Учреждение Российской академии наук
Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН

на правах рукописи

Адлер Всеволод Эдуардович

Классификация дискретных интегрируемых уравнений

Специальность 01.01.03 – математическая физика

Автореферат диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Черноголовка 2010

Работа выполнена в Учреждении Российской академии наук Институте теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
Игорь Моисеевич Кричевер,
доктор физико-математических наук
Александр Васильевич Михайлов,
доктор физико-математических наук
Сергей Петрович Царёв

Ведущая организация: Учреждение Российской академии наук
Институт математики им. В.А. Стеклова РАН

Защита состоится 24 июня 2010 г. в 12 часов на заседании диссертационного совета Д 002.207.01 при Институте Теоретической Физики им. Л.Д. Ландау РАН, расположенном по адресу: 142432, Московская обл., г. Черноголовка, ул. Институтская, д. 2, Институт физики твёрдого тела РАН.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Теоретической Физики им. Л.Д. Ландау.

Автореферат разослан 21 мая 2010 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук П.Г. Гриневич

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Исследование дифференциально-разностных и дискретных нелинейных уравнений представляет значительный теоретический и прикладной интерес. В частности, одной из важных задач в этой области является выделение и классификация интегрируемых случаев. Для уравнений в частных производных имеется довольно много классификационных результатов; наиболее важные из них получены в рамках симметрийного подхода разработанного школой А.Б. Шабата, см. например [Sokolov-Shabat, Mikhailov-Shabat-Yamilov, Mikhailov-Shabat-Sokolov, Heredero-Sokolov-Svinolupov, Habibullin-Sokolov-Yamilov]. Для дифференциально-разностных уравнений, или цепочек, результатов существенно меньше (практически все они представлены в обзоре [Yamilov 2006]), а для дискретных уравнений их почти нет, поэтому развитие методов классификации является здесь актуальной задачей.

В основе симметрийного подхода лежит свойство *совместности*, или коммутативности потоков, образующих интегрируемую иерархию. При этом непрерывные потоки отвечают высшим симметриям, а дискретные преобразованиям Дарбу-Бэклунда, см. напр. [Levi, Шабат-Ямилов, 23]. Это означает, что преобразование Бэклунда можно рассматривать как самостоятельный объект, интерпретируя его как сдвиг по дискретной переменной в дифференциально-разностном уравнении. На следующем шаге, коммутативность преобразований Бэклунда (теорема Бьянки) приводит к уравнениям с двумя дискретными независимыми переменными. Наоборот, любое дискретное уравнение, обладающее высшими симметриями, можно интерпретировать как принцип суперпозиции для некоторого преобразования Бэклунда.

В целом, содержание диссертации можно охарактеризовать как развитие этой темы о связи дискретного и непрерывного. Некоторый уклон в дискретную сторону оправдывается тем, что во многих случаях дискретная часть иерархии представляется более фундаментальной и прозрачной. Особенно это проявляется в приложениях к геометрии, которые переживают за последние 10–15 лет настоящий ренессанс, именно благодаря переходу к дискретной части картины, см. напр. [Bobenko-Suris 2009]. Концептуально, условия совместности в дискретном случае проще чем в непрерывном. В то же время, с вычислительной точки зрения, они труднее поддаются анализу, что и объясняет отставание в классификации дискретных уравнений.

Характерным примером служит свойство *3D-совместности*, или совместности вокруг куба [Nijhoff-Walker, Bobenko-Suris 2002], относящееся

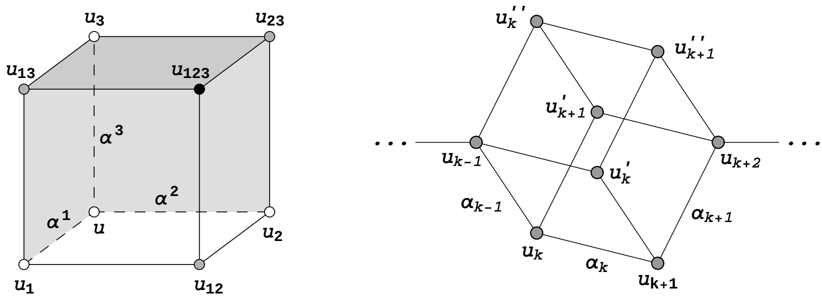

Рис. 1. 3D-совместность, или совместность вокруг куба. Тождество $(R_kR_{k+1})^3 = \mathrm{id}$

к *квад-уравнениям*, то есть уравнениям вида

$$u_{12} = f(u, u_1, u_2), \tag{1}$$

где индекс обозначает сдвиг по дискретной переменной на квадратной решётке. Это свойство означает, что имеются ещё два уравнения такого типа, заданные на ортогональных плоскостях кубической решётки,

$$u_{13} = g(u, u_1, u_3), \quad u_{23} = h(u, u_2, u_3),$$

такие, что значения u_{123}, вычисленные тремя возможными способами, тождественно совпадают, то есть, выполняются равенства

$$\begin{aligned} u_{123} &= h(u_1, f(u, u_1, u_2), g(u, u_1, u_3)) \\ &= g(u_2, f(u, u_1, u_2), h(u, u_2, u_3)) \\ &= f(u_3, g(u, u_1, u_3), h(u, u_2, u_3)), \end{aligned} \tag{2}$$

тождественно по начальным данным u, u_1, u_2, u_3. Комбинаторная структура этих тождеств поясняется рис. 1 слева, где штриховка граней показывает один из трёх возможных способов осуществления отображений. Разумеется, данное определение не взято с потолка. Уравнения вида (1) возникают из принципа нелинейной суперпозиции преобразований Бэклунда (каждая грань куба интерпретируется как диаграмма Бьянки) и тождество (2) отражает их важное групповое свойство.

Альтернативно, это свойство описывается тождествами [1, 3, 4, 28]

$$R_k^2 = (R_kR_{k+1})^3 = (R_kR_j)^2 = \mathrm{id}, \quad j \neq k \pm 1, \tag{3}$$

определяющими нелинейное представление группы перестановок преобразованиями вида

$$R_k: \qquad \begin{array}{l} \alpha'_{k-1}=\alpha_k, \quad \alpha'_k=\alpha_{k-1}, \quad \alpha'_n=\alpha_n, \quad n\ne k-1,k,\\ u'_k=F(u_{k+1},u_k,u_{k-1},\alpha_k,\alpha_{k-1}), \quad u'_n=u_n, \quad n\ne k, \end{array}$$

действующими на последовательности переменных u_n и параметров α_n, $n\in\mathbb{Z}$ (рис. 1 справа). Тождества (3) означают, что преобразования, оставляющие на месте α_n, действуют тривиально и на u_n; это доказывается из единственности разложения преобразования Дарбу на элементарные.

Оба определения 3D-совместности работают и в случае, когда поля ассоциированы с рёбрами решётки, что отвечает отображениям Янга-Бакстера [Бухштабер, Veselov].

Свойство 3D-совместности является весьма специальным и можно гарантировать интегрируемость уравнений, для которых оно выполняется. Однако, использовать это свойство для классификации не так-то просто, поскольку условия совместности (2) являются функциональными уравнениями. Для сравнения, легко видеть, что если бы индекс в (1) обозначал частную производную, то вместо (2) возникла бы система дифференциальных уравнений относительно f,g,h. Для условий в форме (3) ситуация ещё хуже, поскольку здесь приходится рассматривать двукратную композицию функций. В наиболее общей постановке задача описания 3D-совместных уравнений до сих пор остаётся открытой. Приведённая в диссертации классификация получена при ряде дополнительных предположений, сводящих (2) к алгебраическим уравнениям.

Основные цели работы. Целью работы является изучение и классификация некоторых типов разностных и дифференциально-разностных интегрируемых уравнений, и установление взаимосвязей между ними. Помимо квад-уравнений и отображений Янга-Бакстера, в диссертации рассматриваются также дискретные уравнения типа Тоды. Все эти уравнения можно задавать не только на квадратной решётке, но и на достаточно произвольных плоских графах — черта, которой трудно подобрать аналог в непрерывном случае. Такие системы стали изучаться лишь недавно. Обсуждаются некоторые их общие свойства. Приводятся также результаты, относящиеся к дифференциально-разностным уравнениям типа цепочек Тоды, Тоды-Руйзенарса, Абловица-Ладика и Вольтерра. В двух последних главах идея совместности используется для классификации трёхмерных дискретных уравнений типа ΔKP.

Методы исследования. В диссертации применяется симметрийный подход к исследованию интегрируемых нелинейных уравнений. Обычно, для эффективной классификации дифференциальных уравнений в частных производных и цепочек, используют, в рамках этого метода, технику основанную на понятиях формальной симметрии и канонических законов сохранения. Гл. 8, посвящённая векторным цепочкам Вольтерра, представляет собой довольно типичный пример применения этой техники. В остальных классификационных задачах оказывается достаточным ограничиться вульгарной версией симметрийного подхода, приняв в качестве определяющего свойства наличие всего одной симметрии специального вида. Такое концептуальное упрощение объясняется тем, что наличие у уравнения нетривиальной дискретной симметрии (преобразования Бэклунда) является очень сильным свойством, обеспечивающим интегрируемость. Фактически, преобразование Бэклунда часто можно интерпретировать, как нелинейную версию представления нулевой кривизны. В результате, оказывается возможным получать всю информацию, нужную для решения классификационной задачи, непосредственно из условий совместности (например, в случае квад-уравнений, из условий (2)).

Научная новизна. В работе представлены следующие результаты.

1) Получена классификация 3D-совместных квад-уравнений. Основным примером является уравнение (Q_4), определяющее принцип нелинейной суперпозиции для уравнения Кричевера-Новикова.

2) Исследован вопрос о постановке корректной задачи Коши для уравнений на квад-графе.

3) Получена классификация скалярных квадрирациональных отображений Янга-Бакстера. Показано, что все они удовлетворяют свойству 3D-совместности.

4) Построены примеры интегрируемых дискретных уравнений типа Тоды на плоских графах. Они связаны с квад-уравнениями на двудольном квад-графе посредством ограничения на вершины одного типа. В случае треугольной решётки и в полунепрерывном случае (отвечающем цепочкам типа Тоды-Руйзенарса) получена классификация уравнений инвариантных относительно сдвига.

5) Получена классификация одного класса совместных цепочек, связанных с цепочками типа Тоды, Руйзенарса-Тоды и Абловица-Ладика. Эти цепочки определяют авто-преобразования Бэклунда для систем типа Полмайера-Лунда-Редже и типа НШ (нелинейного Шрёдингера).

6) Изучены дискретные аналоги уравнения Ландау-Лифшица: установлена связь между цепочками Склянина и Шабата-Ямилова, исследо-

ваны дискретные уравнения типа Тоды, связанные с уравнением (Q_4).

7) Получена классификация интегрируемых изотропных уравнений типа цепочки Вольтерра на сфере.

8) Предложено обобщение понятия 3D-совместности для некоторых трёхмерных уравнений и его геометрическая иллюстрация при помощи тангенциального отображения, заданного на плоских кривых. На основе этого понятия получена классификация трёхмерных дискретных уравнений типа ΔKP (Кадомцева-Петвиашвили).

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Её результаты могут иметь применения в теории нелинейных дифференциальных и разностных уравнений и связанных с ними областях математической физики.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинарах Института Теоретической Физики им. Л.Д. Ландау, Математического Института им. В.А. Стеклова, Института математики Уфимского НЦ РАН, RIMS (Киото), Technische Universität Berlin, Loughborough University, Imperial College (Лондон), Leeds University, а также на конференциях: International Workshop on Solitons, Collapses, Turbulence: Developments and Perspectives (1999, ИТФ, Черноголовка); IV International Conference on Symmetries and Integrability of Difference Equations (2000, Tokyo University); Discrete Systems and Integrability (2001, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge); Classification Problems in the Theory of Integrable Systems (2002, SISSA, Trieste); Discrete differential geometry (2007, TU Berlin); Всероссийская школа молодых ученых по функциональному анализу, математической физике и информатике (2007, Карачаево-Черкесский ГУ, Теберда); Geometry and integrability (2008, Obergurgl, Austria); Geometric Aspects of Discrete and Ultra-Discrete Integrable Systems (2009, Glasgow University) в рамках программы Discrete Integrable Systems (2009, INI, Cambridge); Conformal Field Theory, Integrable Models and Liouville Gravity (2009, ИТФ, Черноголовка).

Публикации. Диссертация выполнена на основе работ [1]–[28], опубликованных в ведущих российских и зарубежных журналах, входящих в перечень ВАК. Часть работ написана совместно. Вклад автора в приведённые в диссертации результаты является основным.

Структура и объём диссертации. Работа состоит из введения и десяти глав. Список литературы содержит 196 наименований. Общий объём 289 страниц.

Содержание работы

Введение содержит описание полученных в диссертации результатов и оценку их значения для теории нелинейных интегрируемых систем.

Гл. 1, Преобразования Дарбу-Бэклунда, носит обзорный характер. Приведённые в ней основные сведения о преобразованиях Бэклунда служат мотивировкой и иллюстрацией для значительной части дальнейших глав. В качестве примеров используются некоторые результаты из работ [1, 4, 5, 24], но в основном изложение стандартное. Преобразованием Дарбу называется авто-преобразование линейного дифференциального или разностного уравнения с переменными коэффициентами, строящееся по его частному решению. При этом коэффициенты исходного и преобразованного уравнения связаны некоторыми нелинейными соотношениями. В случае, когда преобразование Дарбу применяется к паре вспомогательных линейных задач для нелинейного интегрируемого уравнения, эти соотношения интерпретируются как преобразования Бэклунда. Преобразования Дарбу-Бэклунда служат важнейшим источником интегрируемых уравнений с дискретными независимыми переменными. Итерации преобразований Бэклунда порождают нелинейные дифференциально-разностные уравнения, или цепочки. Свойство перестановочности преобразований Дарбу приводит к чисто разностным уравнениям удовлетворяющим описанному выше свойству 3D-совместности: так называемым квад-уравнениям и отображениям Янга-Бакстера.

Гл. 2, 3D-совместные квад-уравнения [13, 15], посвящена задаче классификации интегрируемых квад-уравнений

$$Q(u,u_i,u_j,u_{ij};\alpha^i,\alpha^j)=0 \tag{4}$$

на основе свойства 3D-совместности. Основным результатом данной главы является следующая классификационная теорема, полученная при ряде дополнительных предположений: 1) аффинно-линейность (Q является многочленом первой степени по каждой переменной); 2) трансляционная инвариантность (уравнения на противоположных гранях куба совпадают); 3) уравнение допускает группу симметрий квадрата; 4) свойство тетраэдральности (значение u_{123} не зависит от u).

Теорема 2.3. *3D-совместные квад-уравнения удовлетворяющие перечисленным свойствам исчерпываются списком 2.1, с точностью до дробно-линейных преобразований, одних и тех же во всех узлах решётки.*

Основное уравнение в списке, (Q_4), определяет принцип нелинейной суперпозиции для уравнения Кричевера-Новикова [Кричевер-Новиков, 5].

$$\alpha^i(u-u_j)(u_i-u_{ij})-\alpha^j(u-u_i)(u_j-u_{ij})+\delta\alpha^i\alpha^j(\alpha^i-\alpha^j)=0, \qquad (Q_1^\delta)$$

$$\begin{aligned}\alpha^i(u-u_j)(u_i-u_{ij})-\alpha^j(u-u_i)(u_j-u_{ij})\\ +\alpha^i\alpha^j(\alpha^i-\alpha^j)(u+u_i+u_j+u_{ij})\\ -\alpha^i\alpha^j(\alpha^i-\alpha^j)((\alpha^i)^2-\alpha^i\alpha^j+(\alpha^j)^2)=0, \qquad (Q_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Big(\alpha^i-\frac{1}{\alpha^i}\Big)(uu_i+u_ju_{ij})-\Big(\alpha^j-\frac{1}{\alpha^j}\Big)(uu_j+u_iu_{ij})\\ -\Big(\frac{\alpha^i}{\alpha^j}-\frac{\alpha^j}{\alpha^i}\Big)(uu_{ij}+u_iu_j)-\frac{\delta}{4}\Big(\alpha^i-\frac{1}{\alpha^i}\Big)\Big(\alpha^j-\frac{1}{\alpha^j}\Big)\Big(\frac{\alpha^i}{\alpha^j}-\frac{\alpha^j}{\alpha^i}\Big)=0, \quad (Q_3^\delta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sn}(\alpha^i)\operatorname{sn}(\alpha^j)\operatorname{sn}(\alpha^i-\alpha^j)(k^2uu_iu_ju_{ij}+1)+\operatorname{sn}(\alpha^i)(uu_i+u_ju_{ij})\\ -\operatorname{sn}(\alpha^j)(uu_j+u_iu_{ij})-\operatorname{sn}(\alpha^i-\alpha^j)(uu_{ij}+u_iu_j)=0, \qquad (Q_4)\end{aligned}$$

$$(u-u_{ij})(u_i-u_j)+\alpha^j-\alpha^i=0, \qquad (H_1)$$

$$(u-u_{ij})(u_i-u_j)+(\alpha^j-\alpha^i)(u+u_i+u_j+u_{ij})+(\alpha^j)^2-(\alpha^i)^2=0, \quad (H_2)$$

$$\alpha^i(uu_i+u_ju_{ij})-\alpha^j(uu_j+u_iu_{ij})+\delta\big((\alpha^i)^2-(\alpha^j)^2\big)=0, \qquad (H_3^\delta)$$

$$\alpha^i(u+u_j)(u_i+u_{ij})-\alpha^j(u+u_i)(u_j+u_{ij})-\delta^2\alpha^i\alpha^j(\alpha^i-\alpha^j)=0, \qquad (A_1^\delta)$$

$$\begin{aligned}\big((\alpha^j)^2-(\alpha^i)^2\big)(uu_iu_ju_{ij}+1)+\alpha^j((\alpha^i)^2-1)(uu_j+u_iu_{ij})\\ -\alpha^i((\alpha^j)^2-1)(uu_i+u_ju_{ij})=0. \qquad (A_2)\end{aligned}$$

Список 2.1. 3D-совместные квад-уравнения

Остальные уравнения могут быть выведены из него посредством вырождения эллиптической кривой и предельных переходов [25, Atkinson]. Все они также задают принцип нелинейной суперпозиции для уравнений типа КдФ или sine-Гордон.

Техника, применяемая при решении классификационной задачи, использует некоторые свойства отображений

$$Q(u,v,w,z)\mapsto h(u,v)=Q_wQ_z-QQ_{wz}, \quad h(u,v)\mapsto r(u)=h_v^2-2hh_{vv},$$

переводящих аффинно-линейные многочлены в биквадратичные, а биквадратичные в многочлены четвёртой степени от одной переменной. Анализ условия 3D-совместности позволяет установить следующее ключевое свойство: биквадратичные многочлены $h(u,v)$, приходящие на ребро (u,v) куба с двух смежных граней, совпадают с точностью до множителя. Отсюда следует, что совпадают также три многочлена $r(u)$, приходящие в вершину куба с содержащих её граней, а с учётом свойства симметрии получается, что вообще всем вершинам отвечает один и тот же многочлен. Дробно-линейное преобразование позволяет привести его к одной из 6-ти канонических форм, в зависимости от кратности корней, после чего задача сводится к восстановлению соответствующих многочленов h и Q. При этом важную роль играют их инварианты относительно группы дробно-линейных преобразований. Параметры α^i, α^j, а также модуль k эллиптической кривой в случае (Q_4) как раз оказываются такими инвариантами.

Следует отметить, что биквадратичные многочлены весьма часто возникают в теории интегрируемых уравнений (например, далее в диссертации они встречаются в гл. 6 при рассмотрении цепочек типа Тоды и в гл. 7 при дискретизации уравнения Ландау-Лифшица). Их роль в теории квад-уравнений становится особенно прозрачной при анализе сингулярных решений, проведённом в разделе 2.4. Результаты этого раздела позволяют несколько ослабить сделанные выше предположения о виде квад-уравнений, что, однако, не приводит к расширению списка. Несколько примеров с нарушенным свойством симметрии приведено в разделе 2.8; все они являются, в определённом смысле, вырожденными.

В разделе 2.9 рассматривается *трёхногая форма* квад-уравнений. Так называется уравнение вида

$$F(u,u_{ij};\alpha^i,\alpha^j) = G(u,u_i;\alpha^i) - G(u,u_j;\alpha^j)$$

эквивалентное уравнению (4). Например, для уравнения (Q_1^0) трёхногая форма имеет вид

$$\frac{\alpha^i-\alpha^j}{u-u_{ij}} = \frac{\alpha^i}{u-u_i} - \frac{\alpha^j}{u-u_j}. \tag{5}$$

Аналогичное представление имеется для каждого уравнения из списка (но, вообще говоря, функции F и G не являются рациональными). Трёхногая форма является неочевидным, но весьма замечательным свойством квад-уравнений: само свойство 3D-совместности следует из факта её существования [25]. Кроме того, она осуществляет связь теории квад-уравнений с теорией дискретных цепочек Тоды (гл. 5).

Гл. 3, Уравнения на квад-графах [27]. Свойство 3D-совместности позволяет определить для квад-уравнения преобразование Бэклунда и представление нулевой кривизны. По существу, эти понятия оказываются эквивалентными 3D-совместности. Более того, так как эти понятия локальны, то есть связаны лишь с элементарными ячейками решётки, то они допускают непосредственное обобщение на случай, когда уравнение задано не на квадратной решётке, а на произвольном *квад-графе*, то есть плоском графе с четырёхугольными гранями. Таким образом, возникает огромное количество двумерных дискретных систем, обладающих этими двумя атрибутами интегрируемости. Возникает естественный вопрос, в какой мере их действительно можно считать интегрируемыми. В данной главе изучаются некоторые глобальные свойства решений таких систем. В первую очередь, рассматривается проблема выбора начальных данных, которая является, в отличие от случая квадратной решётки, довольно нетривиальной.

В частности, показано, что корректность задачи Коши может зависеть не только от комбинаторики квад-графа, но и от того, является ли уравнение 3D-совместным, то есть интегрируемым в локальном смысле. Предполагается выполненным свойство симметрии, благодаря чему такая система однозначно определяется набором параметров, ассоциированных с рёбрами графа, причём противоположным рёбрам любой грани отвечает один и тот же параметр. Набор параметров, удовлетворяющий этому свойству, называется *разметкой* квад-графа. Последовательность граней, примыкающих друг к другу по противоположным рёбрам (несущим один и тот же параметр), называется *полосой*; роль полос для уравнения на квад-графе сопоставима с ролью характеристик непрерывных гиперболических уравнений. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 3.10 *Рассмотрим задачу Коши для 3D-совместного уравнения на конечном односвязном квад-графе Γ без самопересекающихся полос, с начальными данными общего положения заданными на простом пути P. Тогда:*

1) если каждая полоса в Γ пересекает P в точности по одному ребру, то решение задачи Коши существует и единственно;

2) если некоторая полоса пересекает P более одного раза, то задача Коши переопределена (для начальных данных общего положения решения нет);

3) если некоторая полоса не пересекает P, то задача Коши недоопределена (если решение существует, то оно неединственно).

Рассматривается также вопрос о распространении решений на квад-графе, отличающемся от регулярной квадратной решётки лишь в некоторой конечной области (локальном дефекте). В частности, доказывается, что если все полосы, проходящие через дефект, продолжаются в том же направлении (возможно, меняя взаимный порядок), то такой дефект вообще не оказывает влияния на решение уравнения с постоянными параметрами.

В **гл. 4, Квадрирациональные отображения** [14], рассматриваются 3D-совместные уравнения с переменными на рёбрах решётки, то есть отображения

$$(u^i,u^j)\overset{F_{ij}}{\mapsto}(u^i_j,u^j_i),\quad u^i_j=f^i_j(u^i,u^j),\quad i,j=1,2,3,\quad i\neq j,$$

удовлетворяющие тождеству

$$f^i_j(u^i_k,u^j_k)=f^i_k(u^i_j,u^{(k)}_j),\quad i\neq j\neq k\neq i.$$

Основное внимание уделено простейшему скалярному случаю $u\in\mathbb{CP}^1$. Правда, он довольно беден: оказывается, что все такие отображения получаются редукцией из квад-уравнений. С другой стороны, в таких отображениях проявляется некоторая новая структура, позволяющая получить их эффективную классификацию. Этой структурой является *квадрирациональность*. Бирациональное отображение $(u,v)\mapsto(\bar u,\bar v)$ называется квадрирациональным, если его график является также графиком некоторого бирационального отображения $(u,\bar v)\mapsto(\bar u,v)$. Все такие отображения на $\mathbb{CP}^1\times\mathbb{CP}^1$ можно проклассифицировать, и оказывается, что все они удовлетворяют свойству 3D-совместности. Список 4.1 содержит основную часть ответа (имеется ещё несколько вырожденных отображений, см. раздел 4.4). Для отображений из этого списка имеется красивая геометрическая интерпретация в виде одной теоремы инцидентности на линейном пучке коник. Рассмотрим пару невырожденных различных коник Q_1, Q_2 на плоскости $\mathbb{CP}^2$. Для точек $U\in Q_1$ и $V\in Q_2$ определим $\bar U\in Q_1$ и $\bar V\in Q_2$, как дополнительные точки пересечения прямой UV с кониками. Тем самым задано отображение $\Phi:(U,V)\mapsto(\bar U,\bar V)$.

Теорема 4.5. *Отображения Φ_{ij}, действующие на парах невырожденных коник $Q^i\times Q^j$ из линейного пучка, 3D-совместны.*

Всего имеется пять проективных типов пересечения двух коник [Berger], которым и отвечают отображения (F_{I})–(F_{V}), при подходящей рациональной параметризации. Отображения $\widetilde F_\omega$ отвечают той же самой геометрической картине, но переменные u^i и u^i_j отвечают теперь двум разным параметризациям одной и той же коники Q_i.

$$u^i_j = \frac{\alpha^i u^j\left((\alpha^i-1)u^j-(\alpha^j-1)u^i+\alpha^j-\alpha^i\right)}{\alpha^i(\alpha^j-1)u^j-\alpha^j(\alpha^i-1)u^i+(\alpha^i-\alpha^j)u^ju^i} \tag{F_{I}}$$

$$u^i_j = \frac{\alpha^i(\alpha^j-1)u^j-\alpha^j(\alpha^i-1)u^i+(\alpha^i-\alpha^j)u^ju^i}{u^j\left((\alpha^i-1)u^j-(\alpha^j-1)u^i+\alpha^j-\alpha^i\right)} \tag{$\widetilde{F}_{\mathrm{I}}$}$$

$$u^i_j = \frac{u^j(\alpha^iu^i-\alpha^ju^j+\alpha^j-\alpha^i)}{\alpha^i(u^i-u^j)} \tag{F_{II}}$$

$$u^i_j = \frac{(1-u^j)(\alpha^iu^i-\alpha^ju^j)}{\alpha^i(u^i-u^j)} \tag{$\widetilde{F}_{\mathrm{II}}$}$$

$$u^i_j = \frac{u^j(\alpha^iu^i-\alpha^ju^j)}{\alpha^i(u^i-u^j)} \tag{F_{III}}$$

$$u^i_j = \frac{u^i-u^j}{u^j(\alpha^iu^i-\alpha^ju^j)} \tag{$\widetilde{F}_{\mathrm{III}}$}$$

$$u^i_j = u^j\left(1-\frac{\alpha^i-\alpha^j}{u^i-u^j}\right) \tag{F_{IV}}$$

$$u^i_j = u^j+\frac{\alpha^i-\alpha^j}{u^i-u^j} \tag{F_{V}}$$

$$u^i_j = -u^j-\frac{\alpha^i-\alpha^j}{u^i-u^j} \tag{$\widetilde{F}_{\mathrm{V}}$}$$

Список 4.1. Квадрирациональные отображения (неполный список)

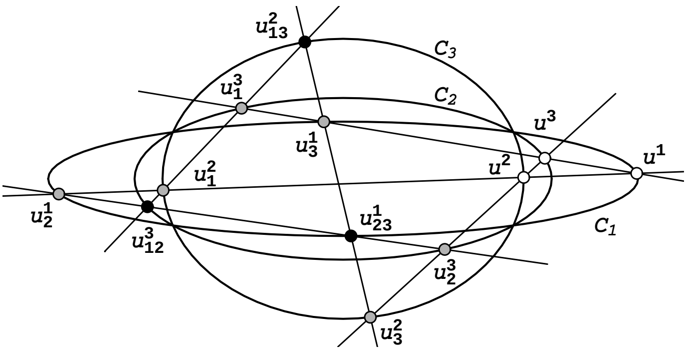

Рис. 2. 3D-совместность на линейном пучке коник

Гл. 5, Уравнения типа цепочки Тоды [19, 6, 7, 9, 25]. В разделе 5.1 рассматриваются уравнения типа дискретной цепочки Тоды на плоских графах. Они возникают из квад-уравнений на двудольных квад-графах при ограничении на вершины одного типа, что возможно благодаря трёхногой формой квад-уравнений. Например, суммируя уравнения вида (5) вокруг некоторой вершины квад-графа, мы получим уравнение

$$\sum \frac{\alpha^i - \alpha^j}{u - u_{ij}} = 0,$$

где суммирование ведётся по всем вершинам (ij), связанным с данной вершиной по диагонали элементарной ячейки. Это ограничение даёт также конструкцию преобразований Бэклунда и представлений нулевой кривизны для дискретных цепочек Тоды.

В разделе 5.2 рассматривается специальный случай дискретных цепочек Тоды на треугольной решётке, инвариантных относительно сдвига $u \to u + a$:

$$(T_1 - 1)f(u - u_{-1,0}) + (T_2 - 1)g(u - u_{0,-1}) + (T_1T_2 - 1)h(u - u_{-1,-1}) = 0. \quad (6)$$

Этот класс уравнений заслуживает отдельного рассмотрения по двум причинам. Во-первых, в этом случае преобразование Бэклунда имеет особенно простой вид (в этой главе оно называется преобразованием *дуальности* и определяется в терминах законов сохранения уравнения (6)), и не представляет труда получить список цепочек, для которых оно определено. Во-вторых, в этом случае возникают несколько уравнений, которые нельзя определить на произвольном плоском графе (это объясняется

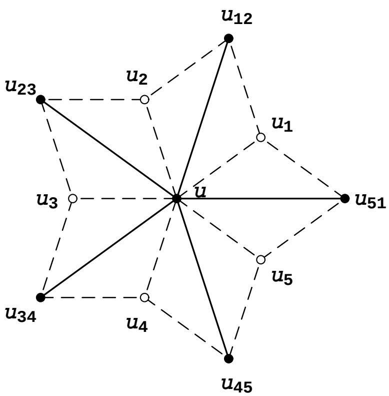

Рис. 3. Ограничение на подрешётку квад-графа

$f(x)$	$g(y)$	$h(z)$	
$\dfrac{\mu}{x}$	$\dfrac{\nu}{y}$	$\dfrac{\lambda}{z}$	(A)
$\mu\coth x$	$\nu\coth y$	$\lambda\coth z$	(B)
$\dfrac{1}{2}\log\dfrac{x+\mu}{x-\mu}$	$\dfrac{1}{2}\log\dfrac{y+\nu}{y-\nu}$	$\dfrac{1}{2}\log\dfrac{z+\lambda}{z-\lambda}$	(C)
$\log x$	$\log y$	$\log(1-1/z)$	(D)
$-e^x-1$	e^{-y}	$\dfrac{1}{1+e^z}$	(E)
$\log(e^x-1)$	$\log(e^y-1)$	$-\log(e^z-1)$	(F)
$-\log(e^{-x}-1)$	$\log(e^y-1)$	$-z$	(G)
$\log(\lambda^{-1}(e^x+1))$	$\log(e^{-y}-1)$	$\log\dfrac{e^z+\lambda}{e^z+1}$	(H)
$\log\dfrac{\mu e^x+1}{e^x+\mu}$	$\log\dfrac{\nu e^y+1}{e^y+\nu}$	$\log\dfrac{\lambda e^z+1}{e^z+\lambda}$	(I)

Список 5.1. Дискретные цепочки Тоды (6) на треугольной решётке, допускающие преобразование дуальности

тем, что связанные с ними квад-уравнения несимметричны; подробно это обсуждается в недавней работе [Boll-Suris]). Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 5.7 *Нелинейные уравнения (6), допускающие преобразование дуальности, исчерпываются списком 5.1, с точностью до замен* $\tilde u_{m,n} = cu_{m,n} - \alpha m - \beta n$ *и перестановки осей решётки. В формулах (A), (B), (C) параметры связаны соотношением* $\lambda+\mu+\nu=0$*, а в (I) соотношением* $\lambda\mu\nu=-1$.

В качестве побочного продукта при этом возникает и список интегрируемых дискретных цепочек Тоды на квадратной решётке. В непрерывном пределе столь же просто возникают списки релятивистских и обычных цепочек Тоды (раздел 5.3). Следует подчеркнуть, что все эти списки не являются исчерпывающими, так как содержат только уравнения, инвариантные относительно сдвига. В частности, они не содержат дискретных уравнений Ландау-Лифшица, являющихся, в определённом

$$\ddot u = \dot u_1 e^{y_1} - \dot u_{-1} e^{y} - e^{2y_1} + e^{2y}, \tag{a}$$

$$\ddot u = \dot u \left(\frac{\dot u_1}{y_1} - \frac{\dot u_{-1}}{y} + y_1 - y \right), \tag{b}$$

$$\ddot u = \dot u \left(\frac{\dot u_1}{1+\mu e^{-y_1}} - \frac{\dot u_{-1}}{1+\mu e^{-y}} + \nu(e^{y_1} - e^{y}) \right), \tag{c}$$

$$\ddot u = \dot u(\dot u + 1) \left(\frac{\dot u_1}{y_1} - \frac{\dot u_{-1}}{y} \right), \tag{d}$$

$$\ddot u = \dot u(\dot u - \mu) \left(\frac{\dot u_1}{\mu + e^{y_1}} - \frac{\dot u_{-1}}{\mu + e^{y}} \right), \tag{e}$$

$$\ddot u = (\dot u^2 + \mu) \left(\frac{\dot u_1 - y_1}{\mu + y_1^2} - \frac{\dot u_{-1} - y}{\mu + y^2} \right), \tag{f}$$

$$\ddot u = \frac{1}{2}(\dot u^2 + 1 - \mu^2) \left(\frac{\dot u_1 - \sinh y_1}{\mu + \cosh y_1} - \frac{\dot u_{-1} - \sinh y}{\mu + \cosh y} \right). \tag{g}$$

Список 5.2. Цепочки типа Руйзенарса-Тоды (7) допускающие преобразования дуальности ($y = u - u_{-1}$)

смысле, основными примерами цепочек типа Тоды и связанными с квад-уравнением (Q_4). Эти дискретизации рассматриваются отдельно в гл. 7.

Теорема 5.12. *Нелинейные цепочки*

$$\ddot u = r(\dot u)(f(u_1 - u)\dot u_1 - f(u - u_{-1})\dot u_{-1} + g(u_1 - u) - g(u - u_{-1})), \tag{7}$$

допускающие преобразования дуальности исчерпываются списком 5.2, с точностью до преобразований $q_n \to \alpha q_n + \beta t + \gamma n$, $t \to \delta t$.

В **гл. 6, Двухкомпонентные гиперболические системы** [21], решается задача классификации совместных пар цепочек

$$u_x = F(u_1, u, v), \qquad v_x = G(u, v, v_{-1}), \tag{8}$$

$$u_y = P(u_{-1}, u, v), \quad v_y = Q(u, v, v_1). \tag{9}$$

Классификация интегрируемых цепочек (8) была получена ранее Р.И. Ямиловым [Ямилов 2000]. В его работе в качестве основного определения было принято существование, вместо (9), симметрий достаточно высокого порядка и, кроме того, цепочка предполагалась гамильтоновой. Здесь свойство гамильтоновости выводится.

$$u_x = \frac{h}{v-u_1} - \frac{h_v}{2} \qquad v_x = \frac{h}{v_{-1}-u} + \frac{h_u}{2} \tag{X_1}$$

$$u_y = \frac{h}{u_{-1}-v} + \frac{h_v}{2} \qquad v_y = \frac{h}{u-v_1} - \frac{h_u}{2} \tag{Y_1}$$

$$h = \alpha_1 u^2 v^2 + \alpha_2 uv(u+v) + \alpha_3(u^2+v^2) + \alpha_4 uv + \alpha_5(u+v) + \alpha_6$$

$$u_x = (u-u_1)(u-v) \qquad v_x = (v_{-1}-v)(u-v) \tag{X_2}$$

$$u_y = \frac{u-u_{-1}}{v-u_{-1}} \qquad v_y = \frac{v_1-v}{v_1-u} \tag{Y_2}$$

$$u_x = (1+e^{u_1-u})(1+e^{u-v}) \qquad v_x = (1+e^{v-v_{-1}})(1+e^{u-v}) \tag{X_3}$$

$$u_y = \frac{1+e^{u_{-1}-u}}{1-e^{u_{-1}-v}} \qquad v_y = \frac{1+e^{v-v_1}}{1-e^{u-v_1}} \tag{Y_3}$$

$$u_x = e^{u_1-u} + e^{u_1-v} \qquad v_x = e^{v-v_{-1}} + e^{u-v_{-1}} \tag{X_4}$$

$$u_y = e^{u_{-1}-u} + e^{u_{-1}-v} \qquad v_y = e^{v-v_1} + e^{u-v_1} \tag{Y_4}$$

$$u_x = e^{u_1-v} + e^{u-v} \qquad v_x = e^{u-v_{-1}} + e^{u-v} \tag{X_5}$$

$$u_y = e^{v-u_{-1}} + e^{v-u} \qquad v_y = e^{v_1-u} + e^{v-u} \tag{Y_5}$$

$$u_x = e^{u_1-u} + e^{u-v} \qquad v_x = e^{v-v_{-1}} + e^{u-v} \tag{X_6}$$

$$u_y = \frac{e^{u_{-1}-u}}{e^{u_{-1}-v}-1} \qquad v_y = \frac{e^{v-v_1}}{e^{u-v_1}-1} \tag{Y_6}$$

Список 6.1. Совместные пары цепочек (8), (9)

Теорема 6.1. *Совместные цепочки вида (8), (9), нелинейные, неприводимые и удовлетворяющие условию невырожденности*

$$F_v F_{u_1} G_u G_{v_{-1}} P_v P_{u_{-1}} Q_u Q_{v_1} \neq 0,$$

точечно эквивалентны одной из пар, перечисленных в списке 6.1.

Все цепочки из списка 6.1 имеют гамильтонову структуру общего вида

$$u_x = h(u,v)\delta_v H, \quad v_x = -h(u,v)\delta_u H, \quad H = K(u_1,v) + L(u,v),$$
$$u_y = h(u,v)\delta_v R, \quad v_x = -h(u,v)\delta_u R, \quad R = M(u,v_1) + N(u,v),$$

где $\delta_u H = \partial_u \sum_n T^n(H)$ обозначает разностную вариационную производную.

Рассматриваемые цепочки тесно связаны с ещё несколькими важными классами нелинейных цепочек: типа Тоды, Руйзенарса-Тоды и Абловица-Ладика, а также с двухкомпонентными системами в частных производных, для которых они определяют авто-преобразования Бэклунда: гиперболическими типа Полмайера-Лунда-Редже и эволюционными типа НШ. Исследованию этих взаимосвязей посвящены работы [18, 19, 20, Ямилов 2000, 23, Марихин-Шабат, 17, Yamilov 2006]. Подход, основанный на исследовании пар (8), (9) позволяет воспроизвести некоторые результаты в более общем и прозрачном виде.

В **гл. 7, Дискретизация уравнения Ландау-Лифшица** [18, 8, 25], устанавливается связь между двумя известными интегрируемыми дискретизациями уравнения Ландау-Лифшица

$$s_t = [s, s_{xx} + Js], \quad s \in \mathbb{R}^3, \quad \langle s, s \rangle = 1, \quad J = \mathrm{diag}(J_1, J_2, J_3). \tag{10}$$

Первая из них, введенная Е.К. Скляниным [Склянин], характеризуется тем, что фундаментальные скобки Пуассона для нее и для (10) обслуживаются одной и той же r-матрицей, а матрица L_n из представления нулевой кривизны аппроксимирует, в пределе $x = \varepsilon n$, $\varepsilon \to 0$, матрицу монодромии для (10). Эти свойства можно принять в качестве определения «правильного» дискретного аналога данной непрерывной модели [Тахтаджян-Фаддеев, Suris]. Вторая дискретизация, введенная А.Б. Шабатом и Р.И. Ямиловым [Шабат-Ямилов], см. также [Krichever], есть не что иное, как цепочка (X_1). Она определяет преобразования Бэклунда для системы типа НШ, связанной с (10) комплексифицированной стереографической проекцией.

Обе модели тесно связаны, несмотря на различное происхождение. Показано, что цепочка Склянина точечно эквивалентна сумме цепочки (X_1) и её симметрии (Y_1). Иными словами, обе модели принадлежат одной и той же иерархии интегрируемых уравнений. В качестве дополнительного результата возникают интегрируемое гиперболическое уравнение на сфере и цепочки типа Тоды и релятивистской цепочки Тоды, также принадлежащие этой иерархии.

В разделе 7.6 рассматриваются дискретные цепочки Тоды на квадратной и треугольной решётках, связанные с цепочками (X_1), (Y_1) и квад-уравнением (Q_4). Эти результаты дополняют результаты главы 5. В разделе 7.7 рассматриваются некоторые векторные обобщения.

В **гл. 8, Интегрируемые изотропные цепочки Вольтерра на сфере** [11, 26], рассматриваются цепочки общего вида

$$V_{n,x} = f_n V_{n+1} + g_n V_n + h_n V_{n-1},$$

где V_n векторы, а f_n, g_n, h_n скалярные функции от V_{n+1}, V_n, V_{n-1}. Такие цепочки служат векторными аналогами цепочки Вольтерра, являющейся одной из наиболее фундаментальных дифференциально-разностных моделей [Манаков, Тахтаджян-Фаддеев, Suris]. Интегрируемость понимается, как существование высших симметрий аналогичного вида, и ставится задача выделения интегрируемых случаев при следующих предположениях:

1) цепочка и её симметрии изотропны и сдвигово-инвариантны, то есть их коэффициенты зависят лишь от скалярных произведений $v_{m,n} := \langle V_m, V_n\rangle = \langle V_n, V_m\rangle$, причём эта зависимость одна и та же в каждом узле цепочки;

2) симметрия существует независимо от размерности векторного пространства и природы скалярного произведения;

3) все V_n имеют единичную длину, то есть $v_{n,n} = 1$.

Эта задача решается в рамках стандартного симметрийного подхода, основанного на анализе необходимых условий интегрируемости в виде так называемых канонических законов сохранения. Скалярные цепочки типа Вольтерра $v_{n,x} = f(v_{n+1}, v_n, v_{n-1})$ были проклассифицированы Р.И. Ямиловым [Ямилов 1983, Yamilov 2006]. Векторный случай имеет, разумеется, свои особенности, но в целом применяемый метод весьма близок. Это обусловлено тем, что необходимые условия интегрируемости формально совпадают со скалярными (различие заключается в наборах динамических переменных: $v_{m,n}$ вместо v_n). В непрерывном случае общий подход и ряд важных результатов, основанных на этом простом наблюдении, принадлежат В.В. Соколову, А.Г. Мешкову, T. Wolf'у и др. (см. напр. [Meshkov-Sokolov]).

Полученный список состоит в основном из новых цепочек. В соответствии с общей идеологией, их можно интерпретировать как преобразования Бэклунда для уравнений в частных производных: двумерных векторных систем типа НШ и трёхмерных типа Дэви-Стюартсона.

Теорема 8.1. *Если изотропная цепочка Вольтерра на сфере $\langle V, V\rangle = 1$ удовлетворяет трём первым необходимым условиям интегрируемости, то она совпадает с одной из цепочек списка 8.1, с точностью до растяжения x. Все цепочки из этого списка имеют высшую симметрию второго порядка.*

$$V_x=\frac{a(V_1-v_{1,0}V)+a_1(v_{0,-1}V-V_{-1})}{v_{1,-1}-v_{1,0}v_{0,-1}}\,,\quad a=v_{0,-1}-\frac{1}{v_{0,-1}}; \tag{V_1}$$

$$V_x=\frac{a(V_1-v_{1,0}V)+a_1(v_{0,-1}V-V_{-1})}{v_{1,-1}-v_{1,0}v_{0,-1}+aa_1}\,,$$
$$a^2-2kv_{0,-1}a+v_{0,-1}^2-1=0; \tag{V_2}$$

$$V_x=\frac{(v_{0,-1}+\varepsilon)(V_1+\varepsilon V)-(v_{1,0}+\varepsilon)(V_{-1}+\varepsilon V)}{v_{1,-1}-1}\,; \tag{V_3}$$

$$V_x=\frac{(v_{0,-1}+\varepsilon)(V_1+\varepsilon V)-(v_{1,0}+\varepsilon)(V_{-1}+\varepsilon V)}{v_{1,-1}-v_{1,0}v_{0,-1}+(v_{1,0}+\varepsilon)(v_{0,-1}+\varepsilon)(k+pp_1)}\,,$$
$$p=\sqrt{\frac{v_{0,-1}-\varepsilon}{v_{0,-1}+\varepsilon}-k}; \tag{V_4}$$

$$V_x=\frac{(v_{0,-1}+\varepsilon)(V_1+\varepsilon V)-(v_{1,0}+\varepsilon)(V_{-1}+\varepsilon V)}{v_{1,-1}+\varepsilon(v_{1,0}+v_{0,-1})+1+k\sqrt{v_{1,0}+\varepsilon}\sqrt{v_{0,-1}+\varepsilon}}\,,\quad k=0,\pm2; \tag{V_5}$$

$$V_x=\frac{V_1+\delta V}{v_{1,0}+\delta}-\frac{V_{-1}+\delta V}{v_{0,-1}+\delta}\,,\quad \delta=0,\pm1. \tag{V_6}$$

Список 8.1. Интегрируемые цепочки Вольтерра на сфере $\big(\langle V,V\rangle=1,\ v_{m,n}=\langle V_m,V_n\rangle,\ \varepsilon=\pm1\big)$.

Гл. 9, Дискретное уравнение Кадомцева-Петвиашвили (ΔKP), носит вспомогательный характер и служит мотивировкой для классификационной задачи, рассматриваемой в главе 10. В основном, в ней приводятся некоторые достаточно хорошо известные факты о дискретном уравнении KP: вывод из линейных задач, связь с каскадным методом Лапласа и некоторые геометрические интерпретации (см. напр. [Hirota, Bogdanov-Konopelchenko, Konopelchenko-Schief, 24]). Исключением является раздел 9.4, содержащий новую геометрическую конструкцию для полудискретного уравнения KP [12]. В её основе лежит следующее 3D-совместное отображение на множестве гладких плоских кривых (*тангенциальное отображение*).

Пусть даны гладкие плоские кривые C, C_1 и C_2. Через произвольную точку r на кривой C проведём касательную, и пусть она пересекает C_1 в

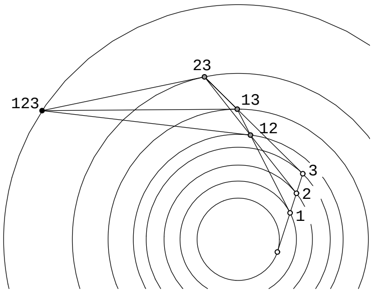

Рис. 4. 3D-совместность тангенциального отображения в простейшем случае концентрических окружностей

точке r_1 и C_2 в точке r_2. Пусть касательные, проведённые через эти точки к соответствующим кривым пересекаются в точке r_{12}. При движении точки r по C точка r_{12} опишет новую кривую C_{12}. Тем самым определено локальное (то есть, определённое не для всех троек кривых или не всегда однозначное) отображение

$$F : (C, C_1, C_2) \mapsto C_{12}.$$

Оказывается, что оно достаточно просто связано с факторизацией дифференциальных операторов. В свою очередь, это позволяет установить связь с полудискретной цепочкой Тоды, и после редукции, уравнением Хироты. Одна из модификаций дискретного уравнения КР возникает при рассмотрении дискретной версии тангенциального отображения.

Основным свойством отображения F является 3D-совместность: если стартовать с кривых C, C_1, C_2, C_3 и построить кривые $C_{ij} = F(C, C_i, C_j)$, то кривая C_{123}, построенная по тройке C_i, C_{ij}, C_{ik} будет одна и та же для любой перестановки i, j, k (см. рис. 1 и 4). Рис. 5 иллюстрирует красивое свойство логарифмической спирали, являющейся неподвижной точкой тангенциального отображения.

На уровне формул (возникающих при факторизации дифференциальных операторов), тангенциальное отображение сводится к отображению $f : (v, v_i, v_j) \mapsto v_{ij}$,

$$v_{ij} = \frac{v_i v_j}{v} + \frac{\dot{v}_i v_j - v_i \dot{v}_j}{v_j - v_i},$$

где точка обозначает дифференцирование по параметру на кривой. Это отображение является трёхмерным аналогом квад-уравнений из гл. 2. В

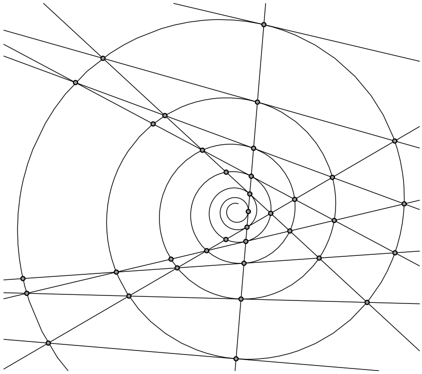

Рис. 5. Надгробная надпись Якоба I Бернулли “eadem mutata resurgo” означает, что логарифмическая спираль инвариантна по отношению к целому ряду геометрических преобразований. Тангенциальное отображение также сохраняет эту кривую.

переменных $a^i = v/v_i$ возникает отображение $(a^i, a^j) \mapsto (a^i_j, a^j_i)$,

$$a^i_j = \frac{(a^i - a^j)a^i}{a^i - a^j + a^i\dot a^j - \dot a^i a^j},$$

являющееся трёхмерным аналогом отображений из гл. 3. В обоих случаях определение 3D-совместности формально не меняется. Всё же, по сравнению с двумерной ситуацией, имеется важное отличие, которое заключается в том, что роли участвующих в отображении кривых различны. В частности, если построение C_{ij} по C, C_i, C_j описывается дифференциальным рациональным отображением, то построение C_j по C, C_i, C_{ij} требует квадратуры. Приспосабливая к данному примеру терминологию гл. 4, можно сказать, что тангенциальное отображение не квадрирационально.

Гл. 10, Классификация интегрируемых уравнений типа ΔKP [16]. В классификации трёхмерных интегрируемых уравнений до сих пор имеется множество нерешённых задач. Обзор некоторых результатов в непрерывном случае имеется в [23], в дискретном же случае результаты практически отсутствуют, поэтому представляет определённый интерес применить для целей классификации трёхмерных дискретных уравнений свойство 4D-совместности.

С логической точки зрения, 4D-совместность проще всего определить, как совместность уравнений, заданных на трёхмерных гранях гиперкуба,

$$u_{ij}u_k - u_{ik}u_j + u_{jk}u_i = 0 \tag{χ_1}$$

$$(u_{ik} - u_{ij})u_i + (u_{ij} - u_{jk})u_j + (u_{jk} - u_{ik})u_k = 0 \tag{χ_2}$$

$$\frac{u_{ik} - u_{ij}}{u_i} + \frac{u_{ij} - u_{jk}}{u_j} + \frac{u_{jk} - u_{ik}}{u_k} = 0 \tag{χ_2'}$$

$$\frac{(u_{ij} - u_{ik})(u_{jk} - u_k)(u_j - u_i)}{(u_{ik} - u_{jk})(u_k - u_j)(u_i - u_{ij})} = -1 \tag{χ_3}$$

$$\frac{u_{ik} - u_{jk}}{u_k} = u_{ij}\Big(\frac{1}{u_j} - \frac{1}{u_i}\Big) \tag{χ_4}$$

Список 10.1. 4D-совместные уравнения типа ΔKP

см. напр. [Ганжа-Царёв] и [Doliwa-Santini], где это свойство было сформулировано геометрически. В работе [13] отмечалось, что оно выполняется для уравнения ΔBKP [Miwa] и уравнения двойного отношения. Однако, классификация уравнений этого типа представляет собой слишком технически сложную задачу (или требует привлечения других идей). В данной главе рассматривается более простой случай уравнений типа ΔKP

$$f(u_i, u_j, u_k, u_{ij}, u_{ik}, u_{jk}) = 0 \tag{11}$$

(по сравнению с ΔBKP нет зависимости от переменных u и u_{ijk}). При этом 4D-совместность понимается в смысле предыдущей главы, то есть одна (любая) из дискретных переменных считается выделенной (в случае тангенциального отображения это параметр на кривой), а для остальных должно выполняться свойство 3D-совместности. В непрерывном случае похожие примеры рассматривались в [Ferapontov-Khusnutdinova-Tsarev, 22]. Подробный анализ показывает, что для уравнений (11) именно такое определение 4D-совместности является естественным. Основным результатом является следующая теорема (в Теореме 10.23 приводится более точная формулировка, в которой перечислены все возможные совместные тройки).

Теорема 10.2. *Любое уравнение вида (11) из 4D-совместной тройки сводится, точечными заменами в $\mathbb{Z}^4$, к одному из уравнений списка 10.1.*

Все уравнения из списка 10.1 хорошо известны (фактически, они эквивалентны одному уравнению). Однако, отсутствие новых примеров не следует расценивать, как неудачу. Действительно, этот ответ получен зато в весьма общей постановке: в отличие от гл. 2 не накладывается какихлибо дополнительных предположений о виде уравнений, и анализ условий совместности представляет собой элементарные выкладки (хотя и довольно длинные). Это отражает тот общий факт, что трёхмерные уравнения являются фундаментальными, а условия интегрируемости для них переопределены гораздо сильнее, чем для двумерных.

Литература

[Atkinson] J. Atkinson. Bäcklund transformations for integrable lattice equations. *J. Phys. A* ***41*** (2008) 135202. 9

[Berger] M. Berger. Geometry. Springer-Verlag, Berlin 1987. 12

[Bobenko-Suris 2002] A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. Integrable systems on quad-graphs. *Int. Math. Res. Notes* (2002) 573–611. 3

[Bobenko-Suris 2009] A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. Discrete differential geometry: integrable structure. AMS, Providence, 2009. 3

[Bogdanov-Konopelchenko] L.V. Bogdanov, B.G. Konopelchenko. Lattice and q-difference Darboux-Zakharov-Manakov systems via $\bar\partial$-dressing method. *J. Phys. A* ***28:5*** (1995) L173–178. 20

[Boll-Suris] R. Boll, Yu.B. Suris. Non-symmetric discrete Toda systems from quad-graphs. arXiv:0908.2822v1. 15

[Бухштабер] В.М. Бухштабер. Отображения Янга-Бакстера. *Успехи Мат. Наук* ***53:6*** (1998) 241–242. 5

[Doliwa-Santini] A. Doliwa, P.M. Santini. Multidimensional quadrilateral lattices are integrable. *Phys. Lett A* ***233:4–6*** (1997) 365–372. 23

[Ferapontov-Khusnutdinova-Tsarev] E.V. Ferapontov, K.R. Khusnutdinova, S.P. Tsarev. On a class of three-dimensional integrable Lagrangians. *Comm. Math. Phys.* ***261:1*** (2006) 225–243. 23

[Ганжа-Царёв] Е.И. Ганжа, С.П. Царёв. Алгебраическая формула суперпозиции и полнота преобразований Бэклунда $(2+1)$-мерных интегрируемых систем. *Успехи Мат. Наук* ***51:6*** (1996) 197–198. 23

[Habibullin-Sokolov-Yamilov] I.T. Habibullin, V.V. Sokolov, R.I. Yamilov. Multi-component integrable systems and nonassociative structures, pp. 139–168 in: *Nonlinear Physics: Theory and Experiment, Lecce'95* (E. Alfinito, M. Boiti, L. Martina, F. Pempinelli eds). Singapore: World Scientific, 1996. 3

[Heredero-Sokolov-Svinolupov] R. Hernández Heredero, V.V. Sokolov, S.I. Svinolupov. Classification of third order integrable evolution equations. *Physica D* ***87:1–4*** (1995) 32–36. . 3

[Hirota] R. Hirota. Discrete analog of a generalized Toda equation. *J. Phys. Soc. Japan* ***50:11*** (1981) 3785–3791. 20

[Konopelchenko-Schief] B.G. Konopelchenko, W.K. Schief. Menelaus' theorem, Clifford configurations and inversive geometry of the Schwarzian KP hierarchy. *J. Phys. A 35:29* (2002) 6125–6144. 20

[Krichever] I.M. Krichever. Elliptic analog of the Toda lattice. *Int. Math. Res. Notices* **2000:8** 383–412. 18

[Кричевер-Новиков] И.М. Кричевер, С.П. Новиков. Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения. *Успехи Мат. Наук* ***35:6*** (1980) 47–68. 8

[Levi] D. Levi. Nonlinear differential difference equations as Bäcklund transformations. *J. Phys. A* ***14:5*** (1981) 1083–1098. 3

[Манаков] С.В. Манаков. О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах. *ЖЭТФ* ***67:2*** (1974) 543–555. 19

[Марихин-Шабат] В.Г. Марихин, А.Б. Шабат. Интегрируемые решетки. *Теор. Мат. Физ.* ***118:2*** (1999) 217–228. 18

[Meshkov-Sokolov] A.G. Meshkov, V.V. Sokolov. Integrable evolution equations on the N-dimensional sphere. *Comm. Math. Phys.* ***232:1*** (2002) 1–18. 19

[Mikhailov-Shabat-Sokolov] A.V. Mikhailov, A.B. Shabat, V.V. Sokolov. The symmetry approach to classification of integrable equations. In *What is integrability?*, ed. V.E. Zakharov, Berlin: Springer-Verlag, 1991. 3

[Mikhailov-Shabat-Yamilov] A.V. Mikhailov, A.B. Shabat, R.I. Yamilov. The symmetry approach to classification of nonlinear equations. Complete lists of integrable systems. *Russ. Math. Surveys* ***42:4*** (1987) 1–63. 3

[Miwa] T. Miwa. On Hirota's difference equations. *Proc. Japan Acad., Ser. A: Math. Sci.* **58:1** (1982) 9–12. 23

[Nijhoff-Walker] F.W. Nijhoff, A.J. Walker. The discrete and continuous Painlevé hierarchy and the Garnier system. *Glasgow Math. J.* ***43A*** (2001) 109–123. 3

[Склянин] Е.К. Склянин. О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга-Бакстера. *Функц. анализ и прилож.* ***16:4*** (1982) 27–34. 18

[Suris] Yu.B. Suris. The problem of integrable discretization: Hamiltonian approach. Basel: Birkhäuser, 2003. 18, 19

[Шабат-Ямилов] А.Б. Шабат, Р.И. Ямилов. Симметрии нелинейных цепочек. *Алгебра и анализ* ***2:2*** (1990) 183–208. 3, 18

[Sokolov-Shabat] V.V. Sokolov, A.B. Shabat. Classification of integrable evolution equations. *Sov. Sci. Rev. C / Math. Phys. Rev.* ***4*** (1984) 221–280. 3

[Тахтаджян-Фаддеев] Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986. 18, 19

[Veselov] A.P. Veselov. Yang-Baxter maps and integrable dynamics. *Phys. Lett A* ***314:3*** (2003) 214–221. 5

[Ямилов 1983] Р.И. Ямилов. О классификации дискретных эволюционных уравнений. *УМН* ***38:6*** (1983) 155–156. 19

[Ямилов 2000] Р.И. Ямилов. Симметрийный подход к классификации с точки зрения интегрируемых дифференциально-разностных уравнений. Теория преобразований. *Диссертация д.ф.-м.н.*, Уфа, 2000. 16, 18

[Yamilov 2006] R.I. Yamilov. Symmetries as integrability criteria for differential-difference equations. *J. Phys. A* ***39*** (2006) R541–623. 3, 18, 19

Публикации автора по теме диссертации

[1] В.Э. Адлер. Перекройка многоугольников. *Функц. анализ и прилож.* ***27:2*** (1993) 79–82. 4, 7, 8

[2] V.E. Adler. Nonlinear superposition formula for Jordan NLS equations. *Phys. Lett A* ***190*** (1994) 53–58. .

[3] V.E. Adler. Nonlinear chains and Painlevé equations. *Physica D* ***73:4*** (1994) 335–351. 4

[4] V.E. Adler. Integrable deformations of a polygon. *Physica D* ***87:1–4*** (1995) 52–57. 4, 8

[5] V.E. Adler. Bäcklund transformation for the Krichever-Novikov equation. *Int. Math. Res. Not.* (1998) 1–4. 8

[6] В.Э. Адлер. Преобразования Лежандра на треугольной решетке. *Функц. анализ и прилож.* ***34:1*** (2000) 1–11. 14

[7] V.E. Adler. On the structure of the Bäcklund transformations for the relativistic lattices. *J. Nonl. Math. Phys.* ***7:1*** (2000) 34–56. 14

[8] В.Э. Адлер. О дискретизациях уравнения Ландау-Лифшица. *Теор. Мат. Физ.* ***124:1*** (2000) 48–61. 18

[9] V.E. Adler. Discrete equations on planar graphs, *J. Phys. A* ***34*** (2001) 10453–10460. 14

[10] V.E. Adler. Some incidence theorems and integrable discrete equations. *Discrete Comput. Geom.* ***36*** (2006) 489–498.

[11] V.E. Adler. Classification of integrable Volterra type lattices on the sphere. Isotropic case. *J. Phys. A* ***41*** (2008) 145201. 19

[12] V.E. Adler. The tangential map and associated integrable equations. *J. Phys. A* ***42*** (2009) 332004. 20

[13] V.E. Adler, A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. Classification of integrable equations on quad-graphs. The consistency approach. *Comm. Math. Phys.* ***233*** (2003) 513–543. 8, 23

[14] V.E. Adler, A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. Geometry of Yang-Baxter maps: pencils of conics and quadrirational mappings. *Comm. Anal. and Geom.* ***12:5*** (2004) 967–1007. 12

[15] В.Э. Адлер, А.И. Бобенко, Ю.Б. Сурис. Дискретные нелинейные гиперболические уравнения. Классификация интегрируемых случаев. *Func. Anal. Appl.* ***43:1*** (2009) 3–21. 8

[16] V.E. Adler, A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. The classification of integrable discrete equations of octahedron type. *Подано в печать.* 22

[17] В.Э. Адлер, В.Г. Марихин, А.Б. Шабат. Лагранжевы цепочки и канонические преобразования Бэклунда. *Теор. Мат. Физ.* ***129:2*** (2001) 163–183. 18

[18] В.Э. Адлер, А.Б. Шабат. Об одном классе цепочек Тоды. *Теор. Мат. Физ.* ***111:3*** (1997) 323–334. 18

[19] В.Э. Адлер, А.Б. Шабат. Обобщенные преобразования Лежандра. *Теор. Мат. Физ.* ***112:2*** (1997) 179–194. 14, 18

[20] В.Э. Адлер, А.Б. Шабат. Первые интегралы обобщенных цепочек Тоды. *Theor. Math. Phys.* ***115:3*** (1998) 349–357. 18

[21] V.E. Adler, A.B. Shabat. On the one class of hyperbolic systems. *SIGMA* ***2*** (2006) 093. 16

[22] В.Э. Адлер, А.Б. Шабат. Модельное уравнение теории солитонов. *Теор. Мат. Физ.* ***153:1*** (2007) 29–45. 23

[23] В.Э. Адлер, А.Б. Шабат, Р.И. Ямилов. Симметрийный подход к проблеме интегрируемости. *Теор. Мат. Физ.* ***125:3*** (2000) 355–424. 3, 18, 22

[24] В.Э. Адлер, С.Я. Старцев. О дискретных аналогах уравнения Лиувилля. *Теор. Мат. Физ.* ***121:2*** (1999) 271–284. 8, 20

[25] V.E. Adler, Yu.B. Suris. Q4: Integrable master equation related to an elliptic curve. *Int. Math. Res. Not.* (2004) 2523–2553. 9, 10, 14, 18

[26] V.E. Adler, S.I. Svinolupov, R.I. Yamilov. Multi-component Volterra and Toda type equations. *Phys. Lett A* ***254*** (1999) 24–36. 19

[27] V.E. Adler, A.P. Veselov. Cauchy problem for integrable discrete equations on quad-graphs. *Acta Appl. Math.* ***84:2*** (2004) 237–262. 11

[28] V.E. Adler, R.I. Yamilov. Auto-transformations of integrable chains. *J. Phys. A* ***27*** (1994) 477–492. 4, 7

Адлер Всеволод Эдуардович

Классификация дискретных интегрируемых уравнений

Автореферат диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Подписано в печать 15.04.2010. Формат $60 \times 84\frac{1}{16}$. Тираж 100 экз.