

На правах рукописи

Ивченко Николай Александрович

**Перенос полей в турбулентном течении
когерентного вихря**

Специальность 1.3.3 —
«Теоретическая физика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте теоретической физики им. Л.Д. Ландау Российской академии наук.

Официальные оппоненты: **Ерманюк Евгений Валерьевич**,
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГАОУ ВО «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»,
и. о. декана Механико-математического факультета

Субботин Станислав Валерьевич,
кандидат физико-математических наук, доцент,
ФГБОУ ВО «Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет»,
ведущий научный сотрудник лаборатории вибрационной гидромеханики

Ведущая организация: **ФГБУН Институт океанологии им. П.П. Ширшова Российской академии наук**

Защита состоится 11 декабря 2026 г. в 11.30 часов на заседании диссертационного совета Д 24.1.128.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте теоретической физики им. Л.Д. Ландау Российской академии наук по адресу: Московская область, г. Черноголовка, просп. Академика Семенова, д. 1А.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук или на сайте диссертационного совета <https://www.itp.ac.ru/ru/dissertation-council/>.

Автореферат разослан «_____» _____ 2026 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 24.1.128.01,
д-р физ.-мат. наук

Адлер Всеволод Эдуардович

Общая характеристика работы

Классические результаты теории развитой турбулентности традиционно описывают однородную изотропную картину каскадного процесса [1]. В теории Колмогорова 1941 года предполагается широкий инерционный интервал между крупным масштабом возбуждения вынуждающей силой и малым масштабом диссипации течений. Энергия, вводимая на масштабе накачки, переносится нелинейным взаимодействием потоков вперед по инерционному интервалу к диссипационному масштабу, а статистика взаимодействующих турбулентных пульсаций локальна (в волновом пространстве) и не чувствительна к деталям накачки [2].

Актуальность темы. Существует, однако, широкий класс течений, где эта картина оказывается неполной: наряду с каскадом в системе спонтанно возникает течение с масштабом порядка размера самой системы, амплитуда которого значительно превосходит характерную скорость пульсаций. Такие течения оказываются статистически устойчивыми во времени — по этой причине их называют когерентными. В первую очередь это явление связано с двумерной гидродинамикой в тонких слоях жидкости, в которой исторически возникло понятие “турбулентный конденсат”. Совместное сохранение интегралов энергии и энтропии (квадрата завихренности) в невязком пределе приводит к тому, что эти величины переносятся в противоположных направлениях (формируется расщепленный каскад), так что энергия передается в сторону больших масштабов, а энтропия — меньших. Обратный каскад энергии останавливается на масштабе, который определяется придонным трением слоя жидкости [3]. Если ограничить систему меньшим размером, то энергия, перенесенная обратным каскадом, станет накапливаться в самых крупных модах. Это состояние Р. Крайчнан назвал спектральной конденсацией по прямой аналогии с бозе-конденсацией: макроскопически заселенной оказывается “основная мода” [4].

Подтверждение конденсации прямым численным счетом и наблюдение конденсата проводились уже в работах XX века, см. [5], где образовались крупномасштабные вихри, а следующим шагом в XXI веке был переход к описанию и исследованию структуры возникающих когерентных течений. Среди основных типов конденсатных течений стоит выделить крупномасштабные вихри и когерентные струи. Формирование той или иной конфигурации когерентного потока в системе зависит от ее геометрии и характеристик накачки, в том числе симметрии. Например, в численном счете с периодическими граничными условиями в случае квадратной ячейки образуется вихревой диполь (два противоположно вращающихся вихря) [6], занимающий всю систему, а при вытянутой в прямоугольник ячейке его сменяют струи [7]. В экспериментах по двумерной турбулентности когерентный вихрь наблюдался в тонких слоях

жидкости с электромагнитной накачкой впервые в опыте [8]. Из современных лабораторных исследований стоит отметить [9], в которой изучались профиль установившегося вихревого течения и спектры энергии в системе в его присутствии.

Двумерная гидродинамика является идеализацией реальных потоков, однако свойства трехмерных турбулентных течений значительно изменяются при включении вращения и качественно воспроизводят описанную картину. В случае быстро вращающейся системы появляется направление, выделенное вектором угловой скорости Ω , а действие силы Кориолиса приводит к эффективной двумеризации течения в перпендикулярной плоскости [10]. Как и в двумерной турбулентности, формируется обратный каскад энергии — ее перенос к крупномасштабным вертикально однородным вихрям во вращающейся турбулентности был продемонстрирован на численном счете в [11]. Квазидвумерные течения такого рода еще называют геострофическими, поскольку для них достигается баланс силы Кориолиса и градиента давления. Описание перехода в режиме турбулентности от классической трехмерной к вращающейся при уменьшении числа Россби Ro , которое характеризует силу вращения системы, проводилось в численном эксперименте [12], см. также обзор [13]. Компонента поля скорости, существенно зависящая от координаты вдоль Ω , во вращающейся турбулентности обладает быстрой волновой динамикой, определяющейся силой Кориолиса: в линейном приближении это отдельные инерционные волны, а темп их нелинейного взаимодействия друг с другом подавляется вместе с уменьшением числа Ro . Закон дисперсии инерционных волн определяется направлением волнового вектора, а не его модулем.

Таким образом, в турбулентном потоке вращающейся жидкости можно выделить квазидвумерное геострофическое течение и трехмерное поле инерционных волн, распространяющихся на его фоне. Динамика когерентного геострофического конденсата медленная по сравнению с вращением системы, а его крупномасштабная структура определяется взаимодействием с турбулентной волновой средой. Задача о взаимодействии волн со средним течением занимает центральное место в геофизической гидродинамике, где перенос импульса волнами в ряде случаев оказывается ведущим механизмом формирования долгоживущих зональных и вихревых структур — как, например, для квазидвухлетней осцилляции ветра в стратосфере [14]. Разделение времен обуславливает адиабатическое приближение динамики, возникающее в данной задаче: сначала находится быстрая динамика волн на фоне заданного среднего течения, затем усредненное по их статистике квадратичное напряжение Рейнольдса определяет медленную динамику скорости геострофического потока [15]. При этом внутри сформировавшегося когерентного вихря возникает естественное разделение масштабов и амплитуд: скорость крупномасштабного течения конденсата много больше уровня волновых пульсаций. В таком режиме

последние быстро деформируются и переносятся средним потоком — вместе с подавлением межволнового взаимодействия при быстром вращении это оправдывает квазилинейное приближение: в динамике волн ведущая роль отведена линейному взаимодействию с заданным средним течением, тогда как обратное влияние пульсаций на средний поток удерживается через рейнольдсовы напряжения. Родственная теория взаимодействия волн с крупномасштабным средним течением детально разработана для стратифицированной жидкости, где внутренние гравитационные волны обладают дисперсионным законом того же типа [16], а роль медленной моды играет горизонтальное течение с преимущественно вертикальным сдвигом. В результате от волн медленному течению может передаваться энергия [17] — в настоящей работе исследуется аналогичный эффект во вращающейся жидкости.

Уравнения активного/пассивного переноса-диффузии описывают огромное количество природных явлений, начиная от физики атмосферы, горения [18] и заканчивая переносом плотности в стратифицированных системах [16]. Задача о статистике пассивного скалярного поля исторически выросла из прикладных нужд — переноса течением примесей, тепла и влаги в атмосфере и океане, — но ее теоретическое значение оказалось шире. После выяснения статистических свойств развитой изотропной трехмерной турбулентности естественным развитием стала теория пассивного перемешивания скалярного поля в статистически изотропном течении в инерционном интервале [19; 20] и на масштабах ниже колмогоровского [21]. В изучении турбулентности перенос пассивной примеси представляет интерес, поскольку статистика ее перемешивания очень чувствительна к характеру гидродинамического движения. Именно на пассивном скаляре впервые удалось получить аномальный скейлинг структурных функций непосредственно из уравнений движения [22]. Тем самым для скалярной турбулентности была развита последовательная теория перемежаемости, в отличие от статистики самого поля скорости [1]. Отдельное направление в турбулентности пассивного скаляра образует бэтчелоровский режим, когда перемешивание происходит на масштабах, где поле скорости уже гладкое: здесь вся статистика скаляра определяется лагранжевой статистикой растяжения жидкого элемента в турбулентном потоке [23]. Эта теория, в частности, изучает, каким образом проходит процесс гомогенизации пространственного распределения скаляра через размешивание в неоднородном течении, которое существенно ускоряется за счет случайных турбулентных пульсаций. Неоднородное течение оказывает схожее действие и на другие поля — в квазилинейном приближении роль пассивно перемешиваемого средним потоком поля играет вектор скорости волны.

Степень разработанности темы исследования.

Реализация квазилинейной теории, описывающей когерентный вихрь в двумерной турбулентности, в работах [24; 25], где возбуждение турбулентных пульсаций происходит однородно в пространстве, дает опорный результат в этой области: средний азимутальный профиль скорости в широком диапазоне выходит на постоянное значение, определяемое мощностью накачки и трением о дно. В “универсальном пределе”, соответствующем слабой диссипации у возбуждаемых мелкомасштабных пульсаций, профиль не зависел от ее типа (вязкости/гипервязкости) и граничных условий, а теория предсказывала величину скорости. Такие условия возбуждения течений были реализованы в эксперименте по двумерной турбулентности, в котором наблюдался сформировавшийся вихрь с плоским профилем скорости [9]. Развитие этого подхода позволило описать статистику пульсаций внутри конденсата [26], установить условия формирования когерентного вихря за рамками универсального предела (при учете роли вязкости наряду с трением о дно) [27], а также изучить отклонение в профиле скорости среднего течения [28]. В работе [29] был предсказан линейно-логарифмический профиль скорости в вихре при подавлении эффектов трения о дно (обусловленный вязкой диссипацией), который воспроизвелся в численном моделировании.

Геострофические вихри, возникающие во вращающейся турбулентности, наблюдались в экспериментах с различающимися способами возбуждения течений [30–33]; способ накачки определял время жизни вихрей. Характерным образом проявляется циклон-антициклонная асимметрия, связанная с несимметричным влиянием вращения системы на динамику вихревого течения. Численное моделирование вращающейся турбулентности приводит к той же картине и дополнительно позволяет разделить вклады геострофической и волновой компонент в поле скорости, а также изучить перенос энергии к квазидвумерному конденсату [34; 35]. Отдельную линию составляет изучение обратного влияния вихрей на волновое поле (см. опыт [36]) и поглощения инерционных волн средним геострофическим течением, которое исследовалось в численном моделировании [37].

Схема квазилинейной теории была перенесена на случай столбового геострофического вихря при формально той же постановке задачи: изучалось осесимметричное сформировавшееся когерентное течение, которое поддерживается случайной мелкомасштабной накачкой с однородной статистикой в пространстве. В ней было рассчитано касательное напряжение, созданное ансамблем возбужденных инерционных волн. Оно дает замкнутое уравнение для профиля средней азимутальной скорости; в отсутствие трения о горизонтальные границы его решение воспроизводит линейно-логарифмическую радиальную зависимость профиля скорости [38], являющуюся аналогом результата [29] для двумерного когерентного вихря. Учет конечности числа Россби нарушает симметрию

между вихрями разной завихренности: собственное вращение антициклона подавляет глобальное вращение жидкости, так что максимум скорости в антициклоне смещается от его оси наружу по сравнению с профилем циклона [39]. Развитие теории на случай когерентного течения в форме крупномасштабных струй, реализующихся в численном моделировании внутри ячейки с неравными горизонтальными сторонами, представлено в недавней работе [35]. Наконец, как и в двумерном случае, теория была распространена на изучение статистики турбулентных пульсаций, пассивно переносимых и деформируемых течением столбового вихря [40].

Классической моделью перемешивания пассивной примеси турбулентным гладким полем скорости служит случайное статистически изотропное течение. Одноточечные моменты пассивного скаляра, переносимого таким потоком, были найдены аналитически в [23]; численное моделирование [41] и опыты в трехмерном изотропном потоке [42] проводили проверку этих предсказаний. В случае, когда мелкомасштабные пульсации находятся в потоке крупномасштабного среднего течения, его градиент формирует выделенное направление и тем самым меняет статистику как самих пульсаций, так и перемешивания, по сравнению с изотропным случаем. Для потока с выраженной сдвиговой компонентой перемешивание скаляра исследовалось в численном счете в работе [43].

Целью данной работы является изучение характеристик адвекции когерентным вихревым течением полей различной природы, включая скалярное поле и поле инерционной волны. Для инерционных волн произведено построение статистической теории их взаимодействия с геострофическим вихрем во вращающейся турбулентности.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Исследовать статистические свойства пассивного скаляра — анизотропию, одноточечные моменты и корреляционные функции — при его перемешивании течением, которое состоит из сильной сдвиговой компоненты и случайных во времени флуктуаций с гладким пространственным профилем.
2. Провести анализ статистики эволюции близких лагранжевых траекторий в таком потоке с модельными флуктуациями, коротко коррелированными во времени. Исследовать связь статистических характеристик потока с корреляционными функциями в задаче пассивного скаляра при малой диффузии.
3. Вывести уравнения динамики инерционной волны на фоне осесимметричного столбового вихря в цилиндрической системе координат. Проанализировать их и выяснить, какие особенности возникают у волны в теле вихря и как неоднородность вихревого течения влияет на ее распространение.

4. Изучить взаимодействие инерционной волны со средним течением с точки зрения обмена импульсом и энергией между ними. В случае осесимметричного вихря определить условия, необходимые для поглощения волны и передачи ею энергии и момента импульса, а также эффективность этого процесса.
5. Рассмотреть коротковолновый предел задачи и определить потоки энергии и момента импульса поглощаемой волны — основу для построения статистической теории поддержания течения вихря ансамблем коротких волн. Изучить в этом пределе распространение волны вблизи критического слоя с учетом вязкости, как для монохроматической волны, так и для динамики квазимонохроматического волнового пакета.

Научная новизна: Результаты диссертации, выносимые на защиту, являются оригинальными и впервые получены автором в сотрудничестве с научным руководителем и коллегами.

В частности, впервые исследованы корреляционные функции пассивной примеси при ее перемешивании в анизотропном гладком течении — сдвиговом потоке с добавлением относительно слабой гладкой случайной компоненты. Для такого течения установлена также связь парной корреляционной функции скаляра со статистикой градиентов поля скорости. Нам не известны теоретические работы других авторов, в которых исследовалась бы статистика перемешивания и распада скаляра в анизотропном гладком течении такого типа либо устанавливалась описанная связь. Подробный обзор литературы по перемешиванию пассивной примеси гладким потоком дан в Подразделе 1.4.2.

Другим оригинальным исследованием, представленным в работе, является квазилинейное описание взаимодействия инерционных волн с геострофическим течением когерентного вихря в трехмерной вращающейся турбулентности, происходящего в критических слоях. Впервые изучено поглощение трехмерной инерционной волны вихрем конечного размера и дано детальное описание динамики волнового пакета вблизи критического слоя. Нам не известны работы других авторов, в которых поглощение инерционных волн в критическом слое геострофического вихря рассматривалось бы вне рамок локальной модели неограниченного однородного сдвигового течения. Обзор работ, использующих эту модель, приведен в Разделе 1.3.

Теоретическая и практическая значимость.

Работа имеет теоретический характер. Установленный механизм передачи момента импульса и энергии от инерционной волны геострофическому вихрю уточняет и расширяет картину, следующую из локальной модели однородного сдвига. Центральное значение имеет выявленный вклад инерционных волн в касательное напряжение Рейнольдса: именно он замыкает уравнение для среднего течения и определяет радиальный

профиль скорости геострофического вихря. Полученное описание динамики волнового пакета вблизи критического слоя уточняет общую теорию волновых пакетов и применимо к волнам иной природы, для которых существует критический слой, — прежде всего к внутренним гравитационным волнам в стратифицированной жидкости.

Практическая значимость определяется применимостью построенной теории к интерпретации экспериментальных данных и данных прямого численного моделирования вращающейся турбулентности. Развитая квазилинейная теория связывает наблюдаемый профиль скорости вихря с параметрами накачки и скоростью вращения системы, что позволяет планировать эксперименты по когерентным вихрям и выбирать оптимальный способ обработки и представления их измерений.

Результаты построенной теории перемешивания пассивного скаляра применимы к обработке экспериментальных данных по перемешиванию в течениях с выраженной сдвиговой компонентой — внутри крупномасштабного когерентного вихря в двумерной турбулентности, в течениях эластической турбулентности [44] в микроканале или двумерном течении [45], реализующемся в тонких слоях. Установленная связь парной корреляционной функции скаляра со статистикой потока открывает при этом возможность решать обратную задачу — извлекать из измерений структуры примеси статистические характеристики самого течения.

Методология и методы исследования.

Методология работы опирается на анализ уравнений Навье—Стокса и переноса-диффузии скаляра. Течение представляется суперпозицией быстрой и медленной компонент по их динамике во времени. Исследуемое среднее течение вихря сильно по сравнению с волновым полем, что позволяет развить квазилинейное приближение: быстрая динамика волны описывается линеаризованным уравнением в присутствии вихревого потока, а нелинейным взаимодействием волн друг с другом пренебрегается. Для медленной динамики когерентного вихря усреднение уравнения Навье—Стокса по времени дает уравнение Рейнольдса на среднее течение с квадратичным по амплитуде волн вкладом (напряжением Рейнольдса). Он определяется усреднением по ансамблю возбуждаемых волн — в случае, если в модели известны статистические свойства волн или возбуждающей их силы, уравнение Рейнольдса оказывается замкнутым.

Исследование перемешивания пассивного скаляра в гладком поле со случайными флуктуациями опирается на теорию лагранжевых растяжений и не ограничивается предположением о короткой корреляции во времени случайной компоненты скорости. Разбегание близких лагранжевых траекторий на больших временах описывается функцией Крамера, учитывающей и большие отклонения от среднего; корреляционные функции скаляра вычисляются методом оптимальной флуктуации — по реализации случайного процесса, дающей наибольший вклад с учетом ее

вероятности. Учитываются эффекты малой, но конечной диффузии. Для анализа статистики лагранжевых траекторий в модели, где флуктуации были коротко коррелированы, были выполнены анализ линейного дифференциального оператора Фоккера-Планка и численное моделирование соответствующих стохастических дифференциальных уравнений средствами системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Для статистики перемешивания пассивного скалярного поля в двумерном течении с сильной сдвиговой компонентой и гладкими флуктуациями вычислены моменты, установлены пространственная зависимость парной корреляционной функции и характеристики корреляционных функций высокого порядка вблизи максимума. Были рассмотрены как задача распада, так и задача непрерывного возбуждения флуктуаций скаляра. Результаты выражены через функцию Крамера, для которой установлена общая симметрия, определяющая статистические свойства скаляра. Приведено явное описание функции в модели с коротко коррелированными во времени флуктуациями.
2. Установлена пропорциональность между парной корреляционной функцией пассивного скаляра в задаче распада и плотностью вероятности расстояния между близкими лагранжевыми траекториями в гладком поле скорости с сильным сдвигом и случайными флуктуациями.
3. Установлено, что в пределе малой вязкости ведущим механизмом передачи момента импульса и энергии от инерционной волны геострофическому вихрю является поглощение волны в ее критическом слое, тогда как волна с противоположным знаком момента импульса отражается от вихря без передачи. Определены условия существования критического слоя и эффективность поглощения в нем.
4. Описана динамика инерционной волны вблизи критического слоя с учетом вязкости. Для монохроматической волны найдено решение во внутреннем вязком слое и определен коэффициент прохождения, для квазимонохроматического волнового пакета получено описание его распыливания и поглощения.

Достоверность полученных результатов обеспечивается надежностью примененных аналитических и численных методов. Часть из полученных результатов получила непосредственное подтверждение в экспериментах или численном моделировании, для других известны аналоги, проверенные в смежных физических задачах. Выводы работы согласуются с результатами более ранних исследований других авторов.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих научных мероприятиях:

- «XXIII Зимняя школа по механике сплошных сред» (г. Пермь, Россия, 13–17 февраля 2023 г.), устный доклад «Пространственное распределение пассивного скаляра в двумерном сдвиговом течении с флуктуациями»
- школа-конференция «Современная гидродинамика 2023» (г. Черноголовка, Россия, 29–31 августа 2023 г.), постерный доклад «Поглощение инерционных волн геострофическим течением в случае их неоднородного возбуждения в пространстве»
- школа-конференция «Современная гидродинамика 2024» (г. Черноголовка, Россия, 28–30 августа 2024 г.), устный доклад «Захват инерционных волн геострофическим течением»
- XXI научная школа «Нелинейные волны — 2024» (г. Нижний Новгород, Россия, 5–11 ноября 2024 г.), устный доклад «Поглощение инерционных волн в критическом слое геострофического течения»
- школа-конференция «Современная гидродинамика 2026» (г. Черноголовка, Россия, 28–30 августа 2026 г.), устный доклад «Поддержание инерционными волнами столбового вихря в турбулентном течении вращающейся жидкости»

Кроме того, все результаты докладывались на научных семинарах ученого совета ИТФ им. Л.Д. Ландау РАН.

Личный вклад. Все результаты, приведенные в данной диссертационной работе, получены лично автором или при его непосредственном участии.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в следующих работах:

- A1. *Н.А. Ивченко, С.С. Вергелес* Статистика пассивного скаляра в двумерном сдвиговом течении с флуктуациями // ЖЭТФ. — 2023. — Т. 163, вып. 5. — С. 724—733.
- A2. *N.A. Ivchenko, V.V. Lebedev, S.S. Vergeles* Mixing in two-dimensional shear flow with smooth fluctuations // Physical Review E. — 2024. — Vol. 110, no. 1. — P. 015102.
- A3. *N.A. Ivchenko, S.S. Vergeles* Absorption and reflection of inertial waves by a geostrophic vortex // Physics of Fluids. — 2025. — Vol. 37, no. 12. — P. 126605.

Все 3 работы опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы, сформулирована цель работы, обоснованы научная новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов, раскрыто содержание диссертации по главам.

Первая глава диссертации посвящена обзору литературы по темам исследования. **Раздел 1.1** имеет вводный характер, в нем излагаются характерные черты гидродинамики в системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью Ω вдоль Oz : с теоретической стороны рассматриваются такие явления, как вихревые колонны и инерционные волны.

В **Разделе 1.2** характеризуются режим вращающейся турбулентности и потоки, которые в нем реализуются. В Пункте 1.2.1 рассматриваются каскады переноса энергии через нелинейное взаимодействие течений: приводится решение Галтиера [46] прямого каскада энергии к меньшим масштабам, его проверка численным моделированием и последующее развитие теории, обсуждается форма наблюдающегося обратного каскада энергии к большим масштабам. В Пункте 1.2.2 дается теоретическое описание динамики квазидвумерных геострофических течений в турбулентном потоке с примерами их наблюдения в численном счете. В Пункте 1.2.3 рассматривается динамика геострофических течений в ограниченных системах и разбирается механизм экмановского трения о горизонтальные стенки, необходимый для интерпретации экспериментальных данных. Далее проводится обзор экспериментов, в которых формируются геострофические вихри, с обсуждением различных способов возбуждения и диссипации течений в турбулентности.

В **Разделе 1.3** подробно разбирается построенная в работах [38; 39; 47] модель когерентного столбового вихря в цилиндрических координатах (r, φ, z) , который поддерживается турбулентным потоком, создаваемым стохастической силой с коротковолновой однородной и изотропной статистикой, в случае неограниченной системы при малых числах Россби. Результаты в этой модели служат основой и точкой для сравнения в исследованиях, представленных в настоящей работе. В Пункте 1.3.1 описывается динамика отдельной пульсации в локальной декартовой системе, движущейся вместе с потоком вихря, где геострофическое течение сводится к однородному сдвигу с темпом $\Sigma = U' - U/r$. В Пункте 1.3.2 вычисляется касательная компонента тензора Рейнольдса, определяющая взаимодействие пульсаций со средним течением. В модели показано, что в пределе малого числа Россби для вихревого течения и при слабой диссипации ее выражение принимает универсальный вид $\langle u^r u^\varphi \rangle = \epsilon / \Sigma$, с поправкой порядка $(\nu k_f^2 / \Sigma)^{1/3}$, как и в двумерной теории [25]. Здесь ν — кинематическая вязкость, k_f — характерное волновое число возбуждения накачкой, а ϵ — мощность накачки на единицу массы. Однако подчеркивается отличие от двумерного случая: ансамбль возбужденных инерционных волн отдает импульс среднему течению за время порядка Σ^{-1} , значительно меньшее вязкого времени. В Пункте 1.3.3 найденное $\langle u^r u^\varphi \rangle$ подставляется в уравнение Рейнольдса, и изучается получающийся радиальный профиль средней скорости. В отсутствие трения о дно он отвечает постоянному темпу сдвига $\Sigma_0 = \sqrt{\epsilon / \nu}$ и линейно-логарифмической зависимости скорости $U(r)$. При

учете трения эта асимптотика сохраняется лишь вблизи оси вихря и сменяется выходом на постоянное значение скорости на больших расстояниях. Затем, следуя [39], в рассмотрение включается влияние конечной вязкости и конечного числа Россби через коэффициент эффективности передачи импульса F . Их эффекты приводят к асимметрии между циклонами и антициклонами в модели; обсуждаются различие в их профилях, а также область применимости квазилинейного приближения.

В заключительном **Разделе 1.4** литературного обзора дается введение в теорию переноса пассивного скалярного поля θ . Характеристика “пассивный” означает, что поле θ не оказывает обратного влияния на скорость течения. Общим уравнением, описывающим динамику скаляра θ , переносимого случайным потоком $\mathbf{v}$, подверженного диффузии и возбуждаемого внешним источником (накачкой) f , является

$$\partial_t \theta + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \theta - \kappa \nabla^2 \theta = f, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (1)$$

Коэффициент диффузии κ считается относительно малым (полагается предел больших чисел Шмидта и Пекле). Введя две стандартные постановки — распад скаляра (эволюция заданного начального распределения) и непрерывное возбуждение флуктуаций скалярного поля, в Пункте 1.4.1 приводятся классические результаты по его перемешиванию в турбулентном потоке: закон Обухова-Корсина $E \sim \epsilon^{-1/3} \Phi_0 k^{-5/3}$ на инерционном интервале [19; 20] и спектр Бэтчелора $E \sim \Phi_0 (\nu/\epsilon)^{1/2} k^{-1}$ на вязко-конвективном интервале [21]. Здесь $E(k)$ обозначает спектральную плотность в фурье-пространстве на основе корреляционной функции флуктуаций θ , а Φ_0 — скорость производства дисперсии поля внешним источником f .

Далее в Пункте 1.4.2 детально представлена теория перемешивания скаляра в бэтчелоровском режиме согласно статье [23]. Изложенные результаты используются при переходе к анизотропному сдвиговому течению далее в настоящей работе. Разбирается схема теории лагранжевых растяжений на примере изотропной модели, в которой статистика перемешивания θ сводится к статистике показателей ρ_i разбегания близких лагранжевых траекторий в данном случайном потоке. Составляется ланжевенская система динамики ρ_i , и показывается, как в типичном случае на больших временах эволюции она распадается на независимые уравнения. В модели Крайчнана изотропного случайного потока находятся в явном виде экспоненты Ляпунова λ_i и гауссовы асимптотики распределения показателей. После этого схема обобщается на случай конечного времени корреляции флуктуаций: гауссово тело распределения заменяется формой теории больших уклонений с функцией Крамера. Для скаляра, у которого показатели растяжения ρ_i характеризуют деформацию сгустка, эти результаты дают следующее. В задаче о распаде одноточечные моменты θ начинают затухать на диффузионной стадии перемешивания с декрементом, который вычисляется на основе функции Крамера. Статистика

затухания отражает перемежаемость, в которой высокие моменты $\langle |\theta|^\alpha \rangle$ определяются редкими реализациями течения; главный результат — насыщение значения декремента γ при степени выше критической, $\alpha > \alpha_c$: в модели Крайчана определены их явные значения. В задаче с накачкой стационарное состояние, реализующееся на больших временах, описывается распределением “возрастов” сгустков. Для плотности значений флуктуаций скаляра приводятся асимптотики внутри тела и (экспоненциального) хвоста распределения.

Во **Второй главе** исследуется перемешивание пассивного скаляра двумерным течением, которое складывается из сильной сдвиговой компоненты и относительно слабых гладких флуктуаций, случайных во времени. В **Разделе 2.1 “Введение”** дана общая характеристика анизотропных течений, которые может отражать такая модель потока: крупномасштабный когерентный вихрь, возникающий в двумерной турбулентности вследствие обратного каскада энергии, пристеночные и ламинарные вихревые течения в тонких слоях жидкости или течение раствора полимера в микроканале в эластической турбулентности. Общим для них является то, что градиент скорости вдоль лагранжевой траектории остается неизменным, образуя сдвиговое течение, а достаточно крутые энергетические спектры позволяют считать флуктуации на его фоне крупномасштабными и гладкими. Приводятся ссылки на работы, изучающие такие течения, и численное исследование перемешивания скаляра в модели турбулентного потока со сдвигом.

В **Разделе 2.2** приводятся исходные уравнения переноса и диффузии пассивного скаляра в описанном потоке в пределе большого эффективного числа Шмидта. В этом пределе поле скорости $\mathbf{v}$ на вязком интервале гладкое, и полагается, что его можно разложить в ряд Тейлора с радиусом сходимости, превышающим все характерные масштабы распределения скаляра. Чтобы проследить за процессом перемешивания, перейдем в систему отсчета, движущуюся вместе с некоторой лагранжевой частицей, приближая в ней скорость линейной зависимостью

$$v_i = (\Sigma_{ik} + \sigma_{ik})r_k, \quad (2)$$

где Σ_{ik} и $\sigma_{ik}(t)$ — постоянная и флуктуирующая во времени части градиента скорости, причем среднее по времени $\langle \sigma_{ik} \rangle = 0$. Условие несжимаемости приводит к их бесследовости. Рассматривается модель сильного постоянного течения, являющегося сдвиговым: $\Sigma_{xy} = \Sigma \gg \sigma_{ik}$. Уравнение (1) принимает вид

$$\partial_t \theta + \Sigma y \partial_x \theta + \hat{\sigma} \mathbf{r} \cdot \nabla \theta - \kappa \nabla^2 \theta = f. \quad (3)$$

Интересуясь случаем слабой диффузии (предел большого числа Пекле), в работе сначала пренебрегается ее влиянием и изучается динамика

вектора разности $\ell(t)$ между близкими лагранжевыми траекториями в данном течении. За счет сильного постоянного сдвига вектор стремится ориентироваться вдоль потока, но это направление является неустойчивым для него. Прохождение через положение $\ell \parallel Ox$ обусловливается действием одной компоненты σ_{yx} флуктуаций течения, интенсивность которой мы обозначим через D (так что $D \ll \Sigma$); ее влияние играет роль на малых углах отклонения от Ox порядка $\psi_* = (D/\Sigma)^{1/3}$. Преодоление $\ell_y = 0$ под действием флуктуаций приводит к тому, что вектор $\ell(t)$ совершает аperiодические провороты в плоскости за характерное время $(D\Sigma^2)^{-1/3}$. Перемасштабирование вдоль направления потока $w = \psi_* x$ и переход к безразмерному времени $\tau = (D\Sigma^2)^{1/3} t$ приводят задачу к замкнутой ланжевендовской системе для логарифма растяжения ϱ и угла ϕ :

$$(D/\Sigma)^{1/3} \ell_x = l_0 \exp \varrho \cos \phi, \quad \ell_y = l_0 \exp \varrho \sin \phi, \quad (4)$$

$$\begin{cases} \partial_\tau \varrho = (1 + \zeta) \cos \phi \sin \phi, \\ \partial_\tau \phi = \zeta \cos^2 \phi - \sin^2 \phi, \end{cases} \quad (5)$$

в которой детерминированные и случайные члены с шумом $\zeta(\tau)$ (единичной интенсивности) сопоставимы и их значения порядка единицы. Повороты вектора $\ell(\tau)$ в данной параметризации перестают быть резко выраженными. Важной особенностью является то, что уравнение для угла $\phi(\tau)$ замкнуто и допускает независимое исследование. При этом процесс повторяющихся проворотов сопровождается экспоненциальным ростом расстояния между лагранжевыми траекториями $\varrho \sim \lambda \tau$ с характерным темпом λ — экспонентой Ляпунова.

Далее в **Разделе 2.3** после выбора масштабов исследуются остаточная анизотропия и статистика разбегания траекторий для решений ланжевендовской системы (5). Распределение по углу ϕ выходит на стационарное на больших временах $\tau \gg 1$, тогда как плотность вероятности (PDF) $\Pi(\tau, \varrho)$ для показателя не становится стационарной, поскольку ϱ в среднем растет линейно. Ее асимптотика на больших временах получена в Пункте 2.3.1 в рамках теории больших уклонений [1], см. формулу (6): она выражается через функцию Крамера $S(\xi)$, которая везде выпукла и имеет минимум в точке $\xi = \lambda$, где $S(\lambda) \equiv 0$. Для $\Pi(\tau, \varrho)$ нами установлена симметрия общего характера, требующая от статистики шума $\zeta(\tau)$ только инвариантности относительно обращения времени: плотности вероятности при противоположных знаках ϱ связаны соотношением

$$\Pi(-\varrho) = \exp(-2\varrho)\Pi(\varrho), \quad \Pi(\varrho) \propto \exp[-\tau S(\varrho/\tau)]. \quad (6)$$

Вывод соотношения симметрии приведен в **Приложении А**. Отсюда для функции Крамера следует $S(-\xi) = S(\xi) + 2\xi$, и, в частности, $S'(0) = -1$.

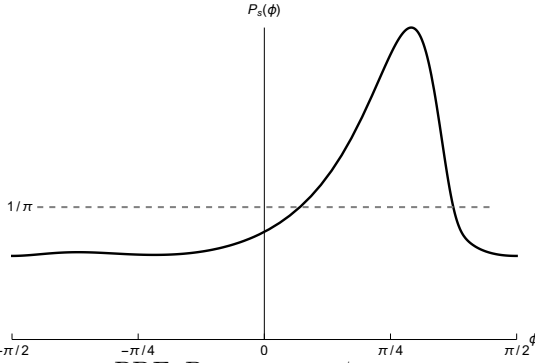


Рис. 1 — Стационарная PDF P_s для угла ϕ в модели коротко коррелированных во времени флуктуаций $\zeta(\tau)$.

В терминах производящей функции $\gamma(\eta)$, связанной с S преобразованием Лежандра:

$$S = \gamma - \eta\xi, \quad \partial_\eta \gamma = \xi, \quad \partial_\xi S = -\eta, \quad (7)$$

это же свойство записывается как симметрия $\gamma(\eta) = \gamma(2 - \eta)$. Полученные соотношения используются далее при вычислении моментов и корреляционных функций скаляра.

Описанные результаты в Пункте 2.3.2 конкретизированы для модели флуктуаций, коротко коррелированных во времени: $\langle \zeta(\tau_1)\zeta(\tau_2) \rangle = 2\delta(\tau_1 - \tau_2)$. Записаны уравнения Фоккера-Планка как для угла ϕ отдельно, так и для совместной PDF $\mathcal{P}(\tau, \varrho, \phi)$. Было найдено аналитическое выражение для стационарного распределения по углу $P_s(\phi)$, на основе которого получены значения экспоненты Ляпунова и частоты проворотов:

$$P_s(\phi) = \frac{N}{\cos^2 \phi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\cos^2 \psi} e^{[(\tan \phi - \tan \psi)^3 - \tan^3 \phi]/3}, \quad -\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2, \quad (8)$$

$$N = 3^{5/6} / \left[2^{1/3} \sqrt{\pi} \Gamma(1/6) \right], \quad \lambda = \frac{\pi N}{\sqrt{3}} \approx 0.36, \quad \omega = -\langle \dot{\phi} \rangle = \pi N \approx 0.63.$$

Уравнение Фоккера-Планка для $\mathcal{P}$ путем преобразования Фурье $\varrho \rightarrow \eta$ сводится к задаче на собственные значения для оператора $\hat{M}(\eta)$, сформулированного в терминах угла ϕ . Его рассмотрение вынесено в **Приложение Б**: там была подтверждена симметрия (6) для $\gamma(\eta) = \gamma(2 - \eta)$ как собственных значений $\hat{M}$, и разобрана структура ветвей значений γ_n в комплексной плоскости η . На основе (7) было описано тело PDF $\Pi(\tau, \varrho)$ путем численного определения коэффициентов разложения $S(\xi)$ в рамках модели флуктуаций, коротко коррелированных во времени:

$$S'''(\lambda) \approx 2.46, \quad S''''(\lambda) \approx -1.56. \quad (9)$$

Отталкиваясь от результатов по разбеганию лагранжевых траекторий, в **Разделе 2.4** мы изучаем статистику затухания скаляра θ в задаче распада. Начальное состояние задается статистически однородным в пространстве ансамблем подобных клякс с нулевым суммарным количеством скаляра. Все величины получаются двухступенчатым усреднением — сначала по статистике начального распределения, подразумевающейся гауссовой, а затем по статистике случайного течения. Если для парной корреляционной функции $\mathcal{F}$, частично усредненной только по начальной статистике, выбрать гауссовый профиль начального распределения в $\tau = 0$, то она сохраняет гауссову форму во все последующие моменты эволюции:

$$\mathcal{F} = \langle \theta(\tau, 0) \theta(\tau, \mathbf{r}) \rangle_\theta = \frac{\sqrt{\det \hat{\Lambda}}}{\sqrt{\det \hat{\Lambda}|_{\tau=0}}} \exp(-\Lambda_{\alpha\beta} b_\alpha b_\beta). \quad (10)$$

Поэтому анализ сводится к динамике параметров этого распределения в перемасштабированном пространстве $\mathbf{b} = (w, y)$:

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_+^{-2} & 0 \\ 0 & L_-^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (11)$$

Уравнение для угла $\phi(\tau)$ воспроизводит (5) исследованное ранее, и логарифм наибольшего размера кляксы $\ln L_+/L$ растет по тому же закону, что и ϱ , где L — начальный размер кляксы $\mathcal{F}$. Малая, но конечная диффузия приводит к тому, что клякса не полностью повторяет деформацию элемента жидкости: наименьший поперечный размер L_- сжимается, пока не достигнет диффузионного масштаба $r_\kappa = (2\kappa)^{1/2} \Sigma^{-1/3} D^{-1/6} \ll \psi_* L$; это происходит за характерное время $\tau_\kappa = \ln(DL^2/\kappa)/2\lambda \gg 1$.

В Пункте 2.4.1 разбирается одноточечная статистика в распадной задаче: моменты скаляра выражаются через интенсивность $\det \hat{\Lambda}$ в (10), и их вычисление сводится к усреднению с весом $\Pi(\varrho)$. На стадии переноса течением $\tau \ll \tau_\kappa$ они не зависят от времени. Как и следовало ожидать на основании результатов для изотропного случая, изложенных в Пункте 1.4.2, на диффузионной стадии затухание моментов демонстрирует перемежаемость. При умеренных значениях степени, $0 < \alpha < \alpha_c$, у $\langle |\theta|^{2\alpha} \rangle$ интеграл асимптотически определяется методом перевала и декремент $\gamma(\alpha)$ задается преобразованием Лежандра функции Крамера (7). Выше критической степени интеграл определяется границей области интегрирования, и декремент перестает зависеть от показателя:

$$\langle |\theta|^{2\alpha} \rangle \propto \begin{cases} \exp[-\gamma(\alpha)\tau], & 0 < \alpha < 1, \\ \exp[-\tau S(\lambda\tau_\kappa/\tau)], & \alpha > 1. \end{cases} \quad (12)$$

Было также показано, что нижняя асимптотика в (12) реализуется для случая $0 < \alpha < 1$ как переходное поведение в затухании на временах

$\tau_\kappa < \tau < \lambda\tau_\kappa/\xi$ (ξ определено согласно (7)). Критическое значение $\alpha_c = 1$, ранее известное для двумерной изотропной модели Крайчнана, распространено здесь на сдвиговое течение с неконкретизированной статистикой флуктуаций; оно следует из симметрии функции Крамера, см. ниже (6).

В Пункте 2.4.2 изучалось пространственное распределение парной корреляционной функции $F = \langle \mathcal{F} \rangle$. После усреднения по углу ϕ в использованной параметризации (11) оно оказывается близким к изотропному в перемасштабированном пространстве $\mathbf{b}$. Поперечный размер кляксы при этом выпадает из ответа: выше диффузионного масштаба r_κ парная корреляционная функция определяется только статистикой растяжения L_+ и не зависит от коэффициента диффузии. В работе мы установили связь между функцией Крамера и парной корреляционной функцией F задачи распада на масштабах выше диффузионного, которая носит общий характер. Было найдено асимптотическое затухание F и показана ее прямая пропорциональность совместной PDF $\mathcal{P}$ в задаче о статистике лагранжевых траекторий:

$$F \sim \frac{\psi_* L^2}{b^2} \exp \left[-\tau S \left(\frac{\ln(b/L)}{\tau} \right) \right], \quad b \gtrsim L; \quad F \propto \mathcal{P}(\tau, \varrho, \psi)/b^2, \quad (13)$$

если перейти к зависимости $F(\tau, \varrho, \psi)$ от угла ψ в плоскости $\mathbf{b}$ и показателя $\varrho = \ln(b/L)$. Это позволяет восстанавливать характеристики случайного потока (функцию Крамера) из экспериментальных измерений пространственной структуры примеси. В Пункте 2.4.3 отмечается, что почти изотропная парная корреляционная функция не отражает складывания клякс скаляра при размешивании. Их слоистая структура проявляет себя в корреляционных функциях высокого порядка F_{2n} ; они имеют резкий максимум в коллинеарной геометрии (когда точки разбиты на пары с параллельными разностями), поскольку в такой конфигурации сильно вытянутые потоком кляксы перекрываются. Для режима коллинеарной геометрии найдены степенные асимптотики затухания в пространстве.

После этого в Разделе 2.5 аналогичные статистические характеристики находятся для задачи с непрерывной накачкой, в которой исследуется установившееся стационарное состояние на больших временах. Мы полагаем, что накачка представлена действием случайного гауссова источника f , который характеризуется парной корреляционной функцией $\langle f(1)f(2) \rangle = \Phi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\delta(t_1 - t_2)$ и производит статистически однородно изотропные кляксы флуктуаций скаляра с характерным размером $L \gg r_\kappa$. К уравнению, которому удовлетворяет частично усредненная по статистике f парная корреляционная функция $\mathcal{F} = \langle \theta(t, 0) \theta(t, \mathbf{r}) \rangle_f$:

$$\partial_t \mathcal{F} + \Sigma y \partial_x \mathcal{F} + \sigma_{yx}(t) x \partial_y \mathcal{F} - 2\kappa \nabla^2 \mathcal{F} = \Phi(\mathbf{r}) \quad (14)$$

последовательно применяется перемасштабирование (4) и техника решения задачи распада: кляксы, внесенные в разные моменты, статистически

независимы, поэтому если предположить $\Phi \propto e^{-r^2/L^2}$, то $\mathcal{F}$ будет сохранять гауссову форму до усреднения по течению. Установившееся состояние можно представить совокупностью вкладов от клякс разного “возраста”: каждая эволюционирует по описанному выше сценарию, а ответ получается интегрированием по времени, прошедшему с момента ее внесения внешним источником.

В Пункте 2.5.1 показывается отклонение статистики моментов флуктуаций пассивного скаляра от гауссова распределения: для $\langle |\theta|^{2\alpha} \rangle$ получается выражение, подлежащее оптимизации по τ — времени жизни кляксы. При умеренных значениях степени α оптимум приходится на минимум функции Крамера, что воспроизводит картину нормального распределения в одноточечной статистике флуктуаций. Однако с ростом α оптимальное время τ уходит от типичного, и моменты выходят из гауссова режима: их рост определяется редкими реализациями течения, а хвост функции распределения флуктуаций оказывается экспоненциальным:

$$\begin{aligned} \langle |\theta|^{2\alpha} \rangle &= C_\alpha \langle \theta^2 \rangle^\alpha, \quad \langle \theta^2 \rangle = \frac{\Phi(0)}{\lambda} \ln(\psi_* L / r_\kappa); \\ \alpha &\gtrsim \ln(\psi_* L / r_\kappa) : P_\theta \sim e^{-|\theta|/\theta_0}. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $C_\alpha = 2^\alpha \Gamma(\alpha + 1/2) / \sqrt{\pi}$, $\theta_0^2 = \Phi(0)(D\Sigma^2)^{-1/3}/S(0)$, а $\lambda = \lambda(D\Sigma^2)^{1/3}$.

В Пункте 2.5.2 исследуется распределение парной корреляционной функции $F = \langle \mathcal{F} \rangle$. На расстояниях ниже диффузионного масштаба она сводится ко второму моменту из (15). На вязко-конвективном интервале $r_\kappa \ll b \ll \psi_* L$ с помощью обсуждавшейся в (13) связи между F и плотностью распределения $\mathcal{P}$ получен анизотропный аналог спектра Бэтчелора: в фурье-представлении ему отвечает спектр с зависимостью $E \propto k^{-1}$ от волнового числа, но с нетривиальным угловым профилем, см. Рис. 1:

$$\tilde{F}_{\mathbf{k}} = \frac{2\pi^2 \Phi(0) P_s(\phi_k)}{\lambda k^2}, \quad (16)$$

где $k_y = k \cos \phi_k$, $k_w = -k \sin \phi_k$, а $P_s(\phi_k)$ — стационарное распределение по углу (8). На расстояниях больше L F демонстрирует степенное затухание $F \sim (\Phi(0)/\lambda) \psi_* L^2 / b^2$. Наконец, в Пункте 2.5.3 рассмотрено поведение корреляционных функций высокого порядка в коллинеарной геометрии на разном расстоянии b , определяемом соотношением $b^2 = b_1^2 + \dots + b_n^2$ по совокупности разностей между парами точек. На малых расстояниях, $b \ll \psi_* L$, статистика F_{2n} остается гауссовой лишь при умеренном числе сомножителей n , а на больших расстояниях найдены степенные асимптотики

$$F_{2n} \propto b^{-2}, \quad L \ll b \ll \psi_* L^2 / r_\kappa; \quad F_{2n} \propto b^{-n-1}, \quad b \gg \psi_* L^2 / r_\kappa. \quad (17)$$

В Разделе 2.6 “Заключение главы” подводятся итоги этой части исследования.

В **Третьей главе** рассматривается распространение и взаимодействие инерционной волны с течением геострофического вихря. В **Разделе 3.1** “Введение” обсуждается необходимость выйти за рамки прежней модели поддержания когерентного вихря инерционными волнами, разобранной в литературном обзоре. В работах [38; 39; 47] возбуждение осуществлялось посредством накачки, однородно распределенной по объему. Однако такого идеализированного представления недостаточно, если учитывать конечный размер вихря либо рассматривать случай локализованного в пространстве возбуждения, как это имеет место, например, в экспериментах [32; 33]. Отмечается, что альтернативный подход, основанный на рассмотрении волны в произвольном сдвиговом течении, детально развит для внутренних гравитационных волн в вертикально стратифицированной жидкости: близость законов дисперсии приводит к тому, что доплеровский сдвиг в среднем течении порождает критический слой, на котором относительная частота волны обращается в ноль, а волна поглощается средним течением, отдавая ему импульс и энергию.

В **Разделе 3.2** рассматривается распространение инерционной волны внутри стационарного геострофического течения $\mathbf{U}(\mathbf{r}_\perp)$. Исходным пунктом служит линейаризованное по волновому полю $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{U}$ уравнение Навье-Стокса на фоне заданного среднего течения $\mathbf{U}$, применимость которого обеспечена малостью межволнового взаимодействия при быстром вращении и сильном геострофическом потоке. В силу несжимаемости независимыми оказываются лишь две компоненты скорости, что позволяет получить замкнутую систему уравнений динамики в горизонтальной плоскости. В Пункте 3.2.1 рассматривается модель осесимметричного вихря $\mathbf{U} = U(r)\mathbf{e}_\varphi$ в цилиндрической системе координат (r, φ, z) :

$$\partial_z^2 \left[\left(\frac{d}{dt} - \nu \Delta^{3D} \right) \begin{pmatrix} u^r \\ u^\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\tilde{\Omega}u^\varphi \\ (2\tilde{\Omega} + \Sigma)u^r \end{pmatrix} \right] + \text{grad}_\perp \left(\left(\frac{d}{dt} - \nu \Delta^{3D} \right) \text{div}_\perp \begin{pmatrix} u^r \\ u^\varphi \end{pmatrix} \right) = 0, \quad (18)$$

где $\Delta^{3D} = \Delta_\perp + \partial_z^2$, а операции векторного анализа в горизонтальной плоскости (в полярных координатах $Or\varphi$) обозначает индекс “ $\perp$ ”. Здесь мы ввели локальную угловую скорость вращения $\tilde{\Omega}(r) = \Omega + U/r$. Вместе с ней обозначение производной по времени с учетом среднего переноса $d/dt = \partial_t + (U/r)\partial_\varphi$ указывает на то, что (18) описывает динамику в системе отсчета, вращающейся вместе с вихревым течением. Вывод общих уравнений волновой динамики в горизонтальной плоскости и промежуточные выражения в цилиндрической геометрии, используемые далее в работе, вынесены в **Приложение В**. Далее рассматривается радиальный профиль фурье-гармоники инерционной волны, вводится относительная частота волны $\tilde{\omega}(r)$, учитывающая доплеровский сдвиг в среднем течении U , и

перпендикулярное волновое число, обозначающего значение вторых производных по φ , z в Δ^{3D} для гармоники:

$$\begin{aligned} \partial_t &\rightarrow -i\omega, \quad \partial_\varphi \rightarrow im, \quad \partial_z \rightarrow ik_z, \\ \tilde{\omega}(r) &= \omega - mU(r)/r, \quad k_\perp^2 = (m/r)^2 + k_z^2. \end{aligned} \quad (19)$$

После этого пункт посвящен анализу распространения волны в течении цилиндрического вихря в невязком пределе. Получено волновое уравнение для радиальной компоненты скорости $u^r \equiv v$

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{\tilde{\omega}}{k_\perp^2} (v' + v/r) + \frac{\Sigma m/r}{k_\perp^2} v \right) - \tilde{\omega} v \right] \\ + \frac{2\tilde{\Omega} (2\tilde{\Omega} + \Sigma) k_z^2}{k_\perp^2} v + v \tilde{\omega} r \frac{d}{dr} \left(\frac{2\tilde{\Omega} m}{k_\perp^2 r^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

В **Приложении В** приведен также его аналог для гармоники давления. Показано, что монохроматическая волна не обменивается моментом импульса и энергией с течением вихря до тех пор, пока не встретит критический слой — соответствующие потоки $r^2 \Pi^{r\varphi}$ и $r j^r$ в невязком пределе не зависят от радиуса (здесь скобки $\langle \dots \rangle_w$ означают усреднение по периоду осцилляций):

$$\begin{aligned} \Pi^{r\varphi} &= \langle u^r u^\varphi \rangle_w, \quad j^r = \left\langle \left(\frac{v^2}{2} + p \right) v_r \right\rangle_w = \frac{\omega^r}{m} \Pi^{r\varphi} : \\ (r^2 \Pi^{r\varphi}(r))' &= 0, \quad (r j^r(r))' = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Создаваемые монохроматической волной потоки обращаются в ноль вследствие отражения от центробежного потенциала в $k_\perp^2$ ближе к центру вихря. Отмечается, что движущийся волновой пакет, в отличие от нее, обменивается энергией со средним течением вследствие неоднородности $U(r)$.

В Пункте 3.2.2 волновое уравнение анализируется в коротковолновом пределе, когда длина инерционной волны мала по сравнению с масштабом изменения вихревого течения. Получен закон дисперсии, обобщающий свободный случай на неоднородную задачу с учетом дифференциального вращения $U(r)$: введя локальное значение $k_r(r)$ радиального волнового числа и полной величины волнового вектора $k(r)$, находим

$$\tilde{\omega} = s \sqrt{2\tilde{\Omega}(2\tilde{\Omega} + \Sigma) k_z/k}, \quad k^2 = k_r^2 + k_\perp^2. \quad (22)$$

где $s = \pm 1$ — значение круговой поляризации волны. Установлено, что судьба волны определяется знаком переносимого ею момента импульса, см. Рис. 2: волна, несущая момент импульса того же знака, что и у вихря,

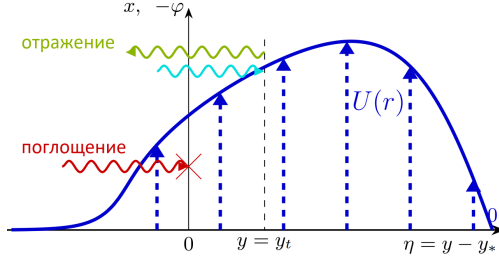


Рис. 2 — Схема распространения инерционной волны: поглощение на критическом слое $r = r_*$ и полное отражение на поверхности отражения $r = r_t$. Для модели с прямыми линиями тока выполнен переход к декартовым координатам при обращенной оси Oy .

встречает критический слой r_* , где ее относительная частота обращается в ноль, $\tilde{\omega}(r_*) = 0$, и происходит поглощение с передачей момента импульса и энергии среднему течению. Волна, переносящая момент импульса противоположного знака, отражается в точке поворота r_t без такой передачи.

Далее в **Разделе 3.3** задача в невязком пределе переформулируется в локальной декартовой системе координат: вблизи критического слоя и точки поворота поведение волны определяется локальными свойствами среднего течения, поэтому криволинейность линий тока можно не учитывать и перейти к модели сдвигового течения $\mathbf{U} = U(y)\mathbf{e}_x$ с прямолинейными линиями тока. В этой геометрии выражения (19) переопределяются (согласно замене $m/r \rightarrow k_x$, так что теперь $k_\perp$ постоянно), заново выводится уравнение на поперечную течению компоненту скорости волны $u^y \equiv v$ и воспроизводится постоянство потоков импульса и энергии для монохроматической волны в этом направлении:

$$\tilde{\omega} [\tilde{\omega} (v'' - k_\perp^2 v) - k_x \Sigma' v] + 2\Omega(2\Omega + \Sigma) k_z^2 v = 0, \quad (23)$$

$$\Pi^{xy} = -\frac{k_x \text{Im}(v' v^*)}{2k_\perp^2}, \quad j^y = \frac{\omega}{k_x} \Pi^{xy} : \quad \partial_y \Pi^{xy} = 0, \quad \partial_y j^y = 0. \quad (24)$$

Затем перечисляются общие свойства коротковолнового приближения: для монохроматической волны строится решение в WKB-приближении и формулируется условие его применимости, а для волнового пакета — уравнение на медленно меняющуюся огибающую. В последнем случае приводится выражение для компоненты групповой скорости вдоль Oy

$$v_g = \frac{\partial \tilde{\omega}_s}{\partial k_y} = -\frac{k_y \tilde{\omega}}{k^2}, \quad k^2 = k_\perp^2 + k_y^2(y), \quad (25)$$

и приближенный закон сохранения волнового действия [16], из которого, в частности, следует, что энергия пакета в неоднородном течении не сохраняется, так что пакет обменивается ею со средним течением.

В Разделе 3.4 проводится локальный анализ в окрестности двух особых точек, возникающих при распространении инерционной волны в течении вихря, — критического слоя y_* и точки отражения y_t (определенной на основе коротковолнового приближения в описании (23)). В Пункте 3.4.1 рассматривается отражение волны. Вблизи точки поворота y_t волновое уравнение сводится к уравнению Эйри, решение которого представляет собой стоячую волну в классически разрешенной области. Отражение происходит упруго: полный поток импульса монохроматической волны обращается в ноль, и волна возвращается на периферию $y \rightarrow -\infty$ без обмена импульсом и энергией со средним течением, см. Рис. 2. Для волнового пакета показано, что отражение занимает конечное время, а связанный с ним обмен энергией со средним течением обратим: волновое действие отраженного пакета совпадает с тем, которым обладал падающий.

Пункт 3.4.2 посвящен описанию поглощения инерционной волны в критическом слое в невязком пределе. Вводится локальная координата $\eta = y - y_*$, отсчитываемая от слоя, в окрестности которого профиль средней скорости линеаризуется, так что относительная частота волны $\tilde{\omega} \approx \Sigma k_x \eta$, где сдвиг течения $\Sigma = -U'(y_*)$ постоянный. В этом приближении волновое уравнение приобретает универсальный вид с параметром локального числа Россби ρ , которое полагается малым для коротких длин волн:

$$v'' + \frac{1}{\rho^2 \eta^2} v = 0, \quad \rho = \frac{|\Sigma k_x / k_z|}{\sqrt{2\Omega(2\Omega + \Sigma)}}. \quad (26)$$

В случае $\rho < 2$ решения демонстрируют осциллирующее степенное поведение с неограниченно растущим волновым числом $k_y \sim 1/(\rho\eta)$ при подходе к слою; неравенство $\rho \ll 1$ представляет условие применимости WKB-приближения при описании волны в модели:

$$v_{\pm} \sim \eta^{(1 \pm i\beta)/2}, \quad \beta = \sqrt{4 - \rho^2} / \rho \quad (27)$$

Продолжение решения на противоположную сторону слоя выполняется при помощи регуляризации особой точки, диктуемой причинностью:

$$\eta \rightarrow \eta - 0i\sigma, \quad \sigma = -\text{sign } \Sigma k_x. \quad (28)$$

С помощью выражения для групповой скорости (25) определяется направление прохождения волной критического слоя. Устанавливается, что волна ослабляется при прохождении точки y_* в направлении своего распространения, то есть поглощается средним течением U в этой точке. Эффективность поглощения насыщается экспоненциально при малом локальном числе Россби; получены коэффициент прохождения и отношение потоков импульса и энергии (24) по разные стороны слоя:

$$\text{Im } v'_\sigma v_\sigma^*|_{\eta>0} = e^{-\pi\beta} \text{Im } v'_\sigma v_\sigma^*|_{\eta<0}. \quad (29)$$

Здесь и далее в (27) выбирается решение v_σ , приходящее к слою со стороны $y < y_*$. Впервые такая картина была подробно исследована в работе [17] для внутренних гравитационных волн в стратифицированной жидкости.

Наконец, для квазимонохроматического волнового пакета получен закон движения его центра к критическому слою. Движение с групповой скоростью $v_g = 2|\Sigma k_x|\bar{\eta}^2/\beta$ замедляется по мере приближения, так что координата центра пакета $\bar{\eta}(t)$ выходит на асимптотику, обратно пропорциональную времени, и достигает слоя лишь асимптотически:

$$\bar{\eta}(t) = \frac{\bar{\eta}_0}{1 - 2|\Sigma k_x|t\bar{\eta}_0/\beta}. \quad (30)$$

В Разделе 3.5 в описании окрестности критического слоя учитываются эффекты вязкости. Отправной точкой анализа является уравнение с диссипацией, полученное из выражений **Приложения В** в декартовой модели с прямыми линиями тока:

$$(\tilde{\omega} - i\nu\Delta^{3D}) [(\tilde{\omega} - i\nu\Delta^{3D}) \Delta^{3D}v + k_x U''v] + 2\Omega (2\Omega - U') k_z^2 v = 0. \quad (31)$$

В Пункте 3.5.1 рассматривается поведение монохроматической волны внутри вязкой внутренней области около слоя. Уравнение (31) упрощается аналогично (26): при изучении вязкого внутреннего слоя толщиной масштаба $\eta_v = (\nu/|\Sigma k_x|)^{1/3}$ мы пренебрегаем поперечным волновым числом $k_\perp$ и удерживаем ∂_η старшего порядка. В таком виде уравнение факторизуется на два коммутирующих оператора третьего порядка:

$$\left(\eta \partial_\eta + i\sigma \eta_v^3 \partial_\eta^3 - \frac{1+i\beta}{2} \right) \left(\eta \partial_\eta + i\sigma \eta_v^3 \partial_\eta^3 - \frac{1-i\beta}{2} \right) v = 0, \quad (32)$$

каждый из которых отвечает степенному решению $v_\pm$ невязкой задачи, что позволяет анализировать по отдельности волны, проходящие в разных направлениях. Уравнение (32) обосновывает регуляризацию (28) в комплексной плоскости в невязком пределе ($\eta_v \rightarrow 0$). Вывод решений для вязкого профиля монохроматической волны, их анализ и учет влияния восстановленного параметра $k_\perp^2$ в решении перенесены в **Приложение Г**; приведем здесь формулу решения (32) для $v_\sigma(\eta)$:

$$v_\sigma = C \int_0^\infty \frac{d\chi}{\chi^{(1+i\sigma\beta)/2}} (i\sigma\eta + \eta_v^3 \chi^2) e^{-i\sigma\eta\chi - (\eta_v\chi)^3/3}. \quad (33)$$

Асимптотики решения вдали от вязкого слоя воспроизводят степенное поведение (27) из невязкого случая, а также затухание решения согласно (29) при прохождении критического слоя, см. Рис. 3.

Пункт 3.5.2 расширяет предыдущий анализ движения квазимонохроматического волнового пакета к критическому слою. Пакет с несущей

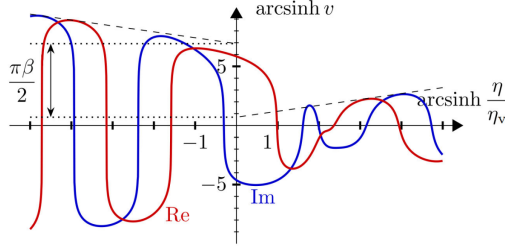


Рис. 3 — График монохроматической волны v_+ у критического слоя. Решение получено интегрированием (33) при $\beta = 4$. Штриховые линии в обеих областях $|\eta/\eta_v| \gg 1$ обозначают скейлинг $|v_+| \propto \sqrt{|\eta|}$ для абсолютной величины согласно асимптотике (27). Вертикальное смещение между ними соответствует абсолютной величине коэффициента прохождения $e^{-\pi\beta/2}$.

частотой ω , находящийся около слоя слева, описывается уравнением на основе оператора из монохроматической задачи (32). В фурье-представлении по η волновое число переносится вдоль характеристики $k'_y(t) = k_y + \Sigma k_x t$, и решение с начальным условием на образ $\tilde{v}_\sigma^{(0)}(k_y)$ записывается как интеграл обратного преобразования вида:

$$\left((i\partial_t - \omega + \Sigma k_x \eta) \partial_\eta - i\nu \partial_\eta^3 - \frac{1 + i\sigma\beta}{2} \Sigma k_x \right) v_\sigma = 0, \quad (34)$$

$$v_\sigma(t, \eta) = e^{-i\omega t} \int \frac{dk_y}{2\pi} e^{ik'_y(t)\eta} \left(\frac{k_y}{k'_y(t)} \right)^{\frac{3+i\sigma\beta}{2}} \tilde{v}_\sigma^{(0)}(k_y) e^{-\nu \int_0^t d\tau (k'_y(\tau))^2}.$$

Полученное выражение согласуется с решением, найденным в модели турбулентных пульсаций в однородном сдвиговом течении [38].

В пределе $\rho \ll 1$ интеграл вычисляется методом перевала, что позволяет проследить динамику наглядно. Пусть пакет задан при $t = 0$ с начальным положением центра $\bar{\eta}_0 < 0$, несущим волновым числом $k_y^{(0)} = \sigma\beta/(2\bar{\eta}_0)$ и шириной l_0 . По мере приближения к критическому слою $\eta = 0$ пакет расплывается, но не неограниченно: за время порядка $t_\Sigma = |k_y^{(0)}/\Sigma k_x|$ его ширина выходит на новое постоянное значение $l = \sqrt{l_0^2 + \rho \bar{\eta}_0^2}$. Вместе с этим движение центра замедляется, см. (30), и, когда установившаяся ширина превышает расстояние до слоя, пакет фактически останавливается при $t \gtrsim |\bar{\eta}_0/l|t_\Sigma$, не достигая его.

Такое поведение ширины уточняет предсказание классической теории волновых пакетов [16], по которому ширина продолжала бы убывать со временем. Причина расхождения в том, что вблизи слоя среднее течение имеет постоянный градиент скорости и переносит волновой вектор вдоль сдвиговой характеристики $k'_y(t)$. Характеристики параллельны друг другу, поэтому спектральная ширина пакета сохраняется во времени, а приближения огибающей, не учитывающего дисперсионного члена, недостаточно.

Вместе с тем для полученного решения выведена сохраняющаяся вдоль характеристики величина, имеющая смысл волнового действия:

$$|k'_y|^3 |\tilde{v}_\sigma(k'_y)|^2 = \text{const.} \quad (35)$$

В дальнейшей эволюции выделяются две стадии: пока время мало по сравнению с вязким $t_v = (\nu \Sigma^2 k_x^2)^{-1/3}$, амплитуда остановившегося пакета убывает степенным образом (а энергия $v^2 \sim t^{-1/2}$) при линейно растущем волновом числе $k'_y(t)$. На временах $t \gtrsim t_v$ амплитуда спадает быстро с показателем экспоненты $\ln |\tilde{v}_\sigma| \sim -t^3/(3t_v^3)$. В конце раздела на примере пакета, отражающегося от вихря, показан обратный механизм: как волна может отбирать энергию у среднего течения и затем диссипировать ее.

В **Разделе 3.6** “Заключение главы” резюмированы полученные в главе результаты.

В **Четвертой главе** строится теоретическая модель сформировавшегося среднего течения в осесимметричном геострофическом вихре, поддерживаемом ансамблем случайных инерционных волн, которые возбуждаются на периферии системы и распространяются в направлении вихря. В **Разделе 4.1** “Введение” дается обзор экспериментов по вращающейся турбулентности, в которых наблюдались когерентные геострофические вихри. Отмечается, что способ возбуждения определяет время жизни структуры, а неровности горизонтальной границы в установках с осциллирующей решеткой заметно ускоряют затухание геострофического течения по сравнению с экмановской оценкой [47]. Рассматриваемая далее теория относится к долгоживущим столбовым циклонам, формирующимся в экспериментах [32; 33; 48] с возбуждением течений у боковых границ сосуда (вращающегося куба) при гладких горизонтальных границах.

Подчеркивается обстоятельство, мотивирующее данную теорию: у возникающих геострофических вихрей, в противовес искусственно сформированным (см. обзор [49]), радиальный профиль среднего азимутального течения устроен сложнее, чем в стандартных моделях монополярного вихря — например, вихря Ранкина, предполагающего однородное распределение завихренности с резкой границей. Реализующийся в эксперименте предел сильного вращения позволяет пренебречь межволновым взаимодействием по сравнению с взаимодействием волн со средним потоком. Особенность возникающего описания в том, что часть сходящихся цилиндрических волн ансамбля поглощается в своих критических слоях, передавая вихрю момент импульса, а остальные отражаются без передачи, причем отбор между этими сценариями зависит от поведения профиля на больших радиусах — уравнение Рейнольдса в модели оказывается нелокальным.

В **Разделе 4.2** формулируется квазилинейная модель геострофического вихря, рассматриваемая далее в работе. Изучаемое течение полагается установившимся, осесимметричным и однородным по вертикали, так что оно описывается одной функцией — азимутальной скоростью $U(r)$, или, что

далее удобнее, угловой скоростью $W(r) = U/r$. Профиль вихря определяется уравнением Рейнольдса для среднего течения (с учетом экмановского трения с коэффициентом α), а входящее в него касательное напряжение Рейнольдса — статистикой инерционных волн:

$$\alpha U + r^{-2} \partial_r \left(r^2 \Pi^{r\varphi} - \nu r^2 \Sigma \right) = 0, \quad \Sigma = \partial_r U - U/r, \quad \Pi^{r\varphi} = \langle u^r u^\varphi \rangle. \quad (36)$$

Существенно, что напряжение Рейнольдса входит сюда в виде производной от радиального потока момента импульса (21), который создают волны.

Задается модель накачки: волны возбуждаются на периферии системы и распространяются внутрь, а их статистика на периферии (характеризуется масштабом расстояния R_0 в плоскости) полагается однородной и изотропной с характерным волновым числом k_f . Накачка характеризуется радиальным потоком энергии $f \sim \epsilon R_0$, который вносят внутрь системы падающие с периферии волны. Далее формулируются условия, при которых модель квазилинейна. Ключевое для всей главы допущение: межволновое взаимодействие уступает как силе Кориолиса, так и взаимодействию волны с течением вихря. Первое требование — это малость числа Россби для волнового движения. Второе записывается сравнением темпа межволнового взаимодействия $1/\tau_{tr} \sim k_f \sqrt{\epsilon/\Omega}$ [46] с характерным темпом взаимодействия волны со средним потоком, который оценивается и сдвигом Σ , и обратным временем пробега волны по телу вихря $\Omega/(k_f R_0)$: темп $1/\tau_{tr}$ должен быть много меньше обоих значений.

В Пункте 4.2.1 приводится описание взаимодействия вихря с короткими инерционными волнами. Волновое поле раскладывается на цилиндрические гармоники, и далее рассматривается отдельная гармоника с заданными частотой ω , азимутальным числом m и вертикальным волновым числом k_z . В коротковолновом пределе линеаризованная система уравнений с вязкостью сводится к приближенному замкнутому уравнению для давления волны p .

Влияние вязкости в модели считается малым. Для типичной волны ансамбля это означает, что вязкий темп νk_f^2 должен быть много меньше двух характерных темпов задачи — относительной частоты $\tilde{\omega}$ (19), учитывающей перенос волны средним течением, и сдвига Σ , характеризующего неоднородность течения в вихре. Первое из этих условий заведомо нарушается в окрестности критического слоя, где $\tilde{\omega} \rightarrow 0$; эффекты вязкости там рассмотрены ранее. Вне этой окрестности она входит как малая мнимая поправка $k_\nu - k_0$ к величине локального волнового вектора $k_0(r) = \sqrt{k_r^2 + k_\perp^2}$, обеспечивающая диссипацию волны при распространении:

$$k_\nu^2 \approx k_0^2 (1 - 2i\nu k_0^2/\tilde{\omega}), \quad k_0^2 = 2\tilde{\Omega} (2\tilde{\Omega} + \Sigma) k_z^2/\tilde{\omega}^2. \quad (37)$$

Дальнейшее рассмотрение проводится в невязком пределе для монотонно затухающего профиля $W(r) > 0$, отвечающего наблюдавшимся в

эксперименте циклонам, см. Рис. 4. На периферии, где средним течением W можно пренебречь за его малостью, решение представляет собой свободную инерционную волну. Это позволяет ввести асимптотические характеристики ее волнового вектора: его полную величину k и число q , отвечающее проекции на горизонтальную плоскость. Далее прослеживается поведение радиального волнового числа $k_r(r)$ для падающей волны при движении от периферии к оси: уменьшая r , можно встретить первой одну из двух особенностей. Если ей оказывается обращение радиального волнового числа в ноль, то волна отражается в точке поворота r_t и переходит в расходящуюся, не передавая вихрю момента импульса (21). Если же первым встречается критический слой в r_* , где относительная частота $\tilde{\omega}(r_*) = 0$, то происходит резонансное поглощение волны средним течением. Какая из особенностей встретится первой, определяется поляризацией волны s и величиной W течения вихря. Эффективность поглощения определяется локальным числом Россби (26); для волн в ансамбле малость ρ обеспечивается параметром отношения длины волны к масштабу среднего течения $k_f^{-1} (\ln W(r))' \ll 1$. В пределе $\rho \ll 1$ прошедшей через слой и отраженной волнами можно пренебречь: падающая волна передает вихрю свои энергию и момент импульса практически целиком.

В Разделе 4.3 описывается ансамбль свободных инерционных волн, реализующийся на периферии течения при $r \sim R_0$. Для его характеристики берется ортонормированный базис плоских поперечных волн $\mathbf{h}_\mathbf{k}^s$ с амплитудами $a_\mathbf{k}^s$ [38]. Однако осевая симметрия задачи вынуждает перейти от него к цилиндрическим гармоникам. Это осуществляется сопоставлением разложений поля давления p по плоским волнам и по стоячим цилиндрическим волнам, которые пропорциональны функциям Бесселя $J_m(qr)$.

Статистика ансамбля полагается стационарной во времени, однородной и изотропной в пространстве, гауссовой с нулевым средним. Она задается парной корреляционной функцией амплитуд плоских волн:

$$\langle a_\mathbf{k}^s a_{\mathbf{k}'}^{s'*} \rangle = (2\pi)^3 \delta^{ss'} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \frac{3\pi f}{\Omega} k \Xi(k), \quad \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \Xi(k) = 1. \quad (38)$$

Нормированная спектральная плотность $\Xi(k)$ зависит только от величины вектора k ; характерное волновое число k_f в ансамбле задает ее масштаб.

Коэффициент в правой части (38) согласован с определением f как потока энергии внутрь системы, что демонстрируется далее в разделе. Стоячая волна, отвечающая свободной цилиндрической гармонике, представляется суперпозицией двух бегущих волн одинаковой амплитуды — сходящейся и расходящейся вдоль радиальной координаты. Для сходящейся волны вычисляется радиальная компонента плотности потока энергии $j_\chi^r < 0$, где $\chi = (q, m, k_z, s)$ обозначает совокупность чисел, задающих гармонику. В выражение потока от всего ансамбля $\langle j^r \rangle$ вклад вносят только гармоники, для которых выполнено $|m| \leq qR_0$ (напомним, $q = \sqrt{k^2 - k_z^2}$):

волны с большим значением $|m|$ отражаются снаружи и не несут потока. Результат суммирования воспроизводит нормировку: $-2\pi\langle rj^r \rangle = 2\pi R_0 f$.

В Разделе 4.4 выражение для касательного напряжения Рейнольдса определяется по совокупности сходящихся волн в ансамбле, причем поток момента импульса набирается лишь от тех из них, которые удовлетворяют двум правилам отбора. Первое правило касается поляризации: критический слой может существовать только у гармоники с $s = \text{sign} mk_z W$. Поглощаемые волны несут поток момента импульса того же знака, что и у вихря, и потому раскручивают среднее течение. Второе правило требует, чтобы волна успела дойти до своего критического слоя перед отражением в точке поворота, как обсуждалось в Пункте 4.2.1. Оба условия записываются как θ -функции Хевисайда в подынтегральном выражении

$$\Pi^{r\varphi} = \int \frac{dk_z}{2\pi} \int_0^\infty q dq \sum_{s,m} \langle \Pi_{\chi}^{r\varphi} \rangle \theta(|\omega_{\chi}| - \sigma m W) \theta(r_* - r_t), \quad \sigma = \text{sign} \omega. \quad (39)$$

В уравнение (36) напряжение входит производной $(r^2 \Pi^{r\varphi})'(r)$. Вклад в ее значение в точке r дают только те волны, для которых здесь выполнено условие кинематического резонанса: $2\Omega s \zeta = mW(r)$, задающее критический слой (здесь $\zeta = \cos \theta_{\mathbf{k}}$). Вместе с ним второе правило отбора требует выполнения неравенства для всех ξ снаружи от текущей точки r

$$\zeta^2 \leq \frac{2\tilde{\Omega} (2\tilde{\Omega} + \Sigma) (\xi) \cdot W^2}{(2\Omega)^2 [W - W(\xi)]^2} \frac{(k\xi W/2\Omega)^2}{1 + (k\xi W/2\Omega)^2}, \quad \xi > r. \quad (40)$$

Поскольку $\zeta \propto m$, оно задает ограничение $|m| \leq m_*$ в сумме по азимутальным числам; запишем результирующее выражение для производной потока момента импульса:

$$(r^2 \Pi^{r\varphi})' = \frac{fW'(r)}{16\pi\Omega^2} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{2\pi^2} \frac{\Xi(k)}{k} m_*^3. \quad (41)$$

Предельное значение m_* определяется точкой ξ_* , где выражение в (40) достигает своего минимума, что приближенно задается уравнением

$$\left[1 + (k\xi_* W(r)/2\Omega)^2\right] \xi_* W'(\xi_*) = W(\xi_*) - W(r). \quad (42)$$

Радиус $\xi_*(r)$ имеет смысл точки отражения для гармоники в ансамбле, следующей за предельной m_* .

Отсюда видна принципиальная особенность построенной теории: полученное уравнение для среднего течения (36) нелокально. Вклад от инерционных волн (41) в него в точке r определяется значением течения

вихря не только в этой точке, $W(r)$, но и значениями $W(\xi)$ дальше по радиусу, $\xi > r$, поскольку именно они определяют, дойдет ли резонансная волна до своего критического слоя или отразится раньше. В конце раздела отмечается граница применимости результата вблизи оси вихря, где становится необходимо учитывать вязкость в механизме поглощения.

Раздел 4.5 посвящен применению построенной выше теории: в нем для описания профилей циклонов, наблюдающихся в экспериментах [32; 33; 48], предложено огрубление модели до обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ), таким образом убрав нелокальность из задачи. Обрезка по азимутальному числу m_* в теории определяется положением экстремума $\xi_*(r)$, поведение которого немонотонно. Подробный анализ зависимости для m_* и $\xi_*(r)$ вынесен в **Приложение Д**. Он показывает, что рост $\xi_*(r)$ (который наблюдается при $r = 10$ см и далее для типичной волны в ансамбле) существенно замедляется по мере приближения ξ_* к радиусу R_v , на котором угловая скорость $W(r)$ достигает минимума, см. Рис. 4. Вместе с тем для выражения (40) показывается, что само ограничение на гармоники $m^2(\xi)$ меняется с ξ тем слабее, чем дальше ξ отстоит от r : логарифмическая производная $m^2(\xi)$ мала, пока $W(\xi) \ll W(r)$.

Эти обстоятельства и делают огрубление оправданным: при описании тела циклона ограничение по гармоникам определяется не точным положением ξ_* , а единым для всех r дальним масштабом — размером циклона, за который принимается радиус R_v . Мы пренебрегаем отклонением обрезки по гармоникам от экстремального значения m_* при $\xi_* < R_v$. Также мы предполагаем узкий спектр накачки, при котором плотность $\Xi(k)$ отлична от нуля лишь вблизи характерного волнового числа k_f . Наконец, на основании экспериментальных данных оговаривается, что трение о дно с коэффициентом α можно считать доминирующим механизмом диссипации за пределами вязкой сердцевины вихря на $r > r_0$, где $r_0 = 3$ см. Указанные приближения сводят уравнение Рейнольдса (36) к ОДУ для $W(r)$

$$\frac{W'}{r^3} \left[\min \left(\left(\frac{2\Omega}{W} \right)^2, \frac{W^2}{(W - W_*)^2} \frac{(k_f R_v)^2}{1 + B_v} \right) \right]^{3/2} + \kappa W = 0, \\ \kappa = 16\pi\Omega^2 \alpha k_f / f, \quad W_* = W(R_v), \quad B_v = (k_f R_v W(r) / 2\Omega)^2. \quad (43)$$

Параметры уравнения определяются по экспериментальным данным следующим образом. Граница вихря R_v и начальное условие $W(r_0)$ берутся непосредственно из экспериментально измеренного профиля. Коэффициент κ подбирается так, чтобы согласовать производную решения в начальной точке r_0 . Характерное волновое число ансамбля k_f остается свободным параметром в модели. Оно подбирается так, чтобы согласовать дальнейшее поведение профиля $W(r)$ на $r \approx 10$ см. Параметры κ, k_f растут с увеличением вращения Ω . Точность их определения была мотивирована лучшим приближением решения (43) для профиля $W(r)$ с эксперимента;

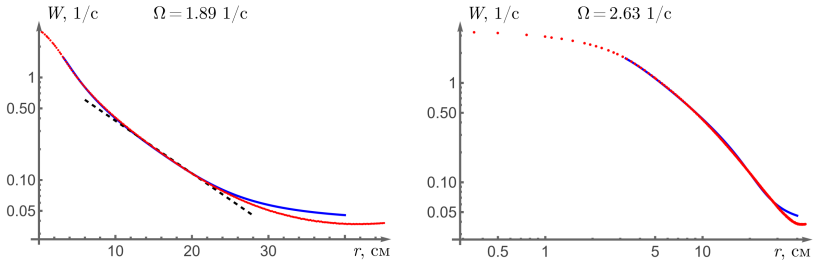


Рис. 4 — Примеры сравнения экспериментальных данных по угловой скорости $W(r)$ циклонов (красные точки) с численным решением (43) (синяя кривая) при медленном и быстром вращении. Параметры для решений: слева $\kappa = 0.10 \text{ см}^{-4}$, $k_f = 0.35 \text{ см}^{-1}$; справа $\kappa = 0.21 \text{ см}^{-4}$, $k_f = 0.44 \text{ см}^{-1}$. Черный пунктир приближает данные экспоненциальным поведением.

она превышает погрешность определения экспериментальной зависимости $W(r)$. Отклонение численного решения после $r \approx 25 \text{ см}$ усиливается по мере приближения $W(r)$ к периферийному значению $W(\xi_*)$. Там огрубление $\xi_* \rightarrow R_v$ в (43) более неприменимо, поскольку предположение о том, что ограничение (40) на m^2 медленно меняется с ξ , перестает выполняться.

Сопоставление решения модели (43) с опытом проводится отдельно для двух режимов вращения, поскольку профили циклонов в них качественно различаются. При быстром вращении ($\Omega > 2.5 \text{ с}^{-1}$) угловая скорость спадает с радиусом приблизительно степенным образом, поэтому сравнение представлено в двойном логарифмическом масштабе. При медленном вращении ($\Omega = 1.1 \div 2.3 \text{ с}^{-1}$) у профиля выделяется протяженная промежуточная область, где $W(r)$ затухает приблизительно экспоненциально (уменьшаясь на этом участке более чем в 5 раз); циклон такого типа представлен на Рис. 4 в логарифмическом масштабе, где этот участок становится прямым. Для всех 7 значений Ω в опыте промежуточная экспоненциальная асимптотика с хорошей точностью прослеживается у Σ .

В конце раздела проводится проверка модели по энергетическому балансу. Рассчитанные по κ, k_f точки зависимости $\epsilon(\Omega)$ для мощности внесенной энергии в систему (согласно $2\pi R_0 f = \pi R_0^2 \epsilon$) оказываются нерегулярно разбросанными в интервале $0.06 \div 0.11 \text{ см}^2/\text{с}^3$, что указывает на реальную погрешность в определении параметров. Из эксперимента можно оценить мощность потерь энергии в системе как $\epsilon_{\text{exp}} = 2\alpha E$. Два набора значений согласуются по порядку величины: среднее значение для отношения $\overline{\epsilon/\epsilon_{\text{exp}}} \approx 1.4$.

В Разделе 4.6 “Заключение главы” подводятся итоги и обсуждаются границы применимости построенной теории.

В **заключении** подведены основные итоги исследования и выражены благодарности.

Заключение

В диссертации проведено теоретическое исследование характеристик переноса когерентным вихревым течением скалярного поля пассивной примеси и векторного поля инерционной волны. Для инерционных волн произведено построение статистической теории взаимодействия с геострофическим вихрем во вращающейся турбулентности. Ниже сформулированы решенные задачи, на которых мы фокусировались в исследовании.

Первая часть работы посвящена статистическому описанию перемешивания пассивного скалярного поля в сдвиговом течении с гладкими возмущениями малой амплитуды, что моделирует локально структуру скорости в когерентном вихре. Показано, как анизотропия, вносимая средним сдвигом, изменяет свойства перемешивания по сравнению с изотропным случаем. Целью исследования было также установление статистических характеристик такого турбулентного потока по статистике перемешиваемой им пассивной примеси. Полнее всего эта связь проявляется при распаде — свободном перемешивании исходного распределения скаляра до его гоомогенизации. Мы показали, как парная корреляционная функция скаляра выражается через статистику разбегания близких лагранжевых траекторий, характеризуемую функцией Крамера, что позволяет восстанавливать ее из измерений. Также мы исследовали статистику моментов и отдельные свойства корреляционных функций высокого порядка.

Во второй части работы изучалось взаимодействие инерционной волны с когерентным геострофическим вихрем в быстро вращающейся жидкости. Ранее такое взаимодействие описывалось в локальной модели неограниченного течения, поддерживаемого равномерной по объему случайной накачкой. Нашей задачей было описание механизма передачи момента импульса и энергии от инерционной волны осесимметричному геострофическому вихрю; такая постановка расширяет теорию на случаи, когда существенны конечный размер вихря и пространственная локализация возбуждения. Мы установили, при каких условиях волна отражается от вихря, а при каких поглощается в соответствующем ее параметрам критическом слое, передавая свой момент импульса и энергию среднему течению, и описали динамику и эффективность этого поглощения. Анализ включает учет влияния вязкости на поглощение как монохроматической волны, так и волнового пакета. Вдобавок мы получили правильное описание распыливания и динамики волнового пакета вблизи критического слоя, уточнив там результаты общей теории распространения пакетов.

Наконец, на основе описанного механизма в заключительной части работы была развита статистическая квазилинейная теория, описывающая радиальный профиль средней скорости в когерентном геострофическом вихре. Ее предсказания сопоставлены с данными измерений скорости когерентных циклонов в эксперименте по вращающейся турбулентности. В

соответствии с экспериментальными условиями предполагается, что течение вихря поддерживается за счет поглощения коротких инерционных волн, приходящих с периферии. Опираясь на найденные условия передачи момента импульса, мы определили в модели касательное напряжение Рейнольдса, создаваемое ансамблем сходящихся волн, и рассмотрели решение уравнения для среднего течения. Сравнение экспериментальных измерений с результатами численного счета огрубленной задачи показывает адекватность построенной модели.

Список литературы

1. *Фриш, У.* Турбулентность. Наследие А.Н. Колмогорова. [Текст] / У. Фриш. — Москва : ФАЗИС, 1998. — 348 с.
2. *Колмогоров, А. Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса [Текст] / А. Н. Колмогоров // Доклады Академии Наук СССР. — 1941. — Т. 30, вып. 4. — С. 299.
3. *Boffetta, G.* Two-Dimensional Turbulence [Текст] / G. Boffetta, R. E. Ecke // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2012. — Т. 44, Volume 44, 2012. — С. 427–451.
4. *Kraichnan, R. H.* Inertial Ranges in Two-Dimensional Turbulence [Текст] / R. H. Kraichnan // The Physics of Fluids. — 1967. — Т. 10, № 7. — С. 1417–1423.
5. *Smith, L. M.* Bose condensation and small-scale structure generation in a random force driven 2D turbulence [Текст] / L. M. Smith, V. Yakhot // Phys. Rev. Lett. — 1993. — Т. 71, вып. 3. — С. 352–355.
6. Dynamics of Energy Condensation in Two-Dimensional Turbulence [Текст] / M. Chertkov [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2007. — Т. 99, вып. 8. — С. 084501.
7. *Frishman, A.* Jets or vortices—What flows are generated by an inverse turbulent cascade? [Текст] / A. Frishman, J. Laurie, G. Falkovich // Phys. Rev. Fluids. — 2017. — Т. 2, вып. 3. — 032602(R).
8. *Sommeria, J.* Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box [Текст] / J. Sommeria // Journal of fluid mechanics. — 1986. — Т. 170. — С. 139–168.
9. *Orlov, A.* Large-Scale Coherent Vortex Formation in Two-Dimensional Turbulence [Текст] / A. Orlov, M. Brazhnikov, A. Levchenko // JETP Letters. — 2018. — Vol. 107, no. 3. — P. 157–162.
10. *Alexakis, A.* Cascades and transitions in turbulent flows [Текст] / A. Alexakis, L. Biferale // Physics Reports. — 2018. — Т. 767–769. — С. 1–101. — Cascades and transitions in turbulent flows.

11. *Smith, L. M.* Transfer of energy to two-dimensional large scales in forced, rotating three-dimensional turbulence [Текст] / L. M. Smith, F. Waleffe // *Physics of Fluids*. — 1999. — Т. 11, № 6. — С. 1608–1622.
12. *Pestana, T.* Regime transition in the energy cascade of rotating turbulence [Текст] / T. Pestana, S. Hickel // *Phys. Rev. E*. — 2019. — Т. 99, вып. 5. — С. 053103.
13. *Godeferd, F. S.* Structure and dynamics of rotating turbulence: a review of recent experimental and numerical results [Текст] / F. S. Godeferd, F. Moisy // *Applied Mechanics Reviews*. — 2015. — Т. 67, № 3. — С. 030802.
14. The quasi-biennial oscillation [Текст] / М. Р. Baldwin [и др.] // *Reviews of Geophysics*. — 2001. — Т. 39, № 2. — С. 179–229.
15. *Монин А.С., Я. А.* Статистическая гидромеханика, механика турбулентности. Ч.1 [Текст] / Я. А. Монин А.С. — М. : Наука, 1965. — 641 с.
16. *Sutherland, B.* Internal Gravity Waves [Текст] / B. Sutherland. — Cambridge University Press, 2010.
17. *Booker, J. R.* The critical layer for internal gravity waves in a shear flow [Текст] / J. R. Booker, F. P. Bretherton // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1967. — Т. 27, № 3. — С. 513–539.
18. *Peters, N.* Turbulent combustion [Текст] / N. Peters // *Measurement Science and Technology*. — 2001. — Т. 12, № 11. — С. 2022–2022.
19. *Обухов, А. М.* Структура температурного поля в турбулентном потоке [Текст] / А. М. Обухов // *Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз.* — 1949. — Т. 13, № 1. — С. 58–69.
20. *Corrsin, S.* On the spectrum of isotropic temperature fluctuations in an isotropic turbulence [Текст] / S. Corrsin // *Journal of Applied Physics*. — 1951. — Т. 22, № 4. — С. 469–473.
21. *Batchelor, G. K.* Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid Part 1. General discussion and the case of small conductivity [Текст] / G. K. Batchelor // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1959. — Т. 5, № 1. — С. 113–133.
22. *Kraichnan, R. H.* Anomalous scaling of a randomly advected passive scalar [Текст] / R. H. Kraichnan // *Physical review letters*. — 1994. — Т. 72, № 7. — С. 1016.
23. *Balkovsky, E.* Universal long-time properties of Lagrangian statistics in the Batchelor regime and their application to the passive scalar problem [Текст] / E. Balkovsky, A. Fouxon // *Physical Review E*. — 1999. — Vol. 60, no. 4. — P. 4164.

24. Universal Profile of the Vortex Condensate in Two-Dimensional Turbulence [Текст] / J. Laurie [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2014. — Т. 113, вып. 25. — С. 254503.
25. *Kolokolov, I.* Structure of coherent vortices generated by the inverse cascade of two-dimensional turbulence in a finite box [Текст] / I. Kolokolov, V. Lebedev // Physical Review E. — 2016. — Т. 93, № 3. — С. 033104.
26. *Kolokolov, I.* Velocity statistics inside coherent vortices generated by the inverse cascade of 2-D turbulence [Текст] / I. Kolokolov, V. Lebedev // Journal of Fluid Mechanics. — 2016. — Т. 809.
27. *Kolokolov, I. V.* Coherent vortex in two-dimensional turbulence: Interplay of viscosity and bottom friction [Текст] / I. V. Kolokolov, V. V. Lebedev // Phys. Rev. E. — 2020. — Т. 102, вып. 2. — С. 023108.
28. *Parfenyev, V.* Profile of a two-dimensional vortex condensate beyond the universal limit [Текст] / V. Parfenyev // Physical Review E. — 2022. — Т. 106, № 2. — С. 025102.
29. Coherent vortex in a spatially restricted two-dimensional turbulent flow in absence of bottom friction [Текст] / A. N. Doludenko [и др.] // Physics of Fluids. — 2021. — Т. 33. — С. 011704.
30. *Hopfner, E.* Turbulence and waves in a rotating tank [Текст] / E. Hopfner, F. Browand, Y. Gagne // Journal of Fluid Mechanics. — 1982. — Vol. 125. — P. 505—534.
31. Extraction of coherent structures in a rotating turbulent flow experiment [Текст] / J. E. Ruppert-Felsot [и др.] // Phys. Rev. E. — 2005. — Т. 72, вып. 1. — С. 016311.
32. Two Dynamical Regimes of Coherent Columnar Vortices in a Rotating Fluid [Текст] / D. Tumachev [и др.] // JETP Letters. — 2023. — Т. 118, № 6. — С. 426—432.
33. Observation of a large stable anticyclone in rotating turbulence [Текст] / D. D. Tumachev [и др.] // Physics of Fluids. — 2024. — Т. 36, № 12. — С. 126620.
34. *Seshasayanan, K.* Condensates in rotating turbulent flows [Текст] / K. Seshasayanan, A. Alexakis // Journal of Fluid Mechanics. — 2018. — Т. 841. — С. 434—462.
35. *Gomé, S.* Waves Maintain Large-Scale 2D Flows in Rotating Turbulence and Cause Their Demise [Текст] / S. Gomé, A. Frishman // Phys. Rev. X. — 2026. — Т. 16, вып. 3. — С. 031013.
36. Disentangling inertial waves from eddy turbulence in a forced rotating-turbulence experiment [Текст] / A. Campagne [и др.] // Physical Review E. — 2015. — Т. 91, № 4. — С. 043016.

37. Interplay between geostrophic vortices and inertial waves in precession-driven turbulence [Текст] / F. Pizzi [и др.] // Physics of Fluids. — 2022. — Т. 34, № 12.
38. *Kolokolov, I. V.* Structure of coherent columnar vortices in three-dimensional rotating turbulent flow [Текст] / I. V. Kolokolov, L. L. Ogorodnikov, S. S. Vergeles // Phys. Rev. Fluids. — 2020. — Т. 5, вып. 3. — С. 034604.
39. Velocity profiles of cyclones and anticyclones in a rotating turbulent flow [Текст] / V. M. Parfenyev [и др.] // Physics of Fluids. — 2021. — Т. 33, № 6. — С. 065117.
40. *Ogorodnikov, L. L.* Structure function of velocity in a geostrophic vortex under strong rotation [Текст] / L. L. Ogorodnikov, S. S. Vergeles // Physics of Fluids. — 2022. — Т. 34, № 12. — С. 125111.
41. *Fereday, D.* Scalar decay in two-dimensional chaotic advection and Batchelor-regime turbulence [Текст] / D. Fereday, P. Haynes // Physics of Fluids. — 2004. — Т. 16, № 12. — С. 4359–4370.
42. *Duplat, J.* A nonsequential turbulent mixing process [Текст] / J. Duplat, C. Innocenti, E. Villermaux // Physics of Fluids. — 2010. — Т. 22, № 3.
43. Shear effects on passive scalar spectra [Текст] / A. Celani [и др.] // Journal of Fluid Mechanics. — 2005. — Т. 523. — С. 99–108.
44. *Groisman, A.* Efficient mixing at low Reynolds numbers using polymer additives [Текст] / A. Groisman, V. Steinberg // Nature. — 2001. — Т. 410. — С. 905–908.
45. *Falkovich, G.* Turbulence appearance and nonappearance in thin fluid layers [Текст] / G. Falkovich, N. Vladimirova // Physical Review Letters. — 2018. — Vol. 121, no. 16. — P. 164501.
46. *Galtier, S.* Weak inertial-wave turbulence theory [Текст] / S. Galtier // Phys. Rev. E. — 2003. — Т. 68, вып. 1. — 015301(R).
47. *Parfenyev, V.* Influence of Ekman friction on the velocity profile of a coherent vortex in a three-dimensional rotating turbulent flow [Текст] / V. Parfenyev, S. Vergeles // Physics of Fluids. — 2021. — Т. 33. — С. 115128.
48. Maintenance of a columnar vortex by inertial waves in rotational turbulence [Текст] / N. A. Ivchenko [и др.]. — 2026. — arXiv: [2609.06158](https://arxiv.org/abs/2609.06158) [[physics.flu-dyn](https://arxiv.org/archive/physics)].
49. *Hopfinger, E. J.* Vortices in Rotating Fluids [Текст] / E. J. Hopfinger, G. J. F. van Heijst // Annual Review of Fluid Mechanics. — 1993. — Т. 25. — С. 241–289.