На правах рукописи

Вергелес Сергей Сергеевич

Генерация когерентных течений регулярными и хаотическими источниками

Специальность 1.3.3 —
«Теоретическая физика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Черноголовка — 2025

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте теоретической физики им. Л.Д. Ландау Российской академии наук.

Официальные оппоненты:

Ерманюк Евгений Валерьевич,
доктор физико-математических наук,
ФГБУН Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,
директор

Жмур Владимир Владимирович,
доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, профессор,
Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН,
главный научный сотрудник, руководитель лаборатории

Брацун Дмитрий Анатольевич,
доктор физико-математических наук, доцент,
ФГАОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет»,
заведующий кафедрой

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова Российской академии наук

Защита состоится 16 мая 2025 г. в 11.30 часов на заседании диссертационного совета 24.1.128.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте теоретической физики им. Л.Д. Ландау Российской академии наук по адресу: Московская область, г. Черноголовка, просп. Академика Семенова, д. 1А.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук или на сайте диссертационного совета https://www.itp.ac.ru/ru/dissertation-council/.

Автореферат разослан “____”________________2025 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
24.1.128.01,
д-р физ.-мат. наук Адлер Всеволод Эдуардович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Нелинейное взаимодействие среднего течения с изменяющимся со временем вкладом является классическим феноменом в гидродинамике. Аналитическое исследование такого рода задач часто затруднено вследствие отсутствия малого параметра в задаче. Например, для турбулентного течения жидкости по трубе аналитические результаты, полученные непосредственно на основании уравнения Навье-Стокса без дополнительных модельных упрощающих предположений, исчерпываются логарифмическим профилем среднего течения вблизи боковой границы [1—3]. Однако, в определённых случаях малый параметр имеется в виде разделения времён: среднее течение оказывается медленно изменяющимся по сравнению с характерной скоростью изменения переменной во времени части течения, а влияние нелинейности на динамику переменной части течения оказывается несущественным по тем или иным причинам. В этом случае возможно сначала отдельно найти быструю динамику переменной части течения на фоне среднего, описывающуюся линеаризованным по амплитуде переменного течения уравнением Навье-Стокса. В результате в усреднённом по времени уравнении Навье-Стокса оказывается известным вклад в среднее значение нелинейного члена, квадратичного по амплитуде переменной части течения, и, таким образом, это уравнение оказывается замкнутым.

Один из возможных типов реализации такого разделения времён достигается в системах, поддерживающих распространение волн. Частота волн в таких системах велика по сравнению с характерной скоростью изменения вихревого не-волнового движения, имеющего масштаб, сравнимый или больше длины волны. Примером такой системы являются акустические течения. Эти течение возникают в результате вязкого трения звуковой волны о границы течения [4—6]. Тогда как в объёме движение жидкости, связанное со звуковыми волнами, является чисто потенциальным, в вязком подслое вблизи границы возникает вихревая часть течения. Нелинейное взаимодействие этой части с самой собой и с потенциальной частью течения приводит к возникновению эффективного граничного условия для тангенциальной компоненты течения V_τ на около-нулевой частоте: скорость этого течения должна быть пропорциональна квадрату амплитуды u_0 колебаний скорости в волне сразу вне вязкого подслоя, $V_\tau \sim u_0^2/s$ (s — скорость звука). Аналогичное граничное условие возникает на дне водоёма конечной глубины, по которому распространяются поверхностные волны [7]. Вблизи свободной поверхности жидкости также есть вязкий подслой [8]. Однако тот факт, что к свободной поверхности не приложено никаких внешних сил, приводит к другому эффективному условию для медленного течения — фиксированному значению касательного напряжения τ, называемому виртуальным волновым касательным напряжением. Происхождение этого напряжения обуславливается законом сохранения импульса [9]. Импульс волны, содержащийся во гребнево-впадинном слое, высвобождается за счёт вязкого затухания волны и передаётся медленному течению. Взаимодействие волн с вихревым медленным течением не ограничивается описанным механизмом. Если амплитуда течения достаточно велика, то следует учитывать производимое им искажение волнового движения, в результате чего появляется объёмная сила, называемая вихревой силой, действующая со стороны волны на медленное течение [10; 11]. Сама же волна при этом испытывает рассеяние на медленном течении [12].

Если свободная поверхность жидкости покрыта плёнкой, то скорость затухания волны может значительно увеличиться [13]. Движение чистой поверхности, увлекаемой поверхностной волной, является сжимаемым. Увеличение затухания происходит в том случае, если плёнка на столько упруга, что она в существенной мере препятствует сжатию и растяжению свободный поверхности [14; 15]. Плёнка на поверхности воды образуется спонтанно вследствие большой диэлектрической проницаемости воды и играет существенную роль в затухании коротких волн на поверхности океана [16]. Как правило, спонтанно формирующаяся плёнка является жидкой, т.е. не имеющей модуля упругого сдвига и пренебрежимо малую сдвиговую вязкость. Тогда ускоренное затухание волн, приводящее к увеличению величины виртуального касательного волнового напряжения, должно производить более интенсивное вихревое течение, что является одним из предметов исследования настоящей диссертации.

Следующий, совершенно не похожий на предыдущий, тип реализации разделения времён достигается в турбулентном течении двумерной жидкости в режиме конденсата. Как известно, в турбулентном течении двумерной жидкости реализуется обратный каскад энергии, то есть в течении, характеризующимся большим числом Рейнольдса, энергия передаётся от более мелких вихрей, интенсивность которых поддерживается постоянной каким-либо внешним воздействием, более крупным вихрям [17], смотри также обзор [18]. Характерная интенсивность течения v на каждом масштабе r определяется единственной величиной — мощностью на единицу массы ϵ, передаваемой вверх по масштабам, $v \sim (\epsilon r)^{1/3}$. Для неограниченного по площади течения размер самых крупных вихрей определяется балансом притока энергии с более мелких масштабов и её диссипацией за счёт трения о дно. В установившемся обратном каскаде кинетическая энергия сосредоточена в самых больших вихрях, тогда как градиент скорости достигает максимальных значений в вихрях самых малых размеров. Поэтому нелинейное взаимодействие между вихрями близких размеров оказывается намного сильнее, чем их взаимодействие с вихрями намного более крупных размеров, в результате чего и можно говорить о каскаде энергии, т.е. о многостадийной передаче энергии по цепочке масштабов. Если же при прочих равных условиях течение оказывается ограниченным в пространстве, то самыми крупными вихрями оказываются автоматически вихри с размером L порядка размера области течения. Для того, чтобы обеспечить баланс энергии на этом масштабе, характерная скорость V в этих вихрях должна быть намного больше, чем её оценка, полученная для обратного каскада, $V \gg (\epsilon L)^{1/3}$. Но тогда нелинейное взаимодействие значительно более мелких вихрей на масштабах $r \gtrsim$

$\sqrt{\epsilon L^3/V^3}$ [19] с самыми крупными вихрями оказывается сильнее, чем нелинейное взаимодействие этих мелких вихрей между собой. Передача энергии самым большим вихрям будет теперь происходить не по цепочке, а непосредственно от вихрей с характерным масштабом $\sqrt{\epsilon L^3/V^3}$. Поддержание дифференциального вращения в крупных вихрях мелкомасштабными турбулентными пульсациями наблюдается во многих системах и условно называют отрицательной турбулентной вязкостью [20]. Описание процесса передачи возможно качественно описать в рамках уравнения Навье-Стокса, линеаризованного относительно поля скорости мелких вихрей, но с учётом их нелинейного взаимодействия с полем скорости самых крупных вихрей [21]. Самые же крупные вихри оказываются статистических устойчивыми во времени, потому их также называют когерентными, а само течение конденсатом. Вследствие их свойств — устойчивости во времени и относительно большой интенсивности — их называют конденсатом, или когерентными вихрями. Такие вихри наблюдались как в натурном эксперименте в тонких слоях жидкости [22—24], так и в численном счёте [25; 26], смотри также обзоры [27; 28].

В определённом смысле комбинация выше описанных двух типов разделения времён достигается в турбулентном течении быстро вращающейся несжимаемой жидкости. Вращение жидкости как целого с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$ приводит к появлению в ней выделенного направления. Сила Кориолиса для части течения, поле скорости которого не зависит от координаты вдоль оси вращения, оказывается чисто потенциальной и потому не влияющей на его динамику [29; 30]. Это течение можно назвать квази-двумерным, поскольку его скорость в большинстве случаев направлена в плоскости, ортогональной оси вращения, вследствие ограничений, налагаемых геометрией границ, а его динамика при высоких числах Рейнольдса определяется нелинейным само-воздействием. Его также называют геострофическим [31], поскольку силы Кориолиса в нём балансируются давлением. Динамика второй части течения, поле скорости которого существенно зависит от продольной координаты, определяется силой Кориолиса и потому оказывается намного быстрее. В главном приближении эволюция этого течения описывается уравнением Навье-Стокса, линеаризованным по его амплитуде, так что это течение представляет собой инерционные волны с частотой порядка частоты вращения Ω [32]. Таким образом, вращающаяся жидкость поддерживает турбулентный режим течения, в котором геострофические долго-живущие вихри [33—35] поддерживаются распространяющимися на их фоне турбулентными пульсациями, представляющими собой инерционные волны [36].

Похожее, но более сложное разделение течения осуществляется в стратифицированной жидкости, в которой наряду с внутренними волнами, имеющими схожий закон дисперсии с инерционными волнами [37], существует медленное течение в виде вихрей, горизонтальный размер которых велик по сравнению с вертикальным [38]. В этих вихрях горизонтальное течение имеет наибольший градиент в вертикальном направлении, что создаёт условие для поглощения относительно короткой внутренней волны в критической плоскости [39]. Захватываются волны, переносящие горизонтальный импульс только определённого знака, тогда как волны с противоположным знаком потока импульса отражаются [37]. В результате от волн медленному течению может передаваться энергия [40]. Мы исследуем аналогичный эффект во вращающейся жидкости, устанавливая его статистические свойства путём рассмотрения динамики ансамбля инерционных волн на фоне геострофического течения.

Если длина инерционных волн мала по сравнению с размером поглощающих их вихрей, то описание процесса поглощения можно производить в пределе слабо неоднородного, т.е. гладкого, поля скорости в вихре, что соответствует приближению так называемой теории быстрых искажений [41]. В случае статистически изотропного случайного течения эта теория наиболее по́лно развита для скалярного поля, переносимого течением и подверженного процессу диффузии [42; 43]. Эта теория, в частности, изучает, каким образом ускоряется процесс гомогенизации пространственного распределения скаляра за счёт неоднородности течения [44], или, иными словами, за счёт перемешивания. Неоднородность течения аналогичным образом действует и на другие поля — например, поля инерционной волны во вращающейся жидкости или внутренней волны в стратифицированной жидкости [45] и магнитное поле в проводящей жидкости [46; 47]. В рамках изучения выбранной темы исследования это является обоснованием для изучения более простой модели перемешивания скалярного поля. Мы изучаем, как крупномасштабные флуктуации потока на фоне среднего аксиально-симметричного вихревого течения, которое локально представляет собой сдвиговое течение, ускоряют процесс перемешивания, и как по разноточечным корреляционным функциям скалярного поля, которые могут быть измерены в эксперименте, можно восстановить статистические свойства градиента самого поля скорости.

Степень разработанности темы исследования. Генерация приповерхностных течений поверхностными волнами на чистой поверхности жидкости изучалась теоретически в пионерской работе [7] для одиночной плоской волны и в работах [48; 49] для системы волн, распространяющихся в произвольных направлениях. Влияние поверхностной плёнки на скорость затухания поверхностных волн изучалась в работах [14; 15; 50]. Нам неизвестны работы других авторов, где исследовалось бы влияние жидкой поверхностной плёнки на темп генерации вихревого течения системой поверхностных волн, распространяющихся в общем случае в разных направлениях. Подробный обзор литературы по генерации поверхностными волнами приповерхностных вихревых течений приведён во Введении Главы 1.

Наблюдение геострофических долгоживущих вихрей во вращающейся жидкости наблюдалось в натурных экспериментах с различной постановкой, см., например, [33; 34; 51], и в численных моделированиях, см., например, [35; 52]. Исследование поглощения инерционных волн геострофическим течением путём численного моделирования производилось в работах [36]. Нам не известны теоретические работы других авторов по исследованию распространения инерционных волн на фоне геострофического течения, по исследованию вклада ансамбля инерционных волн в тензор Рейнольдса в уравнении на среднее течение в аксиально-симметричном вихре и анализу этого уравнения с точки зрения радиального профиля средней скорости. Подробный обзор литературы по распространению инерционных волн на фоне геострофического течения приведён во Введении Главы 2, а по долгоживущим геострофическим вихрям — во Введении Главы 3.

Аналитическое исследование зависимости одноточечных моментов скалярного поля, имеющего заданную начальную статистику пространственного распределения и далее пассивно переносимого случайным статистически изотропным потоком, проведено в [42; 43], проверка этих результатов путём численного счёта производилась в работах [53; 54]. Экспериментальное исследование одноточечных моментов в трёх-мерном изотропном потоке было проведено в [55]. Исследование процесса перемешивания скаляра в случайном потоке с сильно сдвиговой компонентой путём численного моделирования было произведено в [56]. Нам не известны теоретические работы других авторов по исследованию статистики перемешивания скаляра в случайном гладком потоке с сильной постоянной сдвиговой компонентой, а также по установлению общей связи между разноточечными корреляционными функциям скаляра и статистикой градиента поля скорости потока, когда поток является статистически изотропным. Подробный обзор литературы по перемешиванию пассивно переносимых гладким потоком скалярных полей дан во Введении Главы 4.

Целью данной работы является построение и развитие теории взаимодействия вихревых структур с волнами, в частности: 1) построение теории, описывающей возбуждение приповерхностных вихрей поверхностными волнами в условиях покрытия поверхности жидкости тонкой жидкой плёнкой; 2) построение теории поддержания мелкомасштабным турбулентным течением когерентного геострофического вихревого течения; 3) теоретическое исследование статистики перемешивания скалярного поля случайным гладким потоком с сильной постоянной сдвиговой компонентой и теоретическое развитие методов измерения статистики поля скорости по наблюдаемой статистике перемешивания скалярного поля.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Исследовать влияние поверхностной жидкой плёнки на генерацию поверхностным волнами вихревого течения. Установить общее выражение, связывающее вихревое течение с волновым движением.
2. Исследовать частный случай несжимаемой плёнки. Установить соотношение эйлеровой скорости и скорости дрейфа Стокса в этом пределе.

Рассмотреть случай произвольного значения сжимаемости плёнки, исследовать зависимость скорости генерации вихревого течения от этого параметра.

3. Исследовать частные случаи волнового течения — двух волн, распространяющихся под прямым углом друг к другу, и двух волн, распространяющихся под малым углом друг к другу.
4. Разработать методы интерпретации результатов эксперимента в свете построенной теории и провести сравнение с экспериментальными данными.
5. Исследовать структуру когерентного геострофического вихря в турбулентном течении быстро вращающейся жидкости для модельной задачи с периодическими граничными условиями.
6. Исследовать структуру когерентного геострофического вихря считая, что число Россби приближается снизу к единице. Исследовать статистику турбулентных пульсаций в этом режиме течения.
7. Исследовать влияние границ, ортогональных оси вращения жидкости как целого, на радиальный профиль когерентного вихря. Исследовать зависимость от высоты сосуда эффективности передачи энергии вихрю от турбулентности.
8. Исследовать влияние неоднородности вихревого течения на поглощение им инерционных волн, выработать картину и критерии эффективного поглощения в этом случае. Провести качественное сравнение с экспериментальными данными.
9. Исследовать распространение аксиально-симметричных волн конденсата в радиальном направлении на фоне среднего течения в вихре.
10. Исследовать связь разноточечной парной корреляционной функции пассивного скаляра в гладком случайном статистически изотропном поле скорости в присутствии слабой, но конечной диффузии, со статистическими свойствами потока.
11. Исследовать связь угловых особенностей корреляционной функции четвёртого порядка со статистическими свойствами потока, когда поток является хаотическим, статистически однородным и изотропным, в двумерном и трёхмерном случаях.
12. Исследовать статистику перемешивания пассивного скаляра в потоке, представляющем собой сдвиговое течение, на которое наложена слабая случайная во времени и гладкая в пространстве поправка. В частности, вычислить одноточечные моменты пассивного скаляра.

Научная новизна: Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми. В частности, впервые исследовано влияние поверхностной плёнки на генерацию поверхностными волнами вихревых течений, взаимное влияние ансамбля инерционных волн и среднего геострофического вихревого течения, а также связь разноточечных корреляционных функций пассивного скаляра со статистикой градиента поля скорости. В литературных обзорах, приведённых во введениях Глав 1–4, раскрыты истории исследований в соответствующих областях и подробно показано место и новизна данного диссертационного исследования. В ряде случаев в диссертации проводится сравнение аналитических результатов с данными физических и численных экспериментов, выполненных другими авторами.

Практическая значимость определяется применимостью построенной теории к интерпретации экспериментальных данных.

Развитые в диссертационной работе аналитические подходы и полученные результаты позволяют описывать нелинейное взаимодействие волн со средним гидродинамическим вихревым течением, в частности, генерацию вихревого течения поверхностными волнами в присутствии поверхностной жидкой плёнки и поддержание геострофического вихревого течения инерционными волнами, а также влияние установившегося вихревого течения на перенос и перемешивание полей.

Построенная качественная картина исследуемых физических явлений на основе полученных результатов позволяет более оптимально спланировать эксперимент и выбрать путь анализа экспериментальных данных. Большая часть полученных результатов уже прошла верификацию путём сравнения с экспериментальными данными и с данными численного эксперимента.

Результаты аналитических расчётов влияния поверхностной жидкой плёнки на генерацию приповерхностного вихревого течения, полученные в наших работах [A1; A2], были с успехом применены для анализа генерации вихревого течения в следующей нашей работе [A3], где показано, что теория с одним априори неизвестным параметром — величиной модуля упругого сжатия поверхностной плёнки — хорошо описывает всю совокупность экспериментальных данных. Построенная теория в нашей работе [A4], описывающая возбуждение крупномасштабного приповерхностного вихревого течения двумя поверхностными волнами, распространяющимися под малым углом друг к другу, была успешно наложена на позже полученные экспериментальные данные [57].

Линейно-логарифмический профиль, полученный в нашей работе [A5] для когерентного геострофического вихря в отсутствии трения о дно, был впоследствии наблюдён в численном моделировании двумерного когерентного течения [58], к которому применимо аналогичное описание. В нашей работе [A6] мы развили теорию распространения пакетов инерционных волн в неоднородном геострофическом течении, которая позволила успешно интерпретировать представленные в этой работе экспериментальные данные. В этом же эксперименте было продемонстрировано, что циклоны являются более устойчивыми и долгоживущими, что на качественном уровне согласуется с результатами нашей работы [A7]. Кроме того, крупные циклоны, наблюдавшиеся в [A6], имеют радиальный профиль, близкий к плоскому в определённом интервале расстояний до оси, что согласуется с предсказаниями нашей работы [A8].

Построенная нами теория перемешивания пассивного скаляра в гладком поле скорости со случайной компонентой [A9—A11] может быть применена для интерпретации данных перемешивания скаляра как в геострофическом когерентном течении, так, например, и в течениях эластической турбулентности [59; 60] или двумерном течении в канале [61].

Работа имеет теоретический характер, что, в частности, обосновывает её **теоретическую значимость.** Вихревые течения, вызванные затуханием поверхностных волн в том числе в присутствии поверхностной плёнки, могут войти наряду с акустическими течениями в классические учебники гидродинамики, такие как [2]. Развиваемое инерционными волнами касательное напряжение Рейнольдса, выявленное нами, имеет обще-гидродинамическое значение для вихревых столбовых структур, встречающихся в разных вариантах в природе. Наконец, установленная простая связь между разноточечными корреляционными функциями скаляра и функцией распределения ляпуновских экспонент в случайном потоке также достойна войти в монографии по статистической гидродинамике.

Методология и методы исследования. Общая методология исследования основывается на анализе уравнения Навье-Стокса и уравнения переноса. Течение жидкости предполагается суперпозицией быстро и медленно изменяющихся во времени течений. Динамика быстрой компоненты описывается линеаризованным по её амплитуде уравнением. В случае поверхностных волн это есть просто уравнение свободного волнового распространения, поскольку медленное течение предполагается слабым. В случае когерентных течений во вращающейся жидкости следует учесть также преломление инерционных волн в когерентном течении благодаря его слабой неоднородности. Затем исследуется усреднённое по времени уравнение Навье-Стокса, являющееся уравнением на медленную компоненту течения. В этом уравнении фигурирует усреднённый вклад, квадратичный по амплитуде быстрого течения. В случае поверхностных волн его принято называть виртуальным волновым напряжением, в случае когерентного течения — напряжением Рейнольдса. Если известны статистические свойства возбуждающей быстрое течение силы, то уравнение на медленное течение оказывается полностью определённым и может быть последовательно исследовано. При описании статистики перемешивания пассивного скаляра в гладком поле скорости, имеющем случайную компоненту, мы не ограничиваемся моделями, где случайная компонента скорости коротко коррелирована во времени. В ряде случаев мы пользуемся тем, что статистика разбегания двух лагранжевых траекторий в таком течении может быть выражена на больших временах в терминах функции Крамера (энтропийной функции), которая описывает в том числе большие отклонения от среднего. В этом случае для вычисления корреляционных функций скаляра мы устанавливаем оптимальную флуктуацию — реализацию случайного процесса, который даёт наибольших вклад в корреляционную функцию с учётом вероятности этой реализации. Диффузия предполагается малой, но конечной.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Получено аналитическое выражение для приповерхностного вихревого течения, вызванного волновым движением, в присутствии поверхностной плёнки. Передача импульса от волн вихревому течению происходит в тонком слое, включающем в себя гребни и впадины волны вместе с вязким подслоем. Механизм возбуждения вихревого течения может быть интерпретирован как результат действия эффективной поверхностной касательной силы — виртуального волнового напряжения. Присутствие плёнки увеличивает затухание волны и, тем самым, приводит к увеличению амплитуды виртуального волнового напряжения.
2. Установлено, что присутствие несжимаемой плёнки на поверхности приводит к увеличению амплитуды вынужденного вихревого течения в $\sim 1/\gamma$ раз ($\gamma = \sqrt{\nu k^2/\omega}$ — малый параметр теории, ω, k — частота и волновое число, ν — кинематическая вязкость), по порядку величины во столько же раз сокращается добротность волны по сравнению с пределом чистой поверхности. По мере снижения модуля упругого растяжения плёнки амплитуда вынужденного вихревого течения ведёт себя немонотонно, достигая сперва максимума, а затем убывая до своего значения для чистой поверхности. Значения амплитуды в максимуме и в пределе несжимаемой плёнки имеют один и тот же порядок. В этой области параметров амплитуда скорости дрейфа Стокса пренебрежимо мала по сравнению с амплитудой установившейся во времени эйлеровой части массового транспорта.
3. Установлена аналитическая зависимость амплитуды вихревого течения от горизонтальной и вертикальной координат, величины модуля упругого сжатия плёнки и времени, когда волновое движение представляет собой две ортогональные бегущие или стоячие волны. То же самое сделано для случая двух распространяющихся под малым углом друг к другу волн. Поскольку в последнем варианте масштаб вихревого течения значительно превышает длину волн, исследован кроме того предел, когда жидкость является глубокой для волн, но должна быть учтена её конечная глубина при описании динамики вихревого течения.
4. Разработан комбинированный метод опосредованного измерения модуля упругого сжатия плёнки, который является основным параметром при описании возбуждения вихревого течения поверхностными волнами. Метод включает в себя одновременное измерение линейной скорости затухания волн с учётом трения о стенки бассейна, соотношения амплитуд вертикальной и горизонтальной скоростей в волне и амплитуды возбуждаемого вихревого течения.
5. Установлен механизм, по которому инерционные волны передают свою энергию крупномасштабному геострофическому вихревому течению. Показано, что благодаря этому механизму инерционные волны формируют радиально-азимутальное напряжение Рейнольдса в

аксиально-симметричных вихрях, которое действует как отрицательная турбулентная диффузия, поддерживая дифференциальное вращение в вихре. Найден радиальный профиль средней скорости в вихре в отсутствии трения о дно — линейно-логарифмическая зависимость. Показано, что часть энергии, которая выделяется в тепло благодаря действию вязкости в секторе инерционных волн, мала, если число Рейнольдса для волн велико.

6. Установлены радиальные профили циклонов и анти-циклонов при различных числах Россби и Рейнольдса. Показано, что у циклонов максимум средней азимутальной скорости сдвигается ближе к оси вихря, тогда как антициклонов — дальше от оси вихря по сравнению с пределом малого числа Россби, для которого имеет место линейно-логарифмический профиль. Рассчитано значение напряжения Рейнольдса в циклонах и антициклонах.
7. Установлена роль границ, ортогональных оси вращения, в формировании радиального профиля когерентного вихря. Выше масштаба, на котором сравнивается действие объёмной вязкости и эффективное трение о дно, доминирует трение о дно, которое изменяет линейно-логарифмический профиль на профиль с постоянным значением азимутальной скорости. Кроме того, мы установили, что трение о дно может снижать эффективность передачи энергии когерентному течению от турбулентных пульсаций только в случае, если эти пульсации являются мелко-масштабным геострофическим течением.
8. Установлены закономерности распространения пакета инерционных волн в слабо-неоднородном геострофическом аксиально-симметричном вихревом течении. Показано, что для того, чтобы инерционная волна могла быть поглощена геострофическим течением, требуется, чтобы разность скоростей в разных областях геострофического течения превосходила групповую скорость волны. Показано, что поглощение производит селекцию волн: волны, которые несут момент количества движение, по знаку противоположный направлению вращения в геострофическом вихре, не поглощаются, а отражаются, уходя обратно на периферию вихря.
9. Установлен закон дисперсии для аксиально-симметричных волн конденсата в предположении, что источником поддержания когерентного течения является геострофическое мелко-масштабное течение. В конденсате, насыщение которого достигнуто за счёт трения о дно, в высокочастотной области закон дисперсии линеен, а длина пробега велика по сравнению с длиной волны. В вязком конденсате закон дисперсии совпадает с законом дисперсии волн в вязком нестационарном слое.

10. Установлено, что парная корреляционная функция пассивного скаляра в распадной задаче пропорциональна плотности функции распределения расстояния между двумя близкими лагранжевыми траекториями в гладком случайном поле скорости.
11. Установлены угловые особенности корреляционной функции четвёртого порядка в задаче о перемешивании пассивного скалярного поля случайным во времени гладким полем скорости с изотропной статистикой. В трёхмерном случае было показано, что корреляционная функция четвёртого порядка пропорциональна плотности распределения степеней растяжения элементарного объёма жидкости в результате действия потока. Двумерное течение оказывается слишком низкоразмерным для этой корреляционной функции, и потому она оказывается существенно зависящей от величины молекулярной диффузии. Пространственная зависимость корреляционной функции была найдена сперва методом поиска оптимальной флуктуации поля скорости, результат затем был верифицирован путём установление уравнения на эту корреляционную функцию и прямого его решения. Установлено, что угловая зависимость на относительно умеренных расстояниях представляет собой резкий пик, тогда как на более далёких расстояниях зависимость сменяется степенно́й.
12. Установлена статистика моментов пассивного скаляра для распадной задачи, когда перемешивание происходит в двумерном течении с сильной сдвиговой компонентой. Статистика выражена через преобразование Лежандра от функции Крамера, описывающей статистику деформации малого элемента жидкости на больших временах. Для задачи с непрерывным возбуждением флуктуаций пассивного скаляра установлено, что хвост функции распределения, описывающий высокие моменты, является экспоненциальным, тогда как тело функции распределения близко́ к нормальному распределению. Установлены свойства функции Крамера для модельной задачи с коротко-коррелированным по времени полем скорости.

Достоверность полученных результатов обеспечивается надёжностью применённых аналитических методов. Часть из полученных результатов получила подтверждения в натурных и численных экспериментах. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными ранее другими исследователями.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на: научных сессиях Совета по нелинейной динамике (г. Москва, 2019-2021, 2023 гг.), XX Научной школе «Нелинейные Волны – 2022» (г. Нижний Новгород), международных конференциях «Landau Days 2020», «Landau Days 2021», «Landau Days 2022» в г. Черноголовка, «Landau Week» (г. Ереван, 2023), «XXIII Зимней школе по механике сплошных сред» (г. Пермь, 2023), Warwick Turbulence Symposium (Warwick, 2006), V Международной конференции «Наука будущего» (г. Орёл, 2023), Третьей Международной Конференции «Физика конденсированных состояний» ФКС-2023 (г. Черноголовка), школах-конференциях «Современная гидродинамика 2023», «Современная гидродинамика 2024» (г. Черноголовка), Школе-конференции по теоретической физике конденсированного состояния (г. Саров, 2024), Русско-индийской конференции «Frontiers of Theoretical Condensed Matter Physics» (г. Черноголовка, 2024), Юбилейной международной конференции — 60 лет Институту теоретической физики им. Л.Д. Ландау (г. Черноголовка, 2024), международном симпозиуме «Неравновесные процессы в сплошных средах 2024» (г. Пермь), XXI научной школе «Нелинейные волны – 2024» (г. Нижний Новгород), на семинарах в Институте теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН (Черноголовка), Физическом институте им. П.Н. Лебедева РАН (Москва, 2023), Институте океанологии им. П.П. Ширшова РАН (Москва, 2023, 2024), НИИ Механики МГУ (Москва, 2024), Объединённом институте высоких температур РАН (Москва, 2024), Институте гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН (2024), Институте Теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН (2024), Институте прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова РАН (2024), Пермском национальном исследовательском политехническом университете (2024).

Личный вклад. Все результаты, приведённые в данной диссертационной работе, получены лично автором или при его непосредственном участии. В диссертацию вошли только аналитические части работ [A3; A6], содержащих в себе также и результаты натурного эксперимента. Эти аналитические результаты были получены автором лично. Экспериментальные данные в виде графиков приводятся ради наглядной демонстрации результатов аналитических вычислений и их соответствия результатам измерений. В работах [A5; A12] личный вклад автора состоял в постановке задачи, выработке метода решения, проверке вычислений и анализе результатов; из работы [A12] в данную диссертацию вошёл только общий метод оценки корреляционных функций скорости без рассмотрения структурной функции.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 13 печатных изданиях, 13 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы, сформулирована цель работы, обоснованы новизна и практическая ценность полученных резуль татов, раскрыто содержание диссертации по главам.

Первая глава посвящена построению теории возбуждения приповерхностных вихрей поверхностными волнами в условиях покрытия поверхности жидкости тонкой жидкой плёнкой [A1; A2]. В Пункте 1.1 “Введение” приводится развёрнутый обзор литературы, касающейся возбуждения поверхностными волнами вихревых течений.

Далее в Пункте 1.2 формулируются управляющие уравнения, включая граничные условия на свободной поверхности, покрытой жидкой эластичной плёнкой. Мы предполагаем, что в объёме динамика жидкости подчиняется уравнению Навье-Стокса. Вне вязкого подслоя волновое движение жидкости является чисто потенциальным, вода с точки зрения волны глубокая. Жидкость предполагается слабо вязкой, так что мало́ отношение скорости затухания волны к её частоте ω; мы вводим малый параметр $\gamma = \sqrt{\nu k^2/\omega}$, где k — волновое число поверхностной волны, а ν — кинематическая вязкость жидкости. Поверхностно-активное вещество, составляющее поверхностную плёнку, считается нерастворимым в жидкости, так что его полное количество на поверхности сохраняется. Плёнка характеризуется модулем упругого сжатия $-n_0\sigma'(n_0)$, где n — поверхностная концентрация вещества плёнки, а производная поверхностного натяжения $\sigma' = \mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}n$ берётся при равновесном значении концентрации, $n = n_0$. Мы полагаем, что плёнка жидкая, т.е. не обладает сдвиговым модулем упругости, а обе вязкости плёнки пренебрежимо малы, т.е. мало́ число Буссинеска $k\eta_s/\eta \ll 1$, где $\eta = \varrho\nu$ — динамическая вязкость жидкости, ϱ — её плотность, а η_s — динамическая вязкость плёнки.

В Пункте 1.3 исследуется задача, частично решённая ранее в [15], о распространении поверхностных волн в линейном по их амплитуде приближении с целью определения характеристик волны, играющих роль при нелинейном возбуждении вихревых течений. Выписана вихревая часть поля скорости в вязком подслое, которая необходима ниже для вычисления параметров генерации среднего течения. Определена скорость затухания амплитуды волны $\mathrm{Im}\,\omega$ и отношение $||u_\alpha||/||u_z||$ амплитуд вертикальных и горизонтальных колебаний лагранжевой траектории на поверхности жидкости в зависимости от величины модуля упругости плёнки. По этим величинам, которые достаточно легко измерить в эксперименте, возможно восстановить величину модуля упругого сжатия плёнки. Безразмерным управляющим параметром является

$$\varepsilon = \frac{-n_0\sigma'(n_0)}{\varrho\sqrt{\nu\omega^3}/k^2}. \tag{1}$$

Предел чистой поверхности соответствует $\varepsilon \ll \sqrt{\gamma}$, предел несжимаемой плёнки достигается при $\varepsilon \gg 1$. В промежуточной области $\sqrt{\gamma} \lesssim \varepsilon \lesssim 1$ затухание волны существенно больше его значения для чистой поверхности, а при $\varepsilon \gtrsim 1$ отношением амплитуд $||u_\alpha||/||u_z||$ существенно отличается от единицы.

В Пункте 1.4 описывается процедура разделения поля скорости $\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{r})$ всего течения на волновое движение $\boldsymbol{u}$ и вихревое течение $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{u}$. Это разделение производится по частоте: время изменения T вихревого течения $\boldsymbol{V}$ должно быть велико по сравнение с периодом волновых колебаний; также и градиент $\mathrm{grad}\,\boldsymbol{V}$ вихревой части поля скорости должен быть мал по сравнению с частотой:

$$\frac{1}{\omega T},\ \frac{|\,\mathrm{grad}\,\boldsymbol{V}|}{\omega} \ll 1. \tag{2}$$

Можно выделить два вклада в воздействие волн на вихревое течение, оба которых квадратичны по амплитуде волн. Первый вклад не зависит от самого вихревого течения $\boldsymbol{V}$, поскольку является результатом затухания волн. Воздействие в этом вкладе представляет собой поверхностную касательную силу $\boldsymbol{\tau}$, называемую виртуальным волновым напряжением [62]. Второй вклад появляется вследствие рассеяния волн на вихревом течении и потому от него зависит. Этот вклад представляет собой объёмную силу, проникающую в глубину на $\sim 1/k$, и называется вихревой силой [10; 12]. Мы предполагаем, что вихревое движение на столько слабо́, что эффект от вихревой силы мал по сравнению с эффектом от касательного напряжения $\boldsymbol{\tau}$. Ниже в Пункте 1.8.2 показано, что это приводит к ограничению на амплитуду волны h, $kh \ll \gamma$, если считать вихревое течение $\boldsymbol{V}$ установившимся. В эксперименте измерение скорости вихревого течения обычно производится частичками, пассивно переносимыми жидкостью. В этом случае измеряется не эйлерова скорость $\boldsymbol{V}$, а лагранжева скорость $\boldsymbol{V}^L = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{U}^s$, где $\boldsymbol{U}^s$ есть скорость дрейфа Стокса. Поэтому в Пункте 1.4 также производится расчёт величины дрейфа Стокса. Он не отличается от уже известного выражения [63] вне вязкого пограничного слоя. Отличия появляются в вязком подслое, что важно, если измерение скорости производится частичками, плавающими на поверхности жидкости и имеющими размер, малый по сравнению с толщиной вязкого подслоя. На поверхности жидкости вертикальная компонента $\varpi_z^s = \partial_x U_y^s - \partial_y U_x^s$ завихренности дрейфа Стокса

$$\varpi_z^s = \epsilon_{\alpha\beta} \left\langle (\partial_\alpha h)(\partial_\beta \partial_t h) + \left(\partial_\alpha \partial_\gamma \frac{(1-\hat{D})}{\hat{k}} h\right) \left(\partial_\beta \partial_\gamma \partial_t \frac{(1-\hat{D})}{\hat{k}} h\right) \right\rangle, \qquad (3)$$

где $h(t,x,y)$ задаёт форму поверхности жидкости, $\epsilon_{\alpha\beta}$ — единичный антисимметричный тензор, а угловые скобки означают усреднение по волновым осцилляциям. Определения фигурирующих здесь и ниже операторов $\hat{k}$, $\hat{\kappa}$ и $\hat{D}$ суть

$$\hat{k} = \sqrt{-\partial_x^2 - \partial_y^2}, \qquad \hat{\kappa} = \sqrt{\partial_t/\nu - \partial_x^2 - \partial_y^2}, \qquad \hat{D} = \frac{\hat{\varepsilon} - 2i\hat{\gamma}}{\hat{\varepsilon} - e^{i\pi/4}}. \qquad (4)$$

В последнем равенстве $\hat{\varepsilon}$ (1) и $\hat{\gamma}$ следует понимать как операторы, являющиеся диагональными в пространстве частот и волновых векторов. Вертикальная компонента дрейфа Стокса, как всегда, равна нулю.

В Пункте 1.5 получены общие выражения для вихревого течения $\boldsymbol{V}$, возбуждённого поверхностными волнами с учётом влияния поверхностной плёнки. Поскольку линии тока течения $\boldsymbol{V}$ направлены горизонтально, переменная в пространстве часть течения однозначно выражается через вертикальную компоненту завихренности $\varpi_z^V = \partial_x V_y - \partial_y V_x$:

$$\begin{aligned} \varpi_z^V \quad = \quad & \epsilon_{\alpha\beta} \frac{e^{\hat{\kappa} z}}{\hat{\kappa}} \left\langle 2(\partial_\alpha \partial_\gamma h) \left(\partial_\beta \partial_\gamma \partial_t \frac{(1-\hat{D})h}{\hat{k}}\right) + \right. \qquad (5) \\ & \left. + \left(\partial_\beta \partial_t \frac{\hat{D}\hat{\kappa}}{\hat{k}} h\right) \left(\partial_\alpha \left(1 - \frac{\hat{D}}{2}\right) kh\right) + \left(\partial_\beta \partial_t \frac{\hat{D}}{2\hat{k}} h\right) (\partial_\alpha \hat{D} \hat{\kappa} \hat{k} h) \right\rangle. \end{aligned}$$

Предположим, что спектральная ширина волнового движения оценивается как $\Delta\omega \ll \omega$. Экспонента $\exp(\hat{\kappa}z)$ в (5), которая в сущности символизирует результат решения уравнения типа диффузии с источником на поверхности, действует на квадратичную форму от h, которая содержит в том числе и малые частоты $\sim \Delta\omega$. Характерное волновое число этой квадратичной формы обозначим q. Если характерное время изменения $1/\Delta\omega$ квадратичной формы мало по сравнению со временем $t_E = 1/\nu q^2$ вязкого затухания вихревого течения на соответствующем волновом векторе q, $\Delta\omega \gg \nu q^2$, то вихревое течение распространяется на глубину $\sim \sqrt{\nu/\Delta\omega}$, Если же волновое движение почти монохроматическое, так что $\Delta\omega \ll \nu q^2$, то глубина проникновения вихревого течения есть $1/q$.

В Пункте 1.6 эти общие выражения адаптируются для случая распространения двух волн под прямым углом друг к другу, когда форма поверхности имеет вид [A3]

$$h(t,x,y) = H_1 \cos(\omega t)\cos(kx) + H_2 \cos(\omega t + \psi)\cos(ky). \tag{6}$$

В этом случае $\Delta\omega = 0$, а волновой вектор $q = \sqrt{2}\,k$. Завихренность лагранжевого движения равна

$$\varpi_z^L = \left(\frac{\varepsilon^2 e^{kz\sqrt{2}}}{2\gamma(\varepsilon^2 - \varepsilon\sqrt{2} + 1)} + \sqrt{2}e^{kz\sqrt{2}} + e^{2kz}\right)\Lambda(x,y), \tag{7}$$

где пространственное распределение завихренности $\Lambda(x,y) = -H_1 H_2 \omega k^2 \sin(kx)\sin(ky)\sin\psi$ соответствует вихрям, расположенным в шахматном порядке. Второе и третье слагаемые в (7) должны быть опущены как малые поправки, если в первом слагаемом $\varepsilon \gg \sqrt{\gamma}$. Третье слагаемое, пропорциональное $\exp(2kz)$, есть дрейф Стокса.

В Пунктах 1.6.1–1.6.3 производятся детальные расчёты для нестационарных случаев. В этом случае необходимо решать уравнение (5), в котором результат усреднения в угловых скобках по быстрым волновым осцилляциям не является стационарным во времени. Поверхностные волны имеют скорость установления t_S, малую по сравнению со временем установления эйлерова вихревого течения t_E за счёт влияния поверхностной плёнки и боковых стенок бассейна при их наличии, $t_S \ll t_E$. Предположим, что на поверхности исходно покоящейся жидкости начинают возбуждать волны постоянной амплитуды. В (7) первые два слагаемых приобретают множитель $\mathrm{Erf}(t/t_E)$ (Erf — функция ошибок), тогда как последнее слагаемое устанавливается в этом приближении мгновенно. После того, как вихревое течение достигло своего асимптотического по времени значения (7), в момент времени t^* возбуждение волн прекращается. Тогда третье слагаемое исчезает за быстрое время t_S, а первые два слагаемых приобретают множитель $1 - \mathrm{Erf}((t - t^*)/t_E)$. В ходе краткое сравнение с экспериментом [A3] мы отходим от приближения $t_S \ll t_E$, используя то, что в эксперименте возможно измерять величины $H_{1,2}(t)$ и $\psi(t)$ как функции времени. Подставляя эти значения в (5), мы находим правую часть численно, что даёт наиболее точное совпадение с значением измеренного течения $\varpi_z^L(t)$.

Если две волны распространяются под малым углом 2θ друг к другу, то формируются крупномасштабные вихри с масштабом $1/q \equiv l = 1/2k\sin\theta \gg 1/k$, значительно превышающим длину волны [A4]. В Пункте 1.7 получены выражения для завихренности в случае жидкости неограниченной глубины

$$\varpi_z^V = \left(4\cos^2\theta + \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{2}\gamma(\varepsilon^2 - \varepsilon\sqrt{2}+1)}\right)\cos\theta\cdot\Lambda(x)\,\exp(z/l), \qquad (8)$$

где пространственная структура в горизонтальном направлении $\Lambda(x) = -H_1H_2\omega k^2\sin(x/l)$. Вычисления для промежуточного предела, когда волна глубока для волны, но имеет конечную глубину с точки зрения крупномасштабного вихревого течения, вынесены в Приложение А.

В Пункте 1.8 “Заключение” подводятся итоги этой части исследования.

Во <u>**Второй главе**</u> содержится первая часть исследования механизмов существования долгоживущих геострофических вихрей, поддерживаемых поглощением инерционных волн — изучение динамики инерционных волн на фоне крупномасштабного вихревого течения. В Пункте 2.1 “Введение” содержится общий обзор литературы по этой теме.

Для того, чтобы ввести основные объекты исследования, в Пункте 2.2 определяются основные уравнения. Во-первых, полная скорость жидкости удовлетворяет уравнению Навье-Стокса для несжимаемой жидкости во вращающейся с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}_0$ системе координат

$$\partial_t\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} + 2\left[\boldsymbol{\Omega}_0\times\boldsymbol{v}\right] = -\nabla p + \nu\Delta\boldsymbol{v} + \boldsymbol{f}. \qquad (9)$$

Сила $\boldsymbol{f}$ предполагается внешней в нашей модели. Она случайна во времени и пространстве, имеет нулевое среднее, характерное волновое число k_f и среднюю мощность ϵ на единицу массы жидкости. Эта сила возбуждает турбулентное течение, так что априорное число Рейнольдса велико, $\mathrm{Re}_f = \epsilon^{1/3}/\nu k_f^{4/3} \gg 1$. Мы предполагаем, что полное течение $\boldsymbol{v}$ состоит из сильного аксиально-симметричного геострофического вихревого течения $\boldsymbol{V}^G$ и турбулентной части $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V}^G + \boldsymbol{u}$. Как и в предыдущей Главе 1, разделение этих течений производится по их скорости изменения. В цилиндрической системе координат $\{r_\perp, \varphi, z\}$ о осью Oz, направленной вдоль $\boldsymbol{\Omega}_0$ и совпадающей с осью аксиально-симметричного геострофического вихря, уравнение на среднее течение $\boldsymbol{V}^G = \mathbf{e}^\varphi V_\varphi^G$ имеет вид

$$\partial_t V^G = -\left(\partial_{r_\perp} + 2/r_\perp\right)\left(\tau - \nu\Sigma\right), \quad \tau = \langle u_\varphi u_{r_\perp}\rangle, \qquad \Sigma = r_\perp\,\partial_{r_\perp}(V^G/r_\perp). \quad (10)$$

содержащее напряжение Рейнольдса τ, которое является квадратичным по амплитуде волн $\boldsymbol{u}$ и есть среднее по их ансамблю, и локальную силу сдвига среднего течения Σ в дифференциальном вращении вихря. Мощность, передаваемая от волн среднему течению, равна $F\epsilon = \Sigma\langle u_{r_\perp}u_\varphi\rangle$, где “коэффициент полезного действия” $F < 1$. Если $F > 0$, то мы имеем дело с феноменом отрицательной турбулентной вязкости [20], в противном случае турбулентная вязкость положительна.

При описании динамики инерционных волн на фоне геострофического течения мы используем линейное приближение по их амплитуде. Уравнение Навье-Стокса, написанное в этом приближении, имеет вид

$$\big(\partial_t + (\boldsymbol{V}^G\nabla)\big)\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\nabla)\boldsymbol{V}^G + 2\,[\boldsymbol{\Omega}_0 \times \boldsymbol{u}] = -\nabla p + \nu\Delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}. \tag{11}$$

Рассмотрение линейной по $\boldsymbol{u}$ динамики обосновывается тем, что в присутствии вращения скорость нелинейного взаимодействия турбулентных пульсаций оценивается не как $|\,\mathrm{grad}\,\boldsymbol{u}|$ (как это было бы без вращения), а как $|\,\mathrm{grad}\,\boldsymbol{u}|^2/\Omega_0$, что значительно меньше, поскольку число Россби для турбулентного течения $|\,\mathrm{grad}\,\boldsymbol{u}|/2\Omega_0$ предполагается малым.

В Пункте 2.3 исследуется динамика волн на фоне крупномасштабного геострофического течения в предположении, что среднее течение локально в пространстве представляет собой однородное в пространстве сдвиговое течение [A5]. В декартовой системе координат $O\xi\eta z$, центр которой движется по кругу $r_\perp = \mathrm{const}$ с угловой скоростью $V^G(r_\perp)/r_\perp$, а оси которой вращаются с этой же угловой скоростью, так что ось $O\xi$ всегда направлена к центру вихря, линеаризованное уравнение Навье-Стокса (11) по амплитуде волны $\boldsymbol{u}$ приобретает вид

$$(\partial_t - \Sigma\,\eta\,\partial_\xi)\boldsymbol{u} - u_\eta\,\Sigma\,\mathbf{e}^\xi + 2\,\Omega\,[\mathbf{e}^z \times \boldsymbol{u}] = -\nabla p + \nu\Delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}, \tag{12}$$

где p определяется из условия $\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} = 0$, $\mathbf{e}^i$ — соответствующие единичные базисные вектора, а локальная скорость вращения жидкости $\Omega = \Omega_0 + V^G(r_\perp)/r_\perp$. Вязкость полагается малой в смысле $\gamma = \nu k_f^2/\Sigma \ll 1$. Если вихревое течение является твердотельным, $\Sigma = 0$, то уравнение (12) описывает инерционные волны [32], у которых закон дисперсии $\omega = 2s\Omega k_z/k$, где k — волновое число, k_z — его проекция на ось вращения, а $s = \pm 1$ — поляризация волны. Слагаемое $-\Sigma\eta\partial_\xi\boldsymbol{u}$ в (12) задаёт перенос волнового поля в волновом пространстве вдоль характеристик,

$$k'_\eta(t) = k_\eta + \Sigma t k_\xi, \qquad \mathbf{k}'(t) = \{k_\xi, k'_\eta(t), k_z\}. \tag{13}$$

Далее в Пункте 2.4 производится общее рассмотрение парной корреляционной функции поля скорости турбулентных пульсаций и определение их свойств [A12]. После этого выведены общие выражения для средних величин, квадратичных по амплитудам волн, — напряжения Рейнольдса, их средней кинетической энергии и скорости вязкой диссипации в подсистеме турбулентных пульсаций — в предположении, что сила $\boldsymbol{f}$ коротко коррелирована во времени и однородна в пространстве.

В Пункте 2.5 эти вычисления проводятся до конца в пределе малого числа Россби для крупномасштабного течения, $\mathrm{Ro} = \Sigma/2\Omega \ll 1$, и для модельного случая статистически изотропной силы $\boldsymbol{f}$, возбуждающей инерционные волны. В этом пределе динамика противоположных круговых поляризаций инерционных волн оказывается независимой, и для каждой поляризации сохраняется волновое действие (адиабатический инвариант) $k'\boldsymbol{u}^2 = \mathrm{const}$. Поскольку на больших временах $t \gg \Sigma$ почти все волновые вектора линейно растут со временем согласно (13), то волны, возбуждаемые силой $\boldsymbol{f}$, отдают свою энергию среднему течению за время порядка $1/\Sigma$. Величина тангенциального напряжения Рейнольдса оказывается равной $\tau \approx \epsilon/\Sigma$, так что параметр F отличается от единицы на малую величину порядка $\gamma^{1/3}$. Плотность кинетической энергии волн имеет логарифмическую великость, $\langle \boldsymbol{u}^2 \rangle \sim \ln^2 \gamma \cdot \epsilon/\Sigma$.

В Пункте 2.6 рассматривается задача в другой постановке, когда инерционная волна распространяется на фоне аксиально-симметричного вихревого течения, имеющего произвольный медленно меняющийся в пространстве профиль радиальной зависимости скорости. В соответствии с экспериментальными условиями предполагается, что инерционные волны возбуждаются на периферии долгоживущего вихря, а затем в виде сходящейся цилиндрической волны распространяются внутрь тела вихря. У такой волны сохраняются аксиальное целое число m, компонента волнового вектора k_z и частота ω в системе координат, связанной с жёсткими границами течения. Положим, что инерционная волна короткая, так что выполняется закон дисперсии $\widetilde{\omega} = 2s\Omega k_z/k$, где $\widetilde{\omega}$ есть частота волны в системе координат, связанной и вращающейся вместе с элементом жидкости, а $k = k(r_\perp)$. Тогда, благодаря эффекту Доплера $\widetilde{\omega} + mV^G/r_\perp = \omega$, так что

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_f} - \frac{sm}{2\Omega k_z} \frac{V^G(r_\perp)}{r_\perp}. \tag{14}$$

Было принято, что на краю вихря при $r_\perp = R_u$, где $V^G(R_u) = 0$, волновое число $k(R_u) = k_f$. Если в правой части (14) второе слагаемое отрицательно, то сходящаяся цилиндрическая инерционная волна поглощается в критическом слое поглощается в критическом слое, радиус $r_\perp = R_*$ которого определяется равенством $k \to \infty$. Такая волна переносит момент импульса, по знаку совпадающий с моментом импульса вихря. Путём таких поглощений и осуществляется поддержание вихревого течения инерционными волнами. Поглощение волны происходит, если вихревое течение достаточно интенсивно, так что неравенство

$$\frac{V^G(r_\perp)}{r_\perp} > \frac{\omega}{m} \tag{15}$$

достигается внутри вихря. При этом длина волны $2\pi/k_f$ в области $r_\perp = R_u$ должна быть меньше периода модуляции $2\pi R_u/m$ волны в аксиальном направлении, $k_f > m/R_u$. Если неравенство (15) свести к грубой оценке, то выходит, что для того, чтобы поглощение волн происходило эффективно, среднеквадратичная скорость в вихре V_{rms} должна быть сравнима или больше групповой скорости волн, которая оценивается как Ω_0/k_f, $V_{rms} \gtrsim \Omega_0/k_f$. Это качественное соображение подтверждается нашими экспериментальными наблюдениями [A6]. Сходящаяся инерционная волна, для которой второе слагаемое в (14) положительно, отражается на расстоянии $r_\perp = R_t$ до оси вихря, определяющимся уравнением $k^2 = m^2/r_\perp^2 + k_z^2$ с учётом (14). Такие волны переносят момент импульса противоположного знака, их отражение происходит без передачи момента импульса.

В Пункте 2.7 “Заключение” подводится итог полученным закономерностям.

В **Третьей главе** изучаются радиальные профили среднего течения в долгоживущих вихрях в зависимости от контрольных безразмерных параметров течения и граничных условий. В Пункте 3.1 “Введение” дан обзор литературы по наблюдению и изучению долгоживущих вихрей в двумерных и вращающихся трёхмерных турбулентных потоках.

Пункт 3.2 посвящён самой простой модели, когда стохастическая сила, возбуждающая течение, коротковолновая и статистически изотропная, число Россби мало, $\mathrm{Ro} = \Sigma/2\Omega \ll 1$, безразмерный параметр $\gamma = \nu k_f^2/\Sigma \ll 1$, а границы течения отсутствуют [A5]. В этом пределе безразмерный параметр F достигает своё максимальное значение, так что уравнение (10) на статистически стационарный вихрь и его решение принимают вид

$$\epsilon/\Sigma = \nu\Sigma, \qquad V^G = \pm\sqrt{\epsilon/\nu}\, r_\perp \ln\big(R_u/r\big), \tag{16}$$

где R_u — константа интегрирования, смысл которой есть радиус вихря. Знак ‘$+$’ в (16) соответствует циклоническому вихрю, в котором вращение сонаправлено общему вращению жидкости. Знак ‘$-$’ соответствует анти-циклону, в котором собственное вращение вихря подавляет общее вращение.

Далее в Пункте 3.3 эта модель расширяется на случай конечных чисел Россби Ro и γ, когда появляется различие между циклонами и антициклонами [A7]. В этом случае уже не удаётся аналитически определить “коэффициент полезного действия” $F(\mathrm{Ro},\gamma)$. Поэтому, используя численный счёт, мы решаем динамическое уравнение на поле инерционной волны, возбуждённое силой $\boldsymbol{f}$, производим усреднение по её статистике, в результате чего получаем две карты значений F на плоскости параметров Ro-γ, для циклонического и антициклонического вихрей. В частности, мы находим линии на этих картах, где F обращается в ноль: эти линии проходят по области $\mathrm{Ro} \sim 1$, когда $\gamma \ll 1$, и отклоняются в область малых чисел Россби, когда безразмерная вязкость достигает значения порядка единицы, $\gamma \sim 1$. После этого мы решаем стационарную версию уравнения (10), когда его левая часть равна нулю, опять-таки численным образом. Следует заметить, что безразмерные параметры Ro и γ зависят от расстояния до оси вихря $r_\perp$. Радиальные профили $V^G(r_\perp)$ образуют однопараметрическое семейство кривых на плоскости Ro-γ. Качественные результаты этого рассмотрения следующие. В циклонах максимум абсолютного значения скорости течения V^G смещён к центру относительно предсказаний асимптотической теории (16), поскольку вблизи оси вихря его собственное вращение усиливает полное вращение жидкости. Наоборот, в антициклоне максимум V^G смещён от центра по сравнению с предсказанием (16), поскольку собственное вращение вихря подавляет полное вращение жидкости. Если это вращение полностью подавлено, то образуется область трёх-мерной турбулентности, которая своим существованием разрушает весь вихрь. Отсюда следует ограничение на максимально возможный размер антициклона при фиксированных глобальных параметрах, которое отсутствует для циклонов.

В Пункте 3.4 производится учёт влияния горизонтальных стенок [A8]. Вблизи горизонтальных стенок образуются пограничные слои, называемые слоями Экмана. Эти слои приводят к образованию вторичных течений в объёме, учёт которых в уравнении на среднее течение (10) приводит к появлению эффективного трения о дно: в пределе малого числа Россби в правой части (10) появляется дополнительный член $-\alpha V^G$ с коэффициентом $\alpha = \sqrt{\mathrm{Ek}} \cdot 2\Omega_0$, где число Экмана $\mathrm{Ek} = \nu/(\Omega_0 H^2)$, а H — высота сосуда. Два диссипативных механизма — объёмная вязкость ν и трение о дно α — приводят к появлению масштаба $R_{\nu/\alpha} = \sqrt{\nu/\alpha}$. Ниже этого масштаба радиальный профиль вихря определяет объёмная сила вязкости, что даёт профиль вида (16). Выше этого масштаба профиль вихря определяет трение о дно, так что мы получаем плоский профиль $V^G = \sqrt{3\epsilon/\alpha}$, который для двумерных вихрей был установлен ранее в [21]. Путём численного решения (10) мы получили зависимость, описывающую переход от одного асимптотического поведения к другому. Сравнение теории, разработанной в предыдущей главе для поглощения инерционных волн аксиально-симметричным вихрём, с нашими экспериментальными данными [A6], производится Пункте 3.4.5. Анализ радиальной зависимости $V^G/r_\perp$ (15) для двух режимов течения позволяет качественно объяснить наблюдающиеся отличия структуры долгоживущих вихрей в этих режимах. Далее, в Пункте 3.4.6, мы анализируем случай, когда статистика возбуждающей течение силы $\boldsymbol{f}$ не является изотропной: в основном возбуждаются волны, имеющие малое вертикальное волновое число k_z по сравнению с горизонтальной проекцией волнового вектора $k_\perp$, $k_z \ll k_\perp \approx k_f$. Анизотропия становится существенной для процесса передачи энергии, когда $k_z/k_f \ll \mathrm{Ro}$; в этом случае время передачи увеличивается до $\mathrm{Ro}(k_f/k_z)/\Sigma$. Мы показываем, что для неоднородных по вертикали мод трение о дно не играет роли в процессе передачи энергии крупномасштабному вихревому течению.

В Пункте 3.5 изучается динамика крупномасштабных аксиально-симметричных возбуждений на фоне среднего вихревого течения в предположении, что сила $\boldsymbol{f}$ производит мелко-масштабное геострофическое течение, которое однородно по вертикали, а не инерционные волны [A13]. В геофизике и физике плазмы называются также зональными. Известно [21], что такие турбулентные пульсации передают энергию среднему течению за гораздо бóльшее время $\sim 1/\nu k_f^2$ по сравнению со временем поглощения инерционных волн. Нами предполагается, что выполнен ряд сильных неравенств: $\Sigma_0 \gg \epsilon^{1/3} k_f^{2/3} \gg \nu k_f^2 \gg \alpha$, которые означают, что сила сдвига Σ_0 постоянной части среднего течения является самым большим параметром, что априорное число Рейнольдса Re_f велико, и что время поглощения $1/\nu k_f^2$ мало по сравнению со временем затухания $1/\alpha$. Мы показываем, что если теоретически максимально возможный радиус вихря $R_u \sim \alpha^{-1/2}\epsilon_0^{1/6}k_f^{-2/3}$ [21] превышает масштаб $R_{\nu/\alpha}$, $R_u \gg R_{\nu/\alpha}$, то аксиально-симметричные возмущения конденсата в области $R_{\nu/\alpha} \ll r_\perp \ll R_u$ являются волнами с линейным законом дисперсии и распространяются со скоростью $\mathrm{v}_g \sim \sqrt{\alpha\nu k_f^2}\, r_\perp$. Частота таких ω ограничивается сверху условием $\omega/\nu k_f^2 \ll r_\perp/R_{\nu/\alpha}$. Длина распространения волны велика по сравнению с её длиной как $\widetilde{\omega}/\ln\widetilde{\omega}$. Если число Рейнольдса Re_f достаточно велико, $\ln \mathrm{Re}_f \gtrsim 10$, то в вихре вблизи его границы радиальные волн становятся неустойчивыми, разрушая вихрь. В результате максимально возможный радиус вихря R_u^* оказывается меньше R_u, $R_u^* \sim R_u(\ln \mathrm{Re}_f)^{3/8}/\mathrm{Re}_f^{1/8}$.

Наконец, полученные результаты суммируются и анализируются в Пункте 3.6 “Выводы”.

В <u>**четвертой главе**</u> развита теория, устанавливающая связь между корреляционными функциями скаляра и размешивающего его гладкого в пространстве и хаотического во времени поля скорости, в том числе, имеющего сильную постоянную сдвиговую компоненту. Обзор литературы произведён в Пункте 4.1 “Введение”.

Описание математической модели перемешивания в гладком случайном поле скорости дано в Пункте 4.2. Общим уравнением, описывающим динамику скаляра ϑ, переносимого случайным потоком $\boldsymbol{v}$, подверженного диффузии с коэффициентом κ, и возбуждаемого внешним источником (накачкой) f, является

$$\partial_t\vartheta + (\boldsymbol{v}\nabla)\vartheta = \kappa\Delta\vartheta + f. \tag{17}$$

Это уравнение является скалярной версией уравнения (11) на амплитуду инерционной волны в крупномасштабном поле скорости. Коэффициент диффузии κ предполагается относительно малым. Мы предполагаем скаляр пассивным, то есть не производящим обратного влияния на поле скорости.

Мы рассматриваем предел, в котором поле скорости $\boldsymbol{v}$ достаточно считать гладким, так что оно может быть разложено в ряд Тейлора с радиусом сходимости, превышающим все масштабы, характеризующие распределение скаляра. Чтобы проследить за процессом перемешивания, перейдем в систему отсчёта, движущуюся вместе с некоторой лагранжевой частицей. В ней скорость может быть приближена линейной зависимостью

$$v_i = (\Sigma_{ik} + \sigma_{ik})r_k, \tag{18}$$

где Σ_{ik} и $\sigma_{ik}(t)$ — постоянная и флуктуирующая во времени части градиента скорости, так что среднее по времени $\langle\sigma_{ik}\rangle_\sigma = 0$. Условие несжимаемости приводит к $\mathrm{tr}\,\hat{\Sigma} = \mathrm{tr}\,\hat{\sigma} = 0$. Уравнение (17) принимает вид

$$\partial_t\vartheta + \big(\Sigma_{ik} + \sigma_{ik}\big)r_k\partial_i\vartheta = \kappa\Delta\vartheta + f. \tag{19}$$

В отличие от уравнения (12) на поле волны, распространяющейся в постоянном сдвиговом течении, в уравнении (19) у градиента поля скорости есть, помимо постоянной, ещё и переменная во времени часть. В случае крупномасштабного вихря переменная часть градиента вызвана крупномасштабными флуктуациями течения, которые появляются, в частности, вследствие того, что центр вихря перемещается относительно границ течения. Наличие переменной составляющей $\sigma_{ik}(t)$ градиента скорости значительно обогащает модель, качественно изменяя процесс перемешивания.

Насчёт случайной силы f мы предполагаем, что она производит статистически изотропные кляксы скаляра с характерным размером l. Возможно две постановки задачи. Первую постановку мы называем “распадной задачей”, когда задано начальное распределение скаляра, а затем происходит его процесс перемешивания при отсутствии внешней силы. В этом случае статистика распределения скаляра зависит от времени, прошедшего с момента начала процесса перемешивания. Начальное распределение имеет нулевое среднее и полностью характеризуются парной корреляционной функцией, поскольку мы условно считаем, что в каждой точке перекрывается большое число случайно расположенных в пространстве клякс одинакового размера l, так что одноточечная статистика скаляра по центральной предельной теореме определяется нормальным распределением. Во второй постановке, которую можно назвать “задачей с непрерывной накачкой”, предполагается непрерывное действие случайной во времени и пространстве силы f. В этом случае статистика распределения скаляра не зависит от времени. Мы предполагаем, что одноточечная статистика силы также характеризуется нормальным распределением, так что она полностью определяется парной корреляционной функцией силы. Такая статистика достигается, если воздействие силы может быть описано как вброс клякс размера l со случайным положением в пространстве, причём за время обратной ляпуновской экспоненты $1/\lambda$ количество накопленных клякс, перекрывающихся в одной точке, велико.

Если диффузией в (19) можно пренебречь, то перемешивание сводится к переносу течением. В гладком поле скорости результат к моменту t начавшегося в момент $t' < t$ процесса переноса полностью определяется аффинным преобразованием $\hat{W}(t,t')$, которое задаёт деформацию и поворот элемента жидкости. Величина деформации определяется числами $\varrho_1 \geq \ldots \geq \varrho_d$ (d есть размерность пространства) — половинами логарифмов главных значений матрицы $\hat{W}\hat{W}^T$. Это случайные величины, средние по времени скорости роста которых суть экспоненты Ляпунова, $\partial_t \langle \varrho_i \rangle = \lambda_i$ (главная или просто экспонента Ляпунова $\lambda \equiv \lambda_1$, также $\varrho \equiv \varrho_1$). Поскольку жидкость несжимаема, то $\varrho_1 + \ldots + \varrho_d = 0$. Это означает, что, тогда как по 1-му направлению элемент жидкости растягивается, то он с необходимостью сжимается по крайней мере по последнему d-му направлению. Свойства часто используемой модели коротко-коррелированного во времени и статистически изотропного градиента поля скорости приведены в Приложении Б.

Малая, но конечная диффузия приводит к тому, что клякса не плотностью повторяет деформацию элемента жидкости. Для распадной задачи корреляционная функция скаляра может быть параметризована матрицей моментов распределения скаляра

$$I_{il}(t)=\frac{\int \mathcal{F}(t,\boldsymbol{r})\,r_i r_l\,\mathrm{d}^d r}{l^2\int \mathcal{F}(t,\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}^d r},\qquad \frac{\mathrm{d}\hat{I}}{\mathrm{d}t}=\big(\hat{\Sigma}+\hat{\sigma}\big)\hat{I}+\hat{I}\big(\hat{\Sigma}^{T}+\hat{\sigma}^{T}\big)+\frac{2\lambda}{\mathrm{Pe}}\hat{1},\tag{20}$$

с начальным условием $\hat{I}(t=0)=\hat{1}$, где число Пекле $\mathrm{Pe}=\lambda l^2/2\kappa$. В (20)$\mathcal{F}(t,\boldsymbol{r})$ есть частично усреднённая функция скаляра,

$$\mathcal{F}(t,\boldsymbol{r})=\langle\vartheta(t,0)\,\vartheta(t,\boldsymbol{r})\rangle_f,\tag{21}$$

являющаяся результатом усреднения только по статистике начального распределения скаляра. Динамика по направлениям растяжения у матрицы $\hat{I}$ и элемента жидкости совпадают. По направлениям сжатия сокращение размера кляксы останавливается на диффузионном масштабе (масштабе Бэтчелора) $r_\kappa=\sqrt{2\kappa/\lambda}$. Мы предполагаем великость числа Пекле, $\mathrm{Pe}\gg 1$, то есть начальный размер кляксы является большим по сравнению с диффузионным масштабом, $l\gg r_\kappa$. Поскольку же удаление друг от друга лагранжевых траекторий происходит в среднем по экспоненциальному закону, то для успешного развития асимптотическое теории перемешивания мы требуем выполнение даже более сильного условия, $\ln\mathrm{Pe}\gg 1$.

Связь свойств парной корреляционной функции со статистикой градиента поля скорости для распадной задачи установлена в Пункте 4.3. Уравнение на частично усреднённую парную корреляционную функцию

$$\partial_t\mathcal{F}+\big(\Sigma_{ik}+\sigma_{ik}\big)r_k\partial_i\mathcal{F}=2\kappa\Delta\mathcal{F}\tag{22}$$

совпадает с уравнением на перенос скаляра (19) в пределе нулевой диффузии. Путём последовательных рассуждений это приводит нас к заключению, что имеется связь между совместной функций распределения $\mathcal{P}(t,\varrho,\mathbf{n})$ (единичный вектор $\mathbf{n}$ есть направление главного растяжения) и парной корреляционной функцией скаляра $F(t,\boldsymbol{r})=\langle\mathcal{F}(t,\boldsymbol{r})\rangle_\sigma$ (единичный вектор $\mathbf{n}=\boldsymbol{r}/r$):

$$\mathcal{P}(t,\varrho,\mathbf{n})=\big(r/l\big)^d F(t,\boldsymbol{r}).\tag{23}$$

В модели изотропной статистики градиента скорости, когда, в частности, среднее $\Sigma_{ik}=0$, равенство (23) упрощается до $\mathcal{P}(t,\varrho)=\big(r/l\big)^d F(t,r)$. Важно отметить, что коэффициент r^d в (23) может быть установлен как якобиан перехода от переменных $\{\varrho,\ \mathbf{n}\}$ к переменным $\boldsymbol{r}$, поскольку полная вероятность $\int\mathrm{d}\varrho\int\mathrm{d}^{d-1}n\,\mathcal{P}=\mathrm{const}$ и интеграл Коррзина $\int\mathrm{d}^d r\,F=\mathrm{const}$ сохраняются во времени и суть одно и то же. Связь между $\mathcal{P}$ и F нарушается на малых расстояниях, когда $r\lesssim r_\kappa$.

Парная корреляционная функция скаляра F не улавливает слоистости его пространственного распределения. Эту функцию выполняет корреляционная функция скаляра четвёртого порядка $F_4(t,\boldsymbol{R}_1,\boldsymbol{R}_2, \boldsymbol{R}_3, \boldsymbol{R}_4)$. В гладком поле скорости F_4 распадается на 3 вклада типа $\langle\mathcal{F}(t,\boldsymbol{r}_{21})\,\mathcal{F}(t,\boldsymbol{r}_{43})\rangle_\sigma$, где $\boldsymbol{r}_{\mu\nu} = \boldsymbol{R}_\mu - \boldsymbol{R}_\nu$ [64]. Функция F_4 испытывает особенность, когда вектора $\boldsymbol{r}_{21}$, $\boldsymbol{r}_{43}$ становятся почти параллельными, поскольку в этом случае при усреднении по статистике скорости множители $\mathcal{F}(t,\boldsymbol{r}_{21})$ и $\mathcal{F}(t,\boldsymbol{r}_{43})$ одновременно достигают своих максимумов, что соответствует одновременному уложению обоих векторов (их начал и концов) $\boldsymbol{r}_{21}$, $\boldsymbol{r}_{43}$ в слой с однородным значением скаляра. Процедура, аналогичная той, которая привела нас к равенству (23), для F_4 может быть проделана только в трёхмерном случае. В Пункте 4.4 мы проводим вычисления при упрощающем предположении о том, что каждый вклад зависит только от $\hat{R} = \boldsymbol{r}_{21}\boldsymbol{r}_{21}^T + \boldsymbol{r}_{43}\boldsymbol{r}_{43}^T$. Равносильным требованием является гауссовость пространственной зависимости частично усреднённой корреляционной функции, $\mathcal{F}(t,\boldsymbol{r}) \propto \exp(-\boldsymbol{r}^T\hat{I}^{-1}\boldsymbol{r}/2)$. Это является требованием к начальному распределению скаляра как к инструменту измерения статистики поля скорости. Для статистически изотропного течения мы установили, что

$$P(t,\varrho,\varrho_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{l}\right)^4\left(\frac{r_\perp}{l}\right)^2 F_4\,(t,r,r_\perp), \qquad F_4\,(t,r,r_\perp) = \big\langle\mathcal{F}(t,\boldsymbol{r})\,\mathcal{F}(t,\boldsymbol{r}_\perp)\big\rangle_\sigma\,. \quad (24)$$

в области $r_\perp \ll r$, где r^2 и $r_\perp^2$ суть ненулевые собственные значения матрицы $\hat{R}$. В (24) под $F_4(t,r,r_\perp)$ следует понимать один из трёх вкладов. Угловая особенность сглаживается на диффузионном масштабе, когда $r_\perp \lesssim r_\kappa$.

Двумерный случай оказывается в определённом смысле слишком низкоразмерным для 4-х точечной корреляционной функции. В частности, имеется ограничение $\varrho_2 = -\varrho$ вследствие несжимаемости. Поэтому структура вклада F_4 оказывается отличной от (24), зависящей от диффузии, и потому она менее универсальна. Мы вычисляем F_4 в модели коротко-коррелированного по времени градиента скорости. Если площадь, натянутая на вектора $\boldsymbol{r}_{21}$, $\boldsymbol{r}_{43}$, не возросла, так что $rr_\perp \ll l^2$, то корреляционная функция 4-го порядка совпадает с парной корреляционной функцией, $F_4(t,r,r_\perp) \sim F(t,r)$ (мы положили, что $F(0,0) \sim 1$). Этот ответ верен до $r \ll l^2/\kappa$, в пределе больших расстояний и почти коллинеарной геометрии $r \gg l^2/r_\kappa$, $r_\perp \lesssim r_\kappa$ амплитуда F_4 дополнительно сокращается, $F_4(t,r,r_\perp) \sim (l^2/rr_\kappa)F(t,r)$ вследствие того, что меньший размер клякс достигает диффузионного масштаба. Вне этих областей, когда $1 \lesssim \ln(r_\perp r/l^2) \ll \ln \mathrm{Pe}$ при $r \ll l^2/r_\kappa$ и $1 \lesssim \ln(r_\perp/r_\kappa) \ll \ln \mathrm{Pe}$ при $r \gg l^2/r_\kappa$, корреляционная функция имеет вид

$$F_4(t,r,r_\perp) \sim \frac{l^2}{r_\kappa\, r}\exp\left(-\frac{\lambda t}{2}\left(1+\frac{\ln(r/l)}{\lambda t}\right)^2\right)\cdot\left(\frac{r_\kappa}{r_\perp}\right)^{2(\ln(r/l)+\lambda t)-1}. \qquad (25)$$

Эти выражения для F_4 получены нами двумя способами. Первый способ предполагает поиск оптимальной флуктуации — такой реализации процесса $\hat{\sigma}$, которая с учётом её реализации обеспечивает наибольший вклад в корреляционную функцию. При этом мы используем, что плотность распределения вероятности $\mathcal{P}(t,\varrho)$ имеет автомодельный вид, выражаясь через энтропийную функцию S, $\mathcal{P}(t,\varrho) \sim \exp(-\lambda t\, S(\varrho/\lambda t))$ [42]. Второй способ основан на прямом решении уравнения Фоккера-Планка на корреляционную функцию. Получение уравнений на корреляционные функции скаляра в модели коротко-коррелированного во времени градиента поля скорости вынесено в Приложение В. Выражение (25) непрерывно переходит в ответ для почти коллинеарной геометрии при $r \gg l^2/r_\kappa$. Однако, если принять $r \ll l^2/r_\kappa$ и устремить $r_\perp \to l^2/r$, (25) в $F(t,r)$ не перейдёт, оставаясь значительно меньше этого значения. Таким образом, угловая зависимость при таких r сильно зависит от начальных условий.

Статистические свойства перемешивания в случайном течении с сильной сдвиговой компонентой $\Sigma_{xy} \equiv \Sigma$ изучены в Пункте 4.5. Известно, что в сдвиговом течении со слабыми гладкими флуктуациями лагранжевы траектории испытывают периодические провороты, а статистика распределения по углам сильно анизотропна, так что бóльшую часть времени вектор между двумя близкими лагранжевыми траекториями составляет малый угол $\sim \psi_* = (D/\Sigma)^{1/3}$ с направлением линий тока сдвигового течения, где D есть характерная амплитуда случайной компоненты σ_{yx}; слабость флуктуаций означает $D/\Sigma \ll 1$. Для того, чтобы диффузия могла считаться малой, требуется неравенство $Dl^2/\kappa \gg 1$ [65]. Мы показываем, что перемасштабированием координаты $\widetilde{x} = \psi_* x$ картина динамики лагранжевых траекторий хотя и не становится статистически изотропной, но качественно приближается к этому пределу. В частности, алгоритм расчёта парной корреляционной функции почти совпадает с тем, как она вычислялась для статистически изотропного случая. Это качественное соответствие позволяет нам рассчитывать, что результаты, полученные нами выше для статистически изотропного случая, качественно применимы и здесь. В рамках исследования одноточечной статистики скаляра в распадной задаче мы вычисляем энтропийную функцию $S(\varrho/\lambda t)$ для модели коротко-коррелированных во времени флуктуаций скорости. Эта модель представляется оправданной, поскольку характерное время корреляции поля скорости оценивается как $1/\Sigma$, тогда как экспонента Ляпунова $\lambda \sim (D\Sigma^2)^{1/3} \ll \Sigma$. Усреднённые моменты, полученные методом поиска оптимальной флуктуации, оцениваются как

$$\langle|\vartheta|^\alpha\rangle \sim \begin{cases} 1, & \lambda t < a_\kappa, \\ \exp\big(-\lambda t\, S(-a_\kappa/\lambda t)\big), & a_\kappa < \lambda t < a_\kappa/\xi_\alpha, \\ \exp\big(\alpha a_\kappa/2 - q_\alpha \lambda t\big), & a_\kappa/\xi_\alpha < \lambda t, \end{cases} \tag{26}$$

где преобразование Лежандра функции энтропии $q_\alpha = \alpha\xi_\alpha/2 + S(\xi_\alpha)$ по ξ_α определяется через уравнение $\partial_\xi S(\xi) = -\alpha/2$, а $2a_\kappa = \ln(Dl^2/\kappa)$. При этом должно быть $\xi_\alpha > 0$, для чего α необходимо оставаться ниже некоторого порога, $\alpha < \alpha_{cr}$. Для вычисленной нами функции S порог $\alpha_{cr} = 2$, это значение совпадает со значением α_{cr} для статистически изотропного коротко-коррелированного во времени процесса $\hat{\sigma}$ [43]. Если α превышает порог α_{cr}, то оптимальная флуктуация на временах $\lambda t > a_\kappa$ соответствует динамике, в которой диффузия не играет роли, поскольку оптимальное $\varrho^* = a_\kappa$, что соответствует второй асимптотике в (26).

Мы также исследовали одноточечную статистику скаляра в условиях непрерывной накачки. Тело функции распределения $PDF(\vartheta)$ соответствует нормальному распределению с $\langle\vartheta^2\rangle = a_\kappa$. При больших отклонениях, $\vartheta \sim a_\kappa$, происходит кроссовер к асимптотике $PDF(\vartheta) \sim \exp(-\sqrt{2S(0)}\,|\vartheta| - S'(0)\,a_\kappa)$. Как мы показали, в модели коротко-коррелированных по времени флуктуаций поля скорости значение производной энтропийной функции $S'(0) = -1$.

В Пункте 4.6 “Заключение” производится анализ совокупности полученных результатов.

В **заключении** подведены основные итоги исследования, сформулированы рекомендации по использованию полученных результатов и обозначены перспективы дальнейшей разработки темы исследования. Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Рассмотрена генерация приповерхностного вихревого течения поверхностными волнами в слабо-вязкой жидкости в присутствии жидкой эластичной поверхностной плёнки. Получено аналитическое выражение для приповерхностного вихревого течения, вызванного волновым движением. Передача импульса от волн вихревому течению происходит в тонком слое, включающем в себя гребни и впадины волны вместе с вязким подслоем. Механизм возбуждения вихревого течения может быть интерпретирован как результат действия эффективной поверхностной касательной силы — виртуального волнового напряжения. Напряжение пропорционально второй степени амплитуды волны, так что волновой вектор возбуждаемого вихревого течения равен разности волновых векторов двух волн. Пока вихревое течение остаётся слабым и потому ламинарным, процесс его распространения вглубь является диффузионным и происходит за счёт вязкости. Присутствие плёнки увеличивает затухание волны и, тем самым, приводит к увеличению амплитуды виртуального волнового напряжения.
2. Детально проанализирована зависимость виртуального волнового напряжение от амплитуды упругого модуля сжатия плёнки для монохроматического по времени волнового движения. Установлено, что присутствие несжимаемой плёнки на поверхности приводит к увеличению амплитуды вынужденного вихревого эйлерова течения в $2^{5/2}/\gamma$ раз ($\gamma = \sqrt{\nu k^2/\omega}$ — малый параметр теории, ω, k — частота и волновое число, ν — вязкость) для неограниченного в горизонтальном направлении водоёма, тогда как добротность волны сокращается в $2^{3/2}/\gamma$ по сравнению с пределом чистой поверхности. По мере снижения модуля упругого растяжения плёнки амплитуда вынужденного

вихревого течения ведёт себя немонотонно, достигая сперва максимума, а затем убывая до своего значения для чистой поверхности. Значения амплитуды в максимуме в $\sqrt{2}$ раз больше его значения в пределе несжимаемой плёнки. В этой области параметров амплитуда скорости дрейфа Стокса пренебрежимо мала по сравнению с амплитудой установившейся во времени эйлеровой части массового транспорта. Показано, что пространственная структура в горизонтальной плоскости массового транспорта остаётся неизменной при изменении упругости плёнки, изменяется только его амплитуда и вертикальная зависимость.

3. Рассмотрен интересный с точки зрения экспериментальной реализации случай, когда волновое движение представляет собой две ортогональные бегущие или стоячие волны. Установлена аналитическая зависимость амплитуды вихревого течения от горизонтальной и вертикальной координат, величины модуля упругого сжатия плёнки и времени. То же самое сделано для случая двух распространяющихся под малым углом друг к другу волн. Поскольку в последнем варианте масштаб вихревого течения значительно превышает длину волн, исследован кроме того предел, когда жидкость является глубокой для волн, но должна быть учтена её конечная глубина при описании динамики вихревого течения.
4. Разработан комбинированный метод опосредованного измерения модуля упругого сжатия поверхностной жидкой плёнки, который является основным параметром при описании возбуждения вихревого течения поверхностными волнами. Одновременное измерение линейной скорости затухания волн с учётом трения о стенки бассейна, соотношения амплитуд вертикальной и горизонтальной скоростей в волне и амплитуды возбуждаемого вихревого течения позволили с достаточной точностью определить параметр теории из совокупности экспериментальных данных, тем самым подтвердив применимость теории для описания экспериментальных данных.
5. Произведено исследование взаимодействия инерционной волны с крупно-масштабным геострофическим течением. Динамика плоской инерционной волны была исследована в рамках модели, в которой крупномасштабное геострофическое аксиально симметричное течение локально в пространстве представляется однородным в пространстве и времени сдвиговым течением силы Σ. Установлен механизм, по которому инерционные волны передают свою энергию геострофическому вихревому течению. В пределе малого числа Россби динамика волн с противоположными поляризациями оказывается независимой, для каждой поляризации сохраняется волновое действие. Поэтому запасённая в волне энергия уменьшается с ростом абсолютного значения волнового вектора, который происходит вследствие воздействия на волну сдвигового течения. Благодаря этому механизму инерционные

волны формируют касательное напряжение Рейнольдса, которое действует как отрицательная турбулентная диффузия, поддерживающая дифференциальное вращение в вихре. Найден радиальный профиль средней скорости в вихре в отсутствии трения о дно — линейно-логарифмическая зависимость. Показано, что часть энергии, которая выделяется в тепло благодаря действию вязкости в секторе инерционных волн, относительно мала как $\gamma^{1/3}$ ($\gamma = \nu k_f^2/\Sigma \ll 1$ — малый параметр теории, где k_f есть характерное волновое число).

6. Исследовано влияние конечности чисел Россби и Рейнольдса на структуру циклонов и антициклонов. Численно рассчитано значение радиально-азимутального напряжения Рейнольдса в циклонах и антициклонах. Установлены радиальные профили циклонов и анти-циклонов. Локальная скорость вращения жидкости в циклоне возрастает при приближении к его оси, тогда как в антициклоне она падает. Иными словами, абсолютное значение числа Россби при приближении к оси падает в циклоне и увеличивается в антициклоне. Вследствие этого у циклонов максимум средней азимутальной скорости сдвигается ближе к оси вихря, тогда как антициклонов — дальше от оси вихря по сравнению с пределом малого числа Россби, для которого имеет место линейно-логарифмический профиль. Поскольку для устойчивости вихревого течения требуется, чтобы абсолютное значения числа Россби не превышало определённый порог, то указанная особенность антициклонов приводит к ограничению их максимально возможного размера.
7. Мы исследовали роль границ, ортогональных оси вращения, в формировании радиального профиля когерентного вихря. Установлено, что выше масштаба, на котором сравнивается действие объёмной вязкости и эффективного трения о дно, доминирует трение о дно, которое изменяет линейно-логарифмический профиль на профиль с постоянным значением азимутальной скорости. Кроме того, мы установили, что трение о дно может снижать эффективность передачи энергии когерентному течению от турбулентных пульсаций только в случае, если эти пульсации являются мелко-масштабным геострофическим течением.
8. Мы исследовали задачу о распространении инерционной волны на фоне геострофического течения в пространственно-неоднородной постановке задачи: было предположено, что пакет сходящихся цилиндрических волн распространяется в аксиально-симметричном вихре. Была рассмотрена волна с фиксированными сохраняющимися волновыми числами, имеющая заданное волновое число на его периферии. Было установлено, что, если волна переносит момент количества движения, по знаку совпадающий со направлением вращения вихря, то по мере распространения пакета вглубь вихря волновой вектор пакета

приобретает всё бо́льшую радиальную компоненту, которая при достаточной интенсивности вихря обращается в бесконечность. В результате частота инерционной волны в системе отсчёта, связанной с элементом её содержащей жидкости, падает со временем. Регуляризация этого процесса происходит за счёт действия вязкости, что приводит к поглощению волны. Показано, что для того, чтобы инерционная волна могла быть поглощена геострофическим течением, и прозошла передача момента импульса и энергии волны геострофическому течению, требуется, чтобы характерная разность скоростей в разных областях вихря превосходила групповую скорость волны на его периферии. Этот качественный критерий был подтверждён экспериментальными данными. Если же волна переносит угловой момент противоположного знака, то происходит её отражение, так что передача момента импульса от волны геострофическому течению отсутствует. Указана аналогия между поглощением инерционной волны геострофическим течением и поглощением внутренней волны горизонтальным течением с вертикальным сдвигом в стратифицированной жидкости.

9. Рассмотрены малые по амплитуде аксиально-симметричные возбуждения в аксиально-симметричном когерентном вихре, называющиеся зональными течениями. Было предположено, что источником поддержания когерентного течения является геострофическое мелкомасштабное течение. В конденсате, насыщение которого достигнуто за счёт трения о дно, в высокочастотной области возбуждения представляют собой волны с линейным законом дисперсии, скорость оценивается как $\mathrm{v}_g \sim r_\perp\sqrt{\alpha\nu k_f^2}$, а длина пробега велика по сравнению с длиной волны ($r_\perp$ — расстояние до оси вихря, α — коэффициент трения о дно, $1/k_f$ — характерный масштаб турбулентных пульсаций). В вязком конденсате закон дисперсии совпадает с законом дисперсии волн в вязком нестационарном слое, так что волны являются нераспространяющимися.
10. Рассмотрена задача о перемешивании скалярного поля хаотическим потоком на масштабах меньше, чем корреляционная длина градиента поля скорости, так что локально поток достаточно приблизить линейным в пространстве профилем, в условиях слабой молекулярной диффузии. Поток предполагался случайным во времени с изотропной статистикой. Было показано, что пространственная зависимость парной корреляционной функции скаляра в распадной задаче на больших временах описывает распределение расстояния между двумя близкими лагранжевыми траекториями при их фиксированном расстоянии в начальный момент времени.
11. Для описанной в предыдущем пункте постановки задачи о перемешивании скаляра установлена связь между корреляционной функцией четвёртого порядка и статистическими свойствами потока. Показано,

что в трёх-мерном случае пространственная зависимость этой корреляционной функции описывает совместную функцию распределения двух степеней растяжения элементарного объёма жидкости. В частности, поведение корреляционной функции на угловых особенностях соответствует статистике второй степени растяжения при фиксированном значении главной степени растяжении. В двумерном случае в несжимаемом потоке есть только одна независимая степень растяжения элементарного объёма жидкости. Вследствие этого связь между корреляционного функцией четвёртого порядка оказывается менее универсальной. Нами установлена форма угловой зависимости в модели коротко-коррелированной во времени статистике потока. На расстояниях $r \ll l^2/r_\kappa$ (l — исходная корреляционная длина распределения скаляра в пространстве, r_κ — диффузионный масштаб) форма угловой особенности определяется начальными условиями распределения скаляра, но бо́льших расстояниях эта зависимость пропадает.

12. Рассмотрена задача о перемешивании скалярного поля в случайном гладком двумерном течении с сильной средней сдвиговой компонентой. Установлена статистика моментов пассивного скаляра для распадной задачи. Статистика выражена через преобразование Лежандра от функции Крамера, описывающей статистику деформации малого элемента жидкости на больших временах. Установлены свойства функции Крамера для модельной задачи с коротко-коррелированным по времени полем скорости. Для задачи с непрерывным возбуждением флуктуаций пассивного скаляра установлено, что хвост функции распределения, описывающий высокие моменты, является экспоненциальным, тогда как тело функции распределения близко́ к нормальному распределению. Нами было показано, что путём перемасштабирования одной из координатных осей задача с определёнными говорками качественно сводится к задаче о перемешивании в статистически изотропном хаотическом течении. Поэтому следует ожидать, что результаты, полученные нами для для корреляционных функций второго и четвёртого порядков, применимы при правильной их адаптации и для потока с сильной сдвиговой компонентой.

Публикации автора по теме диссертации

A1. *Parfenyev, V.* Effects of thin film and Stokes drift on the generation of vorticity by surface waves [Text] / V. Parfenyev, S. Vergeles, V. Lebedev // Physical Review E. — 2016. — Vol. 94, no. 5. — P. 052801.

A2. *Parfenyev, V. M.* Influence of a thin compressible insoluble liquid film on the eddy currents generated by interacting surface waves [Text] / V. M. Parfenyev, S. S. Vergeles // Physical Review Fluids. — 2018. — Vol. 3, no. 6. — P. 064702.

A3. Formation and decay of eddy currents generated by crossed surface waves [Text] / V. M. Parfenyev [et al.] // Physical Review Fluids. — 2019. — Vol. 4, no. 11. — P. 114701.

A4. *Parfenyev*, *V. M.* Large-scale vertical vorticity generated by two crossing surface waves [Text] / V. M. Parfenyev, S. S. Vergeles // Physical Review Fluids. — 2020. — Vol. 5, no. 9. — P. 094702.

A5. *Kolokolov*, *I. V.* Structure of coherent columnar vortices in three-dimensional rotating turbulent flow [Text] / I. V. Kolokolov, L. L. Ogorodnikov, S. S. Vergeles // Physical Review Fluids. — 2020. — Vol. 5, no. 3. — P. 034604.

A6. Two Dynamical Regimes of Coherent Columnar Vortices in a Rotating Fluid [Text] / D. D. Tumachev [et al.] // JETP Letters. — 2023. — Vol. 118, no. 6. — P. 426—432.

A7. Velocity profiles of cyclones and anticyclones in a rotating turbulent flow [Text] / V. M. Parfenyev [et al.] // Physics of Fluids. — 2021. — Vol. 33, no. 6. — P. 065117.

A8. *Parfenyev*, *V. M.* Influence of Ekman friction on the velocity profile of a coherent vortex in a three-dimensional rotating turbulent flow [Text] / V. M. Parfenyev, S. S. Vergeles // Physics of Fluids. — 2021. — Vol. 33, no. 11. — P. 115128.

A9. *Vergeles*, *S. S.* Spatial dependence of correlation functions in the decay problem for a passive scalar in a large-scale velocity field [Text] / S. S. Vergeles // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2006. — Vol. 102, no. 4. — P. 685—701.

A10. *Вергелес*, *С. С.* Корреляционные функции пассивного скаляра как мера статистики градиента скорости [Текст] / С. С. Вергелес // Письма в ЖЭТФ. — 2024. — Т. 120, вып. 4. — С. 288—295.

A11. *Ivchenko*, *N. A.* Statistics of a Passive Scalar in a 2D Shear Flow with Fluctuations [Text] / N. A. Ivchenko, S. S. Vergeles // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2023. — Vol. 136, no. 5. — P. 644—652.

A12. *Ogorodnikov*, *L. L.* Structure function of velocity in a geostrophic vortex under strong rotation [Text] / L. L. Ogorodnikov, S. S. Vergeles // Physics of Fluids. — 2022. — Vol. 34, no. 12. — P. 125111.

A13. *Ivchenko*, *N. A.* Waves in a coherent two-dimensional flow [Text] / N. A. Ivchenko, S. S. Vergeles // Physics of Fluids. — 2021. — Vol. 33, no. 10. — P. 105102.

Список литературы

1. *Prandtl*, *L.* Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz [Text] / L. Prandtl // ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. — 1925. — Vol. 5, no. 2. — P. 136—139.
2. *Ландау*, *Л.* Теоретическая физика. Том VI. Гидродинамика [Текст] / Л. Ландау, Е. Лифшиц. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 736 с.
3. *Luchini*, *P.* Universality of the turbulent velocity profile [Text] / P. Luchini // Physical Review Letters. — 2017. — Vol. 118, no. 22. — P. 224501.
4. *Lord Rayleigh*. On the circulation of air observed in Kundt's tubes, and on some allied acoustical problems [Text] / Lord Rayleigh // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. — 1884. — Vol. 175. — P. 1—21.
5. *Westervelt*, *P. J.* The theory of steady rotational flow generated by a sound field [Text] / P. J. Westervelt // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1953. — Vol. 25, no. 1. — P. 60—67.
6. *Boluriaan*, *S.* Acoustic streaming: from Rayleigh to today [Text] / S. Boluriaan, P. J. Morris // International Journal of aeroacoustics. — 2003. — Vol. 2, no. 3. — P. 255—292.
7. *Longuet-Higgins*, *M. S.* Mass transport in water waves [Text] / M. S. Longuet-Higgins // Philosophical Transactions of the Royal Society A. — 1953. — Vol. 245, no. 903. — P. 535—581.
8. *Ламб*, *Г.* Гидродинамика [Текст] / Г. Ламб. — Москва, Ленинград : ОГИЗ Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1947. — 929 с.
9. *Longuet-Higgins*, *M. S.* Radiation stress and mass transport in gravity waves, with application to 'surf beats' [Text] / M. S. Longuet-Higgins, R. W. Stewart // Journal of Fluid Mechanics. — 1962. — Vol. 13, no. 4. — P. 481—504.
10. *Craik*, *A. D. D.* A rational model for Langmuir circulations [Text] / A. D. D. Craik, S. Leibovich // Journal of Fluid Mechanics. — 1976. — Vol. 73, no. 3. — P. 401—426.
11. *Leibovich*, *S.* On the evolution of the system of wind drift currents and Langmuir circulations in the ocean. Part 1. Theory and averaged current [Text] / S. Leibovich // Journal of Fluid Mechanics. — 1977. — Vol. 79, no. 4. — P. 715—743.
12. *Vergeles*, *S. S.* Role of wave scattering in instability-induced Langmuir circulation [Text] / S. S. Vergeles, I. A. Vointsev // Physics of Fluids. — 2024. — Vol. 36, no. 3. — P. 034119.

13. *Henderson*, *D. M.* Effects of surfactants on Faraday-wave dynamics [Text] / D. M. Henderson // Journal of Fluid Mechanics. — 1998. — Vol. 365. — P. 89—107.

14. *Левич*, *В. Г.* Физико-химическая гидродинамика [Текст] / В. Г. Левич. — Издание 3-е, исправленное и дополненное. — М.-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2016. — 708 с.

15. *Miles*, *J. W.* Surface-wave damping in closed basins [Text] / J. W. Miles // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. — 1967. — Vol. 297, no. 1451. — P. 459—475.

16. *Henderson*, *D. M.* The role of dissipation in the evolution of ocean swell [Text] / D. M. Henderson, H. Segur // Journal of Geophysical Research: Oceans. — 2013. — Vol. 118, no. 10. — P. 5074—5091.

17. *Kraichnan*, *R. H.* Inertial ranges in two-dimensional turbulence [Text] / R. H. Kraichnan // The Physics of Fluids. — 1967. — Vol. 10, no. 7. — P. 1417—1423.

18. *Boffetta*, *G.* Two-dimensional turbulence [Text] / G. Boffetta, R. E. Ecke // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2012. — Vol. 44. — P. 427—451.

19. *Колоколов*, *И. В.* Двумерная турбулентность в ограниченной ячейке [Текст] / И. В. Колоколов, В. В. Лебедев // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. — 2024. — Т. 166, вып. 1. — С. 110—120.

20. *Старр*, *В. П.* Физика явлений с отрицательной вязкостью [Текст] / В. П. Старр ; под ред. А. Монин. — Москва : Мир, 1971. — 261 с.

21. *Kolokolov*, *I.* Structure of coherent vortices generated by the inverse cascade of two-dimensional turbulence in a finite box [Text] / I. Kolokolov, V. Lebedev // Physical Review E. — 2016. — Vol. 93, no. 3. — P. 033104.

22. *Sommeria*, *J.* Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box [Text] / J. Sommeria // Journal of Fluid Mechanics. — 1986. — Vol. 170. — P. 139—168.

23. *Xia*, *H.* Spectrally condensed turbulence in thin layers [Text] / H. Xia, M. Shats, G. Falkovich // Physics of Fluids. — 2009. — Vol. 21, no. 12. — P. 125101.

24. *Orlov*, *A.* Large-Scale Coherent Vortex Formation in Two-Dimensional Turbulence [Text] / A. Orlov, M. Brazhnikov, A. Levchenko // JETP Letters. — 2018. — Vol. 107, no. 3. — P. 157—162.

25. Dynamics of energy condensation in two-dimensional turbulence [Text] / M. Chertkov [et al.] // Physical Review Letters. — 2007. — Vol. 99, no. 8. — P. 084501.

26. Universal profile of the vortex condensate in two-dimensional turbulence [Text] / J. Laurie [et al.] // Physical Review Letters. — 2014. — Vol. 113, no. 25. — P. 254503.

27. *Tabeling, P.* Two-dimensional turbulence: a physicist approach [Text] / P. Tabeling // Physics reports. — 2002. — Vol. 362, no. 1. — P. 1—62.

28. *Clercx, H.* Two-dimensional Navier–Stokes turbulence in bounded domains [Text] / H. Clercx, G. van Heijst // Applied Mechanics Reviews. — 2009. — Vol. 62. — P. 020802.

29. *Proudman, J.* On the motion of solids in a liquid possessing vorticity [Text] / J. Proudman // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. — 1916. — Vol. 92, no. 642. — P. 408—424.

30. *Taylor, G. I.* Motion of solids in fluids when the flow is not irrotational [Text] / G. I. Taylor // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. — 1917. — Vol. 93, no. 648. — P. 99—113.

31. *Davidson, P. A.* Turbulence: an introduction for scientists and engineers [Text] / P. A. Davidson. — 2nd. — Oxford : Oxford University Press, 2015. — 646 p.

32. *Гринспен, Х.* Теория вращающихся жидкостей [Текст] / Х. Гринспен. — Ленинград : Гидрометеоиздат, 1975. — 304 с.

33. *McEwan, A.* Angular momentum diffusion and the initiation of cyclones [Text] / A. McEwan // Nature. — 1976. — Vol. 260, no. 5547. — P. 126—128.

34. *Godeferd, F. S.* Structure and dynamics of rotating turbulence: a review of recent experimental and numerical results [Text] / F. S. Godeferd, F. Moisy // Applied Mechanics Reviews. — 2015. — Vol. 67, no. 3. — P. 030802.

35. Coherent structures and extreme events in rotating multiphase turbulent flows [Text] / L. Biferale [et al.] // Physical Review X. — 2016. — Vol. 6, no. 4. — P. 041036.

36. Interplay between geostrophic vortices and inertial waves in precession-driven turbulence [Text] / F. Pizzi [et al.] // Physics of Fluids. — 2022. — Vol. 34, no. 12. — P. 125135.

37. *Филлипс, О.* Динамика верхнего слоя океана [Текст] / О. Филлипс. — Второе издание, исправленное и дополненное. — Ленинград : Гидрометеоиздат, 1980. — 319 с.

38. *Жмур, В.* Мезомасштабные вихри океана [Текст] / В. Жмур. — Москва : ГЕОС, 2011. — 290 с.

39. *Booker, J. R.* The critical layer for internal gravity waves in a shear flow [Text] / J. R. Booker, F. P. Bretherton // Journal of Fluid Mechanics. — 1967. — Vol. 27, no. 3. — P. 513—539.

40. The lifecycle of topographically-generated internal waves [Text] / R. Musgrave [et al.] // Ocean mixing. Drivers, Mechanisms and Impacts. / ed. by M. Meredith, A. N. Garabato. — Amsterdam : Elsevier, 2022. — Chap. 6. P. 117—144.

41. *Hunt*, *J. C.* Rapid distortion theory and the ‘problems’ of turbulence [Text] / J. C. Hunt, D. J. Carruthers // Journal of Fluid Mechanics. — 1990. — Vol. 212. — P. 497—532.
42. *Balkovsky*, *E.* Universal long-time properties of Lagrangian statistics in the Batchelor regime and their application to the passive scalar problem [Text] / E. Balkovsky, A. Fouxon // Physical Review E. — 1999. — Vol. 60, no. 4. — P. 4164.
43. *Son*, *D.* Turbulent decay of a passive scalar in the Batchelor limit: Exact results from a quantum-mechanical approach [Text] / D. Son // Physical Review E. — 1999. — Vol. 59, no. 4. — R3811.
44. *Falkovich*, *G.* Particles and fields in fluid turbulence [Text] / G. Falkovich, K. Gawędzki, M. Vergassola // Reviews of modern Physics. — 2001. — Vol. 73, no. 4. — P. 913.
45. *Salhi*, *A.* Advances in rapid distortion theory: From rotating shear flows to the baroclinic instability [Text] / A. Salhi, C. Cambon // Journal of Applied Mechanics. — 2006. — Vol. 73. — P. 449—460.
46. Small-scale turbulent dynamo [Text] / M. Chertkov [et al.] // Physical Review Letters. — 1999. — Vol. 83, no. 20. — P. 4065.
47. *Kogan*, *V.* Kinematic magnetic dynamo in a random flow with strong average shear [Text] / V. Kogan, I. Kolokolov, V. Lebedev // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2010. — Vol. 43, no. 18. — P. 182001.
48. *Nicolás*, *J. A.* Three-dimensional streaming flows driven by oscillatory boundary layers [Text] / J. A. Nicolás, J. M. Vega // Fluid Dynamics Research. — 2003. — Vol. 32, no. 4. — P. 119—139.
49. Nonlinear generation of vorticity by surface waves [Text] / S. V. Filatov [et al.] // Physical Review Letters. — 2016. — Vol. 116, no. 5. — P. 054501.
50. *Lucassen-Reynders*, *E. H.* Properties of capillary waves [Text] / E. H. Lucassen-Reynders, J. Lucassen // Advances in Colloid and Interface Science. — 1970. — Vol. 2, no. 4. — P. 347—395.
51. Scale-dependent cyclone-anticyclone asymmetry in a forced rotating turbulence experiment [Text] / B. Gallet [et al.] // Physics of Fluids. — 2014. — Vol. 26, no. 3. — P. 035108.
52. *Bartello*, *P.* Coherent structures in rotating three-dimensional turbulence [Text] / P. Bartello, O. Métais, M. Lesieur // Journal of Fluid Mechanics. — 1994. — Vol. 273. — P. 1—29.
53. *Fereday*, *D. R.* Scalar decay in two-dimensional chaotic advection and Batchelor-regime turbulence [Text] / D. R. Fereday, P. H. Haynes // Physics of Fluids. — 2004. — Vol. 16, no. 12. — P. 4359—4370.

54. *Sukhatme*, *J.* Decay of passive scalars under the action of single scale smooth velocity fields in bounded two-dimensional domains: From non-self-similar probability distribution functions to self-similar eigenmodes [Text] / J. Sukhatme, R. T. Pierrehumbert // Physical Review E. — 2002. — Vol. 66, no. 5. — P. 056302.

55. *Duplat*, *J.* A nonsequential turbulent mixing process [Text] / J. Duplat, C. Innocenti, E. Villermaux // Physics of Fluids. — 2010. — Vol. 22, no. 3. — P. 035104.

56. Shear effects on passive scalar spectra [Text] / A. Celani [et al.] // Journal of Fluid Mechanics. — 2005. — Vol. 523. — P. 99—108.

57. Generation of stripe-like vortex flow by noncollinear waves on the water surface [Text] / S. Filatov [et al.] // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2022. — Vol. 434. — P. 133218.

58. Coherent vortex in a spatially restricted two-dimensional turbulent flow in absence of bottom friction [Text] / A. Doludenko [et al.] // Physics of Fluids. — 2021. — Vol. 33, no. 1. — P. 011704.

59. Chaotic flow and efficient mixing in a microchannel with a polymer solution [Text] / T. Burghelea [et al.] // Physical Review E. — 2004. — Vol. 69, no. 6. — P. 066305.

60. *Steinberg*, *V.* Elastic Turbulence: An Experimental View on Inertialess Random Flow [Text] / V. Steinberg // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2021. — Vol. 53. — P. 27—58.

61. *Falkovich*, *G.* Turbulence appearance and nonappearance in thin fluid layers [Text] / G. Falkovich, N. Vladimirova // Physical Review Letters. — 2018. — Vol. 121, no. 16. — P. 164501.

62. *Longuet-Higgins*, *M. S.* A nonlinear mechanism for the generation of sea waves [Text] / M. S. Longuet-Higgins // Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences. — 1969. — Vol. 311, no. 1506. — P. 371—389.

63. *Stokes*, *G. G.* On the theory of oscillatory waves [Text] / G. G. Stokes // Trans. Cambridge Philos. Soc. — 1847. — Vol. 8. — P. 441—473.

64. Fourth-order correlation function of a randomly advected passive scalar [Text] / E. Balkovsky [et al.] // JETP Letters. — 1995. — Vol. 61. — P. 1049—1054.

65. *Turitsyn*, *K.* Polymer dynamics in chaotic flows with a strong shear component [Text] / K. Turitsyn // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2007. — Vol. 105, no. 3. — P. 655—664.