

"УТВЕРЖДАЮ"

И.о. директора Федерального государственного
бюджетного учреждения науки

Физического института имени П.Н.Лебедева
Российской Академии наук, академик

Н. Н. Колачевский

ОТЗЫВ

Ведущей организации «Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Физический институт имени П.Н.Лебедева РАН» на диссертацию Еремина Бориса Андреевича «Зеркальная симметрия многообразий Калаби-Яу и $N=2$ суперконформные двумерные теории поля», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.3.3 — «Теоретическая физика»

Диссертация Б.А.Еремина посвящена исследованию зеркальной симметрии, обнаруженной первоначально в теории суперструн, которая считается в настоящее время одним из основных кандидатов на роль единой теории, объединяющей Стандартную модель и квантовую гравитацию. Самосоогласованная теория суперструн формулируется в десятимерном пространстве-времени. Для получения эффективной низкоэнергетической теории супергравитации в четырехмерном пространстве-времени Минковского необходимо компактифицировать шесть дополнительных измерений на так называемые многообразия Калаби-Яу. Эти многообразия обладают рядом замечательных свойств, среди которых ключевое место занимает зеркальная симметрия, устанавливающая существование для данного многообразия X его зеркального «двойника» Y .

В диссертации рассматриваются реализации зеркальной симметрии для случая орбифолдов гиперповерхностей типа Берглунда-Хубша, образующих широкий класс многообразий Калаби-Яу, определяемых во взвешенных проективных пространствах. Для этого класса орбифолдов Калаби-Яу соискатель показывает эквивалентность подходов Батырева и Берглунда-Хубша-Кравица (БХК) к построению зеркально дуальных геометрий. Результат построения зеркального двойника в рамках конструкции Батырева применяется для установления двойственности между многообразиями Калаби-Яу и суперсимметричными калибровочными линейными сигма-моделями. Важную роль в диссертации играют двумерные $N=(2,2)$ суперсимметричные конформные теории поля (СКТП), возникающие как компактный сектор в теории струн. В рамках диссертации разработан эффективный подход к построению спектра локальных полей в этих моделях, а также исследована реализация зеркальной симметрии на уровне конформных теорий поля.

Структура диссертации. Диссертация Еремина Б.А. состоит из введения, четырех глав основного текста, заключения, двух приложений и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 122 страницы, включая 3 рисунка. Список литературы содержит 85 наименований.

Во **Введении** обоснована актуальность, новизна и практическая значимость диссертационного исследования, приведен литературный обзор по тематике диссертации. Сформулированы цели и задачи исследования, а также положения, выносимые на защиту.

Первая глава носит вводный характер. В ней приводится краткий исторический обзор возникновения теории струн и обосновывается необходимость компактификации на шестимерные (трехмерные комплексные) многообразия. Вводятся основные понятия из комплексной и кэлеровой геометрии, приводится несколько эквивалентных определений многообразий Калаби-Яу. Определяются когомологии многообразий Калаби-Яу, а также пространство модулей комплексных и кэлеровых структур. В качестве примера разбирается так называемая «квинтика» — гиперповерхность в проективном пространстве, задаваемая нулями однородного многочлена пятой степени.

Вторая глава содержит основные результаты диссертации по зеркальной симметрии. Рассматриваются два подхода к построению зеркального партнера к орбифолду гиперповерхности Калаби-Яу X по группе допустимых фазовых симметрий G . Гиперповерхность X определяется нулями обратимого полинома W_X общего вида во взвешенном проективном пространстве. Диссертант строит зеркальное многообразие следуя конструкциям Берглунда-Хубша-Кравица (БХК) и Батырева. Конструкция БХК предполагает построение зеркального многообразия Y как орбифолда в другом взвешенном проективном пространстве по двойственной группе G^* . Согласно комбинаторной конструкции Батырева, степени полинома W_X определяют рефлексивный многогранник. Зеркальное многообразие Y задается в торическом многообразии по полярно-двойственному многограннику. Важным достижением соискателя является нахождение явного вида многочлена, который определяет зеркальный образ в торическом многообразии. Основным результатом второй главы состоит в доказательстве эквивалентности конструкций БХК и Батырева для исследуемого класса орбифолдов Калаби-Яу. Полученные общие результаты иллюстрируются на примере орбифолдов квинтики.

В Третьей главе рассматриваются $N=2$ суперсимметричные калибровочные линейные сигма-модели (КЛСМ) на сфере. Симметрия метрики сферы позволяет сохранить часть суперсимметрии, что позволяет применить технику суперсимметричной локализации. Статистическая сумма таких моделей была вычислена точно в работах других авторов. Пространство суперсимметричных вакуумов КЛСМ Y имеет различные «фазы», одна из которых описывает нелинейную сигма-модель на многообразии Калаби-Яу. Рядом авторов была высказана гипотеза о том, что статистическая сумма КЛСМ вычисляет

специальную кэлерову метрику на пространстве модулей кэлеровых структур Y . В третьей главе проверена зеркальная версия этой гипотезы. Используя конструкцию Батырева и разработанный во второй главе аппарат, соискатель установил двойственность между пространством вакуумов КЛСМ Y и гиперповерхностью Калаби-Яу X во взвешенном проективном пространстве. Основным результатом третьей главы является явная проверка равенства статистической суммы КЛСМ и экспоненты кэлерова потенциала на пространстве модулей зеркального многообразия X .

В Четвертой главе строятся модели двумерной, $N=(2,2)$ суперсимметричной конформной теории поля (СКТП) с центральным зарядом, равным 9. Как известно, критическая теория струн представляет собой конформную теорию поля на мировом листе. Модели СКТП с центральным зарядом $c=9$ описывают компактный сектор пространства физических состояний. В качестве таких моделей соискатель рассматривает орбифорды произведений $N=(2,2)$ минимальных моделей типа ADE по допустимой группе симметрий G . При помощи конструкции построения твистованных состояний оператором спектрального потока и требования взаимной локальности полей автор строит полный спектр полей орбифорда. Полученная СКТП удовлетворяет таким требованиям конформного бутстрапа, как замкнутость операторной алгебры и взаимная локальность. Зеркальная модель строится по двойственной группе G^* . Орбифорды, построенные по группам G и G^* , имеют изоморфные пространства состояний, что соответствует симметрии теорий суперструн типа IIA и IIB. Глава завершается примером модели орбифорда с недиагональными спариваниями примарных полей типа E7. С геометрической точки зрения такие модели описывают компактификацию на многообразиях Калаби-Яу, задаваемых как полные пересечения гиперповерхностей. Приведены таблицы антикиральных-киральных полей для орбифордов по различным группам и сравниваются размерности киральных колец с размерностями соответствующих когомологий многообразия Калаби-Яу.

Пятая глава является заключительной. В ней сформулированы основные результаты и выводы диссертации.

В Приложении проверяется свойство характеров минимальных моделей и доказывается взаимная локальность примарных полей минимальной модели.

Научная новизна диссертационной работы заключается в разработке и применении новых методов к исследованию зеркальной симметрии и построению спектра моделей $N=2$ суперсимметричной конформной теории поля.

Основные результаты

1. Получено уравнение, определяющее, согласно конструкции Батырева, зеркальное многообразие к орбифорду гиперповерхности Калаби-Яу типа Берглунда-Хубша. Показана эквивалентность подходов зеркальной симметрии БХК и Батырева для рассматриваемого класса многообразий Калаби-Яу.

2. Установлено соответствие между специальным классом обрифолдов Калаби-Яу X и $N=2$ суперсимметричными калибровочными линейными сигма-моделями. Проверена зеркальная версия гипотезы о равенстве статистической суммы КЛСМ Y и экспоненты кэлера потенциала метрики на пространстве модулей комплексных структур Калаби-Яу X .
3. Разработан метод построения спектра взаимно локальных полей для моделей суперконформной теории поля, которые представляют собой орбиолды произведений $N=2$ минимальных моделей типа ADE. Построены зеркально-двойственные модели. Доказан изоморфизм пространств состояний исходной и зеркальной модели.

Теоретическая и практическая значимость

Исследования, проведенные в рамках данной диссертации, носят теоретический характер и могут быть применены при исследовании геометрии многообразий Калаби-Яу, интегрируемых моделей конформной теории поля, а также для построения согласованной теории суперструн, содержащей три поколения кварков. Результаты, полученные в рамках исследования моделей суперконформной теории поля, применимы для описания физических состояний в различных моделях струнной компактификации, ассоциированными с безмассовыми состояниями спектра, которые и отождествляются с физическими полями, наблюдаемыми при энергиях доступных на современных ускорителях. Зеркальная двойственность моделей СКТП может быть использована для установления соответствия между теориями струн типа *IIA* и *IIB*.

Обоснованность и достоверность результатов

Результаты работы являются новыми и согласуются с результатами, полученными другими авторами, что подтверждает их достоверность. По материалам диссертации автором совместно с коллегами опубликовано 5 статей в рецензируемых научных изданиях из списка ВАК. Результаты исследований докладывались автором на всероссийских и международных конференциях, а также на научных семинарах ведущих институтов и университетов. Все работы выполнены при непосредственном участии диссертанта, а его вклад в эти работы является определяющим. Автореферат диссертации соответствует содержанию диссертации и опубликованным статьям, и в полной мере отражает основные положения диссертации.

Рассматриваемая диссертация представляет собой законченную научную работу, выполненную на высоком уровне по важной и актуальной для фундаментальной физики тематике. Результаты, полученные в диссертации, представляют значительный интерес в контексте исследования зеркальной симметрии, геометрии многообразий Калаби-Яу и моделей конформной теории поля.

Замечания к диссертационной работе:

В целом, изложение в диссертации носит ясный характер несмотря на техническую сложность материала. В частности, приведены необходимые предварительные сведения. К достоинствам работы следует отнести рассмотрение содержательных примеров, иллюстрирующих полученные результаты, таких как пример квинтики в разделе 3.5. Тем не менее, работа не свободна от некоторых недостатков, носящих, в основном, косметический характер.

1. Прежде всего, в работе практически полностью отсутствует обсуждение возможных физических приложений полученных результатов к построению реалистических моделей физики частиц, что, в конечном счете, и является основной мотивацией изучения многообразий Калаби-Яу в рамках теории суперструн. Было бы полезно, в частности, более подробно обсудить какие из рассмотренных моделей могут иметь отношение к построению моделей элементарных частиц (например, с точки зрения числа поколений), а какие - нет. В частности, подобное обсуждение было бы уместно в конце первого абзаца на стр. 9

2. В обсуждении ниже (4.6) утверждается, что: «С точки зрения алгебры Вирасоро, пространство состояний нашей теории будет раскладываться в сумму неприводимых представлений.» Строго говоря, это неверно для неразложимых представлений, которые часто появляются в конформной теории, и, в частности, в диссертационной работе в контексте важного анализа расширения области допустимых параметров, обсуждаемого на стр. 75. К сожалению, форма описание этой конструкции недостаточно прозрачна. В частности, не прояснена связь ограничений на параметры с требованием унитарности.

3. Стоило бы уточнить смысл символа эквивалентности в формуле (2.3). Идет ли речь об изоморфизме метрических пространств или о чем-то еще?

4. На стр. 14 содержится неточное высказывание, что вакуумные средние полей равны нулю, в то время как было лишь показано, что средние значения их вариаций равны нулю.

5. Диссертационная работа содержит ряд опечаток и мелких неточностей. Так формула (1.2) на стр. 13, написанная без конкретизации формы кинетического члена, содержит неправильный знак перед потенциалом. В определении групп когомологий в (1.27) не объяснен (впрочем, вполне стандартный) смысл индекса g . В формуле (2.9) неудачное обозначение для индекса суммирования во втором равенстве. В начале раздела 4.1 говорится, что теория поля в двумерии является конформной, если тензор энергии-импульса имеет нулевой след. Это верно не только в двумерии, но и в произвольной размерности.

6. Во многих местах не хватает ссылок на оригинальные работы, лежащие в основе рассмотрения в рамках диссертации. В частности, это относится к пункту 5 на стр. 6

основных положений, выносимых на защиту, где хорошо было бы дать ссылку на источник, в котором были рассмотрены упоминающиеся «аналогичные уравнения для минимальных моделей с инвариантами типа А». На той же странице 6 в разделе Актуальность, было бы уместно привести ключевые ссылки после слов «активно изучается как физиками, так и математиками», а на стр. 16 не помешала бы ссылка на важную работу Ньюландера и Ниренберга. На стр. 28 стоило бы дать ссылку на литературу, в которой были получены важные формулы (2.11), а на стр. 60 на формулу (3.56).

Перечисленные замечания, однако, не снижают высокой научной ценности и значимости полученных результатов.

Диссертационная работа Б.А. Еремина является научной квалификационной работой и удовлетворяет всем требованиям «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного Правительством Российской Федерации № 842 от 24 сентября 2013 года, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор, Еремин Борис Андреевич, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.3.3. Теоретическая физика.

Результаты диссертационной работы были доложены на семинаре по квантовой теории поля в ФГБУН «Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН» 12.09.2025

Отзыв составил

Высококвалифицированный главный научный сотрудник

Лаборатории квантовой теории поля

Федерального государственного бюджетного учреждения науки

«Физический институт имени П.Н.Лебедева РАН»

д.ф.-м.н., член-корр. РАН

email: vasiliev@lpi.ru

Васильев Михаил Андреевич

Отзыв обсужден и одобрен на заседании Ученого совета Отделения теоретической физики им. И.Е. Тамма Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Физический институт имени П.Н. Лебедева РАН».

Подпись заверяю

Ученый секретарь ФИАН

к.ф.-м.н.

Колобов А.В.

«26» декабря 2025 г.