

На правах рукописи

**Гелаш Андрей Александрович**

**Нелинейная стадия  
модуляционной неустойчивости**

01.04.02 Теоретическая физика

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

**Новосибирск 2014**

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет».

Научный руководитель: **Захаров Владимир Евгеньевич**  
доктор физико-математических наук,  
академик РАН

Официальные оппоненты: **Матвеев Владимир Борисович**  
доктор физико-математических наук  
Институт ИБМП ФГАОУ ВПО СПб ГУАП  
г. Санкт-Петербург, главный научный  
сотрудник

**Габитов Ильдар Равильевич**  
кандидат физико-математических наук  
профессор университета Аризоны,  
г. Тусон, США (The University of Arizona,  
Department of Mathematics)

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное  
учреждение науки Математический институт  
им. В.А. Стеклова Российской академии наук

Защита диссертации состоится 26 декабря 2014 г. в 11 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 002.207.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук по адресу: 142432, Московская обл., г. Черноголовка, просп. Академика Семенова, д. 1-А, Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН и на сайте [www.itp.ac.ru](http://www.itp.ac.ru).

Автореферат разослан \_\_\_\_\_ 2014 г.

Учёный секретарь  
диссертационного совета,  
доктор физико-математических наук

Гриневич Пётр Георгиевич

# Общая характеристика работы

## Актуальность темы.

Фокусирующее нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) является одной из важнейших моделей для изучения распространения квазимонохроматических волн в слабонелинейных средах. В частности НУШ описывает волны на глубокой воде [1], волны в оптическом волокне [2], Ленгмюровские волны в плазме [3] и Бозе-конденсат с притяжением [4].

НУШ имеет простое решение - монохроматическую волну с частотой, зависящей от амплитуды - конденсат. Конденсат неустойчив относительно малых возмущений. Это явление носит название модуляционная неустойчивость (МН). Линейная стадия МН представляет собой экспоненциальный рост начального возмущения. Но как выглядит поведение решения на больших временах - нелинейная стадия? Для пространственной размерности  $D=2, 3$  ответ известен - МН приводит к формированию сингулярных решений за конечное время - коллапсов. В размерности  $D=1$  коллапсы запрещены (см. [5]), однако теперь развитие МН может приводить к формированию волн экстремально большой амплитуды (т.н. "волн-убийц") [6, 7, 8]. Поэтому, изучение последствий развития модуляционной неустойчивости на больших временах является задачей, важной с практической точки зрения, ключевой для создания теории волн-убийц в океане и теории экстремальных волн в оптическом волокне.

НУШ является моделью первого приближения. Для поверхности жидкости эта модель описывает слабонелинейный волновой пакет с крутизной не более чем 0.15 [9]. В нелинейной оптике его приложения также ограничены [4]. В настоящее время разработано большое количество моделей, обобщающих НУШ. Для поверхностных волн это уравнения Дысте [10, 11], для волн в оптическом волокне это уравнения включающие третью производную по времени и более сложные формы нелинейности (см. [12, 13]). Также волны-убийцы в океане изучались с помощью численного моделирования в рамках точных уравнений Эйлера для потенциального течения со свободной границей [6, 14]. Однако, многие особенности решений НУШ сохраняются на качественном уровне и в более точных моделях, что делает исследование интегрируемого НУШ чрезвычайно актуальным. К тому же, в настоящее время уровень экспериментальных установок позволяет создавать условия, необходимые для выполнения НУШ. При этом анали-

тические решения НУШ на фоне конденсата воспроизводятся в лабораторных экспериментах по изучению волн в оптоволокне и водных бассейнах с превосходной точностью [16, 15, 17].

С 1972 г. известно, что НУШ является системой, которая может быть полностью проинтегрирована с помощью метода обратной задачи рассеяния [18]. С тех пор сотни статей и несколько монографий были посвящены этой теме (см., например, [19, 3, 20, 21]). Среди них можно найти и работы посвящённые применению метода обратной задачи к фокусирующему НУШ на фоне конденсата [22], [23], [26]. Тем не менее, важнейший вопрос о том какова нелинейная стадия модуляционной неустойчивости был не решен.

НУШ обладает большим количеством аналитических решений. Поэтому естественно надеяться, что нелинейное развитие модуляционной неустойчивости описывается некоторыми из них. Нас интересует неустойчивость, возникающая из локализованных возмущений конденсата. Исторически, первое подобное решение было найдено Перегрином в 1983 [27] (т.н. солитон Перегрин). Это полностью гомоклинический сценарий развития модуляционной неустойчивости. Развитие неустойчивости начинается с конденсата при  $t \rightarrow -\infty$ , и возвращается к нему при  $t \rightarrow +\infty$ . При этом максимальное значение амплитуды решения в три раза превышает амплитуду невозмущённого конденсата. В последнее время это решение привлекает к себе много внимания [28], [29]. Было экспериментально подтверждено его воспроизведение в гидродинамике и оптике [16, 17]. В 1985 был найден двухсолитонный аналог этого решения [30], а в настоящее время В. Б. Матвеевым, П. Дюбардом и их соавторами активно изучаются мульти-Перегриновские решения (см. [31], [32]).

Однако, результаты численного моделирования [25], [11] демонстрируют формирование осциллирующих структур - бризеров. Поэтому, мы полагаем, что гомоклинический сценарий развития модуляционной неустойчивости является не самым правдоподобным. К тому же, решение Перегрин является весьма специальным сценарием развития МН и существует необходимость в построении теории, позволяющей описывать эволюцию произвольного начального возмущения.

**Цель диссертационной работы.** Целью работы является описание нелинейной стадии модуляционной неустойчивости с помощью точных решений НУШ на фоне конденсата. А также, построение общего  $N$ -

солитонного решения НУШ на произвольном фоне с помощью метода одевания, исследование солитонных решений НУШ на фоне конденсата и обобщение результатов на векторный случай - систему Манакова.

**Научная новизна.** заключается в следующих основных результатах, выносимых на защиту:

1. С помощью метода одевания построено общее  $N$  - солитонное решение НУШ на фоне конденсата. Применение униформизации позволило получить явные выражения для солитонных решений в достаточно простом и ясном виде, удобном для анализа. Солитонные решения НУШ на фоне конденсата описаны с единой точки зрения. Введено понятие регулярного решения, т.е. решения которое не меняет фазу конденсата и тем самым может описывать модуляционную неустойчивость, развивающуюся из локализованных возмущений.
2. Обнаружен широкий класс  $2N$  - солитонных (суперрегулярных) решений, которые описывают нелинейную стадию модуляционной неустойчивости, развивающуюся из малого локализованного возмущения. Эти решения формируют бесконечномерное функциональное пространство. Мы полагаем, что любое неустойчивое возмущение конденсата может быть в пределе аппроксимировано нелинейной комбинацией суперрегулярных решений.
3. Исследованы вырожденные солитонные решения НУШ на фоне конденсата, в частности, описаны вырожденные суперрегулярные решения.
4. Построено  $N$ -солитонное решение НУШ на фоне солитона Перегринна. Этот результат позволяет избежать вычисления предела всякий раз при исследовании новой нелинейной комбинации солитонов и тем самым демонстрирует преимущества метода одевания. В дальнейшем это позволит исследовать взаимодействие солитона Перегринна и суперрегулярных решений.
5. Показана возможность наблюдения суперрегулярных решений в экспериментах с гравитационными волнами на поверхности жидкости. Указаны параметры при которых целесообразно проводить данные эксперименты. Представлены результаты, демонстрирующие хорошее согласие теории и эксперимента.

6. Построено обобщение метода одевания для НУШ на фоне конденсата на векторный случай - систему Манакова. Описано общее одно-солитонное решение. Установлено, что выбор пары полюсов вблизи разреза с противоположными значениями параметра  $\alpha$  не приводит к появлению суперрегулярных решений, за исключением тривиального обобщения решений скалярного случая.

**Научная и практическая ценность.** Полученные результаты позволяют лучше понять процесс нелинейного развития модуляционной неустойчивости и имеют важное значение для развития теории волн-убийц. Разработанный для нелинейного уравнения Шредингера метод одевания на фоне конденсата является важным и удобным инструментом для нахождения солитонных решений, которой может быть использован в дальнейших исследованиях.

**Апробация диссертации.** Результаты диссертации докладывались: на XX и XXI научных сессиях Совета по нелинейной динамике РАН (Москва, 2011 и 2012), на всероссийской конференции молодых ученых в рамках XII научной школы «Нелинейные волны - 2012» (Нижний Новгород, 2012), на международной конференции «SOLITONS, COLLAPSES AND TURBULENCE» (Новосибирск, 2012), на международной конференции «American mathematical society meeting» (Тусон, США, 2012), на международной конференции «European Geosciences Union General Assembly» (Вена, Австрия, 2013), на международной конференции «Nonlinear Waves Theory and Applications» (Пекин, Китай, 2013), на международной конференции «SOLITONS, COLLAPSES AND TURBULENCE» (Черноголовка, 2014), на международной конференции «Наука будущего» (Санкт-Петербург, 2014), а также на теоретическом семинаре в ИТФ им. Л. Д. Ландау РАН и теоретическом семинаре в ИЯФ СО РАН.

**Публикации.** Результаты диссертации опубликованы в трёх статьях в научных журналах, входящих в перечень ВАК. Список работ приведен в конце автореферата.

#### **Структура диссертации.**

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы.

# Краткое содержание работы

## Введение

Во введении обоснована актуальность рассматриваемой темы, научная новизна исследований, а также сформулированы цели и приведены основные результаты работы.

## Глава 1. Метод одевания для нелинейного уравнения Шредингера

В первой главе строится схема метода одевания для НУШ, которое мы записываем в следующей форме:

$$i\varphi_t - \frac{1}{2}\varphi_{xx} - (|\varphi|^2 - |A|^2)\varphi = 0. \quad (1)$$

с неубывающими граничными условиями  $|\varphi|^2 \rightarrow |A|^2$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ . Где  $A$  - произвольная константа, которую без ограничения общности можно считать действительной. Уравнение (1) является условием совместности следующей переопределенной системы на матричную функцию  $\Psi$  [18]

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \widehat{\mathbf{U}}\Psi, \quad (2)$$

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = (\lambda\widehat{\mathbf{U}} + \widehat{\mathbf{W}})\Psi. \quad (3)$$

Где

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{U}} &= \mathbf{I}\lambda + \mathbf{U}, & \widehat{\mathbf{W}} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} |\varphi|^2 - A^2 & \varphi_x \\ \varphi_x^* & -|\varphi|^2 + A^2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{I} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & \mathbf{U} &= \begin{pmatrix} 0 & \varphi \\ -\varphi^* & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\lambda$  - спектральный параметр. Идея метода одевания [34] состоит в том, что мы выбираем некоторое решение  $\varphi_0$  НУШ (1), для которого известно соответствующее матричное решение  $\Psi_0$  системы уравнений (2), (3). Затем выбираются  $N$  комплексных параметров  $\lambda_n$  ( $n = 1, \dots, N$ ;  $\text{Re}\lambda_n > 0$ ), которые есть координаты полюсов одевальной функции (см. [3] или основной текст диссертации), а также  $N$  произвольных комплексных

констант  $C_n$ . Обозначим  $\mathbf{F}_n = \Psi_0(x, t, -\lambda_n^*)$  и определим  $N$  векторов  $\mathbf{q}_n$  с помощью следующего соотношения:

$$\mathbf{q}_n^* = \mathbf{F}_n \begin{pmatrix} 1 \\ C_n \end{pmatrix}. \quad (5)$$

В результате, новое  $N$ -солитонное решение НУШ записывается в виде отношения детерминантов:

$$\varphi = \varphi_0 + 2 \frac{\widetilde{M}_{12}}{M}. \quad (6)$$

Где  $M$  есть определитель матрицы

$$M_{nm} = \frac{(q_n \cdot q_m^*)}{\lambda_n + \lambda_m^*},$$

а определитель  $\widetilde{M}_{\alpha\beta}$  записывается так:

$$\widetilde{M}_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 0 & q_{1,\beta} & \cdots & q_{n,\beta} \\ q_{1,\alpha}^* & & & \\ \vdots & & M_{nm}^T & \\ q_{n,\alpha}^* & & & \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Затем рассматривается случай, когда  $\varphi_0 = A$  - конденсат. Тогда в плоскости спектрального параметра  $\lambda$  существует разрез от  $-A$  до  $A$ . Для упрощения вычислений и дальнейшего анализа в работе предложена, т.н. униформизация плоскости спектрального параметра, состоящая в применении преобразования Жуковского:

$$\lambda = \frac{A}{2}(\xi + \xi^{-1}) \quad (8)$$

При этом разрез переходит в единичную окружность, а два листа Римановой поверхности во внешнюю и внутреннюю часть круга. Далее мы всегда будем использовать эту параметризацию при описании расположения полюсов. Обозначения, необходимые нам в дальнейшем:

$$\xi_n = R_n \exp(i\alpha_n), \quad C_n = \exp(i\theta_n + \mu_n). \quad (9)$$

Где  $\xi_n$  - координата полюса  $n$ -го солитонного решения, а  $C_n$  - произвольные комплексные константы. Для удобства записи окончательных формул солитонных решений мы также будем пользоваться дополнительной параметризацией  $R_n = \exp(z_n)$ .

Для случая конденсата явно вычисляются векторные функции  $\mathbf{q}_n$  и соответствующие солитонные решения, выводятся общие соотношения, в частности групповые скорости.

В заключение вводится понятие регулярного решения, играющего ключевую роль в дальнейшем. Регулярным называется решение фазы которого при  $x \rightarrow \pm\infty$  одинаковы. Т.к. в работе мы полагаем, что модуляционная неустойчивость развивается из локализованных возмущений, на роль кандидатов для её описания мы рассматриваем только регулярные решения. Критерий того, что  $N$ -солитонное решение является регулярным, особенно просто выглядит в униформизованных переменных. Для этого необходимо, чтобы сумма угловых параметров солитонов была равна нулю или  $\pm\pi/2$ :

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0, \pm \frac{\pi}{2}. \quad (10)$$

## Глава 2. Солитонные решения нелинейного уравнения Шредингера на фоне конденсата

В этой главе с единой точки зрения изучаются солитонные решения НУШ на фоне конденсата. Глава начинается с рассмотрения односолитонного решения, которое мы записываем в следующем явном виде:

$$\begin{aligned} \varphi = & -A(\cosh z \cosh 2u + \cos \alpha \cos 2v)^{-1} \times \\ & (\cosh z \cos 2\alpha \cosh 2u + \cosh 2z \cos \alpha \cos 2v \\ & + i(\cosh z \sin 2\alpha \sinh 2u + \sinh 2z \cos \alpha \sin 2v)). \end{aligned} \quad (11)$$

Где

$$\begin{aligned} u = \alpha x - \gamma t + \mu/2, & \quad v = kx - \omega t - \theta/2, \\ \alpha = A \sinh z \cos \alpha, & \quad \gamma = -\frac{A^2}{2} \cosh 2z \sin 2\alpha, \\ k = A \cosh z \sin \alpha, & \quad \omega = \frac{A^2}{2} \sinh 2z \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (12)$$

Асимптотики (11) следующие

$$\begin{aligned} \varphi \rightarrow -A \exp(\pm 2i\alpha), & \quad x \rightarrow \pm\infty, \\ |\varphi|^2 = A^2, & \quad x \rightarrow \pm\infty. \end{aligned} \quad (13)$$

В зависимости от выбора положения полюса различают несколько принципиально различных типов решений. Когда полюс расположен на действительной оси вне разреза  $\lambda_R > A$ , решение представляет собой солитон

Кузнецова [22]. Это локализованное решение, которое стоит на месте и осциллирует. Период осцилляций растёт при  $\lambda_R \rightarrow A$  и становится бесконечным при  $\lambda_R = A$ . В этом пределе солитон Кузнецова переходит в решение Перегринна [27].

Если полюс расположен на разрезе  $0 < \lambda_R < A$ , то решение периодически в пространстве и локализовано во времени - это т.н. бризер Ахмедиева [30]. Это решение почти гомоклинично. Оно начинается с конденсата и возвращается также к конденсату, но уже с другой фазой.

В общем случае полюс может быть расположен в любой точке правой полуплоскости. При этом решение движется с определённой групповой скоростью и осциллирует. При  $x \rightarrow \pm\infty$  оно переходит в конденсат обладающий одинаковыми амплитудами, но различными фазами. В явном виде такое решение было впервые представлено в работе А.Р. Итса, А.В. Рыбина и М.А. Салля [35].

Все эти решения подробно обсуждаются в диссертации, приводятся соответствующие явные формулы. Особую важность для дальнейшего рассмотрения играет случай, когда полюс расположен близко к разрезу. Это решение представляет собой бризер большого размера  $L \approx \frac{1}{Az \cos \alpha}$ , движущийся с большой групповой скоростью  $V_{group} \approx -\frac{A \sin \alpha}{z}$  и малой фазовой скоростью  $V_{ph} \approx \frac{Az \cos 2\alpha}{\sin \alpha}$ . Мы называем такое решение "квази-Ахмедиевский"бризер, т.к. в пределе  $R \rightarrow 1$  он переходит в бризер Ахмедиева. Пример данного решения представлен на Рис. 1. Далее подробно

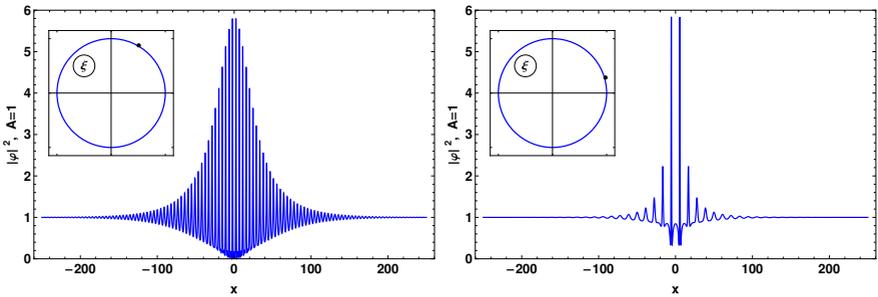


Рис. 1: Квадрат модуля "квази-Ахмедиевского"бризера  $\varphi$  при  $t = 0$  с различными значениями параметра  $\alpha$ . Слева:  $R = 1.02$ ,  $\alpha = \pi/3$ ,  $\mu = 0$ ,  $\theta = 0$ , справа:  $R = 1.02$ ,  $\alpha = \pi/11$ ,  $\mu = 0$ ,  $\theta = 0$ .

рассматривается двухсолитонное решение. Особое внимание уделено регу-

лярным двухсолитонным решениям, которые не меняют фазу конденсата. Изучаются солитонные атомы, всевозможные нелинейные комбинации двух различных типов солитонов. Например, такие комбинации как солитон Кузнецова плюс бризер Ахмедиева.

Отдельная часть посвящена построению  $N$ -солитонное решения НУШ на фоне солитона Перегринна. Этот результат позволяет избежать вычисления предела всякий раз при исследовании новой нелинейной комбинации солитонов. В дальнейшем это позволит исследовать взаимодействие солитона Перегринна и суперрегулярных решений.

Глава оканчивается обсуждением того, что в пределе  $R \rightarrow 1$  пары квази-Ахмедиевских бризеров с противоположными значениями параметров  $\alpha$  полностью аннигилируют, т.е. соответствующее решение есть невозмущённый конденсат.

### Глава 3. Суперрегулярные решения

В этой главе содержится основной результат работы. Факт полной аннигиляции двух бризеров Ахмедиева с противоположными значениями параметра  $\alpha$ , делает возможным построение специального и очень важного класса  $2N$ -солитонных решений, описывающих эволюцию сколь угодно малых возмущений конденсата. Эти решения представляют собой подкласс регулярных решений. Мы называем их суперрегулярными солитонными решениями.

Вначале подробно описывается случай  $N = 1$ , т.е. двухсолитонное суперрегулярное решение. Для того, чтобы его построить необходимо выбрать  $R_1$  и  $R_2$  близкими к единице:

$$R_1 \simeq 1 + \varepsilon, \quad R_2 \simeq 1 + a\varepsilon, \quad (14)$$

$\varepsilon > 0$ ,  $a > 0$ ,  $|\varepsilon| \ll 1$ . Такие два полюса мы называем суперрегулярной парой. Тогда, в определённый момент времени (для определённости,  $t = 0$ ), решение представляет собой слабозвозмущённый конденсат:

$$\varphi = A + \delta\varphi. \quad (15)$$

Где  $\delta\varphi$  - малое локализованное возмущение конденсата, амплитуда которого пропорциональна  $\varepsilon$ . В работе подробно изучен возможный вид функции

$\delta\varphi(x)$ . В простейшем случае, когда полюса выбираются симметричным образом ( $a = 1$ ) и константы  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ , функция  $\delta\varphi$  в первом порядке такова:

$$\delta\varphi \approx 4i\varepsilon A \frac{\cos \alpha \cos(2kx - (\theta_1 - \theta_2)/2)}{\cosh(2\varepsilon A \cos \alpha x)}. \quad (16)$$

Откуда видно, что амплитуда возмущения прямо пропорциональна, а характерная ширина обратно пропорциональна величине параметра  $\varepsilon$ . Вна-

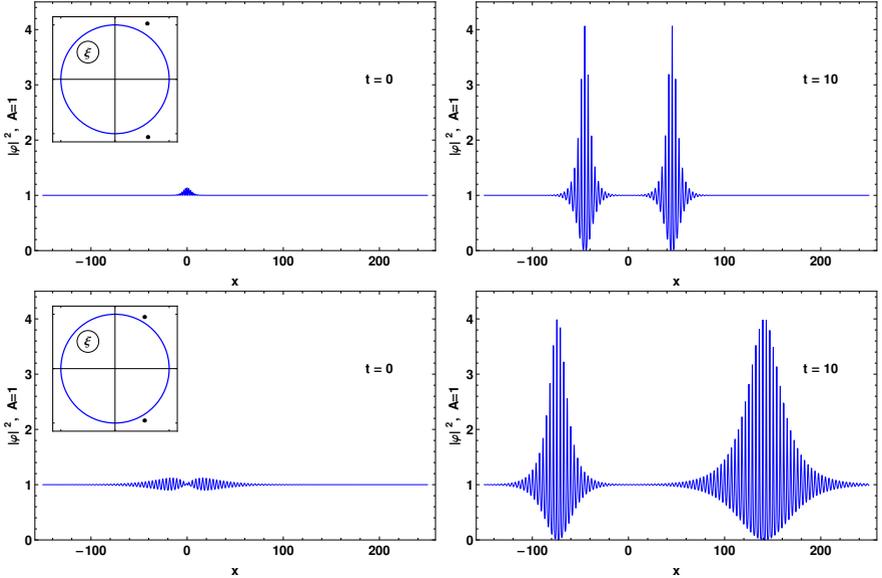


Рис. 2: Суперрегулярные двухсолитонные решения с параметрами:  $R_1 = R_2 = 1.2$ ,  $\alpha_1 = \pi/3$ ,  $\alpha_2 = -\pi/3$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$  (верхние рисунки) и  $R_1 = 1.1$ ,  $R_2 = 1.05$ ,  $\alpha_1 = \pi/3$ ,  $\alpha_2 = -\pi/3$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$  (нижние рисунки). Квадрат модуля решения  $\varphi$  в моменты времени  $t = 0$  (рисунки слева) и  $t = 10$  (рисунки справа).

чале такое возмущение растет экспоненциально, а затем формируется пара квази-Ахмедиевских бризеров, распространяющихся в противоположных направлениях. В симметричном случае  $a = 1$  эти бризеры одинаковы и решение симметрично. В общем случае  $a \neq 1$  решение несимметрично и описывается с помощью пяти параметров  $\alpha, \varepsilon, a, \theta_1, \theta_2$ , а также может быть сдвинуто по  $x$  и  $t$ .

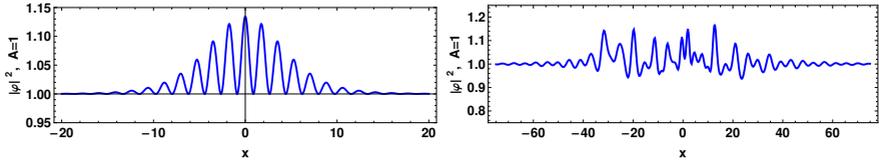


Рис. 3: Возмущения конденсата, соответствующие суперрегулярным решениям в начальный момент времени  $t = 0$ . Рисунок слева соответствует двухсолитонному решению представленному на решении Рис. 2, а рисунок справа - четырехсолитонному решению из Рис. 4.

Типичные примеры развития двухсолитонных суперрегулярных решений в симметричном и несимметричном случаях представлены на Рис. 2, а пример начального возмущения на Рис. 3 слева.

Чрезвычайно важным является тот факт, что данные рассуждения можно обобщить на любое количество пар полюсов. Мы доказали, что в первом порядке начальное возмущение соответствующее  $N$  суперрегулярным парам полюсов есть линейная сумма функций  $\delta\varphi_m$ , соответствующих отдельным двухсолитонным решениям со своими параметрами:

$$\varphi_n = A + \sum_{m=1}^N \delta\varphi_n. \quad (17)$$

Таким образом, класс суперрегулярных решений очень широк. Эти решения формируют бесконечномерное функциональное пространство. Мы полагаем, что любое неустойчивое возмущение конденсата может быть в пределе аппроксимировано нелинейной комбинацией суперрегулярных решений. Пример развития четырехсолитонного решения представлен на Рис. 4, а соответствующее начальное возмущение на Рис. 2 справа.

В работе подробно изучаются различные сценарии развития модуляционной неустойчивости из суперрегулярных возмущений, вплоть до шести-солитонного случая. Особой важностью обладает двухсолитонное решение с малой величиной параметра  $\alpha$ . В этом случае, как показано в диссертации, решение можно наблюдать в эксперименте с гравитационными волнами в бассейне длиной 9.5 м.

Гравитационные волны на глубокой воде можно описывать с помощью

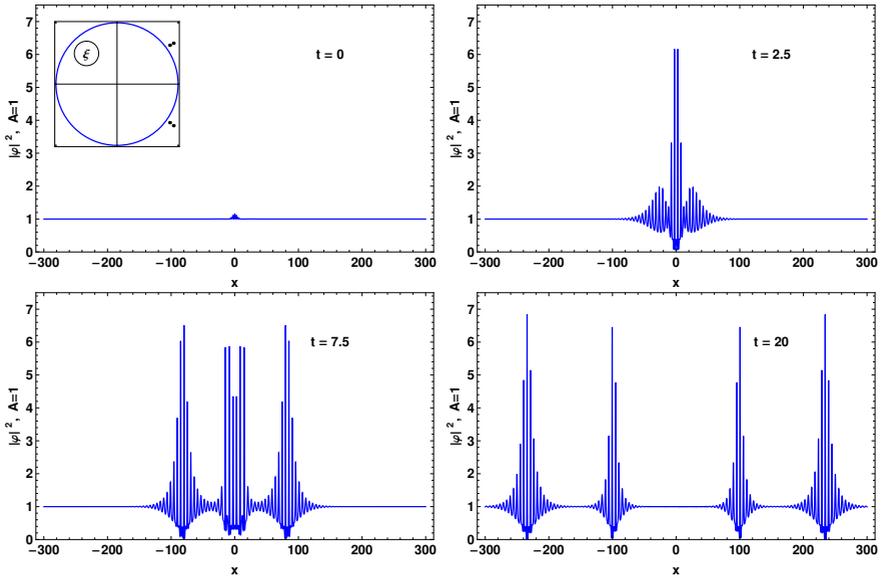


Рис. 4: Развитие четырехсолитонного суперрегулярного решения  $\varphi$ . Квадрат модуля  $\varphi$  в разные моменты времени. Параметры:  $R_1 = 1.05$ ,  $R_3 = 1.05$ ,  $\alpha_1 = \pi/5$ ,  $\alpha_3 = -\pi/5$ ,  $\mu_1 = \mu_3 = 0$ ,  $\theta_1 = \theta_3 = \pi/2$ ;  $R_2 = 1.075$ ,  $R_4 = 1.075$ ,  $\alpha_2 = \pi/5$ ,  $\alpha_4 = -\pi/5$ ,  $\mu_2 = \mu_4 = 0$ ,  $\theta_2 = \theta_4 = \pi/2$ .

НУШ впервые полученного В.Е. Захаровым [1] в 1968 г:

$$i \left( \frac{\partial a}{\partial t} + c_{gr} \frac{a}{\partial x} \right) - \frac{\omega_0}{8k_0^2} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{\omega_0 k_0^2}{2} |a|^2 a = 0 \quad (18)$$

Где  $\omega_0 = \sqrt{gk_0}$  - закон дисперсии для гравитационных волн в линейной теории.  $c_{gr} = \frac{d\omega}{dk}|_{k=k_0} = \frac{\omega_0}{2k_0}$  - групповая скорость. Величина, которую мы измеряем в эксперименте - это высота поверхности жидкости  $\eta(x, t)$ , которая даётся выражением (см. [1]):

$$\eta(x, t) = Re\{a(x, t) \exp[i(k_0 x - \omega_0 t)]\} \quad (19)$$

Экспериментальные ограничения, в первую очередь связаны с размером бассейна. Как было отмечено, чем меньше значение  $\alpha$ , тем меньше осцилляций содержит решение и тем меньше его характерный размер. В тоже время, чем меньше расстояние от полюсов до разреза, тем характерный размер решения больше, но тем меньше амплитуда в начальный

момент времени, т.е. тем больше решение годится на роль в описании развития неустойчивости из малого возмущения. В качестве компромисса нами были выбраны параметры  $\alpha = 0.4$  и  $R = 1.15$ . Соответствующее решение представлено на Рис. 5. А. Чабчоуб в сотрудничестве с нами начал работу

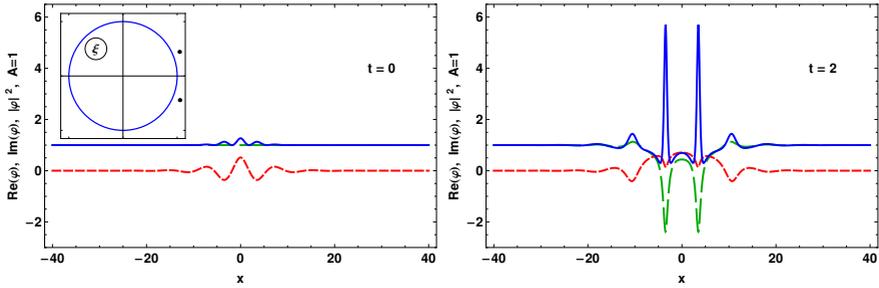


Рис. 5: Двухсолитонное суперрегулярное решение с параметрами, подобранными для эксперимента:  $R_1 = 1.15$ ,  $R_2 = 1.15$ ,  $\alpha_1 = 0.4$ ,  $\alpha_2 = -0.4$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$ ;

по воспроизведению суперрегулярных решений в бассейне. Эксперимент показал отличное согласие с нашими теоретическими предсказаниями. На Рис. 6 представлен один из экспериментальных графиков на котором приведено сравнение теории и эксперимента для конечной стадии роста суперрегулярных возмущений.

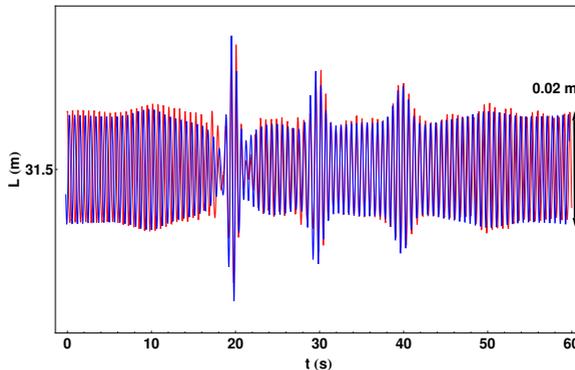


Рис. 6: Сравнение теории (красным) и эксперимента (синим) для конечной стадии роста суперрегулярных возмущений. (датчик, расположен на расстоянии 31.5 метра от генератора волн). Высота поверхности жидкости.

## Глава 4. Векторное нелинейное уравнение Шредингера на фоне конденсата

В этой главе проведено обобщение результатов работы на векторное нелинейное уравнение Шредингера на фоне конденсата (ВНУШ) - систему Манакова [36]:

$$\begin{aligned} i\varphi_{1t} - \frac{1}{2}\varphi_{1xx} - (|\varphi_1|^2 - |a_1|^2 + |\varphi_2|^2 - |a_2|^2)\varphi_1 &= 0, \\ i\varphi_{2t} - \frac{1}{2}\varphi_{2xx} - (|\varphi_1|^2 - |a_1|^2 + |\varphi_2|^2 - |a_2|^2)\varphi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Рассматривается задача с неубывающими граничными условиями  $|\varphi_{1,2}| \rightarrow |a_{1,2}|$  при  $|x| \rightarrow \infty$ . Где  $a_1$  и  $a_2$  - произвольные константы, которые мы полагаем действительными. Схема одевания аналогична той, что мы использовали для скалярного случая. Однако теперь решения ещё более многообразны. Униформизация вновь существенно упрощает вычисления и в результате мы находим общее односолитонное решение ВНУШ на фоне конденсата в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= a_1 - 8 \cos \alpha \cosh z \frac{-a_2 N_1 + a_1 N_2}{\exp(2u_0 + z) + 4 \cosh 2u \cosh z + 4 \cos 2v \cos \alpha}, \\ \varphi_2 &= a_2 - 8 \cos \alpha \cosh z \frac{a_1 N_1 + a_2 N_2}{\exp(2u_0 + z) + 4 \cosh 2u \cosh z + 4 \cos 2v \cos \alpha}. \end{aligned} \quad (21)$$

Где

$$\begin{aligned} N_1 &= \exp(u_0 + z/2 + iv_0 + i\alpha/2) [\cos(v - \alpha/2) \cosh(u - z/2) - \\ &\quad i \sin(v - \alpha/2) \sinh(u - z/2)], \\ N_2 &= \cos \alpha \cosh 2u + i \sin \alpha \sinh 2u + \cos 2v \cosh z + i \sin 2v \sinh z, \end{aligned} \quad (22)$$

и

$$\begin{aligned} u_0 &= \varkappa_0 x - \gamma_0 t + \mu_0/2, & v_0 &= k_0 x - \omega_0 t - \theta_0/2, \\ \varkappa_0 &= a \cosh z \cos \alpha, & \gamma_0 &= -\frac{a^2}{2} \sinh 2z \sin 2\alpha, \\ k_{0n} &= a \sinh z \sin \alpha, & \omega_{0n} &= \frac{a^2}{2} \cosh 2z \cos 2\alpha, \\ u &= \varkappa x - \gamma t + \mu/2, & v &= kx - \omega t - \theta/2, \\ \varkappa &= a \sinh z \cos \alpha, & \gamma &= -\frac{a^2}{2} \cosh 2z \sin 2\alpha, \\ k &= a \cosh z \sin \alpha, & \omega &= \frac{a^2}{2} \sinh 2z \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (23)$$

В добавок к основным параметрам  $\alpha$  и  $R$ , решение(21) имеет дополнительные четыре параметра  $\mu_0, \theta_0, \mu, \theta$ . Они соответствуют сдвигам по времени и пространству, а также относительным сдвигам компонент решения.

Мы проводим подробное исследование решения (21). В общем случае это солитон, движущийся из правого полупространства  $x > 0$  и в точке  $x = 0, t = 0$  разделяется на два солитона движущихся в противоположных направлениях, как показано на Рис. 7. В частных случаях мы исследуем векторные аналоги солитона Кузнецова и бризера Ахмедиева, которые в векторном случае обладают рядом интересных особенностей. Общее одно-

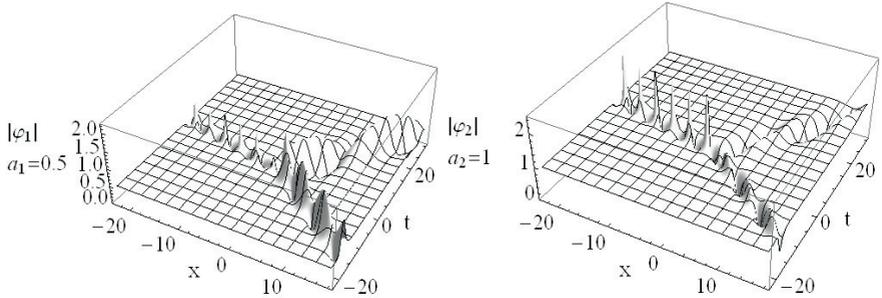


Рис. 7: Векторный аналог общего односолитонного решения. Квадрат модуля решения в зависимости от  $x$  и  $t$ . Параметры:  $a_1 = 0.5, a_2 = 1, R = 1, \alpha = \pi/4, \mu_0 = 0, \mu = 0, \theta_0 = 0, \theta = 0$ .

солитонное решение ВНУШ на фоне конденсата недавно было получено в работе [37]. Однако мы считаем, что использование униформизации и запись решения в виде (21) является наиболее удобной, что позволило нам качественно понять поведение решения.

Далее записывается общее двухсолитонное решение. Полное изучение его поведения выходит за рамки диссертации. Мы останавливаемся лишь на вопросе о существовании векторных аналогов суперрегулярных решений.

Как было установлено ранее, математическое объяснение возникновения двухсолитонных решений, которые являются малыми возмущениями в определённый момент времени, состоит в полной аннигиляции квази-Ахмедиевских бризеров. При этом числитель двухсолитонного решения тождественно обращается в ноль при  $\xi_1 = e^{i\alpha}, \xi_2 = e^{-i\alpha}$ , тогда как знаменатель остаётся конечным.

Мы показали, что в векторном случае числитель тождественно равен нулю только если две из трёх независимых комплексных констант решения выбраны равными нулю. Однако это соответствует тривиальному обобщению решений скалярного НУШ на векторный случай, которое может быть получено с помощью следующего известного преобразования:

$$\varphi_1(x, t) = a_1 \varphi(a^2 t, ax), \quad \varphi_2(x, t) = a_2 \varphi(a^2 t, ax). \quad (24)$$

(где  $\varphi$  - решение скалярного НУШ). Таким образом, в векторном случае малое возмущение при выборе полюсов  $\xi_1 = e^{i\alpha}$ ,  $\xi_2 = e^{-i\alpha}$  появляется только в указанном случае и не приводит к качественно новым эффектам. Вопрос о нелинейной стадии модуляционной неустойчивости в рамках ВШУШ оказался существенно более запутанным и безусловно интересен для дальнейших исследований. На данный момент не ясно, существует ли иной солитонный механизм развития малых локализованных возмущений. Интересно рассмотреть обобщение на ВНУШ с тремя компонентами, которое также находит физические применения [38, 39].

## Заключение

В Заключении сформулированы основные результаты диссертации.

## Работы автора по теме диссертации

- [1] **Zakharov, V. E.** Nonlinear stage of Modulation Instability / V. E. Zakharov and A. A. Gelash // Physical Review Letters -2013.- Vol. 111, № 5. P. 054101-1 - 054101-5.
- [2] **Zakharov, V.** Freak waves as a result of modulation instability / Vladimir Zakharov and Andrey Gelash // Procedia IUTAM -2013.- Vol. 9C, № 5. P. 165-175.
- [3] **Gelash, A. A.** Superregular solitonic solutions: a novel scenario for the nonlinear stage of modulation instability / A. A. Gelash and V. E. Zakharov // Nonlinearity -2014.- Vol. 27, № 4. P. R1-R39.

## Цитируемая литература

- [1] **Zakharov, V. E.** Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid / V. E. Zakharov // J. Appl. Mech. and Tech. Phys. -1968.- Vol. 9, № 2. - P. 190–194.
- [2] **Akhmediev, N.** Dissipative Solitons / N. Akhmediev and A. Ankiewicz // Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2005.
- [3] **Sulem, C.** The nonlinear schrodinger equation. Self focusing and wave collapse / C. Sulem and P-L. Sulem // New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1999.
- [4] **Kivshar, Y. S.** Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals / Y. S. Kivshar and G. Agrawal // Academic Press, 2003.
- [5] **Falkovich, G.** Fluid Mechanics. A Short Course for Physicists / Gregory Falkovich // Cambridge University Press, 2011.
- [6] **Zakharov, V. E.** Freak waves as nonlieral stage of Stokes wave modulation instability / V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko and A. O. Prokofiev // Eur. J. Mech. B/Fluids. -2006.- Vol. 25, № 5. - P. 677–692.
- [7] **Zakharov, V. E.** New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface / V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko and O. A. Vasilyev // Eur. J. Mech. B/Fluids. -2006.- Vol. 23, № 1. P. 283–291.
- [8] **Pelinovsky, E.** Extreme Ocean Waves / E. Pelinovsky and C. Harif // Springer, 2008.
- [9] **Dyachenko, A. I.** On the formation of freak waves on the surface of deep wather / A. I. Dyachenko and V. E. Zakharov // JETP Lett. -2008.- Vol. 88, № 5. P. 307–311.
- [10] **Dysthe, K. B.** Note on breather type solutions of the NLS as a model for freak-waves / K. B. Dysthe and K. Trulsen // Physica Scripta -1999.- Vol. T82. P. 48–52.
- [11] **Zakharov, V. E.** About shape of giant breather / V. E. Zakharov and A. I. Dyachenko // Eur. J. Mech. B/Fluids. -2010.- Vol. 29 P. 127–131.

- [12] **Zakharov, V. E.** Optical solitons and quasisolitons / V. E. Zakharov and E. A. Kuznetsov // JETP. -1998.- Vol. 86, № 5. P. 1035–1046.
- [13] **Balakin, A. A.** Structural features of the self-action dynamics of ultrashort electromagnetic pulses / A. A. Balakin, A. G. Litvak, V. A. Mironov and S. A. Skobelev // JETP. -2007.- Vol. 10, № 3. P. 363–378.
- [14] **Chalikov, D.** Modeling of extreme waves based on equations of potential flow with a free surface / D. Chalikov and D. Sheinin // J. Comp. Phys. -2005.- Vol. 210. P. 247–273.
- [15] **Kibler, B.** Observation of Kuznetsov-Ma soliton dynamics in optical fibre / B. Kibler, J. Fatome, C. Finot, G. Millot, G. Genty, B. Wetzell, N. Akhmediev, F. Dias and J. M. Dudley // Nature Sci. Reports -2012.- Vol. 2. P. 463.
- [16] **Kibler, B.** The Peregrine soliton in nonlinear fibre optics / B. Kibler, J. Fatome, C. Finot, G. Millot, F. Dias, G. Genty, N. Akhmediev, and J. M. Dudley // Nature Phys. Lett. -2010.- Vol. 6. P. 790–795.
- [17] **Chabchoub, A.** Rogue wave observations in water wave tank / A. Chabchoub, N. P. Hoffman and N. Akhmediev // Phys. Rev. Lett. -2011.- Vol. 106, 204502.
- [18] **Zakharov, V. E.** Exact Theory of Two-dimensional Self-focusing and One-dimensional Self-modulation of Waves in Nonlinear Media / V. E. Zakharov and A. B. Shabat // Sov. Phys.-JETP. -1972.- Vol. 34, № 1. P. 62–69.
- [19] **Faddeev, L. D.** Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons / L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan // Berlin: Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2007.
- [20] **Kharif, C.** Rogue Waves in the Ocean / C. Kharif, E. Pelinovsky and A. Slunyaev // Springer, 2009.
- [21] **Zakharov, V. E.** Theory of solitons. The inverse scattering method / V. E. Zakharov, S. V. Manakov, S. P. Novikov and L. P. Pitaevskii // New York, London: Plenum Press, 1984.

- [22] **Kuznetsov, E. A.** Solitons in a parametrically unstable plasma / E. A. Kuznetsov // *Sov. Phys.-Dokl. (Engl. Transl.)* -1977.- Vol. 22. P. 507–508.
- [23] **Ma, Y-C.** The Perturbed Plane-Wave Solutions of the Cubic Schrodinger Equations / Y-C. Ma // *Stud. Appl. Math.* -1979.-Vol. 60. P. 43–58.
- [24] **Chiao, R. Y.** Self-Trapping of Optical Beams / R. Y. Chiao, E. Garmire and C. H. Townes // *Phys. Rev. Lett.* -1964.- Vol. 13. P. 479–482.
- [25] **Agafontsev, D.** Rogue waves statistics in the framework of one-dimensional Generalized Nonlinear Schrodinger Equation / D. Agafontsev and V. Zakharov // *arXiv:1202.5763*. -2012.
- [26] **Kawata, T.** Inverse Scattering Method for the Nonlinear Evolution Equations under Nonvanishing Conditions / T. Kawata and H. Inoue // *Journ. Phys. Soc. Japan.* -1978.- Vol. 44. P. 1722–1729.
- [27] **Peregrine, D. H.** Water waves, nonlinear Schrodinger equations and their solutions / D. H. Peregrine // *J. Aust. Math. Soc. Ser. B* -1983.- Vol. 25. P. 16–43.
- [28] **Shrira, V. I.** What makes the Peregrine soliton so special as a prototype of freak waves? / V. I. Shrira and V. V. Geogjaev // *J. Eng. Math.* -2010.- Vol. 67. P. 11–22.
- [29] **Akhmediev, N.** How to excite a rogue wave / N. Akhmediev, J. M. Soto-Crespo and A. Ankiewicz // *Phys. Lett. A* -2009.- Vol. 80, 043818.
- [30] **Akhmediev, N. N.** Generation of periodic trains of picosecond pulses in an optical fiber: exact solutions / N. N. Akhmediev, V. M. Eleonskii and N. E. Kulagin // *Sov. Phys.-JETP.* -1985.- Vol. 89. P. 894-899.
- [31] **Dubard, P.** Multi-rogue waves solutions of the focusing NLS equation and the KP-I equation / P. Dubard, P. Gaillard, C. Klein and V. B. Matveev // *Eur. Phys. J. Special Topics* -2010.- Vol. 185. P. 247–258.
- [32] **Dubard, P.** On multi-rogue waves solutions of the NLS equation and positon solutions of the KdV equation / P. Dubard and V. B. Matveev // *Nat. Hazards. Earth. Syst. Sci.* -2011.- Vol. 11. P. 667–672.

- [33] **Dubard, P.** Multi-rogue waves solutions: from the NLS to the KP-I equation / P. Dubard and V. B. Matveev // Nonlinearity -2013.- Vol. 26. P. R93–R125.
- [34] **Zakharov, V. E.** Integration of nonlinear equations of mathematical physics by the method of inverse scattering II // V. E. Zakharov and A. B. Shabat, Functional Analysis and Its Applications -1980.- Vol. 13, № 3. P. 166–174.
- [35] **Its, A. R.** On exact integration of nonlinear schrodinger equation / A. R. Its, A. V. Rybin and M. A. Sall // Theor. Math. Phys. -1988.- Vol. 74, № 1. P. 20–32.
- [36] **Manakov, S. V.** On the theory of two-dimensional stationary self-focusing of electromagnetic waves / S. V. Manakov // Sov. Phys.-JETP. -1974.- Vol. 38, № 2. P. 248–253.
- [37] **Zhao, Li-Chen** Localized nonlinear waves in a two-mode nonlinear fiber / Li-Chen Zhao and Jie Liu // J. Opt. Soc. Am. B -2012.- Vol. 29, № 11. P. 3119.
- [38] **Yomba, E.** Modulational instability and exact solutions for a three-component system of vector nonlinear Schrodinger equations / Emmanuel Yomba and George R. Sell // J. Math. Phys. -2009.- Vol. 50, 053518.
- [39] **Zhao, Li-Chen** Rogue-wave solutions of a three-component coupled nonlinear Schrodinger equation / Li-Chen Zhao and Jie Liu // Phys. Rev. E -2013.- Vol. 87. P. 013201.