_D$ и перейти к безразмерной переменной интегрирования $z = \omega l_D/u$. В таком случае, нам необходимо вычислить следующий интеграл:

$$g_{<}^{(R)}(x, t) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{l_D l_T} \int_0^\infty dz e^{-z^{3/2}} \left[\cos(z\delta) - \frac{l_D}{x} z^{1/2} \sin(z\delta) \right] \quad (\text{A.22})$$

Для $\delta \ll 1$ (т.е. на световом конусе $x = ut$), выражение в скобках может быть заменено на единицу. В таком случае интеграл вычисляется тривиально и равен $\Gamma(5/3)$ (гамма-функция Эйлера), что соответствует первой части результата (1.63).

При $\delta \gg 1$ можно повернуть контур интегрирования на $\pi/2$, получив экспоненциально затухающие интегралы от величины $\propto e^{-\delta z}$, и разложить выражения в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} J_1(\delta) &= \int_0^\infty dz e^{-z^{3/2}} \cos(z\delta) = \operatorname{Re} \left[i \int_0^\infty dz \cdot e^{-e^{3i\pi/4} z^{3/2} - z\delta} \right] \approx \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty dz \cdot z^{3/2} e^{-z\delta} = \frac{\Gamma(5/2)}{\sqrt{2}} \frac{1}{\delta^{5/2}}, \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned} J_2(\delta) &= \int_0^\infty dz e^{-z^{3/2}} z^{1/2} \sin(z\delta) = \operatorname{Im} \left[i \int_0^\infty dz e^{-e^{3i\pi/4} z^{3/2} - z\delta} e^{i\pi/4} z^{1/2} \right] \approx \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty dz z^{1/2} e^{-z\delta} = \frac{\Gamma(3/2)}{\sqrt{2}} \frac{1}{\delta^{3/2}}. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Подстановка этих двух интегралов приводят к первой части результата (1.64).

Поступим аналогично предыдущему пункту, введя пространственный масштаб l_D согласно уравнению (1.61), и приведём интеграл к следующему безразмерному виду:

$$g_{<}^{(R)}(x,t) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{l_D l_T} \int_0^\infty dz e^{-z^2 \sqrt{\ln \frac{l_D}{z l_T}}} \left[\cos(z\delta) - \frac{l_D}{x} z \sqrt{\ln \frac{l_D}{z l_T}} \sin(z\delta) \right] \quad (\text{A.25})$$

При $\delta \ll 1$, выражение в скобках опять может быть заменено на единицу; заменяя медленно меняющийся логарифм на константу $\ln l_D/l_T$; оставшийся Гауссов интеграл вычисляется и равен $\sqrt{\pi}/2 \ln^{1/4} l_D/l_T$. Это приводит нас ко второй части результата (1.63).

Для $\delta \gg 1$, интегралы опять имеют практически Гауссов вид (после замены медленно меняющегося логарифма на константу, соответствующую его типичному значению):

$$\begin{aligned} J_3(\delta) &= \int_0^\infty dz e^{-z^2 \sqrt{\ln(l_D/z l_T)}} \cos(z\delta) \approx \int_0^\infty dz e^{-z^2 \sqrt{\ln(\delta l_D/l_T)}} \cos(z\delta) = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2 \ln^{1/4}(\delta l_D/l_T)} \exp\left(-\frac{\delta^2}{4 \ln^{1/4}(\delta l_D/l_T)}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{aligned} J_4(\delta) &= \int_0^\infty dz e^{-z^2 \sqrt{\ln(l_D/z l_T)}} \sqrt{\ln(l_D/z l_T)} z \sin(z\delta) \\ &\approx \int_0^\infty dz e^{-z^2 \sqrt{\ln(\delta l_D/l_T)}} \sqrt{\ln(\delta l_D/l_T)} z \sin(z\delta) = \frac{\sqrt{\pi} \delta}{4 \ln^{1/4}(\beta \delta)} e^{-\frac{\delta^2}{4 \ln^{1/4} \beta \delta}} \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Комбинация этих двух выражений приводит нас ко второй части результата (1.64).

Обсудим теперь области применимости выведенных выше асимптотик как при наличии магнитного поля, так и в его отсутствие. Результаты для $\Gamma(\omega)$ были получены в приближении $\omega \ll T$, и тем самым могут быть применены только в случае если типичные значения ω , входящие в интегралы, будут малы по сравнению с температурой. Этот критерий эквивалентен условию $z \ll l_D/l_T$. Поскольку основной вклад в интегралы определяются областью $z \sim 1$ (при

$\delta \ll 1$) и $z \sim 1/\delta \gg 1$ (при $\delta \gg 1$), мы немедленно получаем, что результаты применимы только при выполнении условия $l_D \gg l_T$. Это условие начинает выполняться на достаточно больших временах.

.1

 R T_c

Это приложение посвящено аналитическому и численному изучению величины температуры перехода T_c в рамках приближения среднего поля. В разделе 2.2.1 был сформулирован следующий критерий возникновения отличного от нуля параметра порядка: наибольшее собственное число матрицы $J_{ij}\sqrt{\eta_i\eta_j}$ должно превышать единицу. В пределе $R \rightarrow \infty$ этот из этого критерия следует уравнение (2.7). Здесь будут разобраны ведущие поправки к этому результату при конечных величинах R .

Начнём наш анализ с аналитического исследования спектра матрицы $J_{ij}\sqrt{\eta(\varepsilon_i)\eta(\varepsilon_j)}$, усреднённой по случайному распределению $P(\varepsilon)$. Плотность собственных значений может быть выражена через функцию Грина $\hat{G}_E = (E - \hat{\eta}^{1/2}\hat{J}\hat{\eta}^{1/2} + i0)^{-1}$ как $\nu(E) = -\frac{1}{\pi N} \text{Tr} \hat{G}_E$. Выражение для функции Грина может быть разложено в ряд; его удобно записать используя вспомогательную матрицу $\hat{F}_E = \hat{\eta}^{-1/2}\hat{G}_E\hat{\eta}^{1/2}\hat{J}$:

$$\hat{F}_E = \hat{F}_E^{(0)} + \hat{F}_E^{(0)}\hat{\eta}\hat{F}_E^{(0)} + \hat{F}_E^{(0)}\hat{\eta}\hat{F}_E^{(0)}\hat{\eta}\hat{F}_E^{(0)} + \dots, \quad (\text{B.1})$$

где $\hat{F}_E^{(0)} = \hat{J}/(E + i0)$. Предполагая радиус взаимодействия R большим, мы можем использовать стандартную “крестовую” диаграммную технику, используя выражение $\langle \eta_i \eta_j \rangle = \delta_{ij} \langle \eta^2 \rangle + (1 - \delta_{ij}) \langle \eta \rangle^2$. Ведущее приближение для собственной энергетической части соответствует тривиальному анализу, проведённому в разделе 2.2.1 и даётся $\hat{\Sigma}^{(1)} = \langle \eta \rangle$. Для изучения плотности состояний около края спектра, мы используем самосогласованное Борновское приближение (self-consistent Born approximation, SCBA), в рамках которого собственная энергетическая часть даётся следующим выражением:

$$\hat{\Sigma}^{(2)} = \langle \langle \eta^2 \rangle \rangle \cdot (\hat{F}_E)_{ii} \quad (\text{B.2})$$

В импульсном представлении, уравнение Дайсона в рамках SCBA записывается следующим образом:

$$F_E^{-1}(\mathbf{q}) = J(\mathbf{q})^{-1}(E + i0) - \langle \eta \rangle - \langle \langle \eta^2 \rangle \rangle F(E), \quad (\text{Б.3})$$

где $F(E) = \int (d\mathbf{q}) F_E(\mathbf{q})$. Это позволяет свести задачу к единственному самосогласованному уравнению на величину $F(E)$:

$$F(E) = \int \frac{d^d \mathbf{q} / (2\pi)^d}{J^{-1}(\mathbf{q})(E + i0) - \langle \eta \rangle - \langle \langle \eta^2 \rangle \rangle F(E)} \quad (\text{Б.4})$$

Следующим необходимым шагом является выражение плотности собственных значений через функцию $F(E)$. Во-первых, заметим, что, поскольку $\hat{G}_E = \hat{\eta}^{1/2} \hat{F}_E \hat{J}^{-1} \hat{\eta}^{-1/2}$, и $\text{Tr} \hat{G}_E = \text{Tr}(\hat{F}_E \hat{J}^{-1})$. В ультрафиолетовом пределе $q \rightarrow \infty$ величина $J(\mathbf{q}) \rightarrow 0$, что приводит к возникновению дельта-пики на нулевой энергии. Поскольку мы интересуемся краем спектра, мы вычтем $(E + i0)^{-1}$ и будем рассматривать лишь положительные энергии $E > 0$. Наконец, используя уравнение на величину $F(E)$, мы получаем следующее общее выражение для плотности состояний:

$$\nu(E > 0) = -\frac{1}{\pi E} \text{Im} (F(E) [\langle \eta \rangle + \langle \langle \eta^2 \rangle \rangle F(E)]) \quad (\text{Б.5})$$

Дальше мы займёмся решением уравнения (Б.4). Переходя к безразмерному импульсу $Q = qR$ и вводя безразмерные переменные:

$$\lambda = \frac{E}{J \langle \eta \rangle} - 1, \quad \Psi(\lambda) = F(E) \langle \eta \rangle R^d, \quad j(\mathbf{Q}) = J(\mathbf{q})/J, \quad (\text{Б.6})$$

мы видим, что в задаче имеется единственный параметр, который контролирует самосогласованное Борновское приближение и который предполагается малым:

$$\alpha = \frac{\langle \langle \eta^2 \rangle \rangle}{R^d \langle \eta \rangle^2} = \frac{1}{R^d} \left[\frac{14\zeta(3)}{\pi^2} \frac{\beta W}{\ln^2 \frac{4e\gamma\beta W}{\pi}} - 1 \right] \sim \frac{g^2 e^{1/g}}{R^d} \ll 1. \quad (\text{Б.7})$$

Уравнение (Б.4) в безразмерном виде записывается следующим образом:

$$\Psi(\lambda) = \int \frac{d^d \mathbf{Q} / (2\pi)^d \cdot j(\mathbf{Q})}{\lambda + i0 + 1 - j(\mathbf{Q}) - \alpha j(\mathbf{Q}) \Psi(\lambda)}, \quad (\text{Б.8})$$

и плотность состояний выражается через функцию Ψ следующим образом:

$$\nu(E) = -\frac{1}{\pi ER^d} \text{Im} [\Psi(\lambda) + \alpha\Psi^2(\lambda)]. \quad (\text{Б.9})$$

Для изучения поведения плотности состояний вблизи края спектра $E \approx J \langle \eta \rangle$, что соответствует $|\lambda| \ll 1$, достаточно взять длинноволновый предел $j(\mathbf{Q}) = 1 - Q^2$. Для простоты, в дальнейшем мы сфокусируемся на двумерном случае. В таком случае, интеграл по импульсам логарифмически расходится и обрезается на величинах $Q \sim 1$; беря его, мы приходим к следующему алгебраическому уравнению:

$$\Psi(\lambda) \approx \frac{1}{4\pi} \ln \frac{c}{\lambda + i0 - \alpha\Psi(\lambda)}, \quad (\text{Б.10})$$

где константа порядка единицы c определяется ультрафиолетовым поведением $j(\mathbf{Q})$. В пределе $R \rightarrow \infty$, что соответствует $\alpha = 0$, это уравнение приводит к ступенчатому виду плотности состояний с резким концом при $\lambda = 0$, $\nu(E) \approx \theta(J \langle \eta \rangle - E)/4\pi R^2$. Конечное, но малое, значение α приводит к возникновению корневой сингулярности со слегка сдвинутой величиной края спектра:

$$\nu(E) \approx \frac{1}{\pi ER^d} \sqrt{\frac{\lambda_G - \lambda}{2\pi\alpha}}, \quad (\text{Б.11})$$

где

$$\lambda_G = \frac{\alpha}{4\pi} \ln \frac{4\pi ec}{\alpha}. \quad (\text{Б.12})$$

Сдвиг края спектра приводит к перенормировке эффективной константы связи $J_e = J(1 + \lambda_G)$ в выражении для T_c , Eq.(2.7), что слегка увеличивает величину критической температуры.

Для сравнения, мы провели численное изучение спектра соответствующей случайной матрицы. Температура $T = \beta^{-1}$ бралась вблизи критической температуры, даваемой приближением среднего поля (2.7), так что край спектра находится вблизи единицы. Матрица J_{ij} бралась Гауссовой, так что её преобразование Фурье имеет вид $J(\mathbf{q}) = J \exp(-q^2 R^2)$; в этом случае интегрирование по импульсу в уравнении (Б.8) может быть проведено точно. Это приводит нас к алгебраическому уравнению на Ψ , которое затем решалось численно, и решение было использовано для построения теоретического предсказания для

плотности состояний. Количество реализаций беспорядка менялось в пределах от ~ 30000 для самых маленьких систем до ~ 6000 для самых больших.

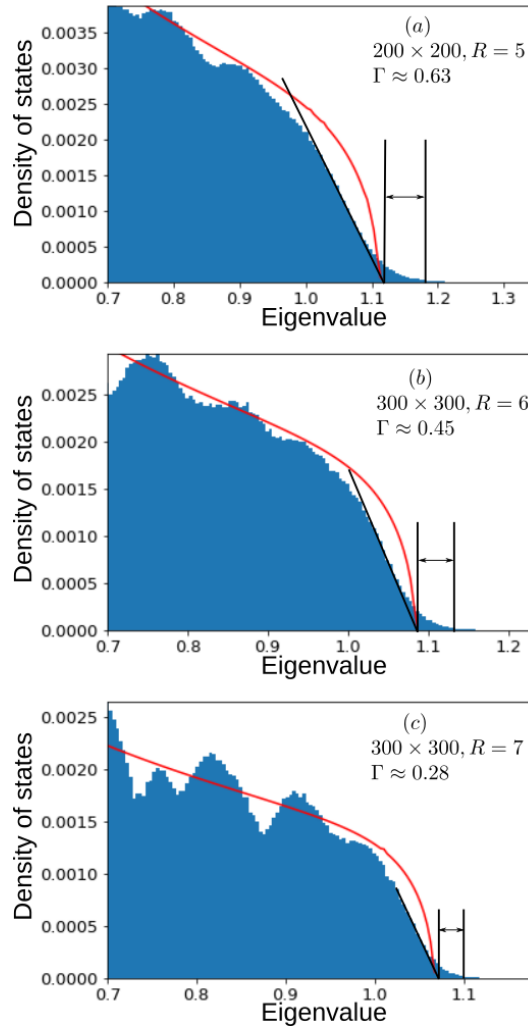


Рисунок Б.1 — Плотность собственных значений $\nu(E)$ для двумерной системы с параметрами $W = 3$, $J = 1$, которые соответствуют значению критической температуры (2.7), $T_c^{-1} \approx 60$. Красная кривая: решение уравнения, даваемого самосогласованным Борновским приближением, (Б.8), с последующей подстановкой результата в (Б.9).

Типичный вид плотности состояний приведён на рис. Б.1. Кривые состоят из “основного тела” плотности состояний, которое достаточно хорошо описывается самосогласованным Борновским приближением, и экспоненциального “хвоста”, содержащего локализованные состояния и который всегда возникает при изучении случайных матриц. Осциллирующее поведение связано с эффектами конечного размера системы и вызванного им квантования волнового вектора; величина осцилляций усиливается при увеличении R и уменьшении L . Сверхпроводимость в системе возникает, когда край подвижности, который разделяет

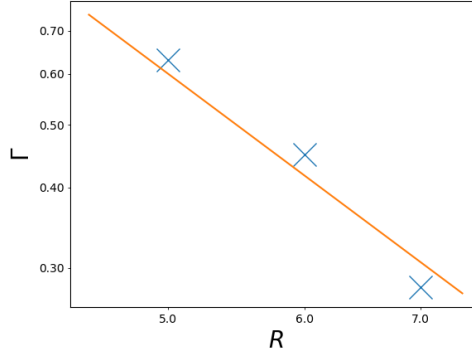


Рисунок Б.2 — Зависимость от радиуса R ширины хвоста плотности состояний, извлечённая из рис. Б.1. Линия соответствует зависимости R^{-2}

локализованные и делокализованные состояния, пересекает единичное собственное число. На приведённых рисунках край спектра очевидным образом располагается уже правее единицы, и приближение SCBA, даваемое уравнением (Б.11), более пригодно для оценки позиции края спектра, а также всей зависимости плотности состояний.

Известно, что ширина хвоста Γ соотносится с числом Гинзбурга $G_i \sim \rho^{2/(4-d)} \propto R^{-2d/(4-d)}$. Для подтверждения, мы провели численные симуляции с различными значениями R и оценили зависимость ширины “хвоста” от R . Начало “хвоста” оценивалось путём пересечения касательной линии, взятой в точке перегиба зависимости, с осью x , см. рис. Б.1. Край “хвоста” оценивался из условия достижения плотности состояний малого значения $4 \cdot 10^{-5}$. Полученная зависимость $\Gamma(R)$, изображённая на рис. Б.2, лучше всего описывается степенной зависимостью $\Gamma(R) \sim R^{-2}$, что совпадает с теоретическим предсказанием для $d = 2$.

.2

В этом приложении мы выведем келдышевское действия и правила диаграммной техники, используемой для описание псевдоспиновой модели (2.2) и её семионного представления (2.10), следуя Киселёву и Опперману [77]. Мы вводим стандартный келдышевский временной контур $C = (-\infty, \infty) \cup (\infty, -\infty)$ и

записываем следующее действие для семионов:

$$iS[\bar{\psi}, \psi] = i \int_C dt \left(\bar{\psi} \hat{G}^{-1} \psi + \frac{1}{4} (\bar{\psi} \hat{\sigma}^\alpha \psi) \hat{J} (\bar{\psi} \hat{\sigma}^\alpha \psi) \right), \quad (\text{B.13})$$

где $\hat{G}^{-1} = i\partial_t + \varepsilon_i \sigma^z$ представляет собой диагональную в координатном представлении матрицу, а также подразумевается суммирование по координатам. Мы вводим векторное поле $\Phi = (\Phi^x, \Phi^y)$ со следующим действием:

$$iS[\Phi] = -i \int_C dt \Phi^\alpha \hat{J}^{-1} \Phi^\alpha, \quad (\text{B.14})$$

и производим сдвиг для расщепления четырёх-семионного взаимодействия (преобразование Хаббарда-Стратановича) $\Phi^\alpha \mapsto \Phi^\alpha - \frac{1}{2} \hat{J} \bar{\psi} \sigma^\alpha \psi$, что приводит нас к следующему действию:

$$iS[\bar{\psi}, \psi, \Phi] = i \int_C dt \left(-\Phi^\alpha \hat{J}^{-1} \Phi^\alpha + \bar{\psi} (\hat{G}^{-1} + \hat{\sigma}^\alpha \Phi^\alpha) \psi \right). \quad (\text{B.15})$$

Это действие описывает набор спинов-1/2, которые помещены в магнитное поле $(\Phi_i^x(t), \Phi_i^y(t), \varepsilon_i)$, динамика которого сама связана с динамикой спинов посредством вершины взаимодействия. Тем самым, это представление является прямым обобщением тривиальной модели среднего поля, которая обсуждалась в разделе 2.2.1.

В качестве следующего шага, распишем явно поля, соответствующие верхней и нижней частям келдышевского контура согласно $\Phi = (\Phi_+, \Phi_-)$ (и аналогично для ψ), и произведём стандартный келдышевский поворот, перейдя к “классическим” и “квантовым” бозонным полям: $\Phi' = (\Phi_{cl}, \Phi_q)$; и их фермионному аналогу: $\psi' = (\psi_1, \psi_2)^T$, $\bar{\psi}' = (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2)$, посредством следующих соотношений:

$$\Phi = \check{O} \Phi', \quad \psi = \check{O} \psi', \quad \bar{\psi} = \bar{\psi}' \check{O} \check{\tau}_z, \quad (\text{B.16})$$

где матрица $\check{O} = (\check{\tau}_x + \check{\tau}_z)/\sqrt{2}$ и $\check{\tau}_\alpha$ представляют собой матрицы Паули, действующие в келдышевском пространстве. Поворот приводит к следующей структуре пропагаторов в этом пространстве:

$$\check{L} = i \langle \Phi \Phi^T \rangle = \begin{pmatrix} L_K & L_R \\ L_A & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.17})$$

$$\check{G} = -i \langle \psi \bar{\psi} \rangle = \begin{pmatrix} G_R & G_K \\ 0 & G_A \end{pmatrix}. \quad (\text{B.18})$$

Окончательное выражение для келдышевского действия даётся формулой (2.11). В принципе, можно также взять гауссов интеграл по семионным степеням свободы и получить следующее эффективное действие для динамики параметра порядка:

$$iS[\Phi] = -i \int dt \Phi^\alpha \hat{J}^{-1} \check{\tau}_x \Phi^\alpha + \text{Tr} \ln \left(\hat{G}^{-1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \check{\Gamma}_i \hat{\sigma}^\alpha \Phi_i^\alpha \right). \quad (\text{B.19})$$

Напомним, что поле параметра порядка $\Phi \equiv \Phi_\mu^\alpha(\mathbf{r}_i)$ обладает структурой в следующих пространствах: “спиновом” $\alpha \in (x, y)$, келдышевском $\mu \in (cl, q)$ и координатном \mathbf{r}_i ; а семионные поля $\psi \equiv \psi_{\sigma, \mu}(\mathbf{r}_i)$ принадлежат “семионному псевдоспиновому пространству” $\sigma \in \{\uparrow, \downarrow\}$, а также келдышевскому $\mu \in \{1, 2\}$ и координатному \mathbf{r}_i пространствам.

.3 " "

Целью данного приложения является разработка “примесной” диаграммной техники, используемой в разделе 2.5 для изучения отклонений от теории среднего поля, приведённой в разделе 2.3, связанных с процедурой усреднения по функции распределения $\{\varepsilon_i\}$. Ключевой элемент диаграммной техники, зависящий от ε , и обозначаемый “перечёркнутым кругом” на рис. 2.2, представляет собой спиновую корреляционную функцию $S_R^{\alpha\beta}(\omega)$. При усреднении ряда уравнения Дайсона (2.17), естественным образом возникает следующая нетривиальная конструкция: совместно усреднённая пара корреляционных функций, соответствующих одному локализованному состоянию $\left\langle S_R^{\alpha\mu}(\omega_1) S_R^{\nu\beta}(\omega_2) \right\rangle_\varepsilon$. Этот объект обозначается “примесной линией”, соединяющей пару перечёркнутых кругов в нашей диаграммной технике.

Выведем аналитическое выражение, соответствующее такой “примесной линии”, используя спиновую структуру (2.21) и выражения (2.22) и (2.23). Перекрёстный член $\left\langle S_R^{(diag)}(\omega_1) S_R^{(off)}(\omega_2) \right\rangle_\varepsilon$ зануляется в силу своей нечётности по

ε , а отличные от нуля члены при $\omega_{1,2} \ll T$ дают:

$$\begin{aligned} \left\langle S_R^{(diag)}(\omega_1) S_R^{(diag)}(\omega_2) \right\rangle_\varepsilon &= \left\langle \frac{f^2(\varepsilon)\varepsilon^2}{((\omega_1/2 + i0)^2 - \varepsilon^2)((\omega_2/2 + i0)^2 - \varepsilon^2)} \right\rangle_\varepsilon \approx \\ &\approx \frac{14\zeta(3)}{\pi^2 WT} + \frac{i\pi}{4WT^2} \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2 + i0}, \quad (\text{Б.20}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\langle S_R^{(off)}(\omega_1) S_R^{(off)}(\omega_2) \right\rangle_\varepsilon &= \frac{\omega_1\omega_2}{4} \left\langle \frac{f^2(\varepsilon)}{((\omega_1/2 + i0)^2 - \varepsilon^2)((\omega_2/2 + i0)^2 - \varepsilon^2)} \right\rangle_\varepsilon \\ &\approx \frac{i\pi}{4WT^2} \frac{\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2 + i0}, \quad (\text{Б.21}) \end{aligned}$$

.4

В этом приложении мы вкратце обсудим вычисление функции, описывающей пространственные флуктуации проводимости $\langle \delta\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \delta\sigma(\mathbf{r}', \mathbf{y}) \rangle$, которая в рамках наинизшего порядка теории возмущений даётся диаграммой, изображённой на рис. 2.8. Аналитическое выражения для петлевых интегралов \mathcal{R}^{ij} , которые использовались в разделе 2.5.2 даётся:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{ij}(\omega, \mathbf{q}) &= i \frac{8\xi_0^4}{W^2} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} p^i p_+^j \\ &\times \left[\mathbf{B}(\Omega_-) L_R(\Omega_+, \mathbf{p}_+) (L_R(\Omega_-, \mathbf{p}_+) L_R(\Omega_-, \mathbf{p}_-) - L_A(\Omega_-, \mathbf{p}_+) L_A(\Omega_-, \mathbf{p}_-)) + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{B}(\Omega_+) (L_R(\Omega_+, \mathbf{p}_+) - L_A(\Omega_+, \mathbf{p}_+)) L_A(\Omega_-, \mathbf{p}_+) L_A(\Omega_-, \mathbf{p}_-) \right] \quad (\text{Б.22}) \end{aligned}$$

В низкочастотном пределе мы можем заменить $\mathbf{B}(\Omega) \approx 2T/\Omega$, и произвести интегрирование по энергии Ω используя вычеты. Получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{ij}(\omega, \mathbf{q}) &= 16WT\xi_0^4 \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \frac{p^i p_+^j}{(\varepsilon + \mathbf{p}_-^2 \xi_0^2)(\varepsilon + \mathbf{p}_+^2 \xi_0^2)} \\ &\times \frac{\varepsilon + (\mathbf{p}^2 + \mathbf{q}^2/4)\xi_0^2 - i\omega\tau/4}{(\varepsilon + \mathbf{p}_+^2 \xi_0^2 - i\omega\tau/2)(\varepsilon + (\mathbf{p}^2 + \mathbf{q}^2/4)\xi_0^2 - i\omega\tau/2)} \quad (\text{Б.23}) \end{aligned}$$

Этот интеграл должен быть сосчитан на конечном импульсе, и поэтому, вообще говоря, может обладать нетривиальной тензорной структурой; впрочем, нас интересует диагональная проводимость, даваемая выражением $\delta\sigma = \frac{1}{d}\delta\sigma^{ii}$. Мы переходим к интегралу по безразмерному импульсу $\mathbf{P} = \mathbf{p}\xi_0/\sqrt{\epsilon}$, раскладываем результат по малой частоте, берём след $\mathcal{R}^{ii}/d \equiv \mathcal{R}$ и вводим безразмерную функцию $\mathcal{F}(\mathbf{Q})$ согласно:

$$i\partial_\omega\mathcal{R}(\omega = 0, \mathbf{Q}) = -\frac{W}{\xi_0^{d-2}\epsilon^{3-d/2}}\frac{\pi}{d}\int\frac{d^d\mathbf{P}}{(2\pi)^d}\frac{\mathbf{P}^2 + \mathbf{P}\mathbf{Q}/2}{(1 + \mathbf{P}_-^2)(1 + \mathbf{P}_+^2)^2} \times \left(\frac{1}{1 + P^2 + \mathbf{Q}^2/4} + \frac{2}{1 + \mathbf{P}_+^2}\right) \equiv -\frac{W}{\xi_0^{d-2}\epsilon^{3-d/2}}\mathcal{F}(\mathbf{Q}) \quad (\text{B.24})$$

Вычислим эту функцию при произвольной размерности.

Введём замену $a = 1 + P^2 + Q^2/4$, и проведём усреднение по углам. Получаем:

$$\mathcal{F}(\mathbf{Q}) = \frac{1}{16}\int_0^\infty P^3 dP \frac{12a^4 + Q^2(2P^2Q^2 - 5a^2)(a + 2P^2)}{a^3(a^2 - P^2Q^2)^{5/2}} \quad (\text{B.25})$$

Интегрирование по импульсам может быть произведено используя замену $Q = 2\sinh\theta$; это приводит нас к ответу:

$$\mathcal{F}(Q = 2\sinh\theta) = \frac{1}{64\cosh^2\theta}\left(1 + 3\frac{2\theta}{\sinh 2\theta}\right), \quad (\text{B.26})$$

асимптотическое поведение которого имеет вид:

$$\mathcal{F}(Q) \approx \frac{1}{16} \cdot \begin{cases} 1, & Q \ll 1 \\ 1/Q^2, & Q \gg 1 \end{cases}, \quad (2D) \quad (\text{B.27})$$

Аналогичная подстановка $a = 1 + P^2 + Q^2/4$ после углового усреднения приводит нас к интегралу:

$$\mathcal{F}(\mathbf{Q}) = \frac{1}{12\pi}\int_0^\infty dP\frac{P}{a^3}\left[\frac{a + 2P^2}{Q}\operatorname{arctanh}\frac{PQ}{a} - \frac{aP(a^3 - 4a^2P^2 + 2P^4Q^2)}{(a^2 - P^2Q^2)^2}\right]. \quad (\text{B.28})$$

Точно такая же замена $Q = 2 \sinh \theta$ позволяет вычислить и этот интеграл точно:

$$\mathcal{F}(Q = 2 \sinh \theta) = \frac{1}{192 \cosh^2 \theta} \left(2 + \frac{1}{\cosh^2(\theta/2)} \right), \quad (\text{Б.29})$$

а асимптотическое поведение даётся следующими формулами:

$$\mathcal{F}(Q) \approx \frac{1}{192} \cdot \begin{cases} 3, & Q \ll 1 \\ 8/Q^2, & Q \gg 1 \end{cases}, \quad (3D) \quad (\text{Б.30})$$

.1

Стартуя с выражения (3.2), можно удобно строить диаграммную технику в терминах вспомогательного поля φ . Полезно вывести набор точных тождеств, связывающих корреляционные функции этого поля и корреляционные функции концентрации вихрей.

Произвольная корреляционная функция определяется следующим образом:

$$\langle O[\delta n, \varphi] \rangle \equiv \int \mathcal{D}\varphi \text{Tr}_v O[\delta n, \varphi] e^{-S[\varphi, \delta n]} \quad (\text{B.1})$$

Из инвариантности меры интегрирования по отношению к инфинитезимальным преобразованиям $\varphi_r^a \mapsto \varphi_r^a + \epsilon_r^a$, мы немедленно можем получить:

$$\langle O[\delta n, \varphi] \rangle \equiv \int \mathcal{D}\varphi \text{Tr}_v \left(O[\delta n, \varphi] + \sum_r \epsilon_r^a \left[\frac{\partial O[\delta n, \varphi]}{\partial \varphi_r^a} - O[\delta n, \varphi] \frac{\partial S[\varphi, \delta n]}{\partial \varphi_r^a} \right] \right) e^{-S[\varphi, \delta n]} \quad (\text{B.2})$$

откуда, в силу произвольности ϵ_r , немедленно следует тождество (в последнем равенстве мы явно учли вид действия, формула (3.2)):

$$\left\langle \frac{\partial O[\delta n, \varphi]}{\partial \varphi_r^a} \right\rangle = \left\langle O[\delta n, \varphi] \frac{\partial S[\varphi, \delta n]}{\partial \varphi_r^a} \right\rangle = \left\langle O[\delta n, \varphi] \left\{ \sum_{r_1} (\beta \hat{J})_{rr_1}^{-1} \varphi_{r_1}^a - i \delta n_r^a \right\} \right\rangle \quad (\text{B.3})$$

Выбирая различные O , можно получить разные полезные тождества на корреляционные функции. В частности:

$$O[\delta n, \varphi] = \varphi_{r'}^b \Rightarrow \delta_{ab} \delta_{rr'} = \sum_{r_1} (\beta \hat{J})_{rr_1}^{-1} \langle \varphi_{r_1}^a \varphi_{r'}^b \rangle - i \langle \delta n_r^a \varphi_{r'}^b \rangle \quad (\text{B.4})$$

$$O[\delta n, \varphi] = i\delta n_{\mathbf{r}'}^b \Rightarrow 0 = \sum_{\mathbf{r}_1} (\beta \hat{J})_{\mathbf{r}\mathbf{r}_1}^{-1} i \langle \varphi_{\mathbf{r}_1}^a \delta n_{\mathbf{r}'}^b \rangle + \langle \delta n_{\mathbf{r}}^a \delta n_{\mathbf{r}'}^b \rangle \quad (\text{B.5})$$

откуда следует:

$$\langle \delta n_{\mathbf{r}}^a \delta n_{\mathbf{r}'}^b \rangle = \delta_{ab} (\beta \hat{J})_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}^{-1} - \sum_{\mathbf{r}_{1,2}} (\beta \hat{J})_{\mathbf{r}\mathbf{r}_1}^{-1} \langle \varphi_{\mathbf{r}_1}^a \varphi_{\mathbf{r}_2}^b \rangle (\beta \hat{J})_{\mathbf{r}_2\mathbf{r}'}^{-1} \quad (\text{B.6})$$

В частности, если коррелятор $\langle \varphi \varphi \rangle$ имеет вид (3.8), то

$$\langle \delta n \delta n \rangle = \frac{\hat{Q}}{1 + \beta \hat{J} \hat{Q}} \quad (\text{B.7})$$

Также стоит отметить, что с учётом седловых уравнений (3.8), локальная корреляционная функция получается равной $\langle \delta n_{\mathbf{r}}^a \delta n_{\mathbf{r}}^b \rangle = \hat{Q} - \hat{Q} \hat{G} \hat{Q}$ и, вообще говоря, не совпадает с \hat{Q} ; однако, поправка пренебрежимо мала (по параметру $1/W$).

.1.1

Поступая аналогично, можно вывести также выражение и для неприводимой четверной корреляционной функции:

$$\langle \langle \delta n_{\mathbf{r}_1}^a \delta n_{\mathbf{r}_2}^b \delta n_{\mathbf{r}_3}^c \delta n_{\mathbf{r}_4}^d \rangle \rangle = (\beta \hat{J})_{\mathbf{r}_1\mathbf{r}'_1}^{-1} (\beta \hat{J})_{\mathbf{r}_2\mathbf{r}'_2}^{-1} (\beta \hat{J})_{\mathbf{r}_3\mathbf{r}'_3}^{-1} (\beta \hat{J})_{\mathbf{r}_4\mathbf{r}'_4}^{-1} \langle \langle \varphi_{\mathbf{r}'_1}^a \varphi_{\mathbf{r}'_2}^b \varphi_{\mathbf{r}'_3}^c \varphi_{\mathbf{r}'_4}^d \rangle \rangle \quad (\text{B.8})$$

В окрестности T_c в рамках теории среднего поля, коррелятор $\langle \langle \mathcal{G}_{\mathbf{r}}^{ab} \mathcal{G}_{\mathbf{r}'}^{cd} \rangle \rangle \simeq \langle \langle \varphi_{\mathbf{r}}^a \varphi_{\mathbf{r}}^b \varphi_{\mathbf{r}'}^c \varphi_{\mathbf{r}'}^d \rangle \rangle$, (при $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg l$, по определению матрицы \hat{G}). На диаграммном языке очевидно, что координатная зависимость коррелятора φ в пределе $|\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2| \cdot l$ и $|\mathbf{r}'_3 - \mathbf{r}'_4| \cdot l$ может быть восстановлена как:

$$\langle \langle \varphi_{\mathbf{r}'_1}^a \varphi_{\mathbf{r}'_2}^b \varphi_{\mathbf{r}'_3}^c \varphi_{\mathbf{r}'_4}^d \rangle \rangle \simeq G_{\mathbf{r}'_1\mathbf{x}}^{aa'} G_{\mathbf{r}'_2\mathbf{x}}^{bb'} G_{\mathbf{r}'_3\mathbf{y}}^{cc'} G_{\mathbf{r}'_4\mathbf{y}}^{dd'} \langle \langle \delta \mathcal{Q}_{\mathbf{x}}^{a'b'} \delta \mathcal{Q}_{\mathbf{y}}^{c'd'} \rangle \rangle \quad (\text{B.9})$$

Далее, мы можем записать $(\beta \hat{J})_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}^{-1} \hat{G}_{\mathbf{r}'\mathbf{x}} = \delta_{\mathbf{r}\mathbf{x}} - \hat{Q}_{\mathbf{r}} \hat{G}_{\mathbf{r}\mathbf{x}}$; величина \hat{Q} содержит малость по $1/W$, и поэтому эти «ампутированные хвосты» в действительности могут быть заменены на дельта-функцию. Как следствие:

$$\langle\langle \delta n_r^a \delta n_r^b \delta n_{r'}^c \delta n_{r'}^d \rangle\rangle \simeq \langle\langle \hat{Q}_r^{ab} \hat{Q}_{r'}^{cd} \rangle\rangle \quad (\text{B.10})$$

Наконец, буквально флуктуация поляризуемости соответствует репличной компоненте с $a = c \neq b = d$, что может быть симметризовано как:

$$\overline{\langle \delta n_r \delta n_{r'} \rangle^2} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n(n-1)} \sum_{a \neq b} \langle\langle \hat{Q}_r^{ab} \hat{Q}_{r'}^{ab} \rangle\rangle, \quad \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n(n-1)} P_{bb}^{aa} = \frac{3}{2} \quad (\text{B.11})$$

.2

В основном тексте было получено действие (3.6), описывающее два матричных поля:

$$nS[\hat{\mathcal{G}}, \hat{\mathcal{Q}}] = \frac{1}{2} \text{Tr}(\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{Q}}) + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln(1 + \beta \hat{J}\hat{\mathcal{Q}}) + \beta n \sum_r F_V[\hat{\mathcal{G}}_r] \quad (\text{B.12})$$

в котором $F_V[\hat{\mathcal{G}}]$ представляет собой локальную свободную энергию одноузельной модели с гамильтонианом (3.7):

$$- \beta \hat{H}_V[\hat{\mathcal{G}}] = \frac{1}{2} \sum_{ab} \delta n^a (\beta^2 W^2 + \mathcal{G}^{ab}) \delta n^b + \beta \mu \sum_a \delta n^a \quad (\text{B.13})$$

В этом приложении будет выведено разложение выписанного действия около реплично-симметричного решения седловых уравнений в окрестности фазового перехода. Подставляя в действие разложение в виде $\hat{\mathcal{G}} = \hat{\mathcal{G}}_0 + \delta \hat{\mathcal{G}}$ и $\hat{\mathcal{Q}} = \hat{\mathcal{Q}}_0 + \delta \hat{\mathcal{Q}}$, флуктуации второго члена расписываются следующим образом:

$$\frac{1}{2} \delta \text{Tr} \ln(1 + \beta \hat{J}\hat{\mathcal{Q}}) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k} \text{Tr}(\hat{G}\delta\hat{\mathcal{Q}})^k = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k} \frac{\mathcal{B}_k}{a^{2k-2}} \text{Tr}(\delta\hat{\mathcal{Q}})^k \quad (\text{B.14})$$

(последнее равенство написано для репликонных флуктуаций $\sum_a \delta \mathcal{Q}_{ab} = 0$), где обозначено

$$\mathcal{B}_k = \int (d\mathbf{q}) G_0^k(\mathbf{q}) = \frac{\beta U_0}{2} \frac{1}{k-1} \left(\frac{a^2}{\nu_0 T} \right)^{k-1}, \quad k > 1 \quad (\text{B.15})$$

Флуктуации третьего члена записываются следующим образом:

$$\beta n \delta F_V[\hat{\mathcal{G}}] = - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k k!} Q_{(a_1 b_1) \dots (a_k b_k)} \delta \mathcal{G}_{a_1 b_1} \dots \delta \mathcal{G}_{a_k b_k}, \quad (\text{B.16})$$

где введён следующий неприводимый коррелятор, в котором переменными являются пары $\delta n_{a_i} \delta n_{b_i}$:

$$Q_{(a_1 b_1) \dots (a_k b_k)} \equiv \langle \langle (\delta n_{a_1} \delta n_{b_1}) \dots (\delta n_{a_k} \delta n_{b_k}) \rangle \rangle_V \quad (\text{B.17})$$

и усреднение проводится с гамильтонианом $\hat{H}_V[\hat{\mathcal{G}}_0]$.

Мягкой модой в этом разложении является мода $\delta \hat{\mathcal{G}} = \hat{\Psi}$ и $\delta \hat{\mathcal{Q}} = Q_{22} \hat{\Psi}$. Тогда член $\text{Tr} \ln$ расписывается явно следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta \text{Tr} \ln(1 + \beta \hat{J} \hat{\mathcal{Q}}) &= \nu_0 T_c \sum_{k=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{6} \right)^{k-1} \frac{1}{2k(k-1)} \text{Tr} \hat{\Psi}^k \\ &= \nu_0 T_c \left(-\frac{1}{24} \text{Tr} \hat{\Psi}^2 + \frac{1}{432} \text{Tr} \hat{\Psi}^3 - \frac{1}{5184} \text{Tr} \hat{\Psi}^4 + \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

С другой стороны, член F_V генерирует слагаемые с различной репличной структурой:

$$\beta n \delta^{(3)} F_V[\hat{\mathcal{G}}] = -\frac{1}{12} \left(Q_{33} \sum_{ab} \Psi_{ab}^3 + 2Q_{222} \text{tr} \hat{\Psi}^3 \right) = -\nu_0 T \left(\frac{1}{360} \sum_{ab} \Psi_{ab}^3 + \frac{1}{180} \text{tr} \hat{\Psi}^3 \right) \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{aligned}
\beta n \delta^{(4)} F_V[\hat{\mathcal{G}}] &= - \left(\frac{5}{32} Q_{2222} \text{tr} \hat{\Psi}^4 + \frac{1}{48} Q_{44} \sum_{ab} \Psi_{ab}^4 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{8} Q_{422} \sum_{abc} \Psi_{ab}^2 \Psi_{ac}^2 + \frac{1}{4} Q_{332} \sum_{abc} \Psi_{ab}^2 \Psi_{ac} \Psi_{bc} \right) = \\
&= -\nu_0 T \left(\frac{1}{896} \text{tr} \hat{\Psi}^4 + \frac{1}{2016} \sum_{ab} \Psi_{ab}^4 + \frac{1}{840} \sum_{abc} \Psi_{ab}^2 \Psi_{ac} \Psi_{bc} - \frac{1}{840} \sum_{abc} \Psi_{ab}^2 \Psi_{ac}^2 \right)
\end{aligned} \tag{B.20}$$

где обозначены:

$$Q_{222} = \int \frac{\nu(u) du}{(2 \cosh \frac{\beta(u-\mu)}{2})^6} \approx \frac{\nu_0 T}{30}, \quad Q_{2222} = \int \frac{\nu(u) du}{(2 \cosh \frac{\beta(u-\mu)}{2})^8} \approx \frac{\nu_0 T}{140} \tag{B.21}$$

$$Q_{33} = \int \frac{\nu(u) du \tanh^2 \frac{\beta(u-\mu)}{2}}{(2 \cosh \frac{\beta(u-\mu)}{2})^4} \approx \frac{\nu_0 T}{30}, \quad Q_{332} = \int \frac{\nu(u) du \tanh^2 \frac{\beta(u-\mu)}{2}}{(2 \cosh \frac{\beta(u-\mu)}{2})^6} \approx \frac{\nu_0 T}{210} \tag{B.22}$$

$$Q_{44} = \int \frac{\nu(u) du \left(\left(2 \sinh \frac{\beta(u-\mu)}{2} \right)^2 - 2 \right)^2}{(2 \cosh \frac{\beta(u-\mu)}{2})^8} \approx \frac{\nu_0 T}{42}, \tag{B.23}$$

$$Q_{422} = \int \frac{\nu(u) du \left(\left(2 \sinh \frac{\beta(u-\mu)}{2} \right)^2 - 2 \right)}{(2 \cosh \frac{\beta(u-\mu)}{2})^8} = -\frac{\nu_0 T}{105} \tag{B.24}$$

.3

Свободная энергия, в пересчёте на один узел решётки, в седловом приближении, в котором мы пренебрегаем пространственными флуктуациями матриц, состоит из нескольких слагаемых $\beta F = S[\hat{\mathcal{G}}, \hat{\mathcal{Q}}]/N = (S_{\text{L}}[\hat{\mathcal{G}}, \hat{\mathcal{Q}}] + S_{\text{f}}[\hat{\mathcal{Q}}])/N +$

$\beta F_V[\hat{\mathcal{G}}]$, где в приближении одноступенчатого нарушения репличной симметрии слагаемые имеют вид:

$$S_L[\hat{\mathcal{G}}, \hat{\mathcal{Q}}]/N = \frac{1}{2} \left(-\frac{1-m}{m} \mathcal{G}_0 \mathcal{Q}_0 + \frac{1}{m} \mathcal{G}_0 \mathcal{Q}_1 + \mathcal{G}_0 \mathcal{Q}_2 + \mathcal{G}_1 \mathcal{Q}_1 + m \mathcal{G}_1 \mathcal{Q}_2 + \mathcal{G}_2 \mathcal{Q}_1 \right) \quad (\text{B.25})$$

$$S_f/N = \frac{\beta U_0}{4} \left(-\left(\frac{1}{m} - 1\right) \left(\mathcal{Q}_0 + \mathcal{Q}_0 \ln \frac{1}{\beta U_0 \mathcal{Q}_0} \right) + \frac{1}{m} \left(\mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_1 \ln \frac{1}{\beta U_0 \mathcal{Q}_1} \right) + \mathcal{Q}_2 \ln \frac{1}{\beta U_0 \mathcal{Q}_1} \right) \quad (\text{B.26})$$

$$\beta F_V = \frac{1}{2} (\mathcal{G}_0 + m \mathcal{G}_1) \left(\frac{1}{2} - K \right)^2 - \frac{1}{8} \mathcal{G}_0 - \beta \tilde{\mu} \left(\frac{1}{2} - K \right) - \frac{1}{m} \int du_2 \nu_2(u_2) \ln \Xi(u_2) \quad (\text{B.27})$$

где введены перенормированных химический потенциал $\tilde{\mu} = \mu + T(\mathcal{G}_0 + m \mathcal{G}_1) \left(\frac{1}{2} - K \right)$, перенормированный беспорядок $\tilde{W} = \sqrt{W^2 + T^2 \mathcal{G}_2}$, а также две “функции распределения”:

$$\nu_2(u_2) = \frac{\exp(-u_2^2/2\tilde{W}^2)}{\sqrt{2\pi\tilde{W}}}, \quad \nu_1(u_1, u_2) = \frac{\exp(-u_1^2/2T^2\mathcal{G}_1)}{\sqrt{2\pi\mathcal{G}_1}T} \left[2 \cosh \frac{\beta(u_1 + u_2 - \tilde{\mu})}{2} \right]^m, \quad (\text{B.28})$$

$$\Xi(u_2) = \int du_1 \nu_1(u_1, u_2) \quad (\text{B.29})$$

В приближении $W \rightarrow \infty$, можно провести усреднение по случайному полю u_2 и выделить ведущую асимптотику по U_0/W :

$$\beta F_V = \frac{1}{2} (\mathcal{G}_0 + m \mathcal{G}_1) K(1-K) - \beta \tilde{\mu} \left(\frac{1}{2} - K \right) - \left\langle \ln \left(2 \cosh \frac{\beta(u_2 - \tilde{\mu})}{2} \right) \right\rangle_2 - \frac{1}{2} \nu_0 T f_V(m, \mathcal{G}_1) \quad (\text{B.30})$$

где введена безразмерная функция:

$$f_v(m, \mathcal{G}_1) = \frac{2}{m} \int dz \left(\ln \Xi(z, m, \mathcal{G}_1) - m \ln 2 \cosh \frac{z}{2} - \frac{m^2 \mathcal{G}_1}{8} \right) \quad (\text{B.31})$$

$$\Xi(z, m, \mathcal{G}_1) = \Xi(u_2 \equiv \tilde{\mu} + Tz) = \int \frac{dy e^{-y^2/2\mathcal{G}_1}}{\sqrt{2\pi\mathcal{G}_1}} \left[2 \cosh \frac{y+z}{2} \right]^m \quad (\text{B.32})$$

где величина $z = \beta(u_2 - \tilde{\mu})$, а $y = \beta u_1$. Вариация полной свободной энергии по \mathcal{Q}_i и \mathcal{G}_i приводит нас к набору седловых уравнений, определяющих \mathcal{G}_i и \mathcal{Q}_i соответственно — к уравнениям (3.35, 3.36).

3.1

$$T \ll T_c$$

При низких температурах, решения седловых уравнений ведут себя следующим образом: $m \ll 1$, $\mathcal{G}_1 \gg 1$, $\xi \equiv m^2 \mathcal{G}_1 / 8 = O(1)$. При таком скейлинге, можно записать:

$$\begin{aligned} \Xi \left(z = \frac{x}{m}, m, \mathcal{G}_1 \right) &\stackrel{m \ll 1}{\equiv} \Xi(x, \xi) = \int \frac{dy}{4\sqrt{\pi\xi}} \exp \left(-\frac{y^2}{16\xi} + \frac{1}{2}|y+x| \right) \\ &= \frac{e^\xi}{2} \left[e^{y/2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{4\xi+x}{4\sqrt{\xi}} \right) \right) + e^{-x/2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{4\xi-x}{4\sqrt{\xi}} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

и для вспомогательной безразмерной функции работает скейлинг $f_v(m, \mathcal{G}_1) = 8f(\xi)/m^2$, где:

$$f(\xi) = \frac{1}{4} \int dx \left(\ln \Xi(x, \xi) - \frac{|x|}{2} - \xi \right) \quad (\text{B.34})$$

С учётом этого, седловые уравнения на $q \equiv \mathcal{Q}_0/\nu_0 T$, ξ и m могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{cases} q & = f'(\xi)/(1-m) \\ \xi & = \frac{3}{4} m \beta T_c \ln \frac{1}{f'(\xi)} \\ 2f(\xi) - \xi f'(\xi) & = \frac{3}{4} m \beta T_c (1-q) \end{cases} \quad (\text{B.35})$$

Из этих уравнений видно, что если предположить скейлинг $m = \mu(T/T_c)$, $\mu = O(1)$, то система уравнений становится полностью безразмерной, и может быть сведена к одному лишь уравнению на ξ , которое может быть решено численно:

$$\xi = \frac{2f(\xi) - \xi f'(\xi)}{1 - f'(\xi)} \ln \frac{1}{f'(\xi)} \Rightarrow \xi \approx 9.17 \quad (\text{B.36})$$

$$q = f'(\xi) \approx 1.43 \cdot 10^{-5}, \quad \mu = \frac{4(2f(\xi) - \xi f'(\xi))}{3(1 - q)} \approx 1.10 \quad (\text{B.37})$$

Из-за того, что решение ξ получилось достаточно большим, мы можем получить эти решения аналитически с достаточно хорошей точностью. Асимптотика скейлинговой функции при больших аргументах имеет следующий вид:

$$f(\xi) \approx \frac{\pi^2}{24} - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\xi}} e^{-\xi}, \quad \xi \gg 1 \quad (\text{B.38})$$

поэтому $q \approx \frac{1}{4} \sqrt{\pi/\xi} e^{-\xi}$ (что даёт $1.52 \cdot 10^{-5}$), а $\mu \approx 8f(\xi)/3 \approx \pi^2/9$ (что даёт 1.10). Если подставить эту асимптотику в уравнение на ξ , то можно увидеть, что оно действительно содержит численно малый параметр $\epsilon = \frac{6}{\pi^2} - \frac{1}{2} \approx 0.11$ и имеет приближённый вид $\ln \frac{16\xi}{\pi} \approx \epsilon\xi$.

3.2

Для функции распределения локального потенциала вихрей мы можем записать следующее выражение:

$$P(u) = \langle \langle \delta(u - (u_1 + u_2)) \rangle_1 \rangle_2 \equiv \int du_2 \nu_2(u_2) \frac{1}{\Xi(u_2)} \int du_1 \nu_1(u_1, u_2) \delta(u - (u_1 + u_2)) \quad (\text{B.39})$$

где усреднения $\langle \dots \rangle_1$ и $\langle \dots \rangle_2$ проводятся с функциями распределения (B.28).

При низких температурах, функция распределения наиболее заметно модифицируется в окрестности химического потенциала в области, размер которой имеет порядок T_c . Поэтому мы будем интересоваться функцией распреде-

ления величины $h \equiv (u - \tilde{\mu})/T_c$. Величина $\Xi(u_2)$ уже была исследована в низкотемпературном пределе в уравнении (B.33), где, напомним, $z = \beta(u_2 - \tilde{\mu})$. В этом пределе функция распределения получается равной:

$$P(h) = \nu_0 T_c \cdot \frac{\exp(\mu|h|/2)}{4\sqrt{\pi\xi}} \int \frac{dx}{\Xi(x,\xi)} \exp\left(-\frac{(\mu h - x)^2}{16\xi}\right) \quad (\text{B.40})$$

Как и в предыдущем разделе, эти выражения могут быть дальше упрощены аналитически, если предположить $\xi \gg 1$. В таком случае разложение даёт:

$$\Xi(x,\xi) \approx \exp(|x|/2 + \xi), \quad P(h) \approx \nu_0 T_c \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{4\xi - \mu|h|}{4\sqrt{\xi}}\right). \quad (\text{B.41})$$

3.3

Выражение для энтропии может быть получено дифференцированием полной свободной энергии по T . Учитывая также все седловые уравнение, это выражение может быть приведено к следующему виду:

$$S = \nu_0 T \left(f_V(m, \mathcal{G}_1) + \frac{1}{2} m \frac{\partial f_V}{\partial m} - \mathcal{G}_1 \frac{\partial f_V}{\partial \mathcal{G}_1} + \frac{\pi^2}{3} \right) - 3\beta T_c \mathcal{Q}_0 \quad (\text{B.42})$$

Как было выяснено выше, при низких температурах функция удовлетворяет скейлингу $f_V(m, \mathcal{G}_1) \approx 8f_V(\xi)/m^2$. При таком скейлинге, комбинация первых трёх слагаемых тождественно сокращает друг друга; однако стоит отметить, что, поскольку $f_V \propto \beta^2$, то это сокращение гарантирует лишь отсутствие нефизических членов $\sim 1/T$ в энтропии. Чтобы найти нуль-температурную энтропию, необходимо также учесть поправки к этому скейлингу:

$$\Delta f_V(m, \mathcal{G}_1) \equiv f_V(m, \mathcal{G}_1) - \frac{8}{m^2} f(\xi) = \frac{2}{m^2} \int dx \ln \frac{\Xi\left(\frac{x}{m}, m, \mathcal{G}_1\right)}{\Xi(x, \xi)} - \frac{\pi^2}{3} \quad (\text{B.43})$$

Величина под логарифмом при $m \ll 1$ близка к 1, поэтому можно разложить $\ln x \approx x - 1$. Получаем:

$$\Delta f_V(m, \mathcal{G}_1) = \frac{2}{m^2} \int \frac{dx}{\Xi(x, \xi)} \int \frac{dy}{4\sqrt{\pi\xi}} \exp\left(-\frac{y^2}{16\xi}\right) \left(\left[2 \cosh \frac{y+x}{2m} \right]^m - e^{|x+y|/2} \right) - \frac{\pi^2}{3} \underset{m \ll 1}{\approx} \frac{\pi^2}{3} (g(\xi) - 1) \quad (\text{B.44})$$

где:

$$g(\xi) = \frac{1}{4\sqrt{\pi\xi}} \int \frac{dx}{\Xi(x, \xi)} \exp\left(-\frac{x^2}{16\xi}\right) \equiv \frac{P(h=0)}{\nu_0 T_c} \quad (\text{B.45})$$

Энтропия при низких температурах тем самым оказывается равной $S = -3\beta T_c \mathcal{Q}_0 + \frac{\pi^2}{3} \nu_0 T g(\xi) \rightarrow -3\beta T_c \mathcal{Q}_0$.