

«УТВЕРЖДАЮ»

Врио директора Института теоретической
физики им. Л. Д. Ландау РАН
д.ф.-м.н., профессор


28.12.2018 И.В. Колоколов

ВЫПИСКА

из протокола заседания Сектора квантовой мезоскопии
Института теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН.
от 21 декабря 2018 г.

(Заключение о диссертации П. М. Островского
«Электронные свойства неупорядоченного графена» по месту ее выполнения.)

СЛУШАЛИ: Доклад П. М. Островского по диссертации «Электронные свойства неупорядоченного графена», представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 — теоретическая физика.

ПОСТАНОВИЛИ: Принять следующее заключение о диссертации П. М. Островского.

В диссертации П. М. Островского изучаются спектральные и транспортные свойства графена и других двумерных киральных металлов с различными типами беспорядка. В работе развита теория электронной проводимости графена при произвольной концентрации носителей, определены возможные механизмы локализации в графене, изучена полная статистика переноса заряда в графене как в баллистическом так и в диффузном режиме, разработаны эффективные методы вычисления транспортных характеристик графена с вакансиями и другими сильными примесями, построена теория локализации в двумерных киральных металлах.

1). Первая глава посвящена построению модели беспорядка в графене и объяснению спектральных и транспортных свойств неупорядоченных образцов вдали от дираковской точки. В основу классификации возможных типов примесей положена полная группа симметрии дираковского гамильтониана. Анализ нарушения примесями различных симметрий позволяет полностью перечислить все возможные типы беспорядка в графене. Эффекты беспорядка описываются в рамках двух специально разработанных методов.

Для случая слабых гауссовых примесей применяется стандартный для теории металлов метод самосогласованного борновского приближения. Однако оказывается, что в случае дираковского спектра графена этот метод обладает рядом недостатков и может использоваться лишь для качественного описания наблюдаемых явлений. Проанализированы возможные поправки, уточняющие результаты самосогласованного борновского приближения. Также построена полноценная теория слабого беспорядка на основе логарифмической перенормировки силы беспорядка. Выведены уравнения ренорм-группы с учетом всех возможных типов симметрии примесей. Получена зависимость квазиклассической плотности состояний и проводимости в зависимости от концентрации носителей.

В пределе сильных (унитарных) потенциальных примесей разработан метод самосогла-сованной T -матрицы. На его основе также вычислена зависимость плотности состояний и проводимости от концентрации носителей. Как оказалось, результаты вычисления в этой модели, в частности практически линейный рост проводимости с концентрацией, гораз-до ближе к экспериментально наблюдаемым свойствам графена. Построена эффективная фазовая диаграмма для объяснения пределов сильного и слабого беспорядка и кроссове-ра между ними. Также изучены эффекты кулоновских (заряженных) примесей и показа-но, что они наилучшим образом описывают экспериментально измеренные характеристики вдали от дираковской точки.

2). Во второй главе изучаются транспортные свойства графена со слабым беспорядком вблизи дираковской точки. Показано, что при наличии киральной симметрии беспорядок не приводит к локализации и минимальная проводимость графена принимает универсаль-ное значение $4e^2/\pi\hbar$. Различаются два типа киральной симметрии, условно обозначаемые C_0 и C_z . Первый из этих типов симметрии непосредственно соответствует структуре двух подрешеток шестиугольной решетки графена. Второй тип киральной симметрии C_z от-личается тем, что индексы подрешеток имеют противоположный смысл в двух долинах. Получено строгое доказательство того, что минимальная проводимость графена принима-ет значение $4e^2/\pi\hbar$ с учетом всех возможных диаграмм в случае C_z киральности. Любые поправки к этому значению экспоненциально малы по силе беспорядка и не могут быть найдены по теории возмущений. В случае C_0 киральности показано, что беспорядок может давать пертурбативные поправки к минимальной проводимости начиная с квадратичного порядка. При этом также доказано что ряд таких поправок сходится, а значит истинное значение минимальной проводимости по-прежнему близко к $4e^2/\pi\hbar$.

В случае беспорядка, не перемешивающего долины, выведена эффективная сигма-мо-дель и показано, что особенности дираковского гамильтониана приводят к появлению осо-бого топологического члена. Этот член принимает значения из гомотопической группы π_2 многообразия сигма-модели. В случае нарушенной симметрии по обращению времени по-лучается сигма-модель унитарного класса с топологическим членом типа Праускена и с коэффициентом $\theta = \pi/2$. Это приводит к тому, что графен оказывается в критическом состоянии, характерном для перехода квантового эффекта Холла, без всякого магнитного поля. Когда симметрия по обращению времени не нарушена, получается сигма-модель сим-плектического класса, в действии которой также присутствует топологический член типа \mathbb{Z}_2 . Вывод сигма-модели с топологическим членом такого вида проделан впервые. Также доказано, что наличие этого члена предотвращает локализацию при сколь угодно сильном беспорядке.

Особый вклад $\theta = \pi/2$ в коэффициент перед топологическим членом также сохраняется и при наличии внешнего магнитного поля. Это приводит к сдвигу на $1/2$ положений плато квантового эффекта Холла в графене с неперемешанными долинами и тем самым объясня-ет нечетное квантование холловской проводимости. Показано, что добавление даже слабого перемешивания долин приводит к возникновению также и четных плато, ширина которых, однако, может быть параметрически меньше, чем у четных. Кроме того показано, что в случае кирального беспорядка нулевой уровень Ландау остается вырожденным. При этом зависимость холловской проводимости от концентрации носителей имеет классический ли-нейный характер в области заполнения этого уровня.

3). Третья глава посвящена изучению полной статистики переноса заряда в двухкон-тактном баллистическом образце графена. Получена полная функция распределения коэф-фициентов прохождения в чистом графене при произвольной энергии и подробно проана-лизированы ее асимптотики на больших и малых энергиях. Оказывается, что на нулевой

энергии (в дираковской точке), эта функция распределения по форме в точности воспроизводит распределение Дорохова, характерное для неупорядоченных металлических проволок. Такое совпадение свойств чистого графена и грязного металла кажется случайным. Тем не менее поведение чистого графена в дираковской точке принято называть псевдодиффузным.

Также изучен металлический эффект близости — модификация плотности состояний в графене вблизи контакта с нормальным металлом. Найдено явное выражение для плотности состояний как универсальной функции параметра Ex , составленного из энергии E , отсчитанной от дираковской точки, и расстояния x до границы с металлом. На малых расстояниях плотность состояний растет обратно пропорционально x . На больших расстояниях найдены слабые фриделевские осцилляции на фоне средней плотности состояний в графене для заданной энергии E .

В явном виде получена матричная функция Грина с источниками для графена в дираковской точке. С помощью этой функции изучен баллистический транспорт в графене и найдены поправки к функции распределения прозрачностей в первом и втором порядке по силе беспорядка любой симметрии. Также продемонстрировано проявление баллистической перенормировки в функции распределения прозрачностей. Показано, весьма неожиданно, что во втором порядке слабый беспорядок приводит к относительному ослаблению дробового шума в графене. Также изучен диффузный предел и найдена полная функция распределения прозрачностей в случае слабого потенциального беспорядка. Для этого выведена нелинейная сигма-модель с источниками и вычислены квазиклассический вклад и ведущие квантовые поправки. Как и в баллистическом пределе, эффекты слабой локализации приводят к относительному подавлению дробового шума. Проведено сравнение аналитических предсказаний с численными результатами других авторов. Показано, что поведение функции распределения в диффузном пределе универсально, включая поправки слабой локализации. В то же время в баллистическом режиме результат существенно зависит от коррелятора беспорядка, как и предсказывает построенная теория.

4). В четвертой главе при помощи выведенной ранее матричной функции Грина с источниками изучаются транспортные свойства графена с сильными примесями. Показано, что потенциальные примеси в пределах одной долины приводят к сильному эффекту в проводимости. Единственная сильная примесь может изменить кондактанс макроскопического образца графена на величину порядка e^2/h . Найдены точные формулы для кондактанса и шума в образце с одной и двумя примесями в зависимости от их расположения, а также с учетом рассеяния на примеси в s - и p -каналах. Продемонстрировано согласие аналитической формулы с результатами численного моделирования на основе дираковского гамильтониана, выполненного другими авторами. Получено вириальное разложение проводимости и фактора Фано по степеням концентрации примесей.

При большой концентрации резонансных примесей проводимость графена становится диффузной. В таком пределе система оказывается в сверхпроводящем классе симметрии DIII, для которого характерна антилокализация. На основе точной формулы, выражающей кондактанс как функцию координат всех примесей в виде следа от произведения матриц, разработан чрезвычайно эффективный алгоритм развернутых функций Грина. Этот алгоритм позволяет моделировать транспортные свойства графена в диффузном режиме, полностью учитывая эффекты квантовой интерференции. Численно продемонстрирован кроссовер из баллистического в диффузный режим и воспроизведены поправки слабой антилокализации с двухпетлевой точностью.

Изучены свойства графена с вакансиями, для чего на микроскопическом уровне выведена соответствующая T -матрица. Оказывается, что благодаря блоховским осцилляциям

вакансии нужно классифицировать не по двум, а по шести подрешеткам шестиугольной решетки. Разработана соответствующая цветовая схема для вакансий. Метод развернутых функций Грина также обобщен для описания транспорта в графене с вакансиями. Как и в случае резонансных потенциальных примесей, проанализирована аналитическая формула для случая двух вакансий. Продемонстрировано согласие аналитических предсказаний с численными результатами, полученными другими авторами микроскопическим методом рекурсивных функций Грина на шестиугольной решетке. На основе метода развернутых функций Грина проведено аккуратное численное моделирование транспортных свойств в зависимости от распределения вакансий по шести подрешеткам. Показано существование неустойчивой критической точки, характеризующейся определенным значением кондактанса, в случае когда все вакансии помещены в одну подрешетку. Также изучено скейлинговое поведение вблизи этой точки по мере добавления вакансий из другой подрешетки и найден соответствующий критический индекс.

Рассмотрено поведение графена в диффузном режиме с сильными примесями при наличии внешнего магнитного поля. Выражение для матричной функции Грина с источниками обобщено для этого случая. Показано, что магнитное поле приводит к эффективной калибровке T -матриц примесей. При помощи метода развернутых функций Грина продемонстрировано возможное поведение проводимости в зависимости от силы магнитного поля, амплитуды и концентрации примесей различного типа. В частности, изучены режимы полной локализации и критическое состояние типа перехода квантового эффекта Холла. В последнем случае показано, что, в отличие от всех изучавшихся ранее систем, проводимость приближается к своему критическому значению снизу. Также обнаружен особый режим транспорта в очень сильных магнитных полях, когда количество квантов магнитного потока в образце превышает количество примесей. В таком случае проводимость оказывается по сути баллистической, а мезоскопические флуктуации кондактанса экспоненциально подавляются.

Численно и аналитически изучены транспортные свойства графена в случае, когда точечные примеси случайно размещены только в каждом третьем ряду шестиугольной решетки. Такое расположение соответствует узлам одного цвета по классификации, построенной ранее для вакансий. Оказывается, что в этом пределе проводимость имеет резко анизотропный и супердиффузный характер. Продольная проводимость растет пропорционально квадратному корню из длины образца, в то время как поперечная проводимость демонстрирует обычное диффузное поведение и от размера не зависит. Построена квазиклассическая теория для описания такого анизотропного супердиффузного режима на основе метода самосогласованной T -матрицы. Показано, что корневой рост проводимости происходит как вблизи дираковской точки, так и при высокой концентрации носителей. Также изучены квантовые поправки к анизотропной проводимости и показано, что они не влияют на качественное поведение системы.

5). Пятая глава посвящена общим вопросам локализации в двумерных киральных металлах. Ее результаты имеют более широкое применение и позволяют понять не только свойства неупорядоченного графена, но и других систем с аналогичной симметрией. На основе репличной нелинейной сигма-модели изучаются возможные механизмы локализации в неупорядоченном металле с киральной симметрией. Показано, что, благодаря наличию особой $U(1)$ степени свободы, в сигма-модели возможно возникновение сингулярных возбуждений типа вихрей. В отличие от обыкновенных вихрей в абелевой $U(1)$ теории, вихри в сигма-модели характеризуются также дополнительной степенью свободы, которая живет в соответствующем проективном пространстве. Выведены уравнения ренорм-группы для такой модели, которые, помимо обычной пертурбативной перенормировки, также учи-

тывают возможные флуктуации с образованием диполей вихрь-антивихрь по аналогии с механизмом Березинского—Костерлица—Таулесса (БКТ). Из-за неабелевой структуры вихрей перенормировка сигма-модели оказывается более сложной, чем в стандартной теории БКТ. Показано, что механизм распаривания вихрей может приводить к фазовому переходу в сигма-модели, который соответствует локализационному переходу металл-изолятор. Причем, в отличие от БКТ, получается обычный переход второго рода, характеризующейся неустойчивой критической точкой в трехмерном пространстве параметров модели.

Также изучено возможное влияние топологических членов, которые возникают в сигма-модели для неупорядоченного дираковского гамильтониана, на вихри. Оказывается, что в моделях с топологическими членами вихри приобретают дополнительную внутреннюю степень свободы $U(1)$ или $O(1) = \mathbb{Z}_2$ типа. Благодаря усреднению по флуктуациям этой внутренней степени свободы, вклад вихрей в статистическую сумму в точности зануляется, если в действии сигма-модели есть дополнительный топологический член. Тем самым доказано, что нетривиальная топология исходного гамильтониана делает механизм локализации на основе распаривания вихрей неэффективным. Как следствие неупорядоченные дираковские киральные металлы не испытывают локализации даже при сильном беспорядке.

6). В шестой главе рассматривается задача о плотности состояний в двумерном киральном металле с вакансиями. Из-за классических флуктуаций вакансий между двумя подрешетками возможно возникновение локального дисбаланса, который приводит к конечной плотности нулевых мод и открывает щель в плотности состояний. Такие классические флуктуации можно учесть в рамках нелинейной сигма-модели при помощи дополнительно релевантного (без градиентов) члена в действии. Этот член придает массу $U(1)$ степени свободы и эффективно понижает симметрию модели по аналогии с квантовой аномалией. В итоге пертурбативная перенормировка модели радикальным образом изменяется, что приводит к новому типу критического поведения в центре зоны. Показано, что при наличии вакансий корреляционная длина расходится $\propto |\ln E|^{1/2}$, а плотность состояний имеет сингулярность $\propto |E|^{-1} |\ln E|^{-3/2}$. Эти предсказания подтверждаются масштабными численными экспериментами для графена с вакансиями, выполненными другими авторами.

Рассмотрен также случай среднего дисбаланса, когда вакансии распределены по подрешеткам неравномерно во всем образце. В этом случае в средней плотности состояний возникает щель, а флуктуации распределения вакансий создают экспоненциально убывающий подщелевой «хвост». Для его описания выведены уравнения на специальную седловую точку действия (инстантон), которая нарушает репличную симметрию. Несмотря на то, что аналитическое решение этих уравнений не представляется возможным, получено точное выражение для действия инстантона, справедливое при любых энергиях. На его основе предсказан закон убывания плотности состояний внутри щели. Также показано, что на самых малых энергиях плотность состояний обращается в ноль по степенному закону с показателем, который пропорционален средней силе дисбаланса.

Основные результаты диссертации опубликованы в 14 работах:

1. P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, and A. D. Mirlin, *Electron transport in disordered graphene*, Phys. Rev. B **74**, 235443 (2006).
2. P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, and A. D. Mirlin, *Quantum criticality and minimal conductivity in graphene with long-range disorder*, Phys. Rev. Lett. **98**, 256801 (2007).
3. P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, and A. D. Mirlin, *Conductivity of disordered graphene at half filling*, Eur. Phys. J. Spec. Top. **148**, 63 (2007).

4. P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, and A. D. Mirlin, *Theory of anomalous quantum Hall effects in graphene*, Phys. Rev. B **77**, 195430 (2008).
5. A. Schuessler, P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, and A. D. Mirlin, *Analytic theory of ballistic transport in disordered graphene*, Phys. Rev. B **79**, 075405 (2009).
6. M. Titov, P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, A. Schuessler, and A. D. Mirlin, *Charge transport in graphene with resonant scatterers*, Phys. Rev. Lett. **104**, 076802 (2010).
7. M. Titov, P. M. Ostrovsky, and I. V. Gornyi, *Metallic proximity effect in ballistic graphene with resonant scatterers*, Semicond. Sci. Tech. **25**, 034007 (2010).
8. A. Schuessler, P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, and A. D. Mirlin, *Full counting statistics in disordered graphene at Dirac point: from ballistics to diffusion*, Phys. Rev. B **82**, 085419 (2010).
9. P. M. Ostrovsky, M. Titov, S. Bera, I. V. Gornyi, and A. D. Mirlin, *Diffusion and criticality in undoped graphene with resonant scatterers*, Phys. Rev. Lett. **105**, 266803 (2010).
10. J. Schelter, P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, B. Trauzettel, and M. Titov, *Color-dependent conductance of graphene with adatoms*, Phys. Rev. Lett. **106**, 166806 (2011).
11. E. J. König, P. M. Ostrovsky, I. V. Protopopov, and A. D. Mirlin, *Metal-insulator transition in two-dimensional random fermion systems of chiral symmetry classes*, Phys. Rev. B **85**, 195130 (2012).
12. S. Gattenlöhner, W.-R. Hanne, P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, A. D. Mirlin, and M. Titov, *Quantum Hall criticality and localization in graphene with short-range impurities at the Dirac point*, Phys. Rev. Lett. **112**, 026802 (2014).
13. P. M. Ostrovsky, I. V. Protopopov, E. J. König, I. V. Gornyi, A. D. Mirlin, and M. A. Skvortsov, *Density of states in a two-dimensional chiral metal with vacancies*, Phys. Rev. Lett. **113**, 186803 (2014).
14. S. Gattenlöhner, I. V. Gornyi, P. M. Ostrovsky, B. Trauzettel, A. D. Mirlin, and M. Titov, *Lévy flights due to anisotropic disorder in graphene*, Phys. Rev. Lett. **117**, 046603 (2016).

Опубликованные по теме диссертации работы в достаточной мере отражают ее содержание. Объем и уровень проведенного исследования, а также новизна и актуальность полученных результатов, свидетельствуют о том, что диссертация П. М. Островского удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК к докторским диссертациям, а ее автор заслуживает присвоения ему ученой степени доктора физико-математических наук.

На основании вышеизложенного Сектор квантовой мезоскопии ИТФ им. Л. Д. Ландау РАН рекомендует диссертацию П. М. Островского «Электронные свойства неупорядоченного графена» к публичной защите по специальности 01.04.02 — теоретическая физика.

Зав. сектором квантовой мезоскопии
ИТФ им. Л. Д. Ландау РАН
д.ф.-м.н., проф.

 М. В. Фейгельман
«21» декабря 2018 г.