

На правах рукописи

Сподынейко Лев Александрович

Институт Теоретической Физики им. Л.Д. Ландау РАН

Выпускная квалификационная работа

по теме

Интегрируемые структуры в теории струн

По направлению подготовки: 03.06.01 ФИЗИКА И АСТРОНОМИЯ

По направленности подготовки: 01.04.02 – «Теоретическая физика»

Научный Руководитель

Белавин А.А.,

д-р физ.-мат. наук, чл.-кор. РАН

Москва – 2018

Оглавление

Введение	5
I Часть I. Компактификация струн на многообразия Калаби-Яу.	7
1 Теория струн	11
1.1 Десятимерная супергравитация	11
1.2 Квантовая гравитация на мировом листе	12
2 Суперсимметрия и $N = 2$ суперконформная симметрия	17
2.1 $N = 2$ суперконформная алгебра	17
2.2 $N = 2$ суперконформная симметрия для NSR струны	20
2.2.1 Материальный сектор	20
2.2.2 Духовый сектор	21
2.2.3 $N = 2$ в NSR струне и суперзаряд	23
2.3 GSO-проекция и действие суперзаряда	24
2.4 Безмассовые состояния при $d = 10$	26
2.4.1 Вертексные операторы	26
2.4.2 Действие суперзаряда	27
2.5 Безмассовые состояния открытой струны при $d = 4$	27
2.5.1 Киральный мультиплет	27
2.5.2 Действие суперзаряда	28
2.5.3 Векторный мультиплет	29
3 Компактификация на Калаби-Яу и киральные поля	31
3.1 Киральные поля в $N = 2$ SCFT	31
3.2 Связь киральных полей с кохомологиями Дабу	32
3.3 Киральные поля из гармонических форм	33
3.4 Вертексные операторы физических состояний	33
4 Эффективное действие и топологическая теория струн	37
4.1 Эффективное действие	37
4.2 Топологическая теория струн	38
5 Вычисление плоских координат для Фробениусова многообразия	41
5.1 Предварительные сведения	41
5.2 Выражение плоских координат через осциллирующие интегралы	43
5.3 Деформированное киральное кольцо $\widehat{SU}(3)_4$	45
5.4 Прямое вычисление плоских координат	45
5.4.1 Резонансы и модули примитивной формы	46
5.4.2 Заключение	47

II Деформированные сигма-модели и теории дуальные к ним	51
6 Интегрируемые модели Тодовского типа	55
6.1 W -алгебра с нетривиальным током спина 3	56
6.2 Регулярные диаграммы: $W(\mathfrak{sl}(m m'))$ алгебры	59
6.2.1 Флип преобразование: фермионное отражение	60
6.2.2 Заключительные замечания	63
7 Нелинейная сигма-модель	67
7.1 Дуальные Лагранжианы	71
7.1.1 Конформная теория поля и амплитуды отражения	75
7.2 Уравнения потока Риччи	78
7.2.1 Метрика для деформированной $O(5)$ модели	81
7.2.2 Метрика $O(6)$ модели	83
7.3 Заключение	85
Приложение	87
7.4 Тригонометрическая деформация матрицы рассеяния $O(N)$ модели	87
7.5 Интегралы движения	88
7.6 Параметризация групповых элементов	89
7.7 Дуальная метрика для деформированной $O(6)$ сигма-модели	90
7.8 Решение уравнения (6.1.23) в бозонном случае	92
7.9 Экзотические решения	93
Заключение	95
Литература	95

Введение

Основным предметом данной работы является применение теории интегрируемых систем к изучению физики теории струн. Работа разделена на две независимые части. В первой части изучается применение топологической теории поля для получения низкоэнергетического действия теории струн, компактифицированной на многообразии Калаби-Яу. Во второй части, мы изучим дуальное описание деформированных сигма-моделей с таргет-пространств S^N , которая является частью модели, описывающей динамику ПВ струны на пространстве $AdS_N \times S^N$. Связующим звеном этих двух частей является общий подход к изучению проблем, а именно применение хорошо развитой теории интегрируемых моделей двумерной квантовой теории поля.

Теория струн является очень сложной и многогранной моделью, объединяющей все фундаментальные взаимодействия. Вследствие этого, современные методы математической физики позволяют проанализировать её поведение только в узком классе решений. Развитие и изучение новых методов её анализа представляет важную и актуальную проблему. Теория струн, в своем пертурбативном описании, использует язык двумерной конформной теории поля, которая описывает динамику струны с точки зрения наблюдателя живущего на мировом листе. За последние 30 лет был достигнут большой прогресс в понимании двумерных интегрируемых систем, и двумерной конформной теории поля в частности. В связи с этим разумно использовать эту развитую технику для поиска и анализа новых решений теории струн. Развитию и изучению этих применений посвящена данная работа.

В первой части работы мы будем изучать теорию струн движущуюся в многообразии Калаби-Яу. Исторически данная модель возникла при попытке связать гетеротическую теорию струн с физикой частиц на энергии порядка энергии частиц на ускорителях. Однако впоследствии двумерная структура, лежащая в основе суперсимметрии в пространстве-времени, так называемая $N = 2$ суперконформная симметрия, привела к целому ряду применений в алгебраической геометрии и четырехмерных калибровочных теориях с расширенной суперсимметрией. Мы начнем следующую часть с изложения стандартных результатов, таких как квантование струны, вычисление спектра и GSO-проекция, но с более интенсивным применением $N = 2$ суперконформной алгебры. Точнее, мы будем использовать $N = 2$ суперконформную алгебру в, так называемом, духовом секторе. Этот метод является оригинальными, хотя и не приводят к новым результатам, и он проливает свет на причину существования $N = 2$ суперконформной алгебры в духовом сектор: она частично отвечает за суперсимметрию струны в десяти измерениях.

Далее в этой части, мы изучим плоские координаты на многообразии Фробениуса модулей Калаби-Яу. Вычисление плоских координат является ключевым шагом при вычислении эффективного действия безмассовых мод. Главным результатом данной части работ является проверка недавно предложенного явного выражения этих координат через осциллирующие координаты на примере модели $\widehat{SU(3)}_4$.

Во второй части работы, мы будем изучим новую дуальность между интегрируемыми моделями типа Тода и деформированными сигма-моделями с $O(N)$ симметрией. Предварительно мы приведем оригинальную конструкцию конформных моделей с расширенной нелинейной W -симметрией с помощью БРСТ-редукции свободной теории. Данные модели являются обобщениями моделей Тода на случай супералгебр Ли. Мы полагаем, что дальнейшее развитие этих методов может привести к полной, или хотя бы частичной, классификации W -алгебры. Помимо этого мы покажем, по аналогии с классическими моделями Тода, что деформация этой конформной теории специальным возмущением приводит к интегрируемой модели.

После формулировки и построения этих теории мы покажем, что эти теории оказываются дуальными, в смысле сильной/слабой связи, деформированным сигма-моделям с тригонометрической матрицей рассеяния. Основным пример, который мы будем изучать будут модели с $O(N)$ симметрией. Такой выбор в первую очередь связан с тем, что $O(N)$ симметрия является частью бозонной алгебры симметрий ПВ струны на пространстве $AdS_5 \times S_5$. Поэтому мы ожидаем, что результаты данной работы будут иметь применения в изучении AdS/CFT соответствия и, в частности, феномена интегрируемости этой модели.

Часть I

Часть I. Компактификация струн на многообразия Калаби-Яу.

Основной объектом этой части работы будет теория струн типа ПА или типа ПВ компактифицированная на многообразии Калаби-Яу. Исторически, многообразия Калаби-Яу были введены в теории струн с целью построения моделей гетеротических струн с феноменологически приемлемой $N = 1$ суперсимметрией в четырехмерном пространстве-времени при низких энергиях (порядка нескольких ТэВ). Однако, со временем стало понятно, что D-браны, которые являются непертурбативными объектами в ПА/В теориях, могут быть использованы для построения калибровочных моделей типа Стандартной модели с киральной материей. Вариант с использованием D-бран в ПА/В имеет ряд преимуществ по сравнению со своим гетеротическим коллегой. Во-первых, в гетеротической струне калибровочные бозоны Стандартной модели являются замкнутыми струнами, также как и гравитоны. В результате отношение константы связи поля Янга-Миллса (на масштабе порядка Великого Объединения с учетом ренорм-группового потока) к гравитационной постоянной фиксировано и не зависит от объема шестимерного компактного многообразия и от струнной константы связи. С другой стороны, в моделях с бранами сектор калибровочных взаимодействий и сектор гравитационных взаимодействий происходят из разных физических объектов, а именно бран (или открытых струн) и закрытых струн соответственно. Такая разная природа этих секторов позволяет буквально разделить их, делая свойства более-менее не зависимыми (например, можно собрать все браны в одну точку во внутреннем многообразии, делая свойства калибровочного сектора чувствительным в основном только к некоторой окрестности этой точки). Это дает гораздо больший контроль над свойствами и параметрами теорий по сравнению с гетеротической струной: например, это позволяет создать иерархию между типичной массой массивных струн и массой Планка. Второе преимущество сценариев с бранами по сравнению с гетеротическими аналогами это отсутствие необходимости нарушения огромной калибровочной группы $E_8 \times E_8$ или $SO(32)$ до группы Стандартной модели $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. В ПА/В моделях, используя стопку нескольких бран, можно построить модель, которая сразу же имеет соответствующую относительно маленькую группу и не требует её дальнейшего нарушения. В связи с вышеупомянутыми преимуществами, с начала этого тысячелетия основным фокусом феноменологических применений теории струн стала модель типа ПВ (ПА имеет ряд своих недостатков связанного с неподходящими размерностями D-бран, поэтому рассматривается реже).

К сожалению, прямое построение феноменологически приемлемых решений имеет целый ряд трудностей, связанных с решением сложных сильно нелинейных уравнений Эйнштейна с источниками в виде D-бран и флаксов¹, а также с неприменимостью стандартной струнной теории возмущений. В связи с этими трудностями, один из подходов заключается в построении решения в два этапа. На первом этапе ПА/В струна компактифицируется на шестимерное многообразие Калаби-Яу с сохранением $N = 2$ суперсимметрии и большим числом безмассовых бозонных частиц, называемых модулями. На втором этапе добавляются материальные источники в виде бран и флаксов, которые нарушают всю или часть суперсимметрии, а также создают эффективную массу модулям. При этом введение материальных полей рассматривается как слабое возмущение как в смысле уравнений Эйнштейна так и в смысле струнной теории возмущений. Результирующая геометрия является достаточно близкой к геометрии Калаби-Яу, где отсутствуют источники и $N = 2$ суперсимметрия не нарушена. Поэтому изучение многообразий Калаби-Яу представляет интересную физическую задачу, которая имеет важное значение для применения теории струн к физике частиц. Помимо этой физической мотивации, многообразия Калаби Яу и теория струн имеет целый ряд математически интересных свойств и применений, таких как миррор-симметрия.

Основной целью данной работы является развитие методов изучения геометрии пространства модулей многообразий Калаби Яу с помощью методов двумерной конформной теории поля. Сам факт возможности вычисления с помощью двумерной конформной теории поля подразумевает отсутствие сильно меняющих геометрию флаксов и бран, которые создают потенциал для дилатона и делают теорию возмущений неприменимой. Центральным объектом для нас будет низкоэнергетическое эффективное действие, вычисление которого элегантно математическим приемом может быть сведено к вычислению в топологической двумерной конформной теории.

В следующей главе мы напомним основные элементы компактификации теории струн на Калаби

¹Так называют потоки калибровочного поля в компактном многообразии, которые, в силу его компактности, могут замыкаться сами на себе.

Яу. В заключительной главе этой части мы опишем новый способ вычисления плоских координат, и приведем пример вычисления в модели Казамы-Сузуки $\widehat{SU}(3)_4$.

Глава 1

Теория струн

1.1 Десятимерная супергравитация

В современном понимании теории струн имеется следующая картина: существует некая, пока что не сформулированная, М-теория¹, которая плоское 11-мерное пространство как один из возможных вакуумов, для которого спектр её низкоэнергетических это 11-мерная максимально суперсимметричная гравитация. Пертурбативные теории струн возникают как описание этой теории в определенных её пределах. Известны 5 таких теорий: две гетеротических струны с калибровочными симметриями $E_8 \times E_8$ и $SO(32)$, две теории типа IIA и IIB, и одна типа I. Все остальные струнно-пертурбативные пределы М-теории можно получить, используя компактификации этих пяти. Более того, эти 5 теории связаны различными дуальностями.

В данной работе для нас основной интерес будет представлять теории струн типа IIA и IIB и в дальнейшем мы будем рассматривать только их. Спектр теорий струн в 10ти измерениях содержит бесконечное множество частиц различных спинов, масс и зарядов взаимодействующих нетривиальным образом. На данный момент, единственный известный способ вычисления спектра и взаимодействия струн состоит в использовании пертурбативной формулировки в терминах двумерной конформной гравитации. Однако, при низких энергиях можно пренебречь всеми возбуждениями ненулевой массы, а также взаимодействиями с высшими производными. Оставшийся после этого спектр безмассовых мод полностью определяется симметриями, также как и их взаимодействие. Соответствующие модели называются супергравитациями типа IIA и IIB соответственно.

Бозонный спектр IIA супергравитации состоит из гравитона $G_{\mu\nu}$, антисимметричного тензора $B_{\mu\nu}$, дилатона Φ , калибровочного бозона C_μ и антисимметричного тензора третьего ранга $C_{\mu\nu\rho}$. Фермионный спектр состоит из двух гравитино $\psi_\mu^{(-)}$ и $\psi_\mu^{(+)}$ разных спиральностей, а также двух дилатино разных спиральностей $\lambda_\mu^{(-)}$ и $\lambda_\mu^{(+)}$.

Бозонный спектр IIB супергравитации состоит из гравитона $G_{\mu\nu}$, антисимметричного тензора $B_{\mu\nu}$, дилатона Φ , аксиона C , антисимметричного тензора второго ранга $C_{\mu\nu}$ и антисимметричного тензора четвертого ранга $C_{\mu\nu\rho\sigma}^+$ с самодульной напряженностью. Фермионный спектр состоит из двух гравитино $\psi_\mu^{(-)}$ и $\tilde{\psi}_\mu^{(-)}$ одной спиральности, а также двух дилатино одной спиральности $\lambda_\mu^{(+)}$ и $\tilde{\lambda}_\mu^{(+)}$.

¹Здесь мы понимаем М-теорию во всех её мыслимых проявлениях, а не только как теорию в плоском 11-мерном пространстве

1.2 Квантовая гравитация на мировом листе

Можно выделить два подхода к квантованию суперструны. Первый подход состоит в использовании интеграла по путям, который, грубо говоря, можно написать в виде

$$Z = \sum_{\text{спиновые структуры}} \int \frac{\mathcal{D}[\text{материя}]\mathcal{D}[\text{суперметрики}]}{\text{vol}(\text{суперконформные преобразования})} \exp(-S(\text{материя})) \quad (1.2.1)$$

т.е. двумерная квантовая супергравитация с материей, причем помимо диффеоморфизмов, конформные преобразования также считаются калибровочной симметрией. Теории струн в десяти плоских измерениях отвечает материя состоящая из десяти бозонов и десяти майорановских фермионов.

Второй подход использует канонический формализм и может пониматься как каноническое квантование системы со связями. В качестве системы тут выступает все та же система 20 свободных бозонов и фермионов, а в качестве связей выступает суперконформная симметрия. Оба этих ингредиента видны в подынтегральном выражении в (1.2.1). Однако, пока что ничего не имеет аналога в каноническом формализме сумме по спиновым структурам. Последнее требует введения, так называемых Неве-Шварццовского (NS) и Рамоновского (R) секторов в гильбертово пространство теории.

В дальнейшем мы будем придерживаться более алгебраической точке зрения и соответственно использовать канонический формализм. Стандартная литература по квантованию струны включает [1–4]. Вкратце опишем эту процедуру.

Как обычно в теории струн мы будем использовать язык двумерной конформной теории поля [5]. Это связано с тем, что любая версия теории струн обладает конформной инвариантностью.

Двумерная конформная теория поля это теория поля, в которой след тензора энергии импульса равен нулю

$$T_a^a = 0. \quad (1.2.2)$$

Мы будем интересоваться локальными полями в этой теории. Важной характеристикой полей в конформной теории поля является их конформная размерность. Конформные размерности $\Delta, \bar{\Delta}$ поля Φ определяются как

$$\Phi(z, \bar{z}) = \lambda^\Delta \lambda^{\bar{\Delta}} \Phi(\lambda z, \lambda \bar{z}). \quad (1.2.3)$$

В конформной теории поля удобно пользоваться операторными разложениями. Они дают разложение двух полей в корреляционных функциях $\langle \dots \Phi_1(z, \bar{z}) \Phi_2(w, \bar{w}) \dots \rangle$ в виде комбинации локальных полей, когда операторы расположены близко к друг другу $z \rightarrow w$. Например, операторное разложение тензора энергии-импульса самого с собой имеет вид

$$T(z)T(w) \sim \frac{c}{2(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{z-w}\partial T(w) + \text{регулярные члены}. \quad (1.2.4)$$

Здесь и далее мы будем опускать то, что это выражение понимается как часть корреляционной функции. Также мы будем писать в операторных разложениях только сингулярную часть.

Вариация полей при бесконечно малых преобразованиях $z \rightarrow z + \varepsilon(z)$ дается формулой

$$\delta_\varepsilon \Phi = \int dz \varepsilon(z) T(z) \Phi(0, 0). \quad (1.2.5)$$

Соответственно, выбирая $\varepsilon(z) = z^{n+1}$, определим операторы

$$L_n = \int dz z^{n+1} T(z), \quad (1.2.6)$$

где интеграл берется по контуру содержащему точку $z = 0$, в которой находится поле, на которое действует L_n . Используя операторное разложение (1.2.4), можно показать, что коммутатор этих операторов имеет вид

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m,-n}. \quad (1.2.7)$$

Этот пример показывает, что операторное разложение голоморфных токов $T(z)$ эквивалентно коммутационным соотношениям (1.2.7) их Фурье компонент. Аналогично можно определять Фурье компоненты и коммутационные соотношения для других голоморфных токов.

Действие материальной части свободной 10-ти мерной струны Навье-Шварца-Рамона [6, 7] имеет вид

$$S_m = \int d^2 z \left[\partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu + \psi_\mu \bar{\partial} \psi^\mu + \tilde{\psi}_\mu \partial \tilde{\psi}^\mu \right], \quad (1.2.8)$$

где $\mu = 0, \dots, 9$, $X_\mu, \psi_\mu, \tilde{\psi}_\mu$ – поля материи. Здесь и далее мы будем интересоваться только голоморфной частью полей. Эти поля имеют следующие операторные разложения

$$\begin{aligned} X_\mu(z) X_\nu(0) &\sim -\eta_{\mu\nu} \ln z, \\ \psi_\mu(z) \psi_\nu(0) &\sim \frac{\eta_{\mu\nu}}{z}, \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

где метрика $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$. Все остальные операторные разложения регулярны. Поля ψ_μ имеют следующие периодические условия при обходе вокруг вертексного оператора в точке $z = 0$

$$\psi_\mu(e^{2\pi i} z) = e^{2\pi i \nu} \psi_\mu(z), \quad (1.2.10)$$

При $\nu = 1/2$, говорится, что вертексный оператор в точке $z = 0$ находится в R-секторе, а при $\nu = 0$ в NS-секторе.

Как хорошо известно эта теория обладает $N = 1$ суперконформной симметрией. Соответствующие тензора энергии-импульса и супертоки имеют вид

$$\begin{aligned} T^m &= -\frac{1}{2} \partial X^\mu \partial X_\mu - \frac{1}{2} \psi^\mu \partial \psi_\mu, \\ G^m &= i \psi^\mu \partial X_\mu, \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

Здесь и ниже буква m в выражениях типа T^m будет обозначать принадлежность к материальному сектору.

Токи $T^m(z)$ и $G^m(z)$ удовлетворяют соотношениям $N = 1$ суперконформной алгебры

$$\begin{aligned} T(z)T(0) &\sim \frac{c}{2z^4} + \frac{2}{z^2}T(0) + \frac{1}{z}\partial T(0), \\ T(z)G(0) &\sim \frac{3}{2z^2}G(0) + \frac{1}{z}\partial G(0), \\ G(z)G(0) &\sim \frac{2c}{3z^3} + \frac{2}{z}T(0), \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

с центральным зарядом $c = c_m = 15$. Если разложить токи по модам $T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$, $G(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \nu + 1/2} G_r z^{-r-3/2}$, то коммутационные соотношения для мод примут вид

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m, -n}, \quad (1.2.13)$$

$$\{G_r, G_s\} = 2L_{r+s} + \frac{c}{12}(4r^2 - 1)\delta_{r, -s}, \quad (1.2.14)$$

$$[L_m, G_r] = \frac{m - 2r}{2}G_{m+r}, \quad (1.2.15)$$

где $n, m \in \mathbb{Z}$, $r, s \in \mathbb{Z} + \nu + 1/2$. Соответственно, ток $G(z)$ раскладывается по целым модам в R-секторе и по полуцелым в NS-секторе.

Из этих коммутационных соотношений следует одно важное неравенство. Для произвольного поля Φ в R-секторе напомним

$$\left| G_0 |\Phi\rangle \right|^2 = \frac{1}{2} \langle \Phi | \{G_0, G_0\} | \Phi \rangle = \langle \Phi | \left(L_0 - \frac{c}{24} \right) | \Phi \rangle = \left(\Delta - \frac{c}{24} \right) \langle \Phi | \Phi \rangle \geq 0. \quad (1.2.16)$$

Отсюда следует, что в унитарной теории размерности всех полей в R-секторе удовлетворяют соотношению $\Delta \geq \frac{c}{24}$, причем равенство достигается тогда и только тогда когда $G_0|\Phi\rangle = 0$. Поля с конформной размерностью $\Delta = \frac{c}{24}$ и нулевым пространственно-временным импульсом называются рамоновскими вакуумами и будут важны для нас в дальнейшем.

Для полей материи имеется 32 рамоновских вакуума $S_\alpha(z)$, с $\alpha = 1, \dots, 32$ которые преобразуются как 32-компонентный спинор. А именно

$$\psi^\mu(z)S_\alpha(0) \sim \frac{1}{\sqrt{2z}}\Gamma_{\alpha\beta}^\mu S_\beta(0), \quad (1.2.17)$$

где Γ^μ – гамма-матрицы размера 32×32 . Заметим, что степень $1/2$ в правой части приводит к знаку минус при обходе поля $\psi_\mu(z)$ вокруг нуля, как и должно быть в R-секторе по формуле (1.2.10).

В теории струн токи $T^m(z), G^m(z)$ являются связями. По этой алгебре связей можно построить БРСТ-заряд. При этом нужно ввести два фермионных духа b, c , соответствующих связям генерируемым током $T^m(z)$, и два бозонных духа β, γ , соответствующих $G^m(z)$. В результате БРСТ-заряд примет вид

$$Q_B = \int dz \left[cT^m + \gamma G^m + \frac{1}{2} (cT^{gh} + \gamma G^{gh}) \right]. \quad (1.2.18)$$

Физические состояния Φ определяются как кохомологии БРСТ-заряда

$$\begin{aligned} Q_B \Phi &= 0, \\ \Phi &\simeq \Phi + Q_B \Psi. \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

Последняя формула означает, что поля, отличающиеся на БРСТ-точный член $Q_B \Psi$ для любого поля Ψ , физически эквивалентны. Так определенные физические состояния имеют положительную норму и их спектр совпадает со спектром суперструны в калибровке светового конуса.

Поля духов имеют следующие операторные разложения

$$\begin{aligned} \beta(z)\gamma(0) &\sim -\frac{1}{z}, \\ b(z)c(0) &\sim \frac{1}{z}. \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

Действие духов имеет вид

$$S_{gh} = \int d^2z [b\bar{\partial}c + \beta\bar{\partial}\gamma + h.c.]. \quad (1.2.21)$$

Это действие обладает $N = 1$ суперконформной симметрией. Соответствующие токи имеют вид

$$\begin{aligned} T^{gh} &= -\partial bc - 2b\partial c - \frac{1}{2}\partial\beta\gamma - \frac{3}{2}\beta\partial\gamma, \\ G^{gh} &= \partial\beta c + \frac{3}{2}\beta\partial c - 2b\gamma. \end{aligned} \quad (1.2.22)$$

Они удовлетворяют соотношениям суперконформной алгебры с центральным зарядом $c_{gh} = -15$.

Монодромия полей β, γ также зависит от сектора. Для того, чтобы БРСТ-заряд был корректно определен, подынтегральное выражение в (1.2.18) должно быть периодически при обходе вокруг нуля. Поэтому поля β, γ должны иметь ту же монодромию, как и ψ_μ , т.е. духовая и материальная составляющие вертексного оператора в точке $z = 0$ должны быть в одном и том же секторе

$$\begin{aligned} \psi_\mu(e^{2\pi i}z) &= e^{2\pi i\nu} \psi_\mu(z), \\ \beta(e^{2\pi i}z) &= e^{2\pi i\nu} \beta(z), \\ \gamma(e^{2\pi i}z) &= e^{2\pi i\nu} \gamma(z), \end{aligned} \quad (1.2.23)$$

где $\nu = 1/2$ в R-секторе, $\nu = 0$ в NS-секторе.

$\beta - \gamma$ система имеет ряд вакуумов $V_q(z)$ параметризуемых полуцелым числом q , которое называется номером картины [8], а само пространство состояний, порождаемое полями $\psi_\mu, \partial X_\mu, \beta, \gamma, b, c$ из вакуума V_q , называется картиной. Сами эти пространства до наложения на них связей не изоморфны друг другу при различных значениях q . Вакуумы V_q определяются условиями

$$\begin{aligned}\beta(z)V_q(0) &\sim O(z^q), \\ \gamma(z)V_q(0) &\sim O(z^{-q}).\end{aligned}\tag{1.2.24}$$

Заметим, что из этих формул следует, что при обходе вокруг нуля поля β, γ приобретают фазу $e^{2\pi i q}$. Соответственно, для того чтобы вертекс V_q был в NS-секторе, q должно быть целым. В R-секторе q должно быть соответственно полуцелым.

Можно строить вертексы и искать физические состояния для разного выбора картины. Известно [8], что между физическими состояниями (БРСТ-когомологиями) в разных картинах имеется изоморфизм. Он осуществляется так называемым оператором смены картины. Удобно в качестве канонических выбрать картину с $q = -1/2$ в R-секторе и $q = -1$ в NS-секторе.

Общий вид вертекса в NS-секторе дается формулой

$$P(\psi_\mu, \partial X_\mu, \beta, \gamma, b, c)V_q e^{ik_\mu X^\mu},\tag{1.2.25}$$

где P – некоторый полином от своих аргументов, k_μ – импульс частицы. При этом q должно принимать целые значения.

Общий вид вертекса в R-секторе в свою очередь это

$$P^\alpha(\psi_\mu, \partial X_\mu, \beta, \gamma, b, c)S_\alpha V_q e^{ik_\mu X^\mu},\tag{1.2.26}$$

где P^α – некоторый полином от своих аргументов, принимающий значения в 32-компонентном спиновом пространстве, k_μ – импульс частицы. При этом q должно принимать полуцелые значения.

Важными примерами таких вертексов для нас будут вертексы бозона и фермиона в картинах -1 и $-1/2$

$$\begin{aligned}V_{NS} &= \xi_\mu \psi^\mu V_{-1} e^{ik_\mu X^\mu} \\ V_R &= u^\alpha S_\alpha V_{-1/2} e^{ik_\mu X^\mu}\end{aligned}\tag{1.2.27}$$

где u_α, ξ_μ – поляризации частиц.

Глава 2

Суперсимметрия и $N = 2$ суперконформная симметрия

2.1 $N = 2$ суперконформная алгебра

В этом разделе мы определим $N = 2$ суперконформную алгебру, а также ее изоморфизм, т.н. спектральный поток, который будет играть решающую роль в дальнейшем.

$N = 2$ суперконформная алгебра состоит из токов $T(z)$, $G^\pm(z)$, $J(z)$. Ток $T(z)$ – это тензор энергии-импульса размерности 2, $G^\pm(z)$ – два супертока размерности $3/2$ и поле $J(z)$ – $U(1)$ -ток размерности 1, который соответствует R -симметрии $N = 2$ супералгебры. Они имеют следующие операторные разложения

$$\begin{aligned}T(z)G^\pm(0) &\sim \frac{3}{2z^2}G^\pm(0) + \frac{1}{z}\partial G^\pm(0), \\T(z)J(0) &\sim \frac{1}{z^2}J(0) + \frac{1}{z}\partial J(0), \\G^+(z)G^-(0) &\sim \frac{2c}{3z^3} + \frac{2}{z^2}J(0) + \frac{2}{z}T(0) + \frac{1}{z}\partial J(0), \\G^\pm(z)G^\pm(0) &\sim 0, \\J(z)G^\pm(0) &\sim \pm \frac{1}{z}G^\pm(0), \\J(z)J(0) &\sim \frac{c}{3z^2}.\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

Эта алгебра содержит $N = 1$ суперконформную подалгебру с токами $T(z)$, $G(z) = (G^+ + G^-)/\sqrt{2}$ с тем же центральным зарядом c . Если разложить токи по модам

$$\begin{aligned}G^\pm(z) &= \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \pm \nu} G_r^\pm z^{-r-3/2}, \\T(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}, \\J(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n z^{-n-1},\end{aligned}\tag{2.1.2}$$

то коммутационные соотношения для мод примут вид

$$\begin{aligned}
[L_m, G_r^\pm] &= \left(\frac{m}{2} - r\right) G_{m+r}^\pm, \\
[L_m, J_n] &= -nJ_{m+n}, \\
\{G_r^+, G_s^-\} &= 2L_{r+s} + (r-s)J_{r+s} + \frac{c}{3} \left(r^2 - \frac{1}{4}\right) \delta_{r+s,0}, \\
\{G_r^\pm, G_s^\pm\} &= 0, \\
[J_n, G_r^\pm] &= \pm G_{r+n}^\pm, \\
[J_m, J_n] &= \frac{c}{3} m\delta_{m+n,0}.
\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Число ν зависит от условий на монодромию $G^\pm(z)$

$$G^\pm(e^{2\pi i} z) = e^{\pm 2\pi i \nu} G^\pm(z). \tag{2.1.4}$$

ν может принимать произвольные вещественные значения. Нас будут в основном интересовать случаи $\nu = 0$ и $\nu = \frac{1}{2}$, соответствующие NS- и R- секторам.

$N = 2$ суперконформная алгебра обладает изоморфизмом [9]

$$\begin{aligned}
L'_n &= L_n + \eta J_n + \frac{1}{6} \eta^2 c \delta_{n,0}, \\
J'_n &= J_n + \frac{c}{3} \eta \delta_{n,0}, \\
(G_r^\pm)' &= G_{r \pm \eta}^\pm.
\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Действие этого изоморфизма на представлениях суперконформной алгебры имеет следующую реализацию [10, 11] в терминах бозонного скалярного поля $\varphi(z)$. Бозонизуем ток $J(z)$

$$\begin{aligned}
J(z) &= \partial\varphi(z), \\
\varphi(z)\varphi(0) &\sim \frac{c}{3} \ln z.
\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Заметим, что бозон $\varphi(z)$ зависит от конкретной реализации генераторов $N = 2$ суперконформной алгебры в терминах полей той теории, в которой эта алгебра действует. Ниже будет показано, что как в секторе материи, так и в секторе духов, действует $N = 2$ суперконформная алгебра и будут получены выражения, связывающие бозоны для $U(1)$ -токов в каждом из секторов со скалярными полями бозонизирующими поля в этих секторах.

Рассмотрим произвольный оператор V , имеющий заряд q относительно тока J , и запишем его, выделив заряженную часть

$$V = \hat{V} e^{i \frac{3q}{c} \phi}, \tag{2.1.7}$$

где \hat{V} является нейтральным относительно $J(z)$. Соответствующая процедура для токов $G^\pm(z)$ дает

$$G^\pm = \hat{G}^\pm e^{\pm \frac{3}{c} \phi}. \tag{2.1.8}$$

Для каждого поля f в нашем представлении суперконформной алгебры мы можем написать соответствующий оператор твистованный на η

$$V_\eta = V e^{\eta \phi} = \hat{V} e^{(\frac{3q}{c} + \eta) \phi}. \tag{2.1.9}$$

Нетрудно убедиться, что при этом заряд поля изменится как

$$q' = q + \frac{c}{3} \eta. \tag{2.1.10}$$

Также, если, например, изначальное поле сливалось с G^\pm по целым степеням z^n , то поле V_η будет сливаться с G^\pm по степеням $z^{n\pm\eta}$. Дополнительная степень возникает из-за слияния $\exp(\eta\phi)$ с $\exp(\pm\frac{3}{c}\phi)$. Конформная размерность поля V_η равна

$$\Delta' = \Delta + \frac{c}{6}\left(\frac{3q}{c} + \eta\right)^2 - \frac{3q^2}{2c} = \Delta + \eta q + \frac{1}{6}\eta^2 c. \quad (2.1.11)$$

Из этих формул нетрудно видеть, что домножение полей на вертекс $\exp \eta\phi$ соответствует изоморфизму (2.1.5). Действие этого изоморфизма мы будем обозначать как U_η . Физические состояния в NS-секторе являются пространственно-временными бозонами, а в R-секторе соответственно фермионами. Тот факт, что спектральный поток при $\eta = \pm 1/2$ переводит NS и R между собой, наводит на мысль, что соответствующий вертексный оператор $\exp(\eta\phi)$ является суперзарядом или по крайней мере его составляющим. Далее мы покажем, что это действительно так.

В $N = 2$ суперконформной алгебре имеется ограничение на размерности Δ полей с $U(1)$ -зарядом q . Для произвольного поля Φ в NS-секторе напомним

$$\left|G_{-1/2}^\mp|\Phi\rangle\right|^2 + \left|G_{1/2}^\pm|\Phi\rangle\right|^2 = \langle\Phi|\{G_{1/2}^\pm, G_{-1/2}^\mp\}|\Phi\rangle = (2\Delta \pm q)\langle\Phi|\Phi\rangle \geq 0. \quad (2.1.12)$$

Откуда следует, что в унитарной теории в NS-секторе выполняется неравенство

$$2\Delta \geq |q|. \quad (2.1.13)$$

Поля для которых $2\Delta = q$ или $2\Delta = -q$ называются киральными или антикиральными примарными полями соответственно¹. Как следует из (2.1.12), примарное киральное поле Φ удовлетворяет

$$G_{1/2}^- \Phi = G_{-1/2}^+ \Phi = 0 \quad (2.1.14)$$

Используя это, соотношения суперконформной алгебры, а также ограничение на размерности $2\Delta \geq |q|$, можно показать, что Φ уничтожается всеми положительными модами токов $G^\pm(z)$, $T(z)$, $J(z)$. Вместе с (2.1.14) это дает

$$\begin{aligned} L_n \Phi &= J_n \Phi = 0, & n > 0, \\ G_r^+ \Phi &= 0, & r \geq -\frac{1}{2}, \\ G_r^- \Phi &= 0, & r > 0. \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

Для антикирального примарного поля верны те же соотношения с переменной местами G^+ и G^- .

Так как $N = 2$ суперконформная алгебра имеет $N = 1$ подалгебру, то в R-секторе имеется ограничение на размерность $\Delta \geq \frac{c}{24}$. Оно следует из неравенства (1.2.16). Также из него следует, что рамоновское поле Φ с размерность $\Delta = \frac{c}{24}$ должно удовлетворять

$$G_0 \Phi = 0 \quad (2.1.16)$$

Вследствие ограничения на размерность $\Delta \geq \frac{c}{24}$, Φ также уничтожается всеми положительными модами токов $G^\pm(z)$, $T(z)$, $J(z)$. Из коммутационных соотношений $N = 2$ алгебры, можно показать, что если поле уничтожается модой $G_0 = (G_0^+ + G_0^-)/\sqrt{2}$, то оно уничтожается модами G_0^\pm по отдельности. Все это дает

$$\begin{aligned} L_n \Phi &= J_n \Phi = 0, & n > 0, \\ G_n^\pm \Phi &= 0, & n \geq 0. \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

Оказывается, что действие спектрального потока $U_{\pm 1/2}$ переводит киральные и антикиральные примарные поля в рамоновские вакуумы и обратно. Действительно, из формул (2.1.5) с $n = 0$ легко

¹Мы иногда будем писать киральное поля, имея ввиду киральное или антикиральное примарное поле.

найти действие спектрального потока на эти поля

$$\begin{aligned} U_{1/2} \left| \begin{array}{l} \Delta = \frac{q}{2} \\ Q = q \end{array} \right\rangle_{NS} &= \left| \begin{array}{l} \Delta = \frac{c}{24} \\ Q = q - \frac{c}{6} \end{array} \right\rangle_R, \\ U_{-1/2} \left| \begin{array}{l} \Delta = \frac{q}{2} \\ Q = -q \end{array} \right\rangle_{NS} &= \left| \begin{array}{l} \Delta = \frac{c}{24} \\ Q = -q + \frac{c}{6} \end{array} \right\rangle_R. \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

Соотношения (2.1.18) важны в теории струн потому, что, как будет объяснено ниже, вертексы безмассовых бозонов являются киральными полями, а вертексы безмассовых фермионов – рамоновскими вакуумами. Соотношения (2.1.18) показывают, что безмассовые состояния образуют супермультиплет.

2.2 $N = 2$ суперконформная симметрия для NSR струны

Как мы уже упоминали ранее материальный и духовый сектора NSR струны в 10-ти измерениях обладают $N = 2$ суперконформной симметрией. В этом разделе мы их явно опишем. Также мы приведем стандартные формулы для бозонизаций, в которых $U(1)$ -ток примет простой вид.

2.2.1 Материальный сектор

Выберем другой базис в пространстве материальных полей

$$\begin{aligned} \psi_0^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm\psi_0 + \psi^1), \\ \psi_k^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^{2k} \pm i\psi^{2k+1}), \\ X_0^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm X_0 + X^1), \\ X_k^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X^{2k} \pm iX^{2k+1}). \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

В этом базисе имеют место следующие операторные разложения

$$\psi_a^+(z)\psi_b^-(0) \sim \frac{\delta_{ab}}{z}, \quad (2.2.2)$$

$$\partial X_a^+(z)\partial X_b^-(0) \sim -\frac{\delta_{ab}}{z^2}. \quad (2.2.3)$$

Остальные операторные разложения регулярны. Суперток в этом базисе запишется как

$$G^m = i\psi^\mu \partial X_\mu = \sum_k i\psi_k^+ \partial X_a^- + \sum_k i\psi_k^- \partial X_k^+, \quad (2.2.4)$$

Нетрудно убедиться, что, если выбрать токи G_\pm^m как

$$\begin{aligned} G^m &= \frac{1}{\sqrt{2}}(G_+^m + G_-^m), \\ G_+^m &= \sum_k i\sqrt{2}\psi_k^+ \partial X_k^-, \\ G_-^m &= \sum_k i\sqrt{2}\psi_k^- \partial X_k^+, \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

и $U(1)$ -ток

$$J^m = \sum_k \psi_k^+ \psi_k^-, \quad (2.2.6)$$

то они вместе с T^m удовлетворяют соотношениям $N = 2$ суперконформной алгебры с центральным зарядом $c_m = 15$.

В дальнейшем нам будет удобно пользоваться бозонизацией ψ_μ . Десять фермионов ψ_μ можно реализовать с помощью пяти независимых бозонов H_k . Эти бозоны имеют следующие операторные разложения

$$H_a(z)H_b(0) \sim -\delta_{ab} \ln z, \quad (2.2.7)$$

где $a, b = 1, \dots, 5$. Прямым вычислением можно убедиться, что фермионы построенные по формулам

$$\psi_k^\pm = e^{\pm iH_k} \quad (2.2.8)$$

имеют операторные разложения (2.2.2). При этом тензор энергии-импульса фермионов переписется как

$$T_\psi = i\psi_\mu \partial \psi^\mu = -\frac{1}{2} \sum_k \partial H_k \partial H_k. \quad (2.2.9)$$

Заметим также, что рамоновские вакуумы в терминах бозонов H_k имеют простой вид

$$S_\alpha = e^{\sum_k i s_k H_k}, \quad (2.2.10)$$

где $s_k = \pm 1/2$. Число различных независимых комбинаций s_k равно 32, как и независимых поляризаций 32-компонентного спинора. Также, используя формулу (2.2.9) можно найти размерность этих полей. Она равна $5/8 = c_m/24$, как и должно быть для рамоновского вакуума.

Наконец перепишем $U(1)$ -ток в терминах H_k . Используя

$$\psi_k^+ \psi_k^- = i \partial H_k, \quad (\text{нет суммирования}) \quad (2.2.11)$$

получим

$$J^m = \partial H^m, \quad (2.2.12)$$

где

$$H^m = \sum_k i H_k. \quad (2.2.13)$$

Заметим, что выбор $N = 2$ алгебры неоднозначен. Мы могли бы выбрать другой $U(1)$ ток

$$J^m = \psi_\mu \Lambda_{\mu\nu} \psi_\nu, \quad (2.2.14)$$

где $\Lambda_{\mu\nu}$ – невырожденная антисимметричная матрица с собственными значениями ± 1 , а токи G_\pm^m как части G^m с зарядами ± 1 относительно J^m соответственно. Преобразованием Лоренца можно привести этот ток к виду (2.2.13). Как будет ясно из дальнейшего, разный выбор $N = 2$ алгебры соответствует разным поляризациям суперзаряда Q_α , который является 16-компонентным спинором.

2.2.2 Духовой сектор

Как было замечено в [12] система духов обладает $N = 2$ суперконформной симметрией. Мы покажем, что спектральный поток $N = 2$ суперконформной алгебры в системе духов является частью полного спектрального потока, который осуществляет отображение фермионов в бозоны.

Выберем G_\pm^{gh} как

$$\begin{aligned} G^{gh} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(G_+^{gh} + G_-^{gh}), \\ G_+^{gh} &= \sqrt{2} \partial \beta c + \frac{3}{\sqrt{2}} \beta \partial c, \\ G_-^{gh} &= -2\sqrt{2} b \gamma, \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

и $U(1)$ -ток в виде

$$J^{gh} = 2bc + 3\beta\gamma. \quad (2.2.16)$$

Прямым вычислением можно убедиться, что вместе с тензором энергии-импульса T^{gh} эти токи удовлетворяют $N = 2$ суперконформной алгебре с центральным зарядом $c_{gh} = -15$.

Также как и поля ψ_μ , духи b, c можно реализовать, используя бозонизацию. Введем бозон σ с операторным разложением

$$\sigma(z)\sigma(0) \sim \ln z. \quad (2.2.17)$$

Построим духи b, c по формулам

$$\begin{aligned} c &= e^\sigma, \\ b &= e^{-\sigma}. \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Духи β, γ можно переписать, используя два бозонных поля ϕ, χ с операторными разложениями

$$\begin{aligned} \phi(z)\phi(0) &\sim -\ln z, \\ \chi(z)\chi(0) &\sim \ln z. \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

Духи β, γ строятся по формулам

$$\begin{aligned} \beta &= e^{-\phi+\chi}\partial\chi, \\ \gamma &= e^{\phi-\chi}. \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

Можно убедиться, что так построенные экспоненты имеют требуемые операторные разложения (1.2.20).

Тензор энергии-импульса духов переписывается как

$$T_{gh} = T_\phi + T_\chi + T_\sigma, \quad (2.2.21)$$

где

$$\begin{aligned} T_\phi &= -\frac{1}{2}\partial\phi\partial\phi - \partial^2\phi, \\ T_\chi &= \frac{1}{2}\partial\chi\partial\chi + \frac{1}{2}\partial^2\chi, \\ T_\sigma &= \frac{1}{2}\partial\sigma\partial\sigma + \frac{3}{2}\partial^2\sigma. \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

Вертексные операторы V_q соответствующие разным вакуумам $\beta - \gamma$ системы в терминах ϕ имеют вид

$$V_q = e^{q\phi}. \quad (2.2.23)$$

Прямым вычислением, можно убедиться, что слияние экспонент $\exp q\phi$ с полями β, γ дает нужные степени z в соотношениях (1.2.24). Используя (2.2.22), можно найти размерность этого поля $\Delta(\exp(q\phi)) = -(q^2 + 2q)/2$.

Из формул

$$\begin{aligned} \beta\gamma &= \partial\phi, \\ bc &= -\partial\sigma, \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

находим, что после бозонизации $U(1)$ -ток примет вид

$$J^{gh} = \partial H^{gh}, \quad (2.2.25)$$

где

$$H^{gh} = 3\phi - 2\sigma. \quad (2.2.26)$$

2.2.3 $N = 2$ в NSR струне и суперзаряд

Как следуют из предыдущих двух пунктов, $N = 2$ суперконформная алгебра имеется в системе духов и материи. Полные токи имеют вид

$$\begin{aligned} T^{tot} &= T^m + T^{gh}, \\ G_{\pm}^{tot} &= G_{\pm}^m + G_{\pm}^{gh}, \\ J^{tot} &= J^m + J^{gh}. \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

После бозонизации полный $U(1)$ -ток примет вид

$$J^{tot} = \partial H^{tot} = \partial H^m + \partial H^{gh} = \sum_k i\partial H_k + 3\partial\phi - 2\partial\sigma. \quad (2.2.28)$$

Как мы уже обсуждали в разделе 2.1, спектральный поток можно реализовать с помощью вертексного оператора от бозонизации $U(1)$ -тока. Более того, при полужелом параметре спектрального потока η он переводит NS и R сектора в друг друга, и соответственно является естественным кандидатом на роль оператора суперсимметрии. Напишем соответствующий оператор для полной $N = 2$ суперконформной алгебры при параметре $\eta = -1/2$

$$Q(z) = U_{-1/2} = \exp\left(-\frac{1}{2}H^{tot}\right). \quad (2.2.29)$$

Используя выражение для H^{tot} через бозоны, можно написать его более явно

$$Q(z) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum iH_k - \frac{3}{2}\phi + \sigma\right) = cS_{\alpha}e^{-\frac{3}{2}\phi}, \quad (2.2.30)$$

где в последнем равенстве, мы перешли от бозонизации к изначальным полям. Здесь S_{α} -спиновое поле со всеми спинами вниз.

Заметим, что вертексный оператор фермиона в картине $-3/2$ имеет вид

$$V_{-3/2} = cu^{\alpha}S_{\alpha}e^{-3/2\phi}e^{ikX}, \quad (2.2.31)$$

где u^{α} – поляризация, которая должна удовлетворять уравнению Дирака, как это следует из (1.2.19). Заметим, что вертекс $Q(z)$ является вертексом $V_{-3/2}(z)$ при импульсе k_{μ} равном нулю. При нулевом импульсе уравнение Дирака тривиально выполняется и u^{α} становится произвольным спинором, который может быть опущен. Этот факт аналогичен построению суперзаряда в статьях [13, 14], где оператор суперсимметрии оказывался вертексным оператором фермиона при нулевом импульсе. В этих работах он был в картине $-1/2$.

Вертекс (2.2.31) умножен на дух $c(z)$ и соответственно в корреляционных функциях он соответствует вертексному оператору с фиксированной координатой. Как обычно в теории струн, вертексы в корреляционных функциях нужно либо умножать на дух $c(z)$, при этом корреляционная функция не будет зависеть от координаты z , либо интегрировать по координате. По аналогии мы заменим дух $c(z)$ в (2.2.30) на интеграл по z , и будем понимать его действие на вертекс физического состояния как интеграл по контуру вокруг верекса. Соответственно оператор суперзаряда примет вид

$$Q_{\alpha} = \int dz S_{\alpha}e^{-3/2\phi}. \quad (2.2.32)$$

Прямым вычислением можно убедиться, что этот оператор имеет конформную размерность 0 и является БРСТ-замкнутым.

Мы закончим этот раздел парой замечаний. Во-первых, мы получили суперзаряд со всеми спинами вниз. Преобразованием Лоренца или, что то же самое, выбором другой $N = 2$ алгебры в материальном секторе, мы можем получить остальные его компоненты. В результате получится 16-компонентный

вейлевский спинор. Во-вторых, при реализации спектрального потока в разделе 2.1 мы неявно пользовались тем, что центральный заряд не равен нулю. Например, как видно из формул (2.1.6), при $c = 0$ нельзя записать $U(1)$ -ток как производную от свободного бозона. Тем не менее эта трудность является чисто технической и легко обходится. Например, можно рассматривать спектральный поток, построенный в этом разделе, как последовательное применение спектральных потоков в материи и в духах, для которых центральный заряд не равен нулю. Также можно провести рассуждения аналогичные разделу 2.1, но бозонизовать $U(1)$ -ток не одним, а двумя бозонами $J^{tot} = \partial H^m + \partial H^{gh}$. Что мы сейчас и сделаем.

Отметим, сначала, что в отличие от случая $c \neq 0$, экспоненты вида $\exp(\alpha H^{tot})$ являются нейтральными относительно тока J^{tot} . Действительно,

$$\partial H^{tot} e^{\alpha H^{tot}} = (3\partial\phi - 2\partial\sigma + \sum_k i\partial H_k) e^{\alpha(3\phi - 2\sigma + \sum_k iH_k)} = (-9 + 4 + 5) e^{\alpha H^{tot}} = 0. \quad (2.2.33)$$

Значит, мы не можем сделать операторы нейтральными, выделяя из них $U(1)$ -часть. Это немного отличает наш случай и является следствием $c = 0$.

Однако, можно поступить следующим образом. Мы будем делать токи нейтральными относительно **полного** $U(1)$, выделяя из него $U(1)$ духовые и материальные составляющие **по отдельности**. Выделим эти $U(1)$ составляющие из G^\pm

$$G_{tot}^\pm = \hat{G}_m^\pm e^{\pm \frac{1}{5} H_m} + \hat{G}_{gh}^\pm e^{\mp \frac{1}{5} H_{gh}}. \quad (2.2.34)$$

Здесь и далее операторы со шляпкой являются нейтральными относительно обоих токов. Эта формула является модификацией соответствующей формулы в разделе 2.1. Рассмотрим теперь произвольное поле V , которое имеет заряд q_m относительно ∂H_m и q_{gh} относительно ∂H_{gh} . Выделим из него заряженные части

$$V = \hat{V} e^{\frac{q_m}{5} H_m - \frac{q_{gh}}{5} H_{gh}}. \quad (2.2.35)$$

Этот оператор имеет заряд $q_m + q_{gh}$ относительно ∂H^{tot} . Знаки в экспонентах перед H^m и H^{gh} разные, из-за того, что центральные заряды $c_m = 15$ и $c_{gh} = -15$ разного знака. Давайте теперь сделаем твист этого оператора с помощью $\exp(\eta H)$

$$V_\eta = \hat{V} \exp \left\{ \frac{1}{5} (5\eta + q_m) H_m + \frac{1}{5} (5\eta - q_{gh}) H_{gh} \right\}. \quad (2.2.36)$$

Считая операторное разложение с G^\pm , легко убедиться, что оно будет раскладываться по степеням $(z - w)^{n \pm \eta}$. Также понятно, что полный заряд этого поля не зависит от η

$$q' = q = q_m + q_{gh}, \quad (2.2.37)$$

т.к., как мы уже показали, $\exp(\eta H^{tot})$ нейтрален относительно $U(1)$ -тока ∂H^{tot} . Найдем конформную размерность поля V_η

$$\Delta' = \Delta - \frac{1}{10} (5\eta - q_{gh})^2 + \frac{1}{10} (5\eta - q_m)^2 + \frac{1}{10} q_{gh}^2 - \frac{1}{10} q_m^2 = \Delta + \eta q. \quad (2.2.38)$$

Все эти вычисления, в итоге показывают, что оператор $\exp(\eta H^{tot})$ осуществляет твист (2.1.5) с $c = 0$.

2.3 GSO-проекция и действие суперзаряда

В предыдущем пункте мы построили оператор Q_α , который имеет конформную размерность 0 и коммутирует с БРСТ-оператором Q_B . Однако, этого не достаточно для того, чтобы он действовал на физические (БРСТ-замкнутые) вертексы. Необходимо оставить только такие физические вертексы,

на которые корректно определено действие оператора Q_α . Рассмотрим произвольный вертекс. Он должен иметь вид

$$P(\partial X_\mu, \partial H_k, \partial \sigma, \partial \phi, \partial \chi) \exp \left[l\phi + r\chi + m\sigma + \sum_k i s_k H_k + i k_\mu X^\mu \right], \quad (2.3.1)$$

где P - некоторый полином от своих аргументов, для дальнейшего его вид не важен.

Напомним, что в R-секторе $l, s_k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$, а в NS-секторе $l, s_k \in \mathbb{Z}$. В обоих секторах $r, m \in \mathbb{Z}$.

При обходе подынтегрального выражения в (2.2.32) вокруг этого вертекса возникает фаза

$$2\pi i \left(\frac{3l}{2} - \frac{1}{2} \sum s_k \right). \quad (2.3.2)$$

Для того, чтобы не возникало разрывов и интеграл при действии суперзаряда был хорошо определен, должно выполняться условие взаимолокальности физического вертекса (2.3.1) и супертока (2.2.32)

$$\frac{3l}{2} - \frac{1}{2} \sum s_k \in \mathbb{Z}. \quad (2.3.3)$$

Это требование оставляет в каждом секторе лишь такие вертексы, которые удовлетворяют условию (2.3.3).

Покажем, что это условие эквивалентно GSO-проекции. Напомним, что GSO-проекция по определению [1] оставляет в спектре струны только состояния с собственными значениями 1 оператора $(-1)^F$, где F - фермионное число. По определению фермионное число F_{gh} экспоненты $e^{l\phi}$ равно l . А в материальном секторе фермионное число определяется как

$$F_m = \int dz \sum_k \Sigma_{2k, 2k+1}(z) = \int dz \sum_k \psi_{2k} \psi_{2k+1} = \int dz \sum_k i \partial H_k, \quad (2.3.4)$$

где $\Sigma_{\mu\nu}$ - фермионная часть оператора преобразования Лоренца. Полное фермионное число соответственно равно их сумме $F = F_m + F_{gh}$.

При действии на экспоненту вида (2.3.1) оператор $F = F_{gh} + F_m$ будет давать

$$l + \sum_k s_k. \quad (2.3.5)$$

Для того, чтобы оператор $(-1)^F$ при действии на физические состояния был равен 1, должно выполняться

$$l + \sum_k s_k \in 2\mathbb{Z}. \quad (2.3.6)$$

Это условие эквивалентно (2.3.3). Действительно, если поделить его на 2 и сложить с (2.3.3), то получится

$$2l \in \mathbb{Z}, \quad (2.3.7)$$

которое очевидно выполняется, т.к. l - как минимум полуцелое число.

Из эквивалентности (2.3.3) и GSO-проекции следует стандартное утверждение о равенстве числа физических состояний бозонов и фермионов, которое равносильно занулению однопетлевой поправки к энергии вакуума.

Приведем несколько примеров применения проекции (2.3.3) к физическим состояниям. Вертекс тахиона имеет вид

$$V = e^{ikX} e^{-\phi}, \quad k^2 = \frac{1}{2}, \quad (2.3.8)$$

для него левая часть выражения (2.3.3) равна $3/2$. Т.к. $3/2$ не является целым, тахион отсутствует в спектре после редукции.

Вертекс безмассового фермиона имеет вид

$$V = u^\alpha S_\alpha e^{ikX} e^{-\phi/2} = u^\alpha e^{\sum is_k H_k} e^{ikX} e^{-\phi/2}, \quad k^2 = 0 \quad (2.3.9)$$

где $s_k = \pm 1/2$ соответствуют поляризации спинора α . Условие (2.3.3) для этого вертекса имеет вид

$$-\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \sum_k s_k \in \mathbb{Z} \quad (2.3.10)$$

Оно означает, что нечетное число спинов s_k должно быть направлено вверх. Это оставляет 16-компонентный вейлевский спинор от 32-компонентного дираковского спинора.

Вертекс безмассового бозона имеет вид

$$V = \xi_\mu \psi^\mu e^{ikX} e^{-\phi}, \quad k^2 = 0. \quad (2.3.11)$$

Для члена $\xi_\mu \psi^\mu$ сумма $\sum_k s_k$ равна ± 1 (или точнее говоря, он разбивается на сумму двух составляющих с зарядом 1 и -1). Соответственно условие (2.3.3) принимает вид

$$-\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \in \mathbb{Z} \quad (2.3.12)$$

Оно выполнено для обоих знаков и соответственно все физические вертексы вида (2.3.11) присутствуют в спектре после редукции.

В итоге после редукции в спектре на безмассовом уровне остаются вейлевский фермион и векторный бозон.

Итак, требование отсутствия разрывов при действии оператора Q_α на физические состояния приводит к GSO-проекции этого пространства. Из этого ясно, что GSO-проекция необходима для самой возможности определить оператор пространственно-временной суперсимметрии.

2.4 Безмассовые состояния при $d = 10$

2.4.1 Вертексные операторы

Вертексные операторы в NS-секторе в картине -1 имеют вид

$$V_{-1} = c \xi_\mu \psi^\mu e^{ikX} e^{-\phi}, \quad (2.4.1)$$

где ξ_μ – поляризация.

Заметим, что как материальная часть ψ_μ , так и духовая² $ce^{-\phi}$ является киральным полем по отношению к $N = 2$ суперконформной алгебре.

С другой стороны вертекс фермиона в картине $-1/2$ имеет вид

$$V_{-1/2} = u^\alpha S_\alpha e^{ikX} e^{-\phi/2}. \quad (2.4.2)$$

Заметим, что материальная часть S_α имеет размерность $5/8$ и соответственно является рамоновским вакуумом, как и $ce^{-\phi/2}$ в духовом секторе. Условие GSO-проекции требует, чтобы S_α было правым вейлевским спинором.

Итак, как было сказано выше вертексы безмассовых частиц реализуются киральными полями и рамоновскими вакуумами. Они преобразуются в друг друга операторами пространственно-временной суперсимметрии, образуя супермультиплет. То же самое остается верным и после компактификации.

²Духовый сектор не является унитарной теорией. Поэтому соотношения (1.2.16) и (2.1.12) для нее не работают. Мы примем соотношения (2.1.15) и (2.1.17) в качестве определения киральных и рамоновских полей.

2.4.2 Действие суперзаряда

Как следует из формул (2.1.18), под действием спектрального потока киральные поля и рамоновские вакуумы, которые соответствуют безмассовым бозонам и фермионам, преобразуются в друг друга. Как мы показали в разделе 2.2.3, оператор суперсимметрии является в точности спектральным потоком. Формулы (2.1.18) показывают, что оператор суперзаряда переводит бозоны и фермионы в друг друга. В этой части, мы явно напишем действие суперзаряда на безмассовые состояния.

Для этого удобно написать суперзаряд и вертексные операторы в разных картинах. Приведем без вычисления соответствующие формулы. Суперзаряд

$$\begin{aligned} Q_\alpha^{(1/2)} &= \int dz e^{\phi/2} (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} S'_\beta \partial X_\mu, \\ Q_\alpha^{(-1/2)} &= \int dz e^{-\phi/2} S_\alpha, \\ Q_\alpha^{(-3/2)} &= \int dz e^{-3\phi/2} S'_\alpha, \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Здесь и далее S_α - обозначает правый вейлевский спинор, S'^β - левый.

Вертексные операторы для бозона

$$\begin{aligned} V_0 &= \xi_\mu (\partial X^\mu + i(k\psi)\phi^\mu) e^{ikX}, \\ V_{-1} &= \xi_\mu \psi^\mu e^{ikX}. \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Для фермиона

$$\begin{aligned} V_{1/2} &= u^\alpha (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} S'_\beta (\partial X + \frac{i}{2}(k\psi)\psi_\mu) e^{ikX} e^{\phi/2}, \\ V_{-1/2} &= u^\alpha S_\alpha e^{ikX} e^{-\phi/2}, \\ V_{-3/2} &= u^\alpha S'_\alpha e^{ikX} e^{-3\phi/2}. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

С помощью этих формул можно убедиться, что выполнено с точностью до коэффициентов

$$\begin{aligned} [v^\alpha Q_\alpha, V_{\text{NS}}(\xi, k)] &= V_{\text{R}}(k^\mu \xi^\nu (\gamma_{\mu\nu})^\alpha{}_\beta v^\beta, k), \\ [v^\alpha Q_\alpha, V_{\text{R}}(u, k)] &= V_{\text{NS}}(u^\alpha (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} v^\beta, k), \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

где мы опустили номера картин, т.к. это верно во всех картинах.

2.5 Безмассовые состояния открытой струны при $d = 4$

При компактификации струны на 6-ти мерное многообразие Калаби-Яу в компактном секторе возникает $N = 2$ SCFT с $c = 9$. При этом 10-ти мерный супермультиплет (A_M, ψ_a) (в этом разделе мы будем обозначать 10-ти мерные индексы латинскими буквами, оставляя греческие для 4мерных) дает одну копию векторного мультиплета (A_μ, ψ_α) и несколько копий кирального мультиплета (Φ, λ_α) .

2.5.1 Киральный мультиплет

Найдем сначала вертексный оператор для скалярной частицы. Он должен быть в NS-секторе и иметь вид

$$\Phi = \Lambda(z) e^{ikX} e^{-\phi} \quad (2.5.1)$$

Также, как и в случае десяти измерений, мы получаем два условия. Условие на размерность

$$\Delta(\Phi) = \frac{1}{2} \quad (2.5.2)$$

$$(2.5.3)$$

и условие GSO-проекции

$$(-3\partial\psi + i\partial H_0 + i\partial H_1 + \sqrt{3}i\partial H_{int})\Phi \in 2\mathbb{Z} \quad (2.5.4)$$

где $H_{int} - U(1)$ -ток внутренней $N = 2$ SCFT (мы нормировали $H_{int}H_{int} \sim -\ln z$). Это условие дает

$$Q_{int} \in 2\mathbb{Z} + 1 \quad (2.5.5)$$

Здесь мы молчаливо предположили, что других духовых членов кроме $e^{-\phi}$ нет.

Можно показать, что условие унитарности в $N = 2$ дает ограничение на размерность поля $2\Delta \geq |Q|$. Т.к. в нашем случае размерность равна $1/2$, то мы получаем, что допустимые значения $U(1)$ -заряда это $Q = \pm 1$ и соответственно поле Φ является (анти)киральным примарным полем.

Обратное так же верно. Возьмем произвольное (анти)киральное поле во внутренней части и построим по той же формуле вертексный оператор. Т.к. киральное поле зануляется всеми положительными модами G_r^{int} , этот вертекс будет BRST замкнутым. Т.к. этот вертекс удовлетворяет всем необходимым условиям, он описывает физическое безмассовое состояние.

Найдем теперь вертексный оператор для фермиона. Он должен быть в R-секторе и пространственно-временным фермионом. Соответственно

$$\lambda_\alpha = e^{\frac{1}{2}iH_0 + \frac{1}{2}iH_1} e^{ikX} e^{-\phi/2\Sigma} \quad (2.5.6)$$

Из анализа размерностей находим, что

$$\Delta(\Sigma) = \frac{3}{8} \quad (2.5.7)$$

Т.к. в рамоновском секторе выполнено $\Delta \geq \frac{c}{24}$ и равенство достигается только для рамоновского вакуума, то мы получаем, что Σ является рамоновским вакуумом во внутренней теории. GSO-проекция накладывает на него дополнительное условие

$$Q_{int} \in 2\mathbb{Z} + \frac{1}{2} \quad (2.5.8)$$

Заметим, что на заряд есть ограничение из унитарности $|Q| \leq \Delta + \frac{c}{8}$. В нашем случае оно дает $|Q| \leq \frac{3}{2}$.

Имеется также фермион с другой пространственной киральностью

$$\lambda_{\dot{\alpha}} = e^{\frac{1}{2}iH_0 - \frac{1}{2}iH_1} e^{ikX} e^{-\phi/2\tilde{\Sigma}} \quad (2.5.9)$$

Для него проходят те же рассуждения, только с другим знаком в GSO-проекции

$$Q_{int} \in 2\mathbb{Z} - \frac{1}{2} \quad (2.5.10)$$

2.5.2 Действие суперзаряда

Как и в случае 10-тимерной струны вертексный оператор спектрального потока соответствует суперзаряду. В случае десяти измерений, спектральный поток был произведением потоков в духовом и материальном секторах. В случае четырех измерений, он будет складываться из трех составляющих: потока в духах, в четырехмерной свободной теории и в компактной конформной теории с центральным зарядом $c = 9$.

Как мы только что показали, компактная часть безмассовых полей в случае бозонов и фермионов является киральным полем и рамоновским вакуумом соответственно. Рассмотрим как спектральный поток (2.1.5) действует на киральное поле.

$$U_{-1/2}|\Delta = \frac{q}{2}, Q = q\rangle_{NS} = |\Delta = \frac{c}{24}, Q = q - \frac{c}{6}\rangle_R \quad (2.5.11)$$

т.е. он переводит кирально поле в рамоновский вакуум. Аналогично $U_{1/2}$ переводит антикиральное поле в рамоновский вакуум. Заметим, что он дает только рамоновские вакуумы с $Q_{int} = \pm\frac{1}{2}$, как мы покажем далее, вакуумы с $Q_{int} = \pm\frac{3}{2}$ получаются из векторной частицы.

Соответственно мы можем написать суперзаряд вида

$$Q_\alpha = e^{-\phi/2} e^{\frac{1}{2}iH_0 + \frac{1}{2}iH_1} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}iH_{int}} \quad (2.5.12)$$

$$Q_{\dot{\alpha}} = e^{-\phi/2} e^{\frac{1}{2}iH_0 - \frac{1}{2}iH_1} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}iH_{int}} \quad (2.5.13)$$

Он переводит построенные выше состояния одно в другое, т.к. $e^{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}iH_{int}}$ действует как спектральный поток $U_{\pm 1/2}$.

Заметим, что оба сомножителя в материальной части этого тока, является спектральными потоками в соответствующих теориях. Возникает вопрос, почему духовая составляющая не является экспонентой от соответствующего $U(1)$ -тока. Можно показать, что $e^{-\phi/2}$ переводит киральные поля и рамоновские вакуумы в друг друга, но нам не удалось найти $N = 2$ суперконформную алгебру имеющую $U(1)$ -ток равный $\partial\phi$, чтобы придать этому потоку более понятный физический смысл.

2.5.3 Векторный мультиплет

Для векторной частицы анзац сразу же дает единственный возможный вариант

$$A_\mu = e^{-\phi} \psi_\mu \quad (2.5.14)$$

Из размерности, понятно, что ничего больше добавить нельзя.

В рамоновском секторе компактной теории в свою очередь есть два выделенных вакуума вида

$$\Sigma^\pm = e^{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}iH_{int}} \quad (2.5.15)$$

т.к. размерность экспоненты $\exp(\frac{1}{\sqrt{3}}iQH_{int})$ равна $\frac{Q^2}{6}$. Мы получаем, что эти вакуумы имеют размерность $\frac{3}{8}$, как и нужно. Эти два вакуума и соответствуют суперпартнеру $\psi_\alpha, \psi_{\dot{\alpha}}$ векторной частицы. Заметим, что они и только они имеют $Q_{int} = \pm\frac{3}{2}$.

Глава 3

Компактификация на Калаби-Яу и киральные поля

Как известно, компактификация на 6-сти мерные многообразия Калаби-Яу (далее просто CY) является необходимым и достаточным условием для $N = 1$ пространственно-временной суперсимметрии. С другой стороны можно показать (см. раздел 18.5 в [1]), что если мы имеем пространственно-временную суперсимметрию, то конформная теория поля в компактном секторе (с $c = 9$) является $N = 2$ SCFT. (Здесь и далее мы будем рассматривать $N = 2$ только в компактном секторе. Про соответствующие $N = 2$ в четырехмерии и духах на время можно забыть.)

В данном разделе мы свяжем эти два утверждения. Мы будем рассматривать теорию струн типа IIB . Эта теория будет соответственно будет обладать $N = 2$ пространственно-временной суперсимметрией (мы уже построили суперзаряд из голоморфных полей, второй суперзаряд строится аналогично из антиголоморфных полей). Мы покажем, что пространственно-временным скалярам соответствуют киральные поля в компактной $N = 2$ алгебре. Мы также покажем, что эти киральные поля находятся в взаимоднозначном соответствии с когомологиями Дабу соответствующего CY . Также с помощью спектрального потока в $N = 2$ SCFT мы построим также остальные поля из мультиплетов $N = 2$ пространственно-временной суперсимметрии.

Здесь уместно следующее замечание: Компактификация на CY , как она рассмотрена например в начале главы 17 в [1], предполагает, что верно приближение сигма-модели. При этом делаются три предположения. Мы рассматриваем теорию струн в классическом фоне, при этом мы пренебрегаем всеми массивными состояниями в струне. Также мы считаем, что приближение сигма модели верно. Наконец, мы оставляем в компактной теории только нуль моды. У нас есть три масштаба: масштаб энергий которые мы рассматриваем R (т.е. характерные энергии эффективной четырехмерной теории), характерный размер r компактного многообразия и струнный масштаб, который по порядку равен массе первых массивных состояний в струнах l . Условия на эти масштабы должны быть $R \gg r$ для того, чтобы можно было оставить только нуль-моды на CY , $r \gg l$ для того чтобы можно было пренебречь массивными возбуждениями, а также инстантонами на мировом листе.

3.1 Киральные поля в $N = 2$ SCFT

В $N = 2$ SCFT имеется следующее ограничение на конформную размерность Δ поля ϕ с зарядом q

$$0 \leq \left| G_{-1/2}^{\mp} |\phi \rangle \right|^2 + \left| G_{1/2}^{\pm} |\phi \rangle \right|^2 = \langle \phi | \{ G_{1/2}^{\pm}, G_{-1/2}^{\mp} \} | \phi \rangle = (2\Delta \pm q) \langle \phi | \phi \rangle \quad (3.1.1)$$

Откуда мы получаем, что $2\Delta \geq |q|$.

Поле, для которого выполняется $\Delta = q/2$, называется примарным киральным полем. Для него

верно

$$G_{-1/2}^+|\phi\rangle = G_{1/2}^-|\phi\rangle = 0 \quad (3.1.2)$$

Заметим, что из этих условий следуют условия того, что поля ϕ примарным. Это можно показать используя SCFT алгебру и условие $2\Delta \geq |q|$.

Антикиральное примарное поля определяется условием $\Delta = -q/2$. Для него верно

$$G_{-1/2}^-|\phi\rangle = G_{1/2}^+|\phi\rangle = 0 \quad (3.1.3)$$

Рассмотрим теперь следующие неравенство

$$0 \leq \left| G_{-3/2}^\mp |\phi\rangle \right|^2 + \left| G_{3/2}^\pm |\phi\rangle \right|^2 = (2\Delta \pm 3q + \frac{2c}{3}) \langle \phi | \phi \rangle \quad (3.1.4)$$

Откуда для примарного кирального поля мы получим $h \leq \frac{c}{6}$. Соответственно для теории с $c = 9$ заряд ограничен как $|Q| \leq 3$.

Рассмотрим как спектральный поток (2.1.5) действует на киральное поле.

$$U_{1/2}|\Delta = \frac{q}{2}, Q = q\rangle_{NS} = |\Delta = \frac{c}{24}, Q = q - \frac{c}{6}\rangle_R \quad (3.1.5)$$

т.е. он переводит киральное поле в рамоновский вакуум.

Рассмотрим действие с $\eta = 1$

$$U_1|\Delta = \frac{q}{2}, Q = q\rangle_{NS} = |\Delta = \frac{q-c/3}{2}, Q = q - \frac{c}{3}\rangle_{NS} \quad (3.1.6)$$

т.е. поток переводит киральное поле в антикиральное.

Наконец рассмотрим операторное разложение двух киральных полей

$$\phi_i(z)\phi_j(w) = \sum_k C_{ij}^k (z-w)^{\Delta_k - \Delta_i - \Delta_j} \psi_k \quad (3.1.7)$$

где ψ_k имеет заряд $q_i + q_j$, но не обязано быть примарным киральным полем. Т.к. $\Delta = q/2$ для киральных полей, имеем

$$\phi_i(z)\phi_j(w) = \phi_k + O(z-w) \quad (3.1.8)$$

где ϕ_k – киральное примарное поле. Соответственно мы можем определить произведение примарных киральных полей как их нормальное упорядочение. Поэтому они обладают структурой кольца.

3.2 Связь киральных полей с когомологиями Дабу

Рассмотрим киральное поле ($G_{-1/2}^+|\phi\rangle = 0$), которое не обязательно является примарным, для него верно следующее однозначное разложение

$$|\phi\rangle = |\phi_0\rangle + G_{-1/2}^+|\phi_1\rangle \quad (3.2.1)$$

где ϕ_0 – киральное примарное поле.

Сделаем следующее соответствие с CY

$$G_{-1/2}^+ \rightarrow \partial \quad (3.2.2)$$

$$G_{1/2}^- \rightarrow \partial^* = - * \bar{\partial}^* \quad (3.2.3)$$

где $\partial = \sum_i dz^i \partial_i$, $\bar{\partial} = \sum_i d\bar{z}^i \bar{\partial}_i$ – комплексные дифференциалы на CY ($d = \partial + \bar{\partial}$). * – звездза Ходжа.

Имеет место соотношение

$$2L_0 - J_0 = \{G_{-1/2}^+, G_{1/2}^-\} = \partial\partial^* + \partial^*\partial = \frac{1}{2}\Delta_d \quad (3.2.4)$$

где Δ_d – Лапласиан. Соответственно мы получаем, что киральному полю соответствует ∂ -замкнутая форма, а киральному примарному полю соответствует гармоническая форма $\Delta_d\omega = 0$. В силу этих наблюдений разложение (3.2.1) можно понимать как разложение Ходжа на СУ. А именно разложение Ходжа говорит, что для любой ∂ -замкнутой формы ω верно однозначное разложение

$$\omega = \omega_0 + \partial\omega_1 \quad (3.2.5)$$

где ω_0 – гармоническая форма. Соответственно количество гармонических форм на многообразии равно размерности соответствующей когомологии Дабу.

3.3 Киральные поля из гармонических форм

Для лучшего понимания физической картины сделаем следующие приближенное построение. Будем считать, что многообразии СУ имеет большой размер и взаимодействиями на нем можно пренебречь.

Тогда $U(1)$ -токи $N = 2$ SCFT на нем можно выбрать как

$$J = \psi^i \psi^{\bar{i}} g_{i\bar{i}} \quad \tilde{J} = \tilde{\psi}^i \tilde{\psi}^{\bar{i}} g_{i\bar{i}} \quad (3.3.1)$$

где $\psi^i, \tilde{\psi}^i$ – левые и правые фермионы с индексами в компактном измерении, $g_{i\bar{i}}$ – метрика Кэлера $i, \bar{i} = 1, \dots, 3$. Мы рассматриваем компактификацию как сигма-модель в бекграунде СУ.

Существует $h_{1,1}$ гармонических $(1, 1)$ -форм. Где $h_{1,1}$ размерность соответствующих когомологий Дабу. Рассмотрим одну из этих форм $b(X)$. Построим поле

$$b_{i,\bar{j}} \psi^i \tilde{\psi}^{\bar{j}} \quad (3.3.2)$$

Его заряды равны $(\tilde{Q}, Q) = (-1, 1)$. Т.к. размерность гармонического незаряженного поля равна нулю, то его размерность равна $(\tilde{\Delta}, \Delta) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Соответственно это поле является (a, c) , т.е. киральным относительно левой суперконформной алгебры и антикиральным относительно правой.

Аналогично, из каждой $(2, 1)$ формы мы можем построить поле

$$b_{ik,\bar{j}} \Omega^{ik} \psi^{\bar{n}} \tilde{\psi}^{\bar{j}} \quad (3.3.3)$$

где $\omega^{ikn} - (3, 0)$ форма. Это поле имеет заряды $(-1, -1)$ и размерность $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ и является соответственно (a, a) .

Заметим однако, что это построение не учитывает взаимодействий между полями и поэтому требуется более строгий вывод.

3.4 Вертексные операторы физических состояний

После мотивирующих соображений из двух предыдущих подразделов, мы приведем ряд точных соотношений для киральных полей в компактной теории. Рассмотрим компактифицированную теорию струн в 4 измерениях в которой имеется $N = 2$ пространственно-временная суперсимметрия. Рассмотрим вертексный оператор скалярного поля

$$\Lambda(z, \bar{z}) e^{ikX} e^{-\phi - \tilde{\phi}} \quad (3.4.1)$$

Из анализа размерностей мы находим, что он должен быть оператором размерности $(\tilde{\Delta}, \Delta) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Также условие GSO проекции накладывает некоторые требования на его заряд. В нашем случае полный ток $N = 2$ SCFT имеет вид

$$\partial H = \partial(-\phi + is_0 H_0 + is_1 H_1 + \sqrt{3}i H_{int}) \quad (3.4.2)$$

где H_{int} – бозонизация соответствующего тока в компактном секторе $H_{int} H_{int} \sim -\ln z$. Также имеется соответствующий ток в антиголоморфном секторе. Условие GSO-проекции требует накладывает требование от нашего состояния, чтобы его $U(1)$ заряд был нечетным числом. Т.к. во внутренней теории имеется ограничение $\Delta \geq |q|/2$, то заряды могут быть только ± 1 . Заметим, что т.к. размерность нашего поля $1/2$, это означает, что поле Λ является одним из $(c, c), (a, a), (c, a), (a, c)$. Где c, a – (анти)киральное примарное поле в соответствующем секторе. Заметим, что (a, a) является комплексно сопряженным от (c, c) , а (c, a) от (a, c) . Будем считать, что в компактной теории имеется $h^{2,1}$ полей типа (c, c) . Мы будем их обозначать Λ^a , где $a = 1, \dots, h^{2,1}$. Также будем считать, что имеется $h^{(1,1)}$ полей типа (c, a) , их мы будем обозначать Λ^A , $A = 1, \dots, h^{(1,1)}$. Как мы только, что показали эти поля являются скалярами в пространстве времени. Соответствующие вертексные операторы имеют вид

$$V^{t^a} = (\Lambda^a + \bar{\Lambda}^a) e^{ikX} e^{-\phi - \tilde{\phi}} \quad (3.4.3)$$

$$V^{\tilde{t}^A} = (\Lambda^A + \bar{\Lambda}^A) e^{ikX} e^{-\phi - \tilde{\phi}} \quad (3.4.4)$$

Черта обозначает комплексное сопряжение. Эти поля являются скалярами. Т.к. в пространстве-времени действует $N = 2$ алгебра суперсимметрии, то существуют соответствующие суперпартнеры. Построим их используя спектральный поток.

$$\Sigma^a \xleftarrow{U_{1/2,0}} \Pi^a \xleftarrow{U_{0,1/2}} \Lambda^a \xrightarrow{U_{1/2,0}} \Theta^a \xrightarrow{U_{0,1/2}} \Sigma^a \quad (3.4.5)$$

$$\Sigma^A \xleftarrow{U_{-1/2,0}} \Pi^A \xleftarrow{U_{0,1/2}} \Lambda^A \xrightarrow{U_{-1/2,0}} \Theta^A \xrightarrow{U_{0,1/2}} \Sigma^A \quad (3.4.6)$$

$U_{\tilde{\eta}, \eta}$ – спектральный поток с в правой и левой алгебре с параметрами $\tilde{\eta}, \eta$. Соответственно действуя спектральным потоком на Λ мы получаем новые поля Σ, Π, Θ . Они имеют следующие свойства

$$\left(\begin{array}{c|c|c} (c, c) & (\tilde{\Delta}, \Delta) & (\tilde{Q}, Q) \\ \Lambda^a & \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} & 1 \quad 1 \\ \Theta^a & \frac{3}{8} \quad \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \quad 1 \\ \Pi^a & \frac{1}{2} \quad \frac{3}{8} & 1 \quad -\frac{1}{2} \\ \Sigma^a & \frac{3}{8} \quad \frac{3}{8} & -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \\ (a, c) & (\tilde{\Delta}, \Delta) & (\tilde{Q}, Q) \\ \Lambda^A & \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} & -1 \quad 1 \\ \Theta^A & \frac{3}{8} \quad \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \quad 1 \\ \Pi^A & \frac{1}{2} \quad \frac{3}{8} & -1 \quad -\frac{1}{2} \\ \Sigma^A & \frac{3}{8} \quad \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \end{array} \right|$$

Из этих полей строятся соответствующие суперпартнеры. Мы уже построили NS-NS сектор. Верт-

кесы для $NS - R$ и $R - NS$ секторов имеют вид

$$V^{\psi^a} = k_\mu (\bar{S}^\beta \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\mu u^{\dot{\beta}} \bar{\Theta}^a + \bar{S}_{\dot{\beta}} \bar{\sigma}^{\mu\beta\dot{\beta}} u_\beta \Theta^a) e^{-\frac{1}{2}\tilde{\phi} - \phi} e^{ikX} \quad (3.4.7)$$

$$V^{\lambda^a} = k_\mu (u_{\dot{\beta}} \sigma^{\mu\dot{\beta}\beta} S_\beta \bar{\Pi}^a + u^\beta \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\mu S^{\dot{\beta}} \Pi^a) e^{-\tilde{\phi} - \frac{1}{2}\phi} e^{ikX} \quad (3.4.8)$$

$$V^{\psi^A} = k_\mu (\bar{S}^\beta \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\mu u^{\dot{\beta}} \Theta^A + \bar{S}_{\dot{\beta}} \sigma^{\mu\beta\dot{\beta}} u_\beta \Theta^a) e^{-\frac{1}{2}\tilde{\phi} - \phi} e^{ikX} \quad (3.4.9)$$

$$V^{\lambda^A} = k_\mu (u_{\dot{\beta}} \sigma^{\mu\dot{\beta}\beta} S_\beta \bar{\Pi}^A + u^\beta \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\mu S^{\dot{\beta}} \Pi^A) e^{-\tilde{\phi} - \frac{1}{2}\phi} e^{ikX} \quad (3.4.10)$$

Для $R - R$ сектора

$$V^{A^A} = k_\mu e_\nu (\bar{S}^\beta \sigma^{\mu\nu}{}_{\beta\gamma} S^\gamma \Sigma^A + \bar{S}_{\dot{\beta}} \bar{\sigma}^{\mu\nu\dot{\beta}}{}_{\gamma} S^{\dot{\gamma}} \bar{\Sigma}^A) e^{-\frac{1}{2}\tilde{\phi} - \frac{1}{2}\phi} e^{ikX} \quad (3.4.11)$$

$$V^{c^a} = k_\mu (S_{\dot{\beta}} \sigma^{\mu\dot{\beta}\beta} S_\beta \Sigma^a + \bar{S}^{\dot{\beta}} \sigma_{\mu\beta\dot{\beta}} S^{\dot{\gamma}} \bar{\Sigma}^a) e^{-\frac{1}{2}\tilde{\phi} - \frac{1}{2}\phi} e^{ikX} \quad (3.4.12)$$

Соответствующие поля образуют мультиплеты.

$$\text{hyper: } t^a, c^a, \psi^a, \lambda^a \quad (c, c) + (a, a) \quad (3.4.13)$$

$$\text{vector: } \tilde{t}^A, \psi^a, \lambda^A, A^a \quad (a, c) + (c, a) \quad (3.4.14)$$

Глава 4

Эффективное действие и топологическая теория струн

Как было указано ранее, бозонный низкоэнергетический спектр струны компактифицированной на многообразии Калаби-Яу определяется киральными полями в соответствующей $N = 2$ суперконформной алгебре. С точки зрения таргет-пространства безмассовые моды определяются модулями Калаби-Яу, которые находятся в взаимнооднозначном соответствии с гармоническими формами. Для полного понимания физики при низких энергиях знание одного только спектра недостаточно. Необходимо еще найти эффективное низкоэнергетическое действие. В этой главе мы опишем как это можно сделать. Сначала мы опишем способ использующий геометрические методы таргет пространства. После мы опишем метод, использующий $N = 2$ суперконформную симметрию на мировом листе и соответствующий твист до топологической теории. Позднее в этой работе, мы используем эту технику для вычисления плоских координат в $SU(3)_4$ модели.

4.1 Эффективное действие

Действие $N = 2$ супергравитации двух измерений определяется заданием геометрии пространства модулей. Это многообразие можно понимать как таргет-пространство для сигма-модели, описывающей взаимодействие модулей. Благодаря большой степени суперсимметрии взаимодействия векторных и спинорных полностью определяется из соответствующих взаимодействий между скалярными частицами. Помимо этого, суперсимметрия накладывает ограничения на геометрию пространства модулей, оно имеет вид

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mathbb{Q}} \times \mathcal{M}_{SK}, \quad (4.1.1)$$

где $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ - кватернионное многообразие, определяющее действие для скалярных полей гипермультиплетов, а \mathcal{M}_{SK} - специальное Кэлерово многообразие, определяющее действие для скалярных полей векторного мультиплетов.

В дальнейшем мы будем интересоваться только действием для векторных мультиплетов, т.к. действие для гипермультиплетов получает множество квантовых поправок, и поэтому его вычисление представляет трудоемкую задачу. Для начала, мы проясним, что понимается под специальной Кэлеровой геометрией. Специальное Кэлерово многообразие это Кэлерово многообразие, которое имеет специальную форму Кэлерового потенциала:

$$e^{-K} = i \left(2(F - \bar{F}) - (t^a - \tilde{t}^a)(F_a + \bar{F}_a) \right), \quad (4.1.2)$$

где K - Кэлеров потенциал, $F(t)$ - некоторая функция от модулей t^a , называемая предпотенциалом, и F_a ее производные. Эту формулу удобно переписать используя однородные координаты $Z^I = (Z^0, Z^a)$,

такие что $t^a = Z^a/Z^0$ и определив $\mathcal{F}(Z) = (Z^0)^2 F(t)$. После этих манипуляций формула (4.1.2) принимает вид

$$e^{-K} = i (\bar{Z}^I \mathcal{F}_I - Z^I \bar{\mathcal{F}}_I), \quad (4.1.3)$$

Специальная геометрия возникает при компактификации на Калаби-Яу следующим образом. Мы можем выбрать базис циклов $H^3(X, \mathbb{Z})$ с генераторами α_I, β^J ($I, J = 0, \dots, h^{2,1}(X)$) дуальным каноническому базису (A^I, B_J) гомологий $H_3(X, \mathbb{Z})$ с числами пересечений $A^I \cdot A^J = B_I \cdot B_J = 0$, $A^I \cdot B_J = \delta_I^J$. Тогда

$$\int_{A^J} \alpha_I = \int_X \alpha_I \wedge \beta^J = - \int_{B_I} \beta^J = \delta_I^J. \quad (4.1.4)$$

Все остальные спаривания зануляются. Этот базис однозначен с точностью до симплектической замены.

Известно, что A -периоды $(3, 0)$ -голоморфной формы Ω , т.е. $Z^I = \int_{A^I} \Omega$ являются локальными проективными координатами для модулей комплексной структуры Калаби Яу. Тогда для B -периодов мы имеем $\mathcal{F}_I = \int_{B_I} \Omega$ и

$$\Omega = Z^I \alpha_I - \mathcal{F}_I \beta^I. \quad (4.1.5)$$

Более того, при изменении комплексной структуры голоморфная $(3, 0)$ -форма Ω становится некоторой комбинацией $(3, 0)$ и $(2, 1)$ форм (т.к. dz в старой комплексной структуре становится комбинацией dz и $d\bar{z}$ в новой). Отсюда немедленно следует $\int \Omega \wedge \partial_I \Omega = 0$. Вставляя сюда (4.1.5), получаем $\mathcal{F}_I = \frac{1}{2} \partial_I (Z^J \mathcal{F}_J)$ или $\mathcal{F}_I = \partial_I \mathcal{F}$, где $\mathcal{F} = \frac{1}{2} Z^I \mathcal{F}_I$, $\mathcal{F}(\lambda Z) = \lambda^2 \mathcal{F}(Z)$. Поэтому естественно отождествить Z^I со специальными координатами и \mathcal{F} с предпотенциалом. После чего мы можем вычислить Кэлеров потенциал

$$e^{-K} = i \int_X \Omega \wedge \bar{\Omega} \quad (4.1.6)$$

Стоит отметить, что Кэлеров потенциал имеет простую форму (4.1.3) только в этих специальных координатах (с точностью до симплектической замены), которые выделены тем, что приводят некоторую симплектическую форму к каноническому виду.

4.2 Топологическая теория струн

Как указывалось ранее, спектр безмассовых возбуждений задается киральными полями двумерной теории на мировом листе. Оказывается, что их взаимодействие также описывается относительно простой теорией, называемой топологической теорией струн. Топологический твист получается твистованием Лоренц симметрии на мировом листе $SO(2)$ с помощью R -симметрии $U(1)$ расширенной суперконформной алгебры. В результате этого изменяется гамильтониан и, соответственно, спектр физических состояний. В итоге спектр только из киральных полей, а взаимодействие описывается так называемым киральным кольцом. Более точно, тензор энергии импульса изменяется как

$$T^{\text{top}} = T + \frac{1}{2} \partial J. \quad (4.2.1)$$

При этом изменяется спин всех остальных токов, в частности важно что один из суперзарядов становится скаляром

$$Q(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} G^+(z) \quad (4.2.2)$$

Более того физические состояния становятся когомологиями соответствующего заряда

$$Q = \int dz Q(z) \quad (4.2.3)$$

Более того тензор энергии импульса становится БРСТ-точным

$$\{Q, G^-(z)\} = \sqrt{2}T^{top}(z) \quad (4.2.4)$$

Это важное соотношение говорит о том, что корреляционные функции не зависят от метрики на двумерно многообразии, т.к. малое изменение метрики эквивалентно вставке тензора энергии-импульса, который в силу своей БРСТ точности зануляет коррелятор. На языке формул это означает

$$\frac{\delta}{\delta h^{\alpha\beta}} \langle \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle = \langle T_{\alpha\beta} \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle \sim \langle \{Q, G^-\} \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle = 0 \quad (4.2.5)$$

Именно из-за этого ключевого свойства теория называется топологической.

Было показано [15], что для вычисления корреляционных функций полей Φ_α , а также их суперпартнеров $\Phi_\alpha^{(1,1)} = G_{-1/2}^- G_{-1/2}^+ \Phi_\alpha$, топологической теории необходимо и достаточно знать двух точечную функцию

$$\eta_{\alpha\beta} = \langle \Phi_\alpha \Phi_\beta \rangle, \quad (4.2.6)$$

вместе с возмущенной трехточечной

$$C_{\alpha\beta\gamma}(s_1, \dots, s_M) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_\gamma \exp \left(\sum_{\lambda=1}^M s_\lambda \int \Phi_\lambda^{(1,1)} d^2z \right) \rangle. \quad (4.2.7)$$

В статье [15] было показано, что $\eta_{\alpha\beta}$ невырождена и не зависит от s , а структурные константы $C_{\alpha\beta\gamma}(s)$ могут быть выражены через предпотенциал \mathcal{F} как

$$C_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial s_\alpha \partial s_\beta \partial s_\gamma}. \quad (4.2.8)$$

Также $C_{\alpha\beta}^\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \eta^{\gamma\delta} C_{\alpha\beta\delta}$ подчиняются уравнению ассоциативности

$$C_{\alpha\beta}^\rho C_{\rho\gamma}^\mu = C_{\alpha\gamma}^\rho C_{\rho\beta}^\mu. \quad (4.2.9)$$

При $s_\alpha = 0$ кольцо, определяемое этими структурными константами, совпадает с невозмущенным киральным кольцом.

Эти соотношения вместе с условие симметричности операторного разложения $C_{\alpha\beta}^\gamma = C_{\beta\alpha}^\gamma$ означают, что функции $C_{\alpha\beta}^\gamma(s)$ являются структурными константами для коммутативной, ассоциативной алгебры (или кольца) с единицей зависящего от параметров $\{s_\alpha\}$.

Эти свойства метрики $\eta_{\alpha\beta}$ и структурных констант $C_{\alpha\beta}^\gamma(s)$, означают что они определяют структуру Фробениусова многообразия [16] и, что s_μ являются плоскими координатами на это многообразии, т.е. координатами в которых метрика $\eta_{\alpha\beta}$ - постоянная.

Глава 5

Вычисление плоских координат для Фробениусова многообразия

Как было объяснено выше, вычисление корреляционных функций топологических теорий является важной проблемой для определения низкоэнергетического действия струны компактифицированной на Калаби Яу. Как правило в более конкретных примерах, как например в квинтике

$$\sum_{i=1}^5 z_i^5 = 0, \quad (5.0.1)$$

естественные координаты для деформаций не являются плоскими координатами на соответствующем Фробениусовом многообразии топологической теории. Например, в квинтике естественная деформация комплексной структуры состоит в голоморфной деформации полинома пятой степени,

$$\sum_{i=1}^5 z_i^5 + \psi z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 = 0, \quad (5.0.2)$$

ψ - не является плоской координатой, т.к. выражается через нее нелинейным образом.

В связи с этим возникает проблема преобразования координат от естественных к плоским. Развитию методов таких вычислений для Фробениусова многообразия, связанного с изолированной сингулярностью [16, 17], и посвящена данная работа вместе с предшествующей серией статей [18–20].

Новый метод основан на гипотезе о интегральном представлении, предложенного для ADE-сингулярностей в [18]. В [19, 20] метод и сама гипотеза были сформулированы для случая общих изолированных сингулярностей. Также, в этих работах гипотеза прошла проверку для релевантных и маргинальных деформаций.

В случае топологических теорий связанных с Калаби Яу интересны точно маргинальные деформации, т.к. только они отвечают модулям Калаби Яу. Однако, в более широком контексте топологических двумерных теорий, релевантные и иррелевантные операторы также представляют научный интерес. Цель данной работы проверить вышеупомянутую гипотезу для случая иррелевантных деформаций на примере вычисления плоских координат Фробениусова многообразия деформаций кирального кольца Гешнера модели $\widehat{SU}(3)_4$. Данная модель имеет одно маргинальное и одно иррелевантное возмущения. Мы сравним результат вычисления, с использованием гипотезы, с результатом прямого вычисления и найдем полное соответствие.

5.1 Предварительные сведения

В данном разделе, мы сделаем краткий обзор топологических теорий поля получаемых с помощью виттэновского твиста $N = 2$ суперконформных моделей Ланадау-Гинзбурга.

В данных моделях суперпотенциал $W_0[\Phi_1, \dots, \Phi_n]$ зависит от n фундаментальных киральных полей. Эти поля генерируют киральное кольцо R_0 и мы будем обозначать базис в кольце Φ_α для $\alpha = 1, \dots, M$. Здесь $M = \dim R_0$ и первые n полей с индексами $\alpha = 1, \dots, n$ обозначают генераторы кольца, причем $\Phi_1 = 1$ - единичный оператор.

Киральное кольцо R_0 изоморфно кольцу полиномов от переменных x_i

$$R_0 = \mathbb{C}^n[x_1, \dots, x_n] / \left\{ \frac{\partial W_0}{\partial x_i} \right\}, \quad (5.1.1)$$

где $\left\{ \frac{\partial W_0}{\partial x_i} \right\}$ обозначает идеал сгенерированный первыми производными от $W_0[x_i]$.

Ключевым фактом, открытым в [15] и позволяющим точно решить топологическую модель данного типа, является то, что Фробениусово многообразие, определенное через $C_{\alpha\beta\gamma}(s)$ and $\eta_{\alpha\beta}$ для данной модели, совпадает с Фробениусовым многообразием определенным версальными деформациями $W(x, t)$ суперпотенциала $W_0(x)$

$$W(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} W_0(x) + \sum_{\alpha=1}^M t_\alpha e_\alpha(x). \quad (5.1.2)$$

Здесь $\{e_\alpha\}$ - базис кольца R_0 (5.1.1), а $e_1(x) = 1$ - единичный элемент R_0 .

Кольцо, определяющее Фробениусову структуру, совпадает с полиномиальным кольцом определенным $W(x, t)$:

$$R_W = \mathbb{C}^n[x_1, \dots, x_n] / \left\{ \frac{\partial W}{\partial x_i} \right\}. \quad (5.1.3)$$

В частности структурные константы $\tilde{C}_{\alpha\beta}^\gamma(t)$ кольца R_W в базисе $\{e_\alpha\}$ определяются соотношениями

$$e_\alpha e_\beta = \tilde{C}_{\alpha\beta}^\gamma(t) e_\gamma \quad \text{mod} \left\{ \frac{\partial W}{\partial x_i} \right\}. \quad (5.1.4)$$

Римонова метрика $g_{\alpha\beta}(t)$ определяется с помощью вычета Гротендика в терминах примитивной формы Сайто [17]

$$\Omega(x, t) = \lambda(x, t) dx_1 \wedge \dots \wedge x_n \quad (5.1.5)$$

как

$$g_{\mu\nu} = \text{Res}_{x=\infty} \frac{e_\mu e_\nu \Omega}{\prod_i \partial W / \partial x_i}. \quad (5.1.6)$$

В работе [21] было доказано, что примитивная форма существует. А именно, существует такая дифференциальная форма $\Omega(x, t)$, что структурные константы $\tilde{C}_{\alpha\beta}^\gamma(t)$ (5.1.4) и метрика $g_{\alpha\beta}(t)$ (5.1.6) удовлетворяют аксиоматическому определению Дубровина Фробениусовых многообразий:

$$\tilde{C}_{\alpha\beta}^\rho \tilde{C}_{\rho\gamma}^\mu = \tilde{C}_{\alpha\gamma}^\rho \tilde{C}_{\rho\beta}^\mu, \quad (5.1.7)$$

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} [g_{\alpha\beta}] = 0, \quad (5.1.8)$$

$$\nabla_\sigma \tilde{C}_{\mu\nu\lambda} = \nabla_\mu \tilde{C}_{\sigma\nu\lambda}, \quad (5.1.9)$$

$$\tilde{C}_{\mu\nu\lambda} = \tilde{C}_{\nu\mu\lambda} = \tilde{C}_{\mu\lambda\nu}. \quad (5.1.10)$$

Параметры деформации $\{t_\alpha\}$ являются некоторым выбором координат на Фробениусовом многообразии и связаны нелинейным преобразованием с константами связи s^μ , которые являются плоскими координатами на это многообразие.

Знание зависимости плоских координат от естественных позволяет выразить возмущенные структурные константы $C_{\alpha\beta\gamma}$ и препотенциал \mathcal{F} в терминах $g_{\mu\nu}$ и $\tilde{C}_{\alpha\beta}^\gamma(t)$. Поэтому вычисление функций $s^\mu(t)$ и примитивной формы $\Omega(x, t)$ является ключевым элементом решения топологической модели Ландау-Гинзбурга.

5.2 Выражение плоских координат через осциллирующие интегралы

Мы будем предполагать, что суперпотенциал $W_0(x)$ является квазиоднородным полиномом, связанным с изолированной сингулярностью

$$W_0(\Lambda^{\rho_i} x_i) = \Lambda^d W_0(x_i), \quad (5.2.1)$$

где целочисленные веса являются размерностями суперпотенциала $d = [W_0]$ и полей $\rho_i = [x_i]$.

Вследствие этого мы можем выбрать квазиоднородный базис e_α кольца R_W . Мы будем обозначать веса (или размерности) как $\deg e_\alpha$. Элемент базиса называется релевантным, маргинальным или иррелевантным, если $\deg e_\alpha < d$, $\deg e_\alpha = d$ или $\deg e_\alpha > d$ соответственно.

В [18, 20] была выдвинута гипотеза, о том что плоские координаты задаются следующим интегральным соотношением

$$s_\mu(t) = \sum_{m_\alpha \in \Sigma_\mu} \left(\int_{\gamma_\mu} \exp(W_0(x)) \prod_{\alpha} e_\alpha^{m_\alpha} \Omega \right) \prod_{\alpha} \frac{t_\alpha^{m_\alpha}}{m_\alpha!}, \quad (5.2.2)$$

где Σ_μ определяются из требования совпадения размерностей левой и правой частей уравнения. В дальнейшем мы дадим явные выражения для них.

Циклы γ_μ образуют базис гомологий $H_n(\mathbb{C}^n, \text{Re } W_0 = -\infty)$ которые определяются как $\lim_{L \rightarrow +\infty} H_n(\mathbb{C}^n / \{\text{Re } W_0 \leq -L\})$.¹ Простой явный пример выбора таких циклов для $n = 1$ можно найти в [18] на фигуре 2. Он хорошо иллюстрирует данное понятие.

Мы зафиксируем нормировку координат требованием для первого нетривиального члена разложения плоских координат иметь вид $s_\mu = t_\mu + \dots$

Для вычисления интегралов в (5.2.2) мы будем использовать тот же способ, что и в [20]. Ключевым в таком вычислении является следующее свойство осциллирующих интегралов

$$\int_{\gamma} \exp(W_0(x)) P_1(x) dx = \int_{\gamma} \exp(W_0(x)) P_2(x) dx, \quad (5.2.3)$$

если существуют такая $(n-1)$ -форма U , что

$$P_1(x) dx = P_2(x) dx + D_{W_0} U, \quad (5.2.4)$$

где D_{W_0} - Дифференциал Сайто

$$D_{W_0} = d + dW_0 \wedge. \quad (5.2.5)$$

Дифференциал Сайто D_{W_0} определяет когомологии Сайто H^n на пространстве n -форм.

Формы $e_\mu dx$ для $\mu = 1, \dots, M$ могут быть выбраны в качестве удобного базиса в H^n .

Мы определим спаривание элементов базиса $e_\mu dx$ в H^n и циклов γ_μ как

$$r_{\mu, \nu} = \int_{\gamma_\mu} \exp(W_0) e_\nu dx. \quad (5.2.6)$$

На первый взгляд, кажется, что следуют выбрать базисы дуальными друг другу, т.е.

$$r_{\mu, \nu} \stackrel{?}{=} \delta_{\mu, \nu}. \quad (5.2.7)$$

Однако, из-за возникновения резонансов, необходимо рассмотреть более общий выбор. Резонансом мы называем ситуацию когда размерности двух разных координат удовлетворяют $[s_\mu] - [s_\nu] = 0 \pmod{d}$ и $[s_\mu] \neq [s_\nu]$. Мы используем следующий выбор $r_{\mu, \mu} = 1$ для всех μ и $r_{\mu, \nu} = 0$, если s_μ and s_ν координаты

¹В этом пределе, когомологический класс может быть представлен в виде некомпактного замкнутого n -мерного подмногообразия γ в \mathbb{C}^n такого что $\text{Re}(W_0)$ стремится $-\infty$ на бесконечности, и, следовательно интеграл $\int_{\gamma} e^{W_0} dx$ сходится.

не находятся в резонансе.² Выбор такое спаривание между гомологиями и когомологиями приводит к выражению для плоских координат, которое зависит от дополнительных параметров, как и было предсказано в [22].

Из соображений размерности примитивная форма Ω должна разлагаться как

$$\Omega = \sum_{n,l \in \omega} A(n,l) \prod_{\alpha} e_{\alpha}^{n_{\alpha}} t_{\alpha}^{l_{\alpha}} dx, \quad (5.2.8)$$

где область ω , по которой происходит суммирование, определяется как

$$\omega : \sum_{\alpha} (n_{\alpha}[e_{\alpha}] + l_{\alpha}[t_{\alpha}]) = 0, \quad n_{\alpha} \geq 0, \quad l_{\alpha} \geq 0. \quad (5.2.9)$$

Подставляя (5.2.8) в (5.2.2) находим, что

$$s_{\mu}(t) = \sum_{\substack{m_{\alpha} \in \Sigma_{\mu}, \\ n_{\alpha}, l_{\alpha} \in \omega}} \left(\int_{\gamma_{\mu}} \exp(W_0(x)) A(n,l) \prod_{\alpha} e_{\alpha}^{m_{\alpha} + n_{\alpha}} dx \right) \prod_{\alpha} \frac{t_{\alpha}^{m_{\alpha} + l_{\alpha}}}{m_{\alpha}!}. \quad (5.2.10)$$

Теперь мы можем дать более точное выражения для Σ_{μ}

$$\Sigma_{\mu} : \sum_{\alpha} (m_{\alpha} + l_{\alpha})[t_{\alpha}] = [s_{\mu}], \quad m_{\alpha} \geq 0. \quad (5.2.11)$$

Т.к. $e_{\mu} dx$ образуют базис когомологий H^n , любая n -форма может быть разложена по нему. В частности,

$$\prod_{\alpha} e_{\alpha}^{k_{\alpha}} dx = \sum_{\mu} B_{\mu}(k) e_{\mu} dx + D_{W_0} U. \quad (5.2.12)$$

Из-за условия однородности в правой части этого уравнения возникнут только такие элементы базиса $e_{\mu} dx$, вес которых совпадает с весом левой части по модулю d . В случае резонансов несколько элементов одного веса могут возникнуть в правой части (5.2.12). Их появление в осциллирующих интегралах (5.2.6) является причиной появления параметров $r_{\mu, \nu}$ в выражении для s_{μ} когда e_{μ} и e_{ν} находятся в резонансе.

В случае модели $\widehat{SU}(3)_4$, которую мы рассмотрим далее, существуют два резонанса $[s_1] - [s_{14}] = 7$ и $[s_2] - [s_{15}] = 7$. Мы покажем, что два параметра $r_{1,14}$ and $r_{2,15}$, если не предполагать их равными нулю, возникают в выражении для плоских координат (5.2.2).

Для заданного k_{α} мы можем использовать уравнение (5.2.12) для нахождения коэффициентов $B_{\mu}(k)$. Подстановка их в (5.2.10) дает

$$s_{\mu}(t) = \sum_{\substack{m_{\alpha} \in \Sigma_{\mu}, \\ n_{\alpha}, l_{\alpha} \in \omega}} A(n,l) B_{\mu}(m+n) \prod_{\alpha} \frac{t_{\alpha}^{m_{\alpha} + l_{\alpha}}}{m_{\alpha}!}. \quad (5.2.13)$$

Эта формула дает выражения для s_{μ} , зависящее от неизвестных параметров $A(n,l)$ примитивной формы. Мы найдем эти параметры, используя условие нормировки вместе с уравнением [20]

$$\frac{\partial s_{\mu}}{\partial t_1} = \delta_{\mu,1}. \quad (5.2.14)$$

Таким образом мы получаем явное выражение для плоских координат. Конечный ответ не содержит дополнительных свободных параметров помимо $r_{\mu, \nu}$, возникающих из-за резонансов.

²В интересном нам случае $\widehat{SU}(3)_4$ этот выбор оставляет три произвольных параметра $r_{1,14}, r_{2,15}, r_{14,1}, r_{15,2}$. Последние два в итоге будут зафиксированы нормировкой и уравнением (5.2.14). В свою очередь $r_{1,14}, r_{2,15}$ останутся свободными параметрами.

5.3 Деформированное киральное кольцо $\widehat{SU}(3)_4$

В топологической конформной теории поля, которая связанная с деформированным киральным кольцом $\widehat{SU}(3)_4$ [23], суперпотенциал имеет вид

$$W_0(x_1, x_2) = \frac{q_1^7 + q_2^7}{7}, \quad (5.3.1)$$

где $x_1 = q_1 + q_2$, $x_2 = q_1 q_2$.

Мы выберем полиномы Шура в качестве базиса в этом кольце [20]

$$\begin{aligned} e_1 &\equiv e_{\emptyset} = 1, & e_2 &\equiv e_{\blacksquare} = q_1 + q_2, & e_3 &\equiv e_{\blacksquare} = q_1 q_2, & e_4 &\equiv e_{\blacksquare} = q_1^2 + q_1 q_2 + q_2^2, \\ e_5 &\equiv e_{\blacksquare} = q_1 q_2 (q_1 + q_2), & e_6 &\equiv e_{\blacksquare} = q_1^3 + q_1^2 q_2 + q_1 q_2^2 + q_2^3, & e_7 &\equiv e_{\blacksquare} = q_1^2 q_2^2, \\ e_8 &\equiv e_{\blacksquare} = q_1 q_2 (q_1^2 + q_1 q_2 + q_2^2), & e_9 &\equiv e_{\blacksquare} = q_1^4 + q_1^3 q_2 + q_1^2 q_2^2 + q_1 q_2^3 + q_2^4, \\ e_{10} &\equiv e_{\blacksquare} = q_1^2 q_2^2 (q_1 + q_2), & e_{11} &\equiv e_{\blacksquare} = q_1 q_2 (q_1^3 + q_1^2 q_2 + q_1 q_2^2 + q_2^3), & e_{12} &\equiv e_{\blacksquare} = q_1^3 q_2^3, \\ e_{13} &\equiv e_{\blacksquare} = q_1^2 q_2^2 (q_1^2 + q_1 q_2 + q_2^2), & e_{14} &\equiv e_{\blacksquare} = q_1^3 q_2^3 (q_1 + q_2), & e_{15} &\equiv e_{\blacksquare} = q_1^4 q_2^4. \end{aligned}$$

Деформированный суперпотенциал имеет вид

$$W(x_1, x_2) = \frac{q_1^7 + q_2^7}{7} + \sum_{\mu=1}^{15} t_{\mu} e_{\mu} \quad (5.3.2)$$

Первые 13 элементов этого базиса соответствуют релевантным деформациям, элементы e_{14} and e_{15} соответствуют маргинальным и иррелевантным деформациям соответственно.

Мы вычислили плоские координаты до бого порядка по t , используя технику описанную в предыдущем разделе. Выражения для них до второго порядка по t представлены в дополнении. Помимо этого там же приведено выражения для примитивной формы Ω до второго порядка по t .

5.4 Прямое вычисление плоских координат

Выражение для плоских координат (5.2.13) является гипотезой. Она была проверена в [19, 20] для топологической модели $\widehat{SU}(3)_3$, где имеется одна маргинальная деформация и нет иррелевантных.

Один из главных результатов данной работы это проверка этой гипотезы для случая иррелевантных деформаций, как например в случае деформированной модели Гешнера кирального кольца $\widehat{SU}(3)_4$.

Для того чтобы сделать эту проверку, мы посчитали плоские координаты прямым вычислением. Мы сделали это, используя теорию возмущений по суммарной степени параметров t , до четвертого порядка по t . Конечные ответы слишком сложны для того, чтобы быть представленными здесь. Поэтому мы только опишем ключевые моменты в этом вычислении.

Метрика на Фробениусовом многообразии определяется как

$$g_{\mu\nu} = \text{Res}_{x=\infty} \frac{e_{\mu} e_{\nu} \Omega}{\prod_i \partial W / \partial x_i}. \quad (5.4.1)$$

Вместо прямого вычисления этого вычета мы используем трюк из статьи [24]. А именно мы перепишем метрику как

$$g_{\mu\nu} = C_{\mu\nu}^{\lambda}(t) \text{Res}_{x=\infty} \frac{e_{\lambda} \Omega}{\prod_i \partial W / \partial x_i} = C_{\mu\nu}^{\lambda}(t) h_{\lambda}(t), \quad (5.4.2)$$

где $h_\mu(t)$ некоторые неизвестные функции t . Эти функции могут быть найдены из аксиом Фробениу-сова многообразия

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma}[g_{\alpha\beta}] = 0, \quad (5.4.3)$$

$$\nabla_\sigma C_{\mu\nu\lambda} = \nabla_\mu C_{\sigma\nu\lambda}, \quad (5.4.4)$$

$$C_{\mu\nu\lambda} = C_{\nu\mu\lambda} = C_{\mu\lambda\nu}, \quad (5.4.5)$$

где $R_{\mu\nu\lambda\sigma}$ - риманова кривизна, а $C_{\mu\nu\lambda}$ - структурные константы с индексом, опущенным с помощью метрики $g_{\alpha\beta}$.

С помощью компьютера мы нашли выражение для метрики до четвертого порядка по t . Из уравнения (5.4.3) мы нашли выражения для $h_\mu(t)$, которые содержали два параметра. После этого, уравнения (5.4.5) тождественно удовлетворены. Дальнейшее решение уравнения (5.4.4) фиксирует значение одного из параметров, оставляя только один. Тот факт, что решение уравнений (5.4.3-5.4.5) содержит только один параметр, находится в полном соответствии с результатами статьи [22].

Наконец мы можем найти выражение для плоских координат используя уравнение

$$\frac{\partial^2 s_\mu}{\partial t_\alpha \partial t_\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial s_\mu}{\partial t_\gamma}. \quad (5.4.6)$$

Т.к. выражение для метрики, найденной из (5.4.3-5.4.5), содержат один параметр, плоские координаты также содержат один параметр. Эти результаты находятся в полном соответствии с результатами раздела 5.2, если в них дополнительно наложить условие $r_{1,14} = r_{2,15}$.

5.4.1 Резонансы и модули примитивной формы

В данном разделе, мы хотели бы указать на связь наших результатов с [22]. Для начала, введем несколько обозначений (в данном разделе мы изменим некоторые нормировки, использованные в данной работе, для того чтобы наши формулы совпадали с формулами из [25]). Мы будем обозначать веса диаграмм как $\sigma_i = \deg e_i / \deg W_0$. Базис в кольце должен быть выбран так, чтобы $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \leq \sigma_M$. Как было доказано в [22], размерность D пространства модулей примитивных форм (или число свободных параметров в примитивной форме) задается формулой

$$D = \# \{(i, j) \mid p(i, j) \in \mathbb{Z}_{>0}, i + j < M + 1\} + \# \{(i, j) \mid p(i, j) \in \mathbb{Z}_{>0}^{\text{odd}}, i + j = M + 1\}, \quad (5.4.7)$$

где $p(i, j) = \sigma_i - \sigma_j$, M - размерность кирального кольца, $\mathbb{Z}_{>0}$ - натуральные числа, а $\mathbb{Z}_{>0}^{\text{odd}}$ - нечетные натуральные числа.

Заметим, что условие равенства $p(i, j)$ целому числу в точности совпадает с условием резонанса ($[s_\mu] - [s_\nu] = 0 \pmod{d}$ and $[s_\mu] \neq [s_\nu]$), которое мы использовали в данной статье. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. $\widehat{SU}(3)_3$.

В этом случае размерность кольца $M = 10$ и имеется всего один резонанс $\sigma_1 = \sigma_\emptyset = 0$, $\sigma_{10} = \sigma_{\boxplus} = 1$.

$$p(10, 1) = 1, \quad 10 + 1 = M + 1 = 11 \rightarrow D = 1. \quad (5.4.8)$$

Мы видим, что число резонансов совпадает с количеством параметров в примитивной форме.

Пример 2. $\widehat{SU}(3)_4$.

В данном случае размерность кирального кольца $M = 15$ и имеется два резонанса

$$(\sigma_1 = 0, \sigma_{14} = 1) \quad p(14, 1) = 1, \quad 14 + 1 = 15 < M + 1 = 16, \quad (5.4.9)$$

$$(\sigma_2 = \frac{1}{7}, \sigma_{15} = \frac{8}{7}) \quad p(15, 2) = 1, \quad 15 + 2 = 17 > M + 1 = 16. \quad (5.4.10)$$

Отсюда видно, что в данном случае имеется два резонанса, однако примитивная формула содержит только один параметр как и следует из формулы (5.4.7) и результатов предыдущей секции.

Пример 3. $\widehat{SU}(3)_5$.

В данном случае размерность кирального кольца $M = 21$ и резонансы

$$\emptyset \sim \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad \square \sim \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}. \quad (5.4.11)$$

Вычисление размерности пространства модулей

$$(\sigma_1 = 0, \sigma_{18} = 1) \quad p(18, 1) = 1, \quad 18 + 1 = 19 < M + 1 = 22, \quad (5.4.12)$$

$$(\sigma_1 = 0, \sigma_{19} = 1) \quad p(19, 1) = 1, \quad 19 + 1 = 20 < M + 1 = 22, \quad (5.4.13)$$

$$(\sigma_2 = \frac{1}{8}, \sigma_{20} = \frac{9}{8}) \quad p(20, 2) = 1, \quad 20 + 2 = 22 = M + 1 = 22, \quad (5.4.14)$$

$$(\sigma_3 = \frac{2}{8}, \sigma_{21} = \frac{10}{8}) \quad p(21, 3) = 1, \quad 21 + 3 = 24 > M + 1 = 22, \quad (5.4.15)$$

$$(\sigma_4 = \frac{2}{8}, \sigma_{21} = \frac{10}{8}) \quad p(21, 4) = 1, \quad 21 + 4 = 25 > M + 1 = 22. \quad (5.4.16)$$

Т.е. число резонансов равняется 5, в то время как число модулей 3.

Существование резонансов приводит к дополнительным параметрам $r_{\mu,\nu}$ в выражении для плоских координат полученных из (5.2.2).

5.4.2 Заключение

Сравнение двух методов вычислений, сделанных в этой работе, показывает, что, после наложения условия $r_{1,14} = r_{2,15}$, оба выражения для плоских координат совпадают.

Это является нетривиальной проверкой гипотезы (5.2.2), для случая теории содержащей иррелевантными и маргинальными деформации помимо релевантных.

В то же время, это при этом сравнении возникает интересный вопрос природы дополнительного условия, накладываемого на параметры $r_{\mu,\nu}$, которое было предсказано в [22].

Недавно, новый пертурбативный способ вычисления плоских координат и примитивной формы был предложен в статьях [25, 26]. Было бы интересно понять связь этого метода с подходом данной работы. Возможно результаты [25, 26] могут помочь нам доказать гипотезу (5.2.2) о представлении плоских координат через осциллирующие координаты.

Приложение**Выражение для s_μ до второго порядка по t**

Здесь мы приводим выражение для плоских координат, полученных с помощью гипотезы (5.2.2). Для того, чтобы эти выражения совпали с результатом прямого вычисления раздела 5.4, нужно полжить

$$r_{1,14} = r_{2,15}.$$

$$\begin{aligned}
s_{15} &= t_{15} - (r_{1,14} + r_{2,15})t_{14}t_{15}, \\
s_{14} &= t_{14} - r_{1,14}t_{14}^2 - r_{2,15}t_{13}t_{15} - r_{2,15}t_{12}t_{15}, \\
s_{13} &= t_{13} + (3 - r_{1,14})t_{13}t_{14} + (3 - r_{2,15})t_{11}t_{15} - r_{2,15}t_{10}t_{15}, \\
s_{12} &= t_{12} - r_{1,14}t_{12}t_{14} - r_{2,15}t_{10}t_{15}, \\
s_{11} &= t_{11} + t_{13}^2 + 2t_{12}t_{13} + (2 - r_{1,14})t_{11}t_{14} + 2t_{10}t_{14} - r_{2,15}t_9t_{15} + (2 - r_{2,15})t_8t_{15}, \\
s_{10} &= t_{10} + \frac{3t_{13}^2}{2} + 3t_{11}t_{14} - r_{1,14}t_{10}t_{14} + 3t_9t_{15} - r_{2,15}t_8t_{15} - r_{2,15}t_7t_{15}, \\
s_9 &= t_9 + t_{11}t_{13} + t_{10}t_{13} + t_{10}t_{12} - r_{1,14}t_9t_{14} + t_8t_{14} + t_7t_{14} - r_{2,15}t_6t_{15} + t_5t_{15}, \\
s_8 &= t_8 + 2t_{11}t_{13} + 2t_{11}t_{12} + 2t_{10}t_{13} + 2t_9t_{14} + (2 - r_{1,14})t_8t_{14} + (2 - r_{2,15})t_6t_{15} - r_{2,15}t_5t_{15}, \\
s_7 &= t_7 + 3t_{11}t_{13} + 3t_9t_{14} - r_{1,14}t_7t_{14} - r_{2,15}t_5t_{15}, \\
s_6 &= t_6 + \frac{t_{11}^2}{2} + t_{10}t_{11} + \frac{t_{10}^2}{2} + t_9t_{13} + t_8t_{13} + t_8t_{12} + t_7t_{13} + (1 - r_{1,14})t_6t_{14} + t_5t_{14} + (1 - r_{2,15})t_4t_{15}, \\
s_5 &= t_5 + t_{11}^2 + 2t_{10}t_{11} + 2t_9t_{13} + 2t_9t_{12} + 2t_8t_{13} + 2t_6t_{14} - r_{1,14}t_5t_{14} - r_{2,15}t_4t_{15} - r_{2,15}t_3t_{15}, \\
s_4 &= t_4 + t_9t_{11} + t_9t_{10} + t_8t_{11} + t_8t_{10} + t_7t_{11} + t_6t_{13} + t_6t_{12} + t_5t_{13} + (1 - r_{1,14})t_4t_{14} - r_{2,15}t_2t_{15}, \\
s_3 &= t_3 - t_9t_{11} + 2t_9t_{10} + 2t_8t_{11} + 2t_6t_{13} - r_{1,14}t_3t_{14} - r_{2,15}t_2t_{15}, \\
s_2 &= t_2 + \left(\frac{1}{2}r_{2,15} - 1\right)t_9^2 + t_8t_9 + \left(\frac{1}{2}r_{2,15} + \frac{1}{2}\right)t_8^2 + t_7t_9 + \frac{1}{2}r_{2,15}t_7^2 + (r_{2,15} + 1)t_6t_{11} + t_6t_{10} + t_5t_{11} \\
&\quad + r_{2,15}t_5t_{10} + (r_{2,15} + 1)t_4t_{13} + r_{2,15}t_3t_{12} + (r_{2,15} - r_{1,14})t_2t_{14}, \\
s_1 &= t_1 + (r_{1,14} - 1)t_6t_9 + (r_{1,14} + 1)t_6t_8 + t_5t_9 + r_{1,14}t_5t_8r_{1,14} + r_{1,14}t_5t_7 + (r_{1,14} + 1)t_4t_{11} + r_{1,14}t_4t_{10} \\
&\quad + r_{1,14}t_3t_{10} + r_{1,14}t_2t_{13} + r_{1,14}t_2t_{12}.
\end{aligned}$$

Точные выражения при $t_{14} = t_{15} = 0$

Ниже приведены выражения для плоских координат, когда координаты маргинального и иррелевантного деформаций равны нулю.

$$\begin{aligned}
s_{15} &= t_{15}, & s_{14} &= t_{14}, & s_{13} &= t_{13}, & s_{12} &= t_{12}, & s_{11} &= t_{11} + t_{13}^2 + 2t_{12}t_{13}, \\
s_{10} &= t_{10} + \frac{3}{2}t_{13}^2, & s_9 &= t_9 + t_{11}t_{13} + t_{10}t_{13} + t_{10}t_{12} + 2t_{13}^3 + 3t_{12}t_{13}^2, \\
s_8 &= t_8 + 2t_{11}t_{13} + 2t_{11}t_{12} + 2t_{10}t_{13} + 5t_{13}^3 + 5t_{12}t_{13}^2 + 5t_{12}^2t_{13}, \\
s_7 &= t_7 + 3t_{11}t_{13} + 2t_{13}^3 + 6t_{12}t_{13}^2 + 2t_{12}^3, \\
s_6 &= t_6 + \frac{t_{11}^2}{2} + t_{10}t_{11} + \frac{t_{10}^2}{2} + t_9t_{13} + t_8t_{13} + t_8t_{12} + t_7t_{13} + \frac{15}{2}t_{11}t_{13}^2 + 5t_{11}t_{12}t_{13} + \frac{5}{2}t_{11}t_{12}^2 + 5t_{10}t_{13}^2 \\
&\quad + 5t_{10}t_{12}t_{13} + 10t_{13}^4 + 20t_{12}t_{13}^3 + 10t_{12}^2t_{13}^2 + \frac{20}{3}t_{12}^3t_{13},
\end{aligned}$$

$$s_5 = t_5 + t_{11}^2 + 2t_{10}t_{11} + 2t_9t_{13} + 2t_9t_{12} + 2t_8t_{13} + 8t_{11}t_{13}^2 + 8t_{11}t_{12}t_{13} + 8t_{10}t_{13}^2 + 8t_{10}t_{12}t_{13} + 4t_{10}t_{12}^2 + \frac{43}{3}t_{13}^4 + 24t_{12}t_{13}^3 + 18t_{12}^2t_{13}^2,$$

$$s_4 = t_4 + t_9t_{11} + t_9t_{10} + t_8t_{11} + t_8t_{10} + t_7t_{11} + t_6t_{13} + t_6t_{12} + t_5t_{13} + 6t_{11}^2t_{13} + 2t_{11}^2t_{12} + 8t_{10}t_{11}t_{13} + 4t_{10}t_{11}t_{12} + 4t_{10}^2t_{13} + 2t_{10}^2t_{12} + 4t_9t_{13}^2 + 4t_9t_{12}t_{13} + 6t_8t_{13}^2 + 4t_8t_{12}t_{13} + 2t_8t_{12}^2 + 2t_7t_{13}^2 + 4t_7t_{12}t_{13} + 30t_{11}t_{13}^3 + 48t_{11}t_{12}t_{13}^2 + 16t_{11}t_{12}^2t_{13} + \frac{16}{3}t_{11}t_{12}^3 + \frac{80}{3}t_{10}t_{13}^3 + 32t_{10}t_{12}t_{13}^2 + 16t_{10}t_{12}^2t_{13} + 40t_{13}^5 + 88t_{12}t_{13}^4 + 88t_{12}^2t_{13}^3 + \frac{88}{3}t_{12}^3t_{13}^2 + \frac{44}{3}t_{12}^4t_{13},$$

$$s_3 = t_3 - t_9t_{11} + 2t_9t_{10} + 2t_8t_{11} + 2t_6t_{13} + 3t_{11}^2t_{13} + 3t_{11}^2t_{12} + 6t_{10}t_{11}t_{13} + 3t_{10}^2t_{13} + 3t_{10}^2t_{12} + 3t_9t_{13}^2 + 3t_8t_{13}^2 + 6t_8t_{12}t_{13} + 3t_7t_{13}^2 + 3t_7t_{12}^2 + 24t_{11}t_{13}^3 + 24t_{11}t_{12}t_{13}^2 + 27t_{11}t_{12}^2t_{13} + 17t_{10}t_{13}^3 + 27t_{10}t_{12}t_{13}^2 + 27t_{13}^5 + \frac{135}{2}t_{12}t_{13}^4 + 45t_{12}^2t_{13}^3 + 45t_{12}^3t_{13}^2 + \frac{9t_{12}^5}{2}.$$

Выражения для s_1 и s_2 слишком громоздки и мы не будем их приводить.

Примитивная форма до второго порядка по t

Ниже приведены выражения для примитивной формы до второго порядка по общей степени t . Заметим, что разложение (5.2.8) на самом деле переопределено, т.к. любой полином от e_α может быть выражен как полином только от e_2 и e_3 . Мы используем эту свободу, чтобы выразить примитивную форму линейно через e_α .

$$\Omega = \left[1 - r_{1,14}t_{14} + (r_{1,14}^2 - 1)t_{14}^2 + r_{1,14}r_{2,15}t_{13}t_{15} + (r_{1,14}r_{2,15} - 2)t_{12}t_{15} \right] e_1 + \left[-r_{2,15} + (r_{2,15}^2 + r_{1,14}r_{2,15} - 3)t_{14} \right] t_{15}e_2 - 3t_{15}^2e_3.$$

Часть II

Деформированные сигма-модели и теории дуальные к ним

Во-второй части данной работы, мы перейдем к несколько иным интегрируемым структурам в теории струн. В 1998 Хуаном Малдасеной была открыта AdS/CFT-дуальность между IIB супергравитацией на пространстве $AdS_5 \times S^5$ и $N = 4$ теорией супер Янг-Миллса. Позднее было открыто, что эта теория Янга-Миллса является интегрируемой в так называемом пределе 'Хуфта также, как и дуальная ей сигма-модель $AdS_5 \times S^5$. Исследование этой интегрируемости было важным направлением исследований этого десятилетия. Интегрируемая структура, лежащая в основе этой модели, допускает однопараметрическую деформацию. Как будет показано в этой работе, часть этой структуры допускает дуальное описание при определенном значении параметра деформации. Это факт может пролить свет на природу этой интегрируемости, а также позволит использовать новые методы теории интегрируемых систем, неприменимые в недеформированном случае.

Понимание этого феномена для полной сигма модели $AdS_5 \times S^5$, а не только для её S^5 части рассмотренной в данной статье, является перспективным направлением будущих исследований. Помимо этого, было бы интересно попробовать сформулировать AdS/CFT соответствие непосредственно между теориями типа Тоды и их гравитационным описанием.

Глава 6

Интегрируемые модели Тодовского типа

Рассмотрим двумерную квантовую теорию поля определенную действием

$$\mathcal{A} = \int \left(\frac{1}{8\pi} g^{ab} (\partial_a \varphi, \partial_b \varphi) + \frac{(\mathbf{r}, \varphi)}{4\pi} R + \sum_{r=1}^n e^{(\mathbf{a}_r, \varphi)} \right) \sqrt{g} d^2 z, \quad (6.0.1)$$

где $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ это n -компонентное бозонное поле, g и R – метрика и скалярная кривизна замкнутой поверхности, а $(\mathbf{r}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ – заданный набор векторов. Можно задать следующим вопросом: при каких условиях на набор векторов $(\mathbf{r}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ теория, определенная действием (7.1.26), будет иметь расширенную конформную симметрию с высшими спинами (или, другими словами, W -симметрию)?

Хорошо известен один пример теории с такими свойствами. Он связан с системой корней простой алгебры Ли \mathfrak{g} ранга n . В этом случае, вектора \mathbf{a}_r пропорциональны простым корням \mathfrak{g} : $\mathbf{a}_r = b\alpha_r$, и $\mathbf{r} = b\rho + b^{-1}\rho^\vee$, где ρ и ρ^\vee – вектор Вейля и дуальный вектор Вейля соответственно. Параметр b является произвольным и играет роль константы связи. Соответствующая квантовая теория поля, известная как \mathfrak{g} модель Тода, обладает расширенной конформной симметрией, которая генерируется алгеброй $W(\mathfrak{g})$ с центральным зарядом $c = n + 12(\mathbf{r}, \mathbf{r})$. Полная $W(\mathfrak{g})$ алгебра содержит n независимых голоморфных полей со спином равным экспонентам алгебры Ли \mathfrak{g} . Конкретные выражения для этих полей для A_n, B_n и D_n серий могут быть найдены например в [27]. Для $n = 1$ теория (7.1.26) совпадает с знаменитой Лиувиллевской теорией поля, которая играет важную роль в квантовании некритической струны [28].

Интересно, что существуют также другие W -симметричные теории Тодовского типа (7.1.26), которые соответствуют супералгебрам Ли. Два хорошо известных примера: в ранге $n = 2$ синус-Лиувиллевская теория [29], и в ранге $n = 3$ трехполевая конформная модель Фатеева [30]. Эти теории связаны с супералгебрами $\mathfrak{sl}(2|1)$ и $D(2|1; \alpha)$ соответственно [31, 32]. Но, в отличие от бозонного случая, эта связь не так очевидна. В частности, неправильно считать что вектора \mathbf{a}_r пропорциональны простым корням соответствующей супералгебры. Также известны другие примеры связанные с супералгебрами: одна серия связана с супералгебрами $\mathfrak{sl}(n|1)$ [32] и другая серия связана с моделями Тодовского типа открытыми Фатеевым [33].

Указанные выше примеры мотивируют нас искать другие W -симметричные модели тодовского типа. Необходимым условием существования нетривиальных конформных симметрий с более высокими симметриями для теории является существование локальных киральных полей $W_s(z)$ спина $s > 2$, чьи моды коммутируют со всеми экспоненциальными *скрининговыми* операторами

$$\mathcal{S}_r \stackrel{\text{def}}{=} \oint e^{(\mathbf{a}_r, \varphi(z))} dz, \quad r = 1, \dots, n, \quad (6.0.2)$$

т.е. W алгебра определяется как коммутант заданного набора скрининговых операторов [34–36]. Ясно

что для набора скринингов общего положения коммутант будет тривиальным. Как мы увидим в дальнейшем, даже сам факт существования хотя бы одного тока со спином больше 2 накладывает сильные ограничения на теорию. В качестве примера мы рассмотрим самый простой случай: первый нетривиальный ток должен иметь спин $s = 3$. Мы покажем, что соответствующая киральная алгебра совпадает с алгеброй $W(\mathfrak{sl}(m|m'))$ недавно введенной в [37], с точностью до исключительных случаев, которые мы будем называть "экзотическими".

6.1 W -алгебра с нетривиальным током спина 3

Сформулируем проблему более точно. Пусть $\varphi(z) = (\varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z))$ это n -компонентное голоморфное бозонное поле, нормированное как

$$\varphi_i(z)\varphi_j(z') = -\delta_{ij} \log(z - z') + \dots \quad \text{при } z \rightarrow z'. \quad (6.1.1)$$

Предположим, что для фиксированного набора векторов $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$, которые образуют базис в n -мерном пространстве и, вообще говоря, комплексны, существует нетривиальная W -алгебра, которая коммутирует с набором скринингов (6.0.2). По определению, это означает, что существуют токи $W_s(z)$ для некоторого набора целых спинов s , такие что

$$\oint_{\mathcal{C}_z} e^{(\mathbf{a}_r, \varphi(\xi))} W_s(z) d\xi = 0, \quad (6.1.2)$$

где \mathcal{C}_z - контур вокруг точки z . Условие (6.1.2) выполняется для всех $r = 1, \dots, n$ и для всех s . Более того, естественно предположить, что операторы $W_s(z)$ являются потомками единичного оператора, т.е. $W_s(z)$ дифференциальные полиномы $\partial\varphi(z)$ степени s .

Далее мы будем изучать условие (6.1.2) для $s = 2$ и $s = 3$. Для начала, введем несколько удобных обозначений. Пусть Γ_{rs} (невыврожденная) матрица

$$\Gamma_{rs} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_s), \quad (6.1.3)$$

и $\hat{\mathbf{a}}_1, \dots, \hat{\mathbf{a}}_n$ набор векторов дуальный к $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$: $(\mathbf{a}_r, \hat{\mathbf{a}}_s) = \delta_{rs}$. Для удобства мы также будем обозначать

$$(\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_r) = \Theta_r. \quad (6.1.4)$$

Мы предполагаем, что существует ток спина два - тензор энергии-импульса $W_2(z) = T(z)$, который удовлетворяет (6.1.2). Мы выберем его в виде ¹

$$T(z) = -\frac{1}{2}(\partial\varphi(z), \partial\varphi(z)) + (\mathbf{t}, \partial^2\varphi(z)). \quad (6.1.5)$$

Любое экспоненциальное поле $V_\alpha = e^{(\alpha, \varphi)}$ (здесь $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$) является примарным по отношению к этому тензору энергии-импульса (6.1.5) с конформной размерностью $\Delta(\alpha) = (\alpha, 2\mathbf{t} - \alpha)/2$. Это означает, что операторное разложение этих операторов с тензором энергии-импульса имеет вид

$$T(z)V_\alpha(z') = \frac{\Delta(\alpha)V_\alpha(z')}{(z - z')^2} + \frac{\partial V_\alpha(z')}{z - z'} + \dots, \quad (6.1.6)$$

где \dots обозначает опущенные регулярные члены разложения. Легко видеть, что условие (6.1.2) удовлетворяет если и только если размерность $\Delta(\alpha) = 1$. Поэтому должно быть

$$\Delta(\mathbf{a}_r) = 1, \quad \text{для всех } r = 1, \dots, n. \quad (6.1.7)$$

На уравнение (6.1.7) можно смотреть как на условие на вектор \mathbf{t} . Решая его, получим

$$\mathbf{t} = \sum_{r=1}^n \left(1 + \frac{\Theta_r}{2}\right) \hat{\mathbf{a}}_r. \quad (6.1.8)$$

¹Здесь и далее мы предполагаем, что все токи и операторы Виковски упорядочены.

Отсюда видно, что для любой невырожденной системы векторов \mathbf{a}_r существует ток спина 2.

Далее, предположим, что существует нетривиальный ток $W_3(z)$ спина 3. Он должен иметь вид

$$W_3(z) = C_{ijk}\partial\varphi_i\partial\varphi_j\partial\varphi_k + K_{ij}\partial^2\varphi_i\partial\varphi_j + \Lambda_j\partial^3\varphi_j, \quad (6.1.9)$$

где C_{ijk} , K_{ij} и Λ_j – неизвестные тензора (C_{ijk} – полностью симметричный тензор). Заметим, что ток определен с точностью до преобразования

$$W_3(z) \rightarrow W_3(z) + u\partial T(z), \quad (6.1.10)$$

которое можно использовать, например, чтобы сделать тензор K_{ij} бесследовым. Рассмотрим операторное разложение поля $W_3(z)$ с экспоненциальным полем $V_\alpha(z')$

$$W(z)V_\alpha(z') = \frac{w(\alpha)V_\alpha(z')}{(z-z')^3} + \frac{(\eta_j(\alpha)\partial\varphi_j(z))V_\alpha(z')}{(z-z')^2} + \frac{(\lambda_{ij}(\alpha)\partial\varphi_i(z)\partial\varphi_j(z) + \nu_j(\alpha)\partial^2\varphi_j(z))V_\alpha(z')}{(z-z')} + \dots, \quad (6.1.11)$$

где

$$w(\alpha) = -C_{ijk}\alpha_i\alpha_j\alpha_k - K_{ij}\alpha_i\alpha_j - 2\Lambda_i\alpha_i, \quad \eta_i(\alpha) = 3C_{ijk}\alpha_j\alpha_k + K_{ji}\alpha_j, \quad (6.1.12)$$

$$\lambda_{ij}(\alpha) = -3C_{ijk}\alpha_k, \quad \nu_i(\alpha) = -K_{ij}\alpha_j. \quad (6.1.13)$$

Мы должны решить условие коммутативности

$$[\mathcal{S}_\alpha, W_3(z)] \stackrel{\text{def}}{=} \oint_{\mathcal{C}_z} V_\alpha(\xi)W_3(z)d\xi = 0, \quad (6.1.14)$$

которое эквивалентно тому, что полюс в операторном разложении $V_\alpha(z')$ и $W_3(z)$ зануляется. Из (6.1.11) получаем

$$W_3(z)V_\alpha(z') = \dots + \frac{(\tilde{\lambda}_{ij}(\alpha)\partial\varphi_i(z)\partial\varphi_j(z) + \tilde{\nu}_j(\alpha)\partial^2\varphi_j(z))V_\alpha(z)}{(z-z')} + \dots, \quad \text{при } z' \rightarrow z, \quad (6.1.15)$$

где

$$\tilde{\lambda}_{ij}(\alpha) = \lambda_{ij}(\alpha) - \frac{1}{2}(\eta_i(\alpha)\alpha_j + \eta_j(\alpha)\alpha_i) + \frac{w(\alpha)}{2}\alpha_i\alpha_j, \quad \tilde{\nu}_i(\alpha) = \nu_i(\alpha) + \frac{w(\alpha)}{2}\alpha_i. \quad (6.1.16)$$

Т.е. оба тензора $\tilde{\lambda}_{ij}(\alpha)$ и $\tilde{\nu}_j(\alpha)$ должны равняться нулю.

В нашем случае уравнения (6.1.16) должны выполняться для всех векторов \mathbf{a}_r : $r = 1, \dots, n$. Это приводит к следующей системе уравнений

$$\lambda_{ij}(\mathbf{a}_r) + \frac{1}{2}(\lambda_{ik}(\mathbf{a}_r)(\mathbf{a}_r)_j(\mathbf{a}_r)_k + \lambda_{jk}(\mathbf{a}_r)(\mathbf{a}_r)_i(\mathbf{a}_r)_k) - \frac{1}{2}(K_{ki}(\mathbf{a}_r)_j(\mathbf{a}_r)_k + K_{kj}(\mathbf{a}_r)_i(\mathbf{a}_r)_k) + \frac{w_r}{2}(\mathbf{a}_r)_i(\mathbf{a}_r)_j = 0 \quad (6.1.17)$$

и

$$K_{ij}(\mathbf{a}_r)_j = \frac{w_r}{2}(\mathbf{a}_r)_i, \quad (6.1.18)$$

где $w_r \stackrel{\text{def}}{=} w(\mathbf{a}_r)$. Второе уравнение (6.1.18) может быть легко решено

$$K_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n w_r(\mathbf{a}_r)_i(\hat{\mathbf{a}}_r)_j. \quad (6.1.19)$$

Первое уравнение (6.1.17) можно умножить на $(\mathbf{a}_s)_i(\mathbf{a}_t)_j$ и просуммировать по индексам i и j . В результате получится

$$\mathbb{C}_{rst} + \frac{\Gamma_{rt}}{2}\mathbb{C}_{rrs} + \frac{\Gamma_{rs}}{2}\mathbb{C}_{rrt} - \frac{\Gamma_{rs}\Gamma_{rt}}{12}(2w_r - w_s - w_t) = 0. \quad (6.1.20)$$

где

$$\mathbb{C}_{rst} \stackrel{\text{def}}{=} C_{ijk}(\mathbf{a}_r)_i(\mathbf{a}_s)_j(\mathbf{a}_t)_k.$$

После простых преобразований уравнение (6.1.20) преобразуется к виду

$$\mathbb{C}_{rrr}(1 + \Theta_r) = 0, \quad (6.1.21)$$

и²

$$\mathbb{C}_{rst} = \frac{\Gamma_{rs}\Gamma_{rt}}{6(\Theta_r + 2)} \left[(2w_r - w_s - w_t) + 6\mathbb{C}_{rrr} \right]. \quad (6.1.22)$$

Характер решения существенно зависит от того равно ли $\Theta_r = -1$ или нет. Мы будем называть корень \mathbf{a}_r "фермионным" если $(\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_r) = \Theta_r = -1$, и "бозонным" в противном случае. Удобно обозначать их графически:

$$\bigcirc - \text{бозонный корень: } \Theta \neq -1 \quad \otimes - \text{фермионный корень: } \Theta = -1$$

После решения первого уравнения (6.1.21) мы должны наложить условие, что \mathbb{C}_{rst} полностью симметричный тензор. Симметрия $s \leftrightarrow t$ очевидна из (6.1.22), так что нам требуется симметрия по другим двум индексам

$$\mathbb{U}_{rst} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}_{rst} - \mathbb{C}_{srt} = 0. \quad (6.1.23)$$

Понятно, что уравнение (6.1.23) верно тождественно при $r = s = t$. Т.е., имеется 2 независимых двухточечных уравнения: $\mathbb{U}_{rss} = \mathbb{U}_{srr} = 0$ с $r \neq s$ и 2 два независимых трехточечных уравнения: $\mathbb{U}_{rst} = \mathbb{U}_{rts} = 0$ с $r \neq s \neq t$. Более того, мы имеем набор условий (6.1.21). Собирая все это вместе мы получаем переопределенную систему уравнений, которая имеет решение только если матрица Грама Γ_{rs} удовлетворяет некоторым условиям.

Прежде чем продолжить, отметим важное свойство уравнений (6.1.21)–(6.1.22). А именно, уравнения (6.1.21)–(6.1.22) обладают симметрией (не меняющей C_{ijk} , K_{ij} и Λ_j)

$$\mathbf{a}_r \rightarrow \mathbf{a}_r^\vee \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{\Theta_r} \mathbf{a}_r, \quad (6.1.24)$$

действующей на любой бозонный корень. Это означает, что соответствующая W -алгебра останется прежней. Поэтому бозонные корни \mathbf{a}_r и \mathbf{a}_r^\vee всегда появляются парами. Для фермионного корня, напротив, нет такой симметрии и он приходит один.

Решить систему (6.1.23) можно прямым вычислением³. Неприводимые решения существуют только, если матрица Грама является трехдиагональной (отличны от нуля значения только на главной и двух соседних с ней диагоналях). Анализ двухточечных уравнений показывает, что матрица Грама может быть построена из двухточечных блоков:

$$\begin{array}{cccccc}
 \begin{pmatrix} 2\kappa & -\kappa \\ -\kappa & 2\kappa \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2\kappa^{-1} & -1 \\ -1 & 2\kappa \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2\kappa & -\kappa \\ -\kappa & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2\kappa^{-1} & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -\kappa \\ -\kappa & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\
 \bigcirc \text{---} \bigcirc & \bigcirc \text{---} \bigcirc & \bigcirc \text{---} \otimes & \bigcirc \text{---} \otimes & \otimes \text{---} \otimes & \otimes \text{---} \otimes \\
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & (6.1.25)
 \end{array}$$

где мы привели диаграммы Дынкина вместе с соответствующими вкладами в матрицу Грама. Параметр κ в (6.1.25) является произвольным дополнительным параметром и не фиксируется двухточечными уравнениями. Для того, чтобы склеить вместе блоки (6.1.25) в общую матрицу Грама, нужно

²Здесь и далее мы предполагаем, что $\Theta_r \neq -2$. Можно показать, что в этом случае все решения могут быть получены как предел $\Theta_r \rightarrow -2$.

³Детальное описание чисто бозонного случая вместе можно найти в 7.8, а обсуждение общего в 7.9.

наложить трехточечные уравнения $\mathbb{U}_{rst} = \mathbb{U}_{rts} = 0$. В частности, они наложат соотношение на параметры \varkappa из разных блоков. Вообще говоря, возможна любая комбинация сплошных и пунктирных линий. Однако, использование преобразования симметрии (6.1.24) изменяет матрицу Грама. Например, оно связывает первый и второй элементарные блоки из (6.1.25), также как и третий и четвертый. Далее в разделе 6.2 мы будем в деталях рассматривать только случаи, диаграмма Дынкина которых состоит только из сплошных линий (с точностью до преобразования (6.1.24)). Мы будем называть такие диаграммы регулярными. Остальные, т.е. которые не могут быть сведены преобразованием (6.1.24) к такой форме, или, другими словами, те которые содержат пунктирную линию, мы будем называть экзотическим.

6.2 Регулярные диаграммы: $W(\mathfrak{sl}(m|m'))$ алгебры

В этом разделе мы опишем в деталях решение уравнений для регулярных графов. Оно состоит в комбинации бозонных и фермионных корней склеенных сплошными линиями (т.е. мы будем рассматривать трёхдиагональные матрицы Грама построенные только из двухточечных блоков 1, 3 и 5 из (6.1.25)). Бозонные корни дают вклад в матрицу Грама в виде

$$\Gamma_b = \begin{pmatrix} \dots & -\varkappa & 0 \\ -\varkappa & 2\varkappa & -\varkappa \\ 0 & -\varkappa & \dots \end{pmatrix}, \quad (6.2.1)$$

в то время как фермионные в виде

$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} \dots & -\varkappa_1 & 0 \\ -\varkappa_1 & -1 & -\varkappa_2 \\ 0 & -\varkappa_2 & \dots \end{pmatrix}, \quad \text{с } \varkappa_1 + \varkappa_2 = -1 \quad (6.2.2)$$

Ясно, что матрица Грама построенная из элементарных блоков (6.2.1) и (6.2.2) содержит только один свободный параметр. Коэффициенты w_r и \mathbb{C}_{rrr} явно задаются

$$\Gamma_{r,r+1}(w_r - w_{r+1}) = \omega, \quad \mathbb{C}_{rrr} = -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{\Gamma_{r,r+1}} - \frac{1}{\Gamma_{r,r-1}} \right) \omega, \quad (6.2.3)$$

где ω произвольная константа не равная нулю. Отметим, что \mathbb{C}_{rrr} автоматически равно нулю для любого бозонного корня, как и должно быть. Более того, решение не изменяется при одновременном сдвиге $\omega_r \rightarrow \omega_r + \lambda$. Это преобразование эквивалентно калибровочному преобразованию (6.1.10).

В случае, если имеются только бозонные корни, матрица Грама имеет вид

$$\Gamma_{rs} = \begin{pmatrix} 2\varkappa & -\varkappa & 0 & \dots & 0 \\ -\varkappa & 2\varkappa & -\varkappa & \dots & 0 \\ 0 & -\varkappa & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & -\varkappa & 0 \\ 0 & \dots & -\varkappa & 2\varkappa & -\varkappa \\ 0 & \dots & 0 & -\varkappa & 2\varkappa \end{pmatrix}, \quad (6.2.4)$$

Это означает, что вектора \mathbf{a}_r имеют форму $\mathbf{a}_r = b\alpha_r$, где $b = \sqrt{\varkappa}$ и α_r простые корни алгебры $\mathfrak{sl}(n+1)$. Соответствующая квантовая теория поля (7.1.26) являются в точности $\mathfrak{sl}(n+1)$ конформными теориями Тоды, упомянутыми во введении.

При включении фермионных корней помимо бозонных, соответствующая W алгебра будет соответствовать супералгебре $\mathfrak{sl}(m|m')$ с некоторыми m, m' : $m + m' = n + 1$. Для того, чтобы описать соответствие более точно, важно понимать, что имеется симметрия действующая на матрицах Грама, определенных выше (построенных из элементарных блоков (6.2.1) и (6.2.2)). Она служит изоморфизмом между W алгебрами, соответствующими разным матрицам Грама. Изоморфизм между различными реализациями осуществляется преобразованием, которое мы будем называть "флип". Оно

рассматриваемая как функция полного заряда $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$ имеет полюса при значениях

$$\alpha + \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{a}_j = 2\mathbf{r}, \quad (6.2.9)$$

где m_j 's некоторые неотрицательные целые числа. Вычеты этих полюсов пропорциональны свободно-полевым корреляционным функциям

$$\text{Res} \langle V_{\alpha_1}(\xi_1, \bar{\xi}_1) \dots V_{\alpha_N}(\xi_N, \bar{\xi}_N) \rangle \Big|_{\alpha + \sum m_j \mathbf{a}_j = 2\mathbf{r}} \sim \langle V_{\alpha_1}(\xi_1, \bar{\xi}_1) \dots V_{\alpha_N}(\xi_N, \bar{\xi}_N) \prod_{j=1}^n \frac{(\mathcal{S}_j)^{m_j}}{\pi^{m_j} m_j!} \rangle_{\text{FF}}, \quad (6.2.10)$$

где $\mathcal{S}_j = \int e^{\mathbf{a}_j \cdot \varphi(\xi, \bar{\xi})} d^2 \xi$.

Далее, предположим, что система $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ подчиняется правилам, описанным в разделе 6.2: матрица Грама является трехдиагональной, построенной из элементарных блоков (6.2.1), (6.2.2) и вектора \mathbf{r} , заданного формулой (6.1.8). Предположим, что один из корней является фермионным: для определенности \mathbf{a}_r с $(\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_r) = -1$. Выделим соответствующий вклад этого корня в интеграл в правой части (7.1.33). Схематически его вклад равен

$$\int \mathcal{D}_{m_r}(x) \prod_{i=1}^{m_r} \prod_{j=1}^{N+m_{r-1}+m_{r+1}} |x_i - t_j|^{2p_j} d^2 \vec{x}_{m_r}, \quad (6.2.11)$$

где

$$\mathcal{D}_n(x) = \prod_{i < j} |x_i - x_j|^2, \quad d^2 \vec{x}_n = \frac{1}{\pi^n n!} \prod_{j=1}^n d^2 x_j.$$

Переменные (t_1, t_2, \dots) в (6.2.11) определяют координаты всех полей, которые взаимодействуют с полем \mathcal{S}_r и (p_1, p_2, \dots) соответствующим экспонентам. Отметим, что, как это следует из (6.1.8) и (7.1.32), эти экспоненты подчиняются условию

$$\sum_{j=1}^{N+m_{r-1}+m_{r+1}} p_j = -m_r - 1, \quad (6.2.12)$$

которое гарантирует отсутствие сингулярности на бесконечности. Можно показать, что интеграл (6.2.11) сходится в некоторой области параметров. Хорошо известно следующее соотношение для интегралов такого типа (см., например, [39])

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}_n(x) \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n+m+2} |x_i - t_j|^{2p_j} d^2 \vec{x}_n &= \prod_{j=1}^{n+m+2} \gamma(1+p_j) \prod_{i < j} |t_i - t_j|^{2+2p_i+2p_j} \times \\ &\times \int \mathcal{D}_m(y) \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{n+m+2} |y_i - t_j|^{-2-2p_j} d^2 \vec{y}_m, \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

если $\sum p_j = -n - 1$ и

$$\gamma(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)}.$$

Применяя тождество (7.1.35) к корреляционной функции свободных полей (7.1.33), находим что

$$\langle V_{\alpha_1}(\xi_1, \bar{\xi}_1) \dots V_{\alpha_N}(\xi_N, \bar{\xi}_N) \prod_{j=1}^n \frac{(\mathcal{S}_j)^{m_j}}{\pi^{m_j} m_j!} \rangle_{\text{FF}} = \prod_{j=1}^N \mathcal{N}(\alpha_j) \langle V_{\tilde{\alpha}_1}(\xi_1, \bar{\xi}_1) \dots V_{\tilde{\alpha}_N}(\xi_N, \bar{\xi}_N) \prod_{j=1}^n \frac{(\tilde{\mathcal{S}}_j)^{\tilde{m}_j}}{\pi^{\tilde{m}_j} \tilde{m}_j!} \rangle_{\text{FF}}, \quad (6.2.14)$$

где $\mathcal{N}(\alpha_j)$ это некоторые нормировочные множители, $\tilde{\alpha}_k = \alpha_k + \mathbf{a}_r$ и $\tilde{S}_j = \int e^{(\tilde{\mathbf{a}}_j, \varphi(\xi, \bar{\xi}))} d^2\xi$ с

$$\tilde{\mathbf{a}}_r = -\mathbf{a}_r, \quad \tilde{\mathbf{a}}_{r\pm 1} = \mathbf{a}_{r\pm 1} + \mathbf{a}_r, \quad \tilde{\mathbf{a}}_j = \mathbf{a}_j \quad \text{if } j \neq r, r \pm 1. \quad (6.2.15)$$

Параметры m_j не меняются, кроме m_r , который изменяется как $m_r \rightarrow \tilde{m}_r$ с

$$\tilde{m}_r = N + m_{r-1} + m_{r-1} - m_r - 2. \quad (6.2.16)$$

Отметим, что уравнение (6.2.15) является в точности флип преобразованием (6.2.5). Уравнение (6.2.14) должно понимать как отображение между двумя свободно полевыми корреляционными функциями. Естественно предположить, что это соотношение верно не только для всех вычетов (7.1.33), но также для всех корреляционных функций. В таком случае имеется точное соответствие между двумя конформными блоками. В частности, оно влечет изоморфизм соответствующих конформных теорий.

Подчеркнем, что в обсуждении предшествующем (6.2.14) мы неявно подразумевали, что заряды α_j находятся в общем положении. В частности, мы предполагали, что

$$(\alpha_j, \mathbf{a}_r) \neq 0 \quad \text{для всех } j. \quad (6.2.17)$$

Если одно из неравенств (6.2.17) нарушается, то мы должны использовать интегральное соотношение (7.1.35) с дополнительной осторожностью. Действительно, в этом случае параметры $p_j = 0$, и соответствующая координата не входит в левую часть соотношения (7.1.35). В правой части имеется неопределенность вида $0 \times \infty$, где 0 получается из $\gamma(1+p_j)$ и ∞ получается из расходящегося интеграла. Эту неопределенность можно легко разрешить со следующим результатом: координата t_j просто исчезает из (7.1.35), что и следовало ожидать. Отметим, что схожие проблемы существуют для всех целых значений скалярного произведения (α_j, \mathbf{a}_r) или $(\mathbf{a}_{r\pm 1}, \mathbf{a}_r)$. Поэтому эти значения должны по возможности избегаться.

Мы подошли к важному наблюдению. Предположим, что один из соседних корней является бозонным, скажем \mathbf{a}_{r+1} : $\Theta_{r+1} \neq -1$. Как мы уже знаем, бозонные корни всегда приходят в парах: \mathbf{a}_{r+1} и $\mathbf{a}_{r+1}^\vee = \frac{2}{\Theta_{r+1}} \mathbf{a}_{r+1}$, так что $(\mathbf{a}_{r+1}, \mathbf{a}_r) = -\Theta_{r+1}/2$ и $(\mathbf{a}_{r+1}^\vee, \mathbf{a}_r) = -1$. Если мы положим корень \mathbf{a}_{r+1}^\vee в (7.1.33) вместо \mathbf{a}_{r+1} то мы придем в точности к ситуации описанной в предыдущем параграфе: появятся экспоненты с целыми показателями

$$p_j = -(\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_{r+1}^\vee) = 1, \quad (6.2.18)$$

в левой части (7.1.35) соответственно имеются неопределенности вида ноль на бесконечность. Аккуратно исследуя эту сингулярность мы приходим к интересному заключению, что дуальный оператор экранирующего заряда $\oint e^{(\mathbf{a}_{r+1}^\vee, \varphi(z))} dz$ преобразуется в экранирующий оператор одетый дифференциальным полиномом степени 1 в предэкспоненте. А именно,

$$\oint e^{(\mathbf{a}_{r+1}^\vee, \varphi(z))} dz \xrightarrow{\text{flip}_\gamma} \oint (\mathbf{a}_r, \partial\varphi(z)) e^{(\mathbf{a}_{r+1}^\vee, \varphi(z))} dz. \quad (6.2.19)$$

Отметим, что оператор $\oint e^{(\mathbf{a}_{r+1}, \varphi(z))} dz$ все также отображается в экспоненциальный оператор

$$\oint e^{(\mathbf{a}_{r+1}, \varphi(z))} dz \xrightarrow{\text{flip}_\gamma} \oint e^{(\mathbf{a}_{r+1} + \mathbf{a}_r, \varphi(z))} dz. \quad (6.2.20)$$

Это феномен, появления полиномиально одетых скринговых полей (6.2.19), является специальным свойством системы с фермионными скринингами. Оно верно для всех теорий, не обязательно с трехдиагональными матрицами Грама. Это может быть сформулировано следующим образом. Предположим, что имеется W алгебра, которая коммутирует с двумя взаимодействующими фермионными скринингами

$$S_1 = \oint e^{(\mathbf{a}_1, \varphi)} dz, \quad S_2 = \oint e^{(\mathbf{a}_2, \varphi)} dz \quad \text{с } (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) = (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) = -1 \quad \text{и} \quad (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \neq 0, \quad (6.2.21)$$

тогда она также коммутирует с одетыми фермионами скринингами

$$\mathcal{S}_{12} = \oint (\mathbf{a}_1, \partial\varphi) e^{(\mathbf{b}_{12}, \varphi)} dz, \quad \text{где } \mathbf{b}_{12} = \frac{2}{(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)^2} (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2). \quad (6.2.22)$$

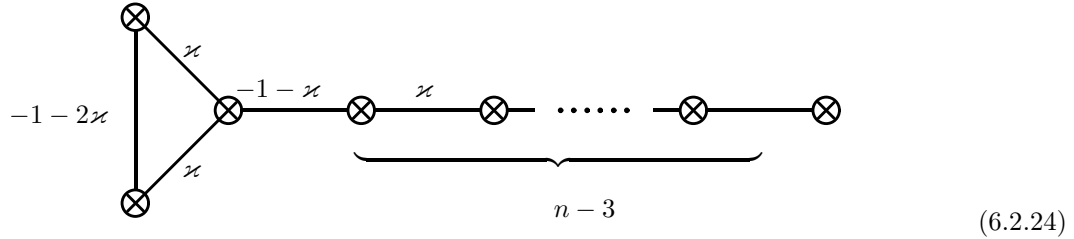
Отметим, что подынтегральное выражение в (6.2.22) определено с точностью до полной производной. Добавление полной производной эквивалентно сдвигу $\mathbf{a}_1 \rightarrow \mathbf{a}_1 + \lambda \mathbf{a}_2$. Однако выбор вектора в пред-экспоненте выражения (6.2.22) влияет на операторные разложения. А именно $\mathcal{V}_{12} = (\mathbf{a}_1, \partial\varphi) e^{(\mathbf{b}_{12}, \varphi)}$ раскладывается как чисто экспоненциальный оператор

$$\mathcal{V}_{12}(z)\mathcal{V}_{12}(z') = (z - z')^{-(\mathbf{b}_{12}, \mathbf{b}_{12})} : \mathcal{V}_{12}(z)\mathcal{V}_{12}(z') : . \quad (6.2.23)$$

6.2.2 Заключительные замечания

В этой части работы мы изучили W -алгебры коммутирующие с набором экспоненциальных экранирующих операторов. Мы обнаружили, что W -алгебра имеет нетривиальный ток спина 3, если матрица Грама экранирующих зарядов имеет трёхдиагональную форму, составленную из элементарных блоков (6.1.25). В специальном случае, который мы назвали регулярным, соответствующая алгебра совпадает с алгеброй $W(\mathfrak{sl}(n|m))$ недавно открытой Берштейном, Фейгиным и Мерзоном в [37]. Здесь мы сформулируем важные замечания.

1. Как было упомянуто во введении к данной главе, можно изучать проблему, аналогичную той что была изучена в тексте, но предполагая, что первый нетривиальный ток W_s имеет спин $s > 3$. Мы изучили следующий случай: $s = 4$. Детали нашего анализа будут представлены в отдельной публикации. Здесь мы сформулируем только результат. По аналогии со случаем, существуют два вида корней: бозонные и фермионные. В чисто бозонном случае можно показать, что корни будут пропорциональны простым корням одной из классических алгебр Ли A , B , C or D -серий. При включении фермионных полей появляются новые решения. Например, существуют решения для любого $n \geq 3$, которые содержат только фермионные корни. Их матрица Грама соответствует следующему графу



Где отрезок с отметкой κ соответствует матрице Грама

$$\begin{pmatrix} -1 & -\kappa \\ -\kappa & -1 \end{pmatrix}$$

Конформная теория связанная с этим графом (7.1.20) имеет центральный заряд

$$c(n) = \frac{n(x - n + 2)(2x - n + 1)}{2x(x + 1)}, \quad \text{где } x = \begin{cases} \kappa & \text{для } n \in 2\mathbb{Z} + 1 \\ -1 - \kappa & \text{для } n \in 2\mathbb{Z} \end{cases} \quad (6.2.25)$$

Соответствующая конформная теория генерируется тензором энергии-импульса и полем спина 4. Теория определенная графом (7.1.20) для $n = 3$ соответствует специальному случаю трехполевой конформной [30]. Мы считаем, что конформная теория поля с центральным зарядом (7.1.29) является естественным обобщением модели [30] для $n > 3$, но в отличии от [30] она имеет только

один свободный параметр. Эта теория заслуживает отдельного изучения и мы займемся этим в следующем разделе.

Также можно продолжить изучения для W -алгебр с первым нетривиальным током имеющим спин 5. В этом случае появится новый тип фермионных корней (или, точнее говоря, парафермионных корней). Они имеют специальную квантованную длину

$$\Theta = -3 \quad \text{and} \quad \Theta = -\frac{2}{3}. \quad (6.2.26)$$

Увеличение спина будет приводить к все большему количеству корней с специальной квантованной длиной. Мы нашли, что новая квантованная длина возникает для каждого нечетного спина. Это делает проблему классификации нетривиальной.

2. Существует другой хорошо известный способ построения W алгебр. А именно, косет конструкция Годдарта-Кента-Олива [40]. Известно, что $W(\mathfrak{sl}(n))$ соответствует диагональному косету

$$W(\mathfrak{sl}(n)) \sim \frac{\widehat{\mathfrak{sl}}(n)_k \times \widehat{\mathfrak{sl}}(n)_1}{\widehat{\mathfrak{sl}}(n)_{k+1}}. \quad (6.2.27)$$

Можно ожидать, что общая алгебра $W(\mathfrak{sl}(n|m))$ также будет иметь подобное представление. Явное выражение для центрального заряда (6.2.7) наводит на мысль, что имеется по крайней мере два косета соответствующие W -алгебрам построенным в данной статье:

$$W(\mathfrak{sl}(n|n)) \sim \frac{\widehat{\mathfrak{sl}}(n)_k \times \widehat{\mathfrak{sl}}(n)_{-1}}{\widehat{\mathfrak{sl}}(n)_{k-1}}, \quad W(\mathfrak{sl}(n|n-1)) \sim \frac{\widehat{\mathfrak{sl}}(n)_k}{\widehat{\mathfrak{sl}}(n-1)_k \times \widehat{\mathfrak{u}}(1)}. \quad (6.2.28)$$

Было бы интересно доказать соотношения (6.2.28), используя ГКО конструкцию, а также найти косет отвечающий более общей теории $W(\mathfrak{sl}(n|m))$.

Отметим, что формула для центрального заряда (7.1.29) теории (7.1.20) говорит о возможности следующего косетного представления для нее

$$\frac{\widehat{\mathfrak{so}}(n+1)_k}{\widehat{\mathfrak{so}}(n)_k}, \quad \text{где} \quad k = x - n + 2. \quad (6.2.29)$$

3. Часть симметрий генерируемых алгеброй $W(\mathfrak{sl}(n|m))$ выживает при интегрируемой деформации. Это можно увидеть следующим образом. По определению алгебра $W(\mathfrak{sl}(n|m))$ является коммутантом экспоненциальных экранирующих полей

$$\mathcal{S}_r \stackrel{\text{def}}{=} \oint e^{(\mathbf{a}_r, \varphi(z))} dz, \quad r = 1, \dots, n + m - 1, \quad (6.2.30)$$

с матрицей грама $\Gamma_{rs} = (\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_s)$ заданной диаграммой (6.2.6). Можно показать, что существует другое поле $e^{(\mathbf{a}_0, \varphi(z))}$ с $\mathbf{a}_0 = -\sum_r \mathbf{a}_r$ такое, что

$$\oint_{\mathcal{C}_z} e^{(\mathbf{a}_0, \varphi(\xi))} W_3(z) d\xi = \partial V(z), \quad (6.2.31)$$

для некоторого $V(z)$. Это означает, что поле $\mathcal{S}_0 = \oint e^{(\mathbf{a}_0, \varphi(z))} dz$ коммутирует с нулевой модой тока $W_3(z)$. Этот факт является указанием на то, что универсальная обёртывающая алгебра алгебры $W(\mathfrak{sl}(n|m))$ содержит бесконечно много локальных интегралов движения \mathbf{I}_k : $k = 1, 2, \dots$, первые два из которых имеют вид

$$\mathbf{I}_1 = \frac{1}{2\pi} \int T(z) dz, \quad \mathbf{I}_2 = \frac{1}{2\pi} \int W_3(z) dz, \quad (6.2.32)$$

Эти интегралы обладают определяющим их свойством того, что они коммутируют с полем \mathcal{S}_0 . Можно ожидать что интегралы \mathbf{I}_k коммутируют между собой и, соответственно, могут быть

одновременно приведены к диагональному виду. Интересно рассмотреть соответствующую проблему диагонализации системы интегралов движения \mathbf{I}_k . Она была рассмотрена [41] для алгебры Вирасоро ($W(\mathfrak{sl}(2))$) и в [42] для алгебры $W(\mathfrak{sl}(n))$, где были найдены уравнения анзатца Бетэ для спектра. Мы изучили эти уравнения в общем случае для нашей модели и нашли те же уравнения, что и в [42], работают для более общего случая $W(\mathfrak{sl}(n|m))$ с некоторыми малыми изменениями. Эти результаты будут опубликованы в отдельной статье.

4. В разделе 6.2.1 мы показали, что W алгебра, которая коммутирует с двумя фермионными экранирующими операторами (6.2.21), имеющими ненулевое скалярное произведение, также коммутирует с одетым оператором (6.2.22). Понятно, что этот скрининг это киральная часть поля вида

$$V = \int (\mathbf{a}, \partial\varphi)(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\partial}\varphi) e^{(\mathbf{b}, \varphi)} d^2z. \quad (6.2.33)$$

Использование поля (6.2.33) в качестве возмущения теории изменит кинетическое слагаемое в действии и очевидно соответствует теории сигма-модельного типа. Этот феномен, появления одетых операторов, приводит к интересной дуальности между двумя конформными теориями поля. Одна модель это теория типа Тода (7.1.26), а другая это сигма модель. Чтобы проиллюстрировать это, рассмотрим например W алгебру определенную двумя фермионными экранирующими операторами, которая отвечает $W(\mathfrak{sl}(2|1))$ алгебре⁴. Имеет два вектора \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 такие, что $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) = (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) = -1$ и $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \neq 0$. Удобно выбрать координаты так, что

$$\mathbf{a}_1 = (ia, b), \quad \mathbf{a}_2 = (-ia, b) \quad \text{с} \quad a^2 - b^2 = 1. \quad (6.2.34)$$

Эта система скринингов отвечает теории синус-Лиувилля (здесь $\varphi = (\phi, \Phi)$)

$$\mathcal{A}_{\text{SL}} = \int \left(\frac{1}{8\pi} g^{ij} (\partial_i \phi \partial_j \phi + \partial_i \Phi \partial_j \Phi) + e^{b\Phi} \cos(a\phi) + \frac{b^{-1}}{8\pi} R\Phi \right) \sqrt{g} d^2z. \quad (6.2.35)$$

С другой стороны соответствующая алгебра коммутирует с одетыми скрининговыми полями (6.2.22). Использование этого поля в качестве возмущения приводит к сигма-модельному действию

$$\mathcal{A}_{\text{SM}} = \int \left(\frac{1}{8\pi} g^{ij} \partial_i \varphi^\mu \partial_j \varphi^\nu G_{\mu\nu}(\varphi) + \frac{1}{4\pi} RD(\varphi) \right) \sqrt{g} d^2z, \quad (6.2.36)$$

где метрика $G_{\mu\nu}(\varphi)$ и дилатон $D(\varphi)$ имеют вид

$$G_{\mu\nu}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 - a^2 e^{\frac{1}{b}\Phi} & iabe^{\frac{1}{b}\Phi} \\ iabe^{\frac{1}{b}\Phi} & 1 + b^2 e^{\frac{1}{b}\Phi} \end{pmatrix}, \quad D(\varphi) = \frac{1}{2b}\Phi. \quad (6.2.37)$$

Можно показать, что в квазиклассическом приближении $b \rightarrow \infty$ эта метрика эквивалентна метрике сигары [43], вследствие этого мы заключаем, что имеется дуальность между моделью синус-Лиувилля и моделью сигары, известная как Фатеев-Замолотчиков-Замолотчиков дуальность [29]. Мы найдем соответствующую дуальность для частного случая в следующей главе нашей работы.

⁴Этот пример был впервые рассмотрен Владимиром Фадеевым и не был опубликован.

Глава 7

Нелинейная сигма-модель

Изучение квантовой теории поля в сильной связи одно из наиболее важных проблем в современной теоретической физике. Вообще говоря, не существует общих методов для их изучения, но новые методы появляются когда квантовая система обладает, так называемой, дуальностью, связывающей её сильную и слабую режимы. В этом случае, существуют два пертурбативных разложения с константами связи обратными друг другу. Обычно, эти описания используют микроскопические степени свободы и действия совершенно разной природы. Один из ярких примеров дуальности, известный как бозонизация в двух пространственно-временных измерениях, был открыт Колеманом и Мандельштамом [44, 45]. С одной стороны дуальности система описывается массивным Дираковским фермионом с четырехточечным взаимодействием, в то время как с другой скалярным полем с косинусом в роли потенциальной энергии. Было показано, что обе теории совпадают на уровне теории возмущений по массовому параметру.

Основная цель данного раздела это формулировка гипотезы о новой дуальности между двумя интегрируемыми квантовыми теориями поля в двух измерениях. Первая теория ведет себя в слабой связи как деформированная нелинейная сигма модель $O(N)$ [46]. Вторая теория имеет эффективное описание как теория взаимодействующих между собой дираковских фермионов с четырех точечным взаимодействием (тиринговского типа) и бозонных полей с экспоненциальными взаимодействиями (тодовского типа). Сильная связь сигма-модели совпадает со пертурбативным режимом этой модели Тода-Тиринга и наоборот. Ниже мы сформулируем результаты в более подробно.

Мы будем рассматривать $O(N)$ сигма-модель через её косет конструкцию, т.е. через редукцию двумерной модели главного кирального поля (ГКП). Главное киральное поле это нелинейная сигма-модель, чьё таргет-пространство является групповым многообразием G . Действие ГКП задается формулой

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \int \text{Tr} (\mathbf{g}^{-1} \partial_+ \mathbf{g}, \mathbf{g}^{-1} \partial_- \mathbf{g}) d^2 x, \quad (7.0.1)$$

где \mathbf{g} это отображение из двумерного пространства времени в группу G , а ∂_{\pm} производные в направлениях светового конуса. Теория обладает глобальной симметрией $G_L \times G_R$, которая действует как

$$\mathbf{g} \rightarrow U \mathbf{g} V, \quad U, V \in G. \quad (7.0.2)$$

Более того, известно, что теория (7.0.1) является классически интегрируемой [47]. Простейший способ показать интегрируемость заключается в использовании того, что левый нёторовский ток $\mathbf{J}_{\pm} = \mathbf{g} \partial_{\pm} \mathbf{g}^{-1}$ сохраняется и, помимо этого, его тензор напряженности равен нулю

$$\begin{aligned} \partial_+ \mathbf{J}_- + \partial_- \mathbf{J}_+ &= 0, \\ \partial_+ \mathbf{J}_- - \partial_- \mathbf{J}_+ + [\mathbf{J}_+, \mathbf{J}_-] &= 0. \end{aligned} \quad (7.0.3)$$

Эти два уравнения могут быть как условие совместности известное как условие нулевой кривизны [47]

$$[\mathbf{D}_+, \mathbf{D}_-] = 0, \quad \text{where } \mathbf{D}_{\pm} = \partial_{\pm} - \frac{\mathbf{J}_{\pm}}{1 \pm \lambda}, \quad (7.0.4)$$

где λ – это произвольное комплексное число, так называемый спектральный параметр. Простое следствие условия нулевой кривизны это то, что вильсоновские петли построенные из этой связности генерируют бесконечную башню сохраняющихся величин, интегралов движения. Этот бесконечный набор сохраняющихся величин можно использовать для того чтобы решить модель с помощью метода обратного рассеяния. В статье [48] было предложено, а в дальнейшем было многократно проверено, что теория определенная действием (7.0.1) интегрируема на квантовом уровне. Квантовые системы, обладающие этим свойством, обычно изучаются с помощью квантового метода обратной рассеяния [49]. Однако, известно, что этот метод перестает работать для нелинейных сигма моделей. Только недавно был достигнут заметный прогресс в этой области (см. [50]).

Далее, пусть H это подгруппа Ли группы G , а \mathfrak{h} соответствующая подалгебра, такая что соответствующее фактор пространство является симметрическим. Действие такой сигма модели можно получить, сделав часть левой симметрии калибровочной в действии (7.0.1)

$$\partial_{\pm} \rightarrow D_{\pm} = \partial_{\pm} - A_{\pm}, \quad A_{\pm} \in \mathfrak{h}. \quad (7.0.5)$$

Ясно, что данная процедура нарушает левую симметрию, но сохраняет правую. Нетривиальным фактом является то, что классические уравнения движения этой сигма-модели с калибровочной симметрией могут быть получены из условия нулевой кривизны вида

$$[\mathbf{D}_{+}^A, \mathbf{D}_{-}^A] = 0, \quad \text{где} \quad \mathbf{D}_{\pm}^A = \partial_{\pm} - (A_{\pm} - \lambda^{\pm 1} \mathbf{J}_{\pm}), \quad (7.0.6)$$

и поэтому интегрируемость сохраняется. Вообще говоря, неизвестно сохраняется ли интегрируемость на квантовом уровне. По крайней мере в некоторых случаях, таких как $\mathbb{C}\mathbb{P}^N = SU(N)/(SU(N-1) \times U(1))$, интегрируемость сигма модели нарушается квантовыми аномалиями. Считается, что достаточное условие для сохранения интегрируемости это простота подгруппы $H \in G$. Ниже мы сосредоточимся на случае $O(N)$ сигма-модели с $G = SO(N)$ и $H = SO(N-1)$, которое удовлетворяет этому условию.

Интегрируемость $O(N)$ сигма-модели на квантовом уровне была впервые показана Поляковым [51]. Как квантовая теория поля $O(N)$ сигма модель отвечает асимптотически свободной теории с динамически генерируемой массой, которая описывает рассеяние N мезонов в векторном представлении глобальной группы симметрии $O(N)$ [46, 52]. Форма матрица рассеяния мезонов сильно ограничена интегрируемостью модели, в частности последнее приводит к отсутствию рождения частиц и выражению многочастичных рассеяний через двухчастичные. Эти требования настолько сильны что позволяют посчитать S -матрицу точно. Двухчастичная S -матрица для $O(N)$ сигма-модели была найдена Александром и Алексеем Замолотчиковами в известной работе [53]. Её явный вид

$$S_{ij}^{kl}(\theta) = \delta_{ij}\delta_{kl}S_1(\theta) + \delta_{ik}\delta_{jl}S_2(\theta) + \delta_{il}\delta_{jk}S_3(\theta), \quad (7.0.7)$$

$$S_3(\theta) = S_1(i\pi - \theta), \quad S_1(\theta) = -\frac{2i\pi}{(N-2)(i\pi - \theta)}S_2(\theta), \quad S_2(\theta) = Q(\theta)Q(i\pi - \theta),$$

где

$$Q(\theta) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{N-2} - \frac{i\theta}{2\pi}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{i\theta}{2\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{N-2} - \frac{i\theta}{2\pi}\right)\Gamma\left(-\frac{i\theta}{2\pi}\right)}$$

и $\theta = \theta_1 - \theta_2$ это разность быстрот рассеивающихся частиц.

S -матрица приведенная выше является рациональным решением уравнения Янга-Бакстера. Это означает, что матричные элементы являются рациональными функциями быстроты (с точностью до общего множителя). С этими решениями связан классы некоторых бесконечномерных алгебр, называемых Янгианами. В нашем случае это Янгиан $O(N)$. Известно, что Янгианы всегда допускают однопараметрическую деформацию называемую квантовыми аффинными группами. Соответствующее решение уравнения Янга-Бакстера является тригонометрическим, т.е. матричные элементы выражаются через тригонометрические функции. Например, тригонометрическая деформация $O(3)$ симметричной S -матрицы было найдено в [54]. Она описывает рассеяние двух заряженных и одной нейтральной

частиц (A_{\pm}, A_0) . Явно эта S -матрица имеет вид (здесь λ – параметр деформации)

$$\begin{aligned} S_{++}^{++}(\theta) &= \frac{\sinh \lambda(\theta - i\pi)}{\sinh \lambda(\theta + i\pi)}, & S_{+0}^{+0} &= \frac{\sinh \lambda\theta}{\sinh \lambda(\theta - 2i\pi)} S_{++}^{++}(\theta), & S_{00}^{00}(\theta) &= S_{+0}^{+0}(\theta) + S_{-+}^{-+}(\theta), \\ S_{-+}^{-+}(\theta) &= -\frac{\sin \pi\lambda \sin 2\pi\lambda}{\sinh \lambda(\theta - 2i\pi) \sinh \lambda(\theta + i\pi)}, & S_{+0}^{0+} &= -\frac{i \sin 2\pi\lambda}{\sinh \lambda(\theta - 2i\pi)} S_{++}^{++}(\theta). \end{aligned} \quad (7.0.8)$$

Все остальные матричные элементы получаются из СРТ-симметрий и кроссинг инвариантности. В пределе $\lambda \rightarrow 0$ эта S -матрица переходит в рациональную S -матрицу (7.0.7) для $N = 3$ в базисе $(\frac{(A_{++}+A_{--})}{\sqrt{2}}, \frac{(A_{+-}-A_{-+})}{\sqrt{2}}, A_0)$. Общее $O(N)$ тригонометрическое решение уравнения Янга-Бакстера было построено в [55,56]. Оно обладает видом аналогичным (7.0.8) и мы привели соответствующие формулы в дополнении 7.4. Важно, что эта S -матрица как и (7.0.8) зависит от одного непрерывного параметра λ так что в пределе $\lambda \rightarrow 0$ получается S -матрица Залодчиковых $O(N)$ модели (7.0.7).

Напрашивается возможность существования деформация $O(N)$ модели, такая что рассеяние в ней будет описываться тригонометрической $O(N)$ S -матрицей. Эта деформация, если она существует, должна соответствовать перенормируемой теории поля. Перенормировка теории в одной петле для нелинейной сигма-модели¹

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4\pi} \int G_{\mu\nu}(X) \partial X^{\mu} \bar{\partial} X^{\nu} d^2x, \quad (7.0.9)$$

требует, чтобы метрика в таргет-пространстве $G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}(X)$ удовлетворяла уравнения потока Риччи [57]

$$R_{\mu\nu} = -\dot{G}_{\mu\nu}, \quad (7.0.10)$$

где производная берется по отношению к ренормгрупповому времени t , логарифму масштаба. Решение нелинейных уравнений эволюции, отвечающие локальным теориям поля, должны быть ультрафиолетово стабильными, т.е. иметь гладкий предел при $t \rightarrow -\infty$. Вообще говоря, если эволюция начинается с произвольно выбранной метрики на некотором масштабе t_0 , то решение разойдется до достижения ультрафиолетовой области. Существование ультрафиолетово стабильного решения является нетривиальным фактом и известно всего несколько явных решений с этим свойством. Большинство из них являются Эйнштейновскими многообразиями такими как круглая сфера S_{N-1} в случае $O(N)$ модели. Одно из исключений это решение, которое являются деформацией круглой 2-сферы, известное как метрика "сосиски" [58]

$$ds^2 = \frac{\kappa}{\nu} \left(\frac{d\zeta^2}{(1-\zeta^2)(1-\kappa^2\zeta^2)} + \frac{(1-\zeta^2)d\phi^2}{(1-\kappa^2\zeta^2)} \right). \quad (7.0.11)$$

Здесь ϕ это $U(1)$ изометрическая координата $\phi \in [0, 2\pi]$ и $\zeta \in [-1, 1]$ продольная координата вдоль сосиски. Параметр κ является бегущей константой связи

$$\kappa = -\tanh \nu t, \quad (7.0.12)$$

а ν параметр деформации. При ν стремящимся к нулю (7.0.11) метрика переходит в метрику круглой 2-сферы. Для значения ν в общем положении метрику (7.0.11) можно представлять как вложение сосиски длины $L = -\sqrt{\nu}t$ и радиуса $r = \sqrt{\frac{\kappa}{\nu}}$ в трехмерное пространство-время. В ультрафиолетовом пределе $t \rightarrow -\infty$ сосиска выглядит как цилиндр бесконечной длины, что отвечает асимптотически свободной теории. С другой стороны, в пределе $t \rightarrow 0$ сосиска ведет себя как сжимающаяся сфера, где теория переходит в сильную связь и пертурбативное разложение становится неприменимым. В работе [58] была высказана гипотеза, а также проверены несколько её следствий, о том что нелинейная сигма модель определенная однопетлевой метрикой (7.0.11) является однопараметрической деформацией интегрируемой $O(3)$ сигма-модели с тригонометрической S -матрицей (7.0.8). Параметр деформации λ матрицы рассеяния выражается через параметр ν как

$$\lambda = \nu + O(\nu^2). \quad (7.0.13)$$

¹Вообще говоря, могут быть и другие локальные члены такие как B -поле или дилатон. Мы будем вынуждены включить их в дальнейшем.

В принципе можно найти поправки от высших петель к этой формуле и, конечно же они будут зависеть от схемы перенормировок. Принято считать, что включение всех этих поправок к однопетлевой метрике (7.0.11) может быть проделано таким способом, что в результате получится интегрируемая квантовая теория поля и описывается S -матрицей (7.0.8).

Классическая интегрируемость сигма модели сосиски и её трёхмерного аналога была продемонстрирована Лукьяновым [59]. Как недавно стало понятно, модель сосиски принадлежит к более общему классу деформированных сигма моделей². Все это началось со статьи Климчика [60], где он предложил однопараметрическую деформацию действия ГКП (7.0.1) сохраняющей свойство интегрируемости. Деформация осуществляется с помощью линейного кососимметрического оператора \mathcal{R} на комплексифицированной алгебре Ли \mathfrak{g} группы G , которое удовлетворяет модифицированному уравнению Янга-Бакстера

$$[\mathcal{R}a, \mathcal{R}b] + \mathcal{R}([a, \mathcal{R}b] + [\mathcal{R}a, b]) - [a, b] = 0. \quad (7.0.14)$$

Имея оператор \mathcal{R} деформированное действие определяется как

$$S = \frac{1}{2} \int \text{Tr} \left(\mathbf{g}^{-1} \partial_+ \mathbf{g} \frac{1}{1 - \kappa \mathcal{R}} \mathbf{g}^{-1} \partial_- \mathbf{g} \right) d^2 x, \quad (7.0.15)$$

где κ – параметр деформации, при $\kappa = 0$ мы возвращаемся к исходному действию. Для $\kappa \neq 0$ группа глобальных симметрий нарушается до $G_L \times N$, где N подгруппа G_R , которая коммутирует с оператором \mathcal{R} . Благодаря соотношению (7.0.14) левый нётеровский ток

$$\mathbf{J}_{\pm}^{\kappa} = -\mathbf{g} \left(\frac{1 + \kappa^2}{1 \pm \kappa \mathcal{R}} \mathbf{g}^{-1} \partial_{\pm} \mathbf{g} \right) \mathbf{g}^{-1}, \quad (7.0.16)$$

является чистой калибровкой и, соответственно, теория удовлетворяет условию нулевой кривизны и является интегрируемой. Отметим, что левая глобальная симметрия G_L остается незатронутой и все еще может применить косет конструкцию для подгруппы H группы G . Как было показано в [61] в результате теория остается интегрируемой, если фактор-пространство G/H является симметрическим. Действие κ -деформированной косет сигма модели может быть записано в виде [61]

$$S = \frac{1}{2} \int \text{Tr} \left((\mathbf{g} \partial_+ \mathbf{g}^{-1})^{(c)} \frac{1}{1 - \kappa \mathcal{R}_{\mathbf{g}} \circ \mathbf{P}_c} (\mathbf{g} \partial_- \mathbf{g}^{-1})^{(c)} \right) d^2 x, \quad (7.0.17)$$

где $\mathcal{R}_{\mathbf{g}} = \text{Ad } \mathbf{g}^{-1} \circ \mathcal{R} \circ \text{Ad } \mathbf{g}$ и \mathbf{P}_c проекция на фактор-пространство.

До сих пор мы явно не выбирали оператор \mathcal{R} удовлетворяющий билинейному соотношению (7.0.14). Типичным выбор, часто используемый в литературе начиная с [60], использует стандартное разложение алгебры Ли \mathfrak{g}

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{c} \oplus_{\alpha > 0} \mathfrak{g}_{\alpha} \oplus_{\alpha > 0} \mathfrak{g}_{-\alpha}, \quad (7.0.18)$$

и оператор \mathcal{R} определяется как

$$\mathcal{R}|_{\mathfrak{c}} = 0, \quad \mathcal{R}|_{\mathfrak{g}_{\alpha}} = i, \quad \mathcal{R}|_{\mathfrak{g}_{-\alpha}} = -i. \quad (7.0.19)$$

Действие (7.0.17) может переписать более явно выбрав систему координат. Мы будем использовать стандартный базис для $SO(N)$ алгебры

$$(T_{ab})_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{ai} \delta_{bj} - \delta_{bi} \delta_{aj}, \quad (7.0.20)$$

и положим

$$T_{12}, T_{34}, T_{56}, \dots \quad (7.0.21)$$

подалгеброй Картана. Подалгебра $SO(N-1)$ имеет образующие T_{ab} с $a, b \neq 1$. Мы будем использовать следующую параметризацию точки в фактор-пространстве $\mathfrak{g} \in SO(3)/SO(2)$

$$\mathbf{g}^{-1} = \exp(\phi T_{12}) \exp(\arcsin \zeta T_{13}). \quad (7.0.22)$$

²Иногда называемыми η -деформированными сигма-моделями.

С помощью простых вычислений можно показать, что действие (7.0.17) переходит в действие нелинейной сигма-модели с метрикой (7.0.11) при этом выборе координат. Это указывает на то, что теория (7.0.17) для общего класса косетов может рассматриваться как естественное обобщение модели сосиски. Мы изучим действие (7.0.17) для $SO(N)$ с $N > 3$ в разделе 7.2. Здесь отметим только, что в общем случае теории (7.0.17) имеется неисчезающее B -поле.

Мы вплотную подошли к другому важному моменту. Тригонометрическая S -матрица (7.0.8) допускает еще одно пертурбативное разложение вокруг точки $\lambda = \frac{1}{2}$. В точности при значении $\lambda = \frac{1}{2}$ модель описывается тремя не взаимодействующими частицами (A_0, A_+, A_-), чье эффективное действие описывается свободным скаляром Φ и дираковским ψ полем одинаковых масс. Для взаимодействующей теории может быть показано, что порядок за порядком пертурбативное разложение S -матрицы (7.0.8) совпадает с теорией возмущений Лагранжиана³

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi} (\partial_\mu \Phi)^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi + \frac{\pi b^2}{2(1+b^2)} (\bar{\psi}\gamma^\mu \psi)^2 - m\bar{\psi}\psi \cosh(b\Phi) - \frac{m^2}{8\pi b^2} \sinh^2(b\Phi), \quad (7.0.23)$$

если при этом параметр λ из S -матрицы (7.0.8) и параметр b из Лагранжиана (7.0.23) связаны соотношением

$$\lambda = \frac{1}{2(1+b^2)}. \quad (7.0.24)$$

Существование дуального описания сигма-модели является некоторым чудом. В данном разделе мы приоткроем завесу тайну на происхождение этой дуальности. Краткое объяснение состоит в следующем: интегрируемость этих моделей ведет к дуальности. Более точно, в некотором пределе обе теории обладают одной интегрируемой структурой и свойство интегрируемости настолько сильно, что теории остаются эквивалентными и вне этого предела. Отметим здесь, что Лагранжиан (7.0.23) является точным по параметру b , что означает, что пертурбативная область $b \rightarrow 0$ или $\lambda \rightarrow \frac{1}{2}$ определяется всю теорию. В сильной связи $b \rightarrow \infty$ Лагранжиан (7.0.23) бесполезен, но вместо него, имеется сигма-модельное описание с метрикой (7.0.11), которая, однако, верная только в однопетлевом приближении.

7.1 Дуальные Лагранжианы

Начнем с повторения известных результатов и рассмотрим теорию определенную плотностью Лагранжиана (7.0.23). Последний член

$$-\frac{m^2}{8\pi b^2} \sinh^2(b\Phi), \quad (7.1.1)$$

порядка m^2 и играет роль контр-члена. Было показано, что при таком выборе теория не содержит расходимостей и является ультрафиолетово конечной. Можно использовать фермон-бозонную дуальность Колемана-Мальденштама [44, 45]

$$i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi \rightarrow \frac{1}{8\pi} (\partial_\mu \varphi)^2, \quad \bar{\psi}(1 \pm \gamma_5)\psi \rightarrow e^{\pm i\beta\varphi}, \quad \text{где } \beta = \sqrt{1+b^2}, \quad (7.1.2)$$

и переписать теорию в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi} (\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{1}{8\pi} (\partial_\mu \Phi)^2 - m \cos(\beta\varphi) \cosh(b\Phi). \quad (7.1.3)$$

Теория (7.1.3) является специальным интегрируемым возмущением конформной теории синус-Лиувилля [62]. В частности, это означает, что оно обладает бесконечным множеством интегралов движения нечетных спинов

$$\mathbf{I}_{2k-1}, \quad \bar{\mathbf{I}}_{2k-1}, \quad (7.1.4)$$

которые образуют коммутирующий набор $[\mathbf{I}_{2k-1}, \mathbf{I}_{2l-1}] = [\mathbf{I}_{2k-1}, \bar{\mathbf{I}}_{2l-1}] = [\bar{\mathbf{I}}_{2k-1}, \bar{\mathbf{I}}_{2l-1}] = 0$. Это утверждение можно проверить в теории возмущений по массовому параметру m

$$\mathbf{I}_{2k-1} = \mathbf{I}_{2k-1}^{\text{free}} + O(m), \quad \text{with } \mathbf{I}_{2k-1}^{\text{free}} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} G_{2k}(\partial\varphi, \partial\Phi) dz, \quad (7.1.5)$$

³Это было замечено Алёшей Замолодчиковым в его неопубликованных записках.

где $G_{2k}(\partial\varphi, \partial\Phi)$ – это голоморфный дифференциальный полином степени $2k$. Например,

$$G_2(\partial\varphi, \partial\Phi) = (\partial\varphi)^2 + (\partial\Phi)^2. \quad (7.1.6)$$

Плотности с высшими спинам могут быть определены из требования их коммутации с возмущениями

$$[\mathbf{I}_{2k-1}^{\text{free}}, \int e^{\pm i\beta\varphi \pm b\Phi} dz] = 0. \quad (7.1.7)$$

Ясно, что это уравнение удовлетворяется интегралами $\mathbf{I}_2^{\text{free}}$, но для $k > 1$ оно накладывает сильные ограничения. Интегрируемость модели тесно связано со специальным выбором полей в экспонентах.

Попытаемся обобщить Лагранжиан (7.1.3). Пусть $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1})$ это $N - 1$ компонентное бозонное поле и пусть теория определяется плотностью Лагранжиана вида

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi} (\partial_\mu \varphi)^2 + \Lambda \sum_{r=1}^N e^{(\alpha_r, \varphi)}, \quad (7.1.8)$$

где $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ заданный набор векторов ⁴, который должен иметь максимально возможный ранг. Мы интересуемся квантовыми теориями поля этого вида, которые обладают бесконечным количеством интегралов движения. В ведущем порядке по Λ это накладывает ограничения на интегралы движения $\mathbf{I}_k^{\text{free}}$

$$[\mathbf{I}_k^{\text{free}}, \int e^{(\alpha_r, \varphi)} dz] = 0, \quad \text{для всех } r = 1, \dots, N. \quad (7.1.9)$$

Эти уравнение могут рассматриваться одновременно как уравнение на интегралы движения $\mathbf{I}_k^{\text{free}}$ и как уравнения на набор векторов $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$. Фактически, они так сильны, что решение существует только для матриц Грама $\Gamma_{r,s} = (\alpha_r, \alpha_s)$ очень специальной формы. Одно из решений к этой проблеме хорошо известно: $\alpha_r = b\alpha_r$ с α_r являющимися простыми корнями простой алгебры Ли \mathfrak{g} и соответствующая W -алгебра обычно называется $W(\mathfrak{g})$ алгеброй.

Мы будем интересоваться случаем, в котором все корни α_r являются фермионными, что означает

$$(\alpha_r, \alpha_r) = -1, \quad \text{для всех } r. \quad (7.1.10)$$

Более того, мы предполагаем, что имеются только интегралы нечетного спина: $\mathbf{I}_{2k}^{\text{free}} = 0$, так как мы ожидаем этого для теории с $O(N)$ симметрией в этом пределе. Можно найти решение удовлетворяющее этим условиям для каждого $N \geq 3$, которые зависят от непрерывного параметра b (см. дополнение 7.5, а также предыдущий раздел 6). Т.к. случаи $N = 2n + 1$ и $N = 2n + 2$ существенно различаются, мы рассмотрим их по отдельности. Ниже, мы будем рассматривать $N > 4$. Два случая $N = 3$ и $N = 4$ являются специальными и мы прокомментируем их в конце этой части.

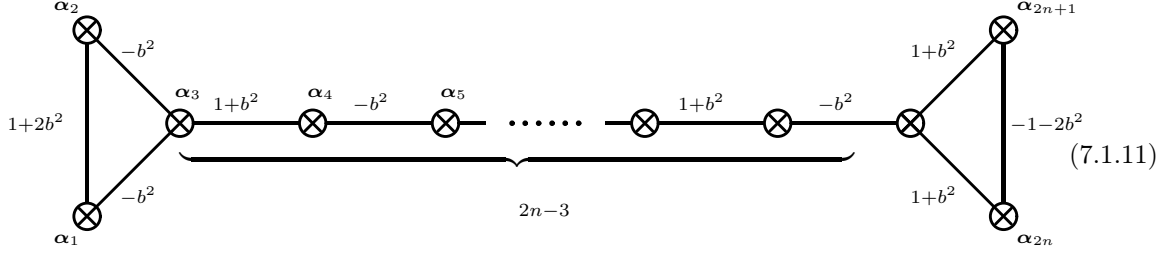
Матрица Грама (вырожденная) векторов $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ должна иметь очень специальный вид. Удобно ввести графические дынкиновски обозначение. Мы будем использовать следующие соглашения

$$\begin{array}{c} \otimes \quad \xrightarrow{x} \quad \otimes \end{array} \quad \text{отвечает подматрице } 2 \times 2 \quad \begin{pmatrix} -1 & x \\ x & -1 \end{pmatrix},$$

в то время как перечеркнутые круги, не соединенные отрезком, отвечают ортогональным друг другу векторам.

⁴В общем число векторов α_r на один больше чем число полей. Но существуют исключения в низких размерностях, такие как $N = 3$ рассмотренный выше.

Случай $N = 2n + 1$: система корней отвечающая диаграмме



Удобно ввести декартовы координаты в \mathbb{R}^{2n} : (E_i, e_i) , $i = 1, \dots, n$ такие что

$$(E_i, E_j) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}, \quad (E_i, e_j) = 0, \quad (7.1.12)$$

и вектора α_r , имеющие вид

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= bE_1 + i\beta e_1, & \alpha_2 &= bE_1 - i\beta e_1, \\ \alpha_{2k-1} &= -bE_{k-1} + i\beta e_k, & \alpha_{2k} &= bE_k - i\beta e_k, \quad \text{for } k = 2, \dots, n, \\ \alpha_{2n} &= bE_n - i\beta e_n, & \alpha_{2n+1} &= -bE_n - i\beta e_n, \end{aligned} \quad (7.1.13)$$

где $\beta = \sqrt{1+b^2}$. Как следует из (7.1.13)

$$\alpha_1 + \alpha_2 + 2 \sum_{r=3}^{2n-1} \alpha_r + \alpha_{2n} + \alpha_{2n+1} = 0. \quad (7.1.14)$$

В соответствие с этим представлением, удобно ввести

$$\Phi_k = (\varphi, E_k), \quad \phi_k = (\varphi, e_k). \quad (7.1.15)$$

Мы будем изучать эту теорию в режиме, в котором $b \rightarrow 0$. Для того, чтобы регуляризовать ультрафиолетовое поведение необходимо добавить контр-члены⁵. Используя представление (7.1.8) и бозон-фермионное соответствие [44, 45], Лагранжиан (7.1.8) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{8\pi} (\partial_\mu \Phi_k)^2 + i\bar{\psi}_k \gamma^\mu \partial_\mu \psi_k + \frac{\pi b^2}{2(1+b^2)} (\bar{\psi}_k \gamma^\mu \psi_k)^2 \right) - \\ &- m \left(e^{b\Phi_1} \bar{\psi}_1 \psi_1 + \sum_{k=2}^{n-1} \left(e^{b\Phi_k} \bar{\psi}_k \left(\frac{1+\gamma_5}{2} \right) \psi_k + e^{-b\Phi_{k-1}} \bar{\psi}_k \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) \psi_k \right) + e^{-b\Phi_{n-1}} \bar{\psi}_n \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) \psi_n + \right. \\ &\left. + \cosh b\Phi_n \bar{\psi}_n \left(\frac{1+\gamma_5}{2} \right) \psi_n \right) - \frac{m^2}{8\pi b^2} \left(e^{2b\Phi_1} + 2 \sum_{k=2}^{n-1} e^{b(\Phi_k - \Phi_{k-1})} + e^{b(\Phi_n - \Phi_{n-1})} + e^{-b(\Phi_{n-1} + \Phi_n)} \right), \end{aligned} \quad (7.1.16)$$

где $m = \Lambda/4\pi$. Последнее слагаемое в (7.1.16) играет роль контр-члена. Отметим, что эта часть действия совпадает с аффинной B_{n-1}^\vee моделью Тода (ориентация стрелки в диаграмме Дынкина обратно ориентации в диаграмме B_{n-1}). Сразу можно увидеть, что имеется n пар заряженных частиц $\psi_k, \bar{\psi}_k$ и одна скалярная частица Φ_n одинаковых масс $M = m + O(b^2)$. Для того, чтобы описать оставшуюся часть спектра необходимо диагонализировать матрицу размера $(n-1) \times (n-1)$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \ddots & \dots \\ \dots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & -1 & 2 & \dots \end{pmatrix} \quad (7.1.17)$$

⁵В режиме $-1 < b^2 < 0$ можно вместо этого использовать аналитическую регуляризацию.

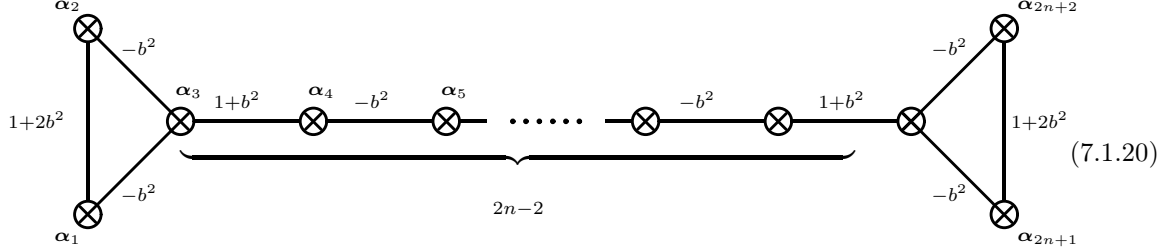
Легко убедиться в том, что

$$\det(A - 4 \sin^2 x) = \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}, \quad (7.1.18)$$

что приводит к тому, что массы оставшихся $(n-1)$ частиц задаются формулой

$$M_k = 2m \sin\left(\frac{\pi k}{2n-1}\right) + O(b^2), \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (7.1.19)$$

Случай $N = 2n + 2$: система корней соответствующая диаграмме



В этом случае мы введем следующие декартовы координаты в \mathbb{R}^{2n+1} : E_i , $i = 1, \dots, n$ and e_j , $j = 1, \dots, n+1$, так что

$$(E_i, E_j) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}, \quad (E_i, e_j) = 0, \quad (7.1.21)$$

и вектора α_r имеют форму

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= bE_1 + i\beta e_1, & \alpha_2 &= bE_1 - i\beta e_1, \\ \alpha_{2k-1} &= -bE_{k-1} + i\beta e_k, & \alpha_{2k} &= bE_k - i\beta e_k, \quad \text{for } k = 2, \dots, n, \\ \alpha_{2n+1} &= -bE_n + i\beta e_{n+1}, & \alpha_{2n+2} &= -bE_n - i\beta e_{n+1}. \end{aligned} \quad (7.1.22)$$

Используя бозон-фермионное соответствие [44, 45] и Лагранжиан (7.1.8) для $O(2n+2)$ модели с $n \geq 2$, перепишем действие как

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{8\pi} (\partial_\mu \Phi_k)^2 + \sum_{k=1}^{n+1} \left(i\bar{\psi}_k \gamma^\mu \partial_\mu \psi_k + \frac{\pi b^2}{2(1+b^2)} (\bar{\psi}_k \gamma^\mu \psi_k)^2 \right) - \\ &\quad - m \left(e^{b\Phi_1} \bar{\psi}_1 \psi_1 + \sum_{k=2}^n \left(e^{b\Phi_k} \bar{\psi}_k \left(\frac{1+\gamma_5}{2} \right) \psi_k + e^{-b\Phi_{k-1}} \bar{\psi}_k \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) \psi_k \right) + e^{-b\Phi_n} \bar{\psi}_n \psi_n \right) - \\ &\quad - \frac{m^2}{8\pi b^2} \left(e^{2b\Phi_1} + 2 \sum_{k=2}^n e^{b(\Phi_k - \Phi_{k-1})} + e^{-2b\Phi_n} \right). \end{aligned} \quad (7.1.23)$$

Отметим, что чисто бозонная часть действия совпадает с S_n теорией Тода. Спектр состоит из $2n+2$ заряженных частиц $\bar{\psi}_k$, ψ_k массы $M = m + O(b^2)$. Спектр теории тода состоит из n частиц с массами

$$m_k = 2m \sin\left(\frac{\pi k}{n}\right) + O(b^2). \quad (7.1.24)$$

Закончим этот раздела короткой ремаркой о $O(3)$ и $O(4)$ деформированных сигма-моделях и их дуальном описании. Для случая $O(3)$ дуальный Лагранжиан имеет вид (7.0.23), который имеет, после бозонизации, 4 экспоненты в качестве взаимодействия, а не 3 как можно было ожидать. Это специальное свойство $N = 3$, которое не имеет места для $N > 3$. Случай $N = 4$ также является особенным. Из-за исключительного изоморфизма $S^3 \simeq SU(2)$, модель $O(4)$ может рассматриваться и как сигма модель и как модель ГКП. Как было показано Климчиком [63] модель ГКП имеет двухпараметрическую интегрируемую деформацию

$$S = \frac{1}{2} \int \text{Tr} \left(\mathbf{g}^{-1} \partial_+ \mathbf{g} \frac{1}{1 - \alpha \mathcal{R} - \beta \mathcal{R}_\mathbf{g}} \mathbf{g}^{-1} \partial_- \mathbf{g} \right) d^2 x, \quad (7.1.25)$$

поэтому $O(4)$ сигма-модель может быть дважды деформирована, сохраняя при этом интегрируемость. Эта деформация, как и её дуальное описание, могут быть найдены в [30]. В нашей работе мы ограничимся рассмотрением $O(4)$ модели с параметрами деформации равными друг другу $\alpha = \beta$, что совпадает с аналогичными однопараметрическими деформациями для других моделей.

7.1.1 Конформная теория поля и амплитуды отражения

Теория (7.1.8) может рассматриваться как возмущение конформной теории поля, полученной из Лагранжиана (7.1.8) выкидыванием последнего члена $e^{(\alpha_N, \varphi)}$. Удобно рассмотреть эту теорию в нетривиальной фоновой метрике. Действие в нетривиальной метрике имеет вид

$$\mathcal{A} = \int \left(\frac{1}{8\pi} g^{ab} (\partial_a \varphi, \partial_b \varphi) + \frac{(\rho, \varphi)}{4\pi} R + \Lambda \sum_{r=1}^{N-1} e^{(\alpha_r, \varphi)} \right) \sqrt{g} d^2 z, \quad (7.1.26)$$

где g_{ab} это метрика на поверхности, а R её скалярная кривизна. Вектора α_r в (7.1.26) это в точности те же векторы что и в (7.1.13) и (7.1.22). В этом случае они образуют базис. Матрица Грама этих векторов зависит от непрерывного параметра b и в наших обозначениях отвечает графу

$$(7.1.27)$$

Вектор ρ в (7.1.26) был выбран, так чтобы теория была конформно инвариантна. Явно, он имеет вид

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{N-1} \hat{\alpha}_r, \quad (7.1.28)$$

где $\hat{\alpha}_r$ это дуальный базис: $(\alpha_r, \hat{\alpha}_s) = \delta_{rs}$. Эта конформная теория поля имеет центральный заряд

$$c(N) = 1 + 12(\rho, \rho) = \frac{(N-1)(x-N+3)(2x-N+2)}{2x(x+1)}, \quad \text{где } x = \begin{cases} b^2 & \text{для } N \in 2\mathbb{Z} \\ -1 - b^2 & \text{для } N \in 2\mathbb{Z} + 1. \end{cases} \quad (7.1.29)$$

Соответствующая конформная алгебра генерируется тензором энергии-импульса и полем спина 4. Мы не будем приводить их явный вид, т.к. он слишком сложен. Эта алгебра совпадает с киральной алгеброй косета [40]

$$\frac{\hat{\mathfrak{so}}(N)_k}{\hat{\mathfrak{so}}(N-1)_k} \quad \text{с } k = x - N + 3. \quad (7.1.30)$$

В оставшейся части этого раздела, мы изучи корреляционные функции теории (7.1.26) более детально. Для простоты, мы будем предполагать геометрию сферы. В этом случае, удобно работать координатах стереографической проекции. Используя хорошо известный трюк [38] можно показать (см. раздел 6.2.1), что n -точечная корреляционная функция экспоненциальных полей

$$\langle V_{\mathbf{a}_1}(\xi_1, \bar{\xi}_1) \dots V_{\mathbf{a}_n}(\xi_n, \bar{\xi}_n) \rangle, \quad \text{where } V_{\mathbf{a}} = e^{(\mathbf{a}, \varphi)}, \quad (7.1.31)$$

рассматриваемая как функция полного центрального заряда $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \dots + \mathbf{a}_n$, имеет полюсы при значениях

$$\mathbf{a} + \sum_{j=1}^{N-1} m_j \alpha_j = 2\rho, \quad (7.1.32)$$

где m_j некоторые неотрицательные целые числа. Вычеты в этих точках пропорциональны свободно полевым корреляционным функциям

$$\text{Res} \langle V_{\mathbf{a}_1}(\xi_1, \bar{\xi}_1) \dots V_{\mathbf{a}_n}(\xi_n, \bar{\xi}_n) \rangle \Big|_{\mathbf{a} + \sum_{j=1}^{n-1} m_j \alpha_j = 2\rho} = (-\Lambda)^{\sum_j m_j} \langle V_{\mathbf{a}_1}(\xi_1, \bar{\xi}_1) \dots V_{\mathbf{a}_n}(\xi_n, \bar{\xi}_n) \prod_{j=1}^n \frac{(\mathcal{S}_j)^{m_j}}{\pi^{m_j} m_j!} \rangle_{\text{FF}}, \quad (7.1.33)$$

где $\mathcal{S}_j = \int e^{(\mathbf{a}_j, \varphi(\xi, \bar{\xi}))} d^2 \xi$. Многократный интеграл в правой части формулы (7.1.33) сходится в области

$$-1 < b^2 < 0, \quad (\mathbf{a}_k, \alpha_r) < 1. \quad (7.1.34)$$

Вне этой области интеграл должен пониматься как аналитическое продолжение. Удобно для вычисления этих аналитических продолжений использовать хорошо известное тождество для кулоновских интегралов [64]

$$\int \mathcal{D}_n(x) \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n+m+2} |x_i - t_j|^{2p_j} d^2 \vec{x}_n = \prod_{j=1}^{n+m+2} \gamma(1 + p_j) \prod_{i < j} |t_i - t_j|^{2+2p_i+2p_j} \times \\ \times \int \mathcal{D}_m(y) \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{n+m+2} |y_i - t_j|^{-2-2p_j} d^2 \vec{y}_m, \quad (7.1.35)$$

где

$$\mathcal{D}_n(x) = \prod_{i < j} |x_i - x_j|^2, \quad d^2 \vec{x}_n = \frac{1}{\pi^n n!} \prod_{j=1}^n d^2 x_j, \quad \gamma(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)} \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{n+m+2} p_j = -n - 1.$$

Это соотношение верно для любых n и m , и для всех $-1 < p_j < 0$. Последнее условие эквивалентно отсутствию сингулярности на бесконечности, что всегда выполнено для корреляционных функций (7.1.33). Оно может быть использовано для вычисления множества кулоновских интегралов появляющихся в конформной теории поля (см. например [39]). С помощью соотношения (7.1.35) мы можем преобразовать свободнополевые корреляционные функции в правой части (7.1.33). Удобно ввести оператор \mathcal{R}_r , который действует на пространстве свободнополевых корреляторов как

$$\langle V_{\mathbf{a}_1}(\xi_1, \bar{\xi}_1) \dots V_{\mathbf{a}_n}(\xi_n, \bar{\xi}_n) \prod_{j=1}^n \frac{(\mathcal{S}_j)^{m_j}}{\pi^{m_j} m_j!} \rangle_{\text{FF}} \xrightarrow{\mathcal{R}_r} \\ \xrightarrow{\mathcal{R}_r} \prod_{s: (\alpha_r, \alpha_s) \neq 0} \left(\frac{1}{\gamma((\alpha_r, \alpha_s))} \right)^{m_s} \prod_{i=1}^n \mathcal{N}_r(\mathbf{a}_i) \langle V_{\mathbf{a}_1 + \alpha_r}(\xi_1, \bar{\xi}_1) \dots V_{\mathbf{a}_n + \alpha_r}(\xi_n, \bar{\xi}_n) \prod_{j=1}^n \frac{(\tilde{\mathcal{S}}_j)^{\tilde{m}_j}}{\pi^{\tilde{m}_j} \tilde{m}_j!} \rangle_{\text{FF}}, \quad (7.1.36)$$

где

$$\mathcal{N}_r(\mathbf{a}) = \frac{1}{\gamma((\alpha_r, \mathbf{a}))}, \quad \tilde{\mathcal{S}}_j = \int e^{(\tilde{\mathbf{a}}_j, \varphi(\xi, \bar{\xi}))} d^2 \xi \quad \text{с} \quad \tilde{\mathbf{a}}_s = \begin{cases} \mathbf{a}_s + \alpha_r & \text{if } (\mathbf{a}_s, \alpha_r) \neq 0 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \quad (7.1.37)$$

и

$$\tilde{m}_r = n + \sum_{s: (\alpha_s, \alpha_r) \neq 0} m_s - m_r - 2, \quad \tilde{m}_s = m_s \quad \text{для} \quad s \neq r. \quad (7.1.38)$$

Отметим, что оператор \mathcal{R}_r это просто применение интегрального соотношения (7.1.35) к вкладу фермионных корней α_r . Оно изменяет корни $\alpha_s \rightarrow \tilde{\alpha}_s$, и также сдвигает заряды в экспонентах в соответствии с формулой

$$\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a} + \alpha_r. \quad (7.1.39)$$

Как было показано в разделе 6.2.1, оператор \mathcal{R}_r может быть доопределен до оператора действующего на общую корреляционную функцию вне массовой поверхности. Поэтому он служит изоморфизмом

между двумя разными конформными теориями поля, отвечающими разным системам корней. В частности, он устанавливает изоморфизм между W -алгебрами в различных реализациях. Применяя разные операторы \mathcal{R}_r , можно уменьшить количество фермионных корней. Вообще говоря, если α_s является фермионным, то преобразованный корень $\tilde{\alpha}_s$ является бозонным (т.е. $(\tilde{\alpha}_s, \tilde{\alpha}_s) \neq -1$) и наоборот. Мы будем как и раньше использовать дынкинские обозначения, и рисовать бозонные корни как окружности. А именно,

$$\dots \overset{-x}{\circ} \overset{-x}{\circ} \dots \sim \begin{pmatrix} \dots & -x & 0 \\ -x & 2x & -x \\ 0 & -x & \dots \end{pmatrix}, \quad \overset{-2x}{\circ} \overset{-2x}{\circ} \sim \begin{pmatrix} 4x & -2x \\ -2x & 2x \end{pmatrix} \text{ etc fff}$$

Можно показать, что стартуя с системы корней, отвечающих диаграмме (7.1.20) и применяя преобразования \mathcal{R}_r , можно достичь диаграммы только с одним фермионным корнем и $N - 2$ бозонными. Для общего значения N , могут быть две возможности:

- Первая отвечает оператору

$$\mathcal{R}_I \stackrel{\text{def}}{=} \dots (\mathcal{R}_6 \mathcal{R}_7 \mathcal{R}_8 \mathcal{R}_9) (\mathcal{R}_5 \mathcal{R}_6 \mathcal{R}_7) (\mathcal{R}_4 \mathcal{R}_5) (\mathcal{R}_3) \quad (7.1.40)$$

Это преобразование переводит (7.1.20) в связанную систему корней D и A типов

$$\alpha_2 + \alpha_3 \quad \alpha_4 + \alpha_5 \quad \alpha_6 + \alpha_7 \quad \alpha_8 + \alpha_9 \quad \dots \quad \overset{1+b^2}{\otimes} \alpha_0 \quad \overset{-b^2}{\circ} \alpha_3 + \alpha_4 \quad \alpha_5 + \alpha_6 \quad \dots$$

$$\alpha_1 + \alpha_3$$

(7.1.41)

где

$$\alpha_0 = \begin{cases} -(\alpha_3 + \dots + \alpha_{N-1}), & \text{для } N = 2n, \\ -(\alpha_3 + \dots + \alpha_{N-2}), & \text{для } N = 2n + 1. \end{cases} \quad (7.1.42)$$

- Другой случай отвечает оператору

$$\mathcal{R}_{II} \stackrel{\text{def}}{=} \dots (\mathcal{R}_5 \mathcal{R}_6 \mathcal{R}_7 \mathcal{R}_8) (\mathcal{R}_4 \mathcal{R}_5 \mathcal{R}_6) (\mathcal{R}_3 \mathcal{R}_4) (\mathcal{R}_2) \quad (7.1.43)$$

и переводит систему к связанным C и A системам корней

$$\alpha_1 + \alpha_2 \quad \alpha_3 + \alpha_4 \quad \alpha_5 + \alpha_6 \quad \alpha_7 + \alpha_8 \quad \dots \quad \overset{-b^2}{\otimes} \alpha_0 \quad \overset{1+b^2}{\circ} \alpha_2 + \alpha_3 \quad \alpha_4 + \alpha_5 \quad \dots$$

(7.1.44)

где

$$\alpha_0 = \begin{cases} -(\alpha_2 + \dots + \alpha_{N-1}), & \text{для } N = 2n + 1, \\ -(\alpha_3 + \dots + \alpha_{N-2}), & \text{для } N = 2n. \end{cases} \quad (7.1.45)$$

Можно доказать, что оператор \mathcal{R}_r не только устанавливает соответствие между различными корреляционными функциями, но также между W -алгебрами в различных реализациях. Из приведенных выше соображений понятно, что максимальная бозонная подалгебра совпадает с

$$\begin{aligned} W(D(n+1)) \otimes W(C(n)) & \text{ для } N = 2n + 2, \\ W(D(n)) \otimes W(C(n)) & \text{ для } N = 2n + 1 \end{aligned} \quad (7.1.46)$$

Естественно называть полную W -алгебру

$$\begin{aligned} W(D(n+1|n)) & \text{ для } N = 2n + 2, \\ W(D(n|n)) & \text{ для } N = 2n + 1, \end{aligned} \quad (7.1.47)$$

где $D(m|n)$ соответствующая супералгебра. Отметим, что случай $N = 4$ отвечает супералгебре $D(2|1)$, которая является исключительной, т.к. допускает однопараметрическую деформацию $D(2|1) \rightarrow D(2|1, \alpha)$. С точки зрения сигма-модели это соответствует таргет-пространству $S^3 = SU(2)$, которое является групповым многообразием и поэтому допускает двухпараметрическую деформацию. Обсуждение этой модели, а также её дуальное описание и отношение к алгебре $D(2|1, \alpha)$, смотрите в статье [65].

Используя этот оператор \mathcal{R}_r , можно посчитать несколько двухточечных корреляционных функций. Например, рассмотрим теорию с нечетным $N = 2n + 1$. Естественно рассмотреть двухточечную корреляционную функцию

$$\langle V_{\rho+\mathbf{a}}(z, \bar{z}) V_{\rho+\mathbf{a}^*}(w, \bar{w}) \rangle = \frac{R(\mathbf{a})}{|z-w|^{2\Delta}}, \quad (7.1.48)$$

где \mathbf{a} – произвольный вектор, а \mathbf{a}^* его комплексно сопряженный вектор. Функция $R(\mathbf{a})$, так же известная как амплитуда отражения, является важной характеристикой любой конформной теории поля. В нашей теории его можно вычислить с помощью интегрального оператора \mathcal{R}_r . А именно, используя (7.1.33) и применяя оператор (7.1.43) к соответствующим многократным интегралам, получаем соотношение⁶

$$R(\mathbf{a}) = R_0(\hat{\mathbf{a}}) \prod_{k=1}^n \prod_{j=1}^k \gamma \left(\frac{1}{2} - \sum_{r=0}^{2j-2} (\alpha_r, \mathbf{a}) \right) \gamma \left(\frac{1}{2} - \sum_{r=0}^{2j-2} (\alpha_r, \mathbf{a}^*) \right) R_{C(n)}(\hat{\mathbf{a}}), \quad \hat{\mathbf{a}} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^*), \quad (7.1.49)$$

где $R_{C(n)}(\mathbf{a})$ совпадает, с точностью до множителя, с амплитудой отражения в $C(n)$ конформной моделию Тода [67]

$$R_{C(n)}(\mathbf{a}) = \prod_{\alpha > 0} \frac{\Gamma(1 + b(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{a})) \Gamma(1 + b^{-1}(\mathbf{e}_\alpha^\vee, \mathbf{a}))}{\Gamma(1 - b(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{a})) \Gamma(1 - b^{-1}(\mathbf{e}_\alpha^\vee, \mathbf{a}))}, \quad (7.1.50)$$

где \mathbf{e}_α и \mathbf{e}_α^\vee являются положительными корнями и ко-корнями алгебры Ли $C(n)$. Множитель $R_0(\mathbf{a})$ в (7.1.49) всегда может быть сделан равным 1 подходящим сдвигом $\varphi \rightarrow \varphi + \boldsymbol{\mu}$ в действии (7.1.26) для некоторого постоянного вектора $\boldsymbol{\mu}$. Для $\boldsymbol{\mu} = 0$ он имеет вид

$$R_0(\mathbf{a}) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{2\pi\Lambda}{\gamma((e_j, e_j)b^2)} \right)^{-\frac{(\mathbf{a}, \omega_j)}{b}}. \quad (7.1.51)$$

Интересно было бы получить (7.1.49) в приближении малого суперпространства дуальной сигма-модели. Эта проблема может быть сведена к квантовой механике (см. например [68]). Мы планируем заняться этой проблемой в будущем.

7.2 Уравнения потока Риччи

В разделе 7.1 мы описали теорию (7.1.8), (7.1.16), (7.1.23) и утверждали, что она обладает бесконечным количеством интегралов движения. В лидирующем порядке по параметру Λ мы построили

⁶Аналогичные вычисления можно найти в [66].

первую нетривиальную сохраняющуюся величину (см. приложение 7.5). В этом разделе, мы сформулируем дуальное сигма-модельное описание той же теории.

Дуальное описание получается из следующего факта, упомянутого в разделе 7.3. Рассмотрим два фермионных экспоненциальных оператора $e^{(\alpha_r, \varphi)}$, $r = 1, 2$, такие что $(\alpha_r, \alpha_r) = -1$ и $(\alpha_1, \alpha_2) \neq 0$. И предположим что они коммутируют с интегралами движения $\mathbf{I}_{2k-1} = \int G_{2k}(z) dz$. Это означает, что

$$\oint_{C_z} G_{2k}(z) e^{(\alpha_r, \varphi(w))} dw = \partial_z \mathcal{V}_k^{(r)}(z), \quad (7.2.1)$$

для некоторого локального поля $\mathcal{V}_k^{(r)}(z)$. Тогда, существует также киральное поле

$$\mathcal{V}_{1,2} = (\alpha_1, \partial\varphi) e^{(\beta_{12}, \varphi)}, \quad \text{где } \beta_{12} = \frac{2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} (\alpha_1 + \alpha_2), \quad (7.2.2)$$

такое, что

$$\oint_{C_z} W_{2k}(z) \mathcal{V}_{1,2}(w) dw = \partial_z \mathcal{V}_k^{(1,2)}(z), \quad (7.2.3)$$

для некоторого локального поля $\mathcal{V}_k^{(1,2)}(z)$. Отметим, что $\mathcal{V}_{1,2}(w)$ определен с точностью до полной производной, т.е. с точностью до сдвига $\alpha_1 \rightarrow \alpha_1 + \zeta \beta_{12}$ в предэкспоненте. Для нашей теории поля $\mathcal{V}_{i,j}$ можно разделить на две группы

$$\begin{aligned} \mathbf{I}: & \quad (\mathcal{V}_{1,2}, \mathcal{V}_{3,4}, \mathcal{V}_{5,6}, \dots), \\ \mathbf{II}: & \quad (\mathcal{V}_{3,1}, \mathcal{V}_{3,2}, \mathcal{V}_{4,5}, \mathcal{V}_{6,7}, \dots). \end{aligned} \quad (7.2.4)$$

Используя координатное представление (7.1.13) и (7.1.22), находим, что соответствующие экспоненты имеют вид

$$\begin{aligned} (\beta_{12}, \beta_{34}, \beta_{56}, \dots) &= \frac{1}{b} (E_1, E_2 - E_1, E_3 - E_2, \dots), \\ (\beta_{31}, \beta_{32}, \beta_{45}, \dots) &= \frac{i}{\sqrt{1+b^2}} (-e_1 - e_2, e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots). \end{aligned} \quad (7.2.5)$$

Отметим, что два оператора из разных групп I и II коммутируют с друг другом, но не коммутируют, если экспоненты только из одной группы. Более того, в сигма-модельном режиме $b \in \mathbb{R}$ и $b \gg 1$ показатели экспонент в группе I являются вещественными, а в группе II чисто мнимыми. Их матрица Грама пропорциональна

$$\begin{aligned} \text{Матриц Грама } B(n) & \text{ for } N = 2n + 1, \\ \text{Gram matrix for affine } C^\vee(n) & \text{ for } N = 2n + 2. \end{aligned} \quad (7.2.6)$$

Теперь полезно вспомнить пример модели сосиски. Как обсуждалось во введении к этой части, в глубокой ультрафиолетовой области сосиска выглядит как бесконечно длинный цилиндр с полукруглыми крышками с обеих сторон. Поэтому, естественно ожидать, что метрика будет лишь слегка возмущена от плоской, если мы находимся не слишком близко к краям сосиски. Тщательное рассмотрение оператора (7.2.2) (помноженным на его антиголоморфный аналог) наводит на мысль, что в точности этот оператор является естественным кандидатом на роль возмущения плоской метрики⁷. По тем же причинам, понятно, что эти операторы отвечают только первому линейному возмущению и нужно включить дополнительные поправки для того чтобы описать области рядом с краями сосиски. Помимо этого, дополнительные вклады от высших порядков по кривизне в уравнение ренормгруппового потока для метрики станут важными при приближении к краю сосиски. Однако, как мы увидим, эти поправки подавлены в пределе $b \rightarrow \infty$.

Имею ввиду рассуждения предыдущего параграфа, рассмотрим модель

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi} (\partial_\mu \varphi)^2 + \Lambda \sum_{(i,j) \in \mathbf{I}} (\alpha_i, \partial\varphi) (\alpha_i, \bar{\partial}\varphi) e^{(\beta_{ij}, \varphi)} + \dots, \quad (7.2.7)$$

⁷Полезно сделать аналогию с теорией струн, операторы (7.2.2) отвечают гравитонам, т.е. полям которые возмущают пространство время.

которая может быть дуальным сигма-модельным описанием изначальной модели (7.1.8), (7.1.16), (7.1.23). Под ... мы подразумеваем возможные контр-члены. Отметим, что теория (7.2.7) обладает \mathbf{P} симметрией, но не \mathbf{C} симметрией для $N > 4$. Как мы увидим в дальнейшем, используя T -дуальность можно сделать метрику вещественной, но тогда при этом необходимо ввести мнимое B -поле, в точности как и следует из общего действия (7.0.17). Сделаем следующее важное замечание: теория (7.2.7) является неперенормируемой в сильном смысле. Как мы увидим, нужно добавить бесконечное число контр-членов, для того чтобы добиться перенормируемости. Рассмотрим эту проблему в приближении одной петли. Параметр b играет роль константы связи этой теории. Для того, чтобы исследовать квазиклассический режим, отмасштабируем поля

$$\varphi = bX \quad (7.2.8)$$

и рассмотрим предел $b \rightarrow \infty$. Вводя стандартное обозначение $\alpha' = \frac{2}{b^2}$, перепишем действие (7.2.7) как разложение в ряд по α'

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi\alpha'} G_{\mu\nu}(X) \partial_a X^\mu \partial_a X^\nu + O(1) \quad \text{при } \alpha' \rightarrow 0, \quad (7.2.9)$$

где

$$G_{\mu\nu}(X) = \delta_{\mu\nu} + \Lambda \sum_{(i,j) \in \mathbf{I}} a_{i,\mu} a_{i,\nu} e^{(b_{ij}, X)} + O(\Lambda^2), \quad (7.2.10)$$

с векторами a_i и b_{ij} определенными через асимптотику

$$a_r \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{b \rightarrow \infty} b^{-1} \alpha_r, \quad b_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{b \rightarrow \infty} b \beta_{ij} + \dots \quad (7.2.11)$$

Саблидирующие члены в разложении (7.2.10) должны быть выбраны так, чтобы добиться перенормируемости в одной петле. Это условие приводит к уравнениям ренормгруппового потока

$$R_{\mu\nu} + 2\nabla_\mu \nabla_\nu \Psi = -\dot{G}_{\mu\nu}, \quad (7.2.12)$$

где точка обозначает производную по отношению к ренормгрупповому времени t , которое пропорционально $\log(\Lambda_{UV})$. Функция Ψ в этом уравнении более менее произвольна и может быть положена более менее чему угодно. Оно описывает эффект возможного диффеоморфизма зависящего от времени. Это означает, что решение уравнения (7.2.12) это всегда пара: метрика вместе с системой координат. В этом смысле, выбор Ψ является калибровкой. Существуют два стандартных выбора фиксации калибровки, используемые в литературе. Первая, так называемая калибровка Гамильтона, в которой $\Psi = 0$. Другая это калибровка Фридмана, в ней Ψ удовлетворяет дополнительному соотношению

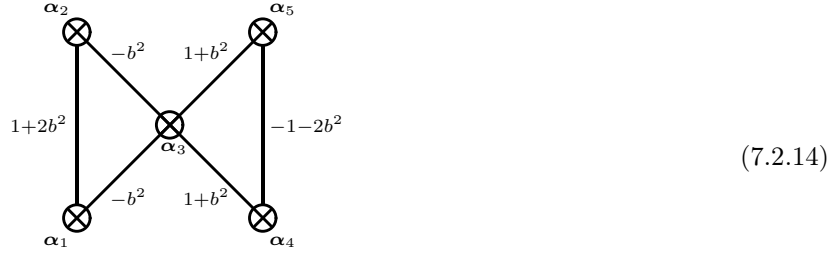
$$c_0 + |\nabla \Psi|^2 - \frac{1}{2} \Delta \Psi = -\dot{\Psi}, \quad (7.2.13)$$

где c_0 – константа, которая всегда может быть положена равной нулю линейным сдвигом функции $\Psi \rightarrow \Psi - c_0 t$. При таком выборе Ψ может рассматриваться как поле дилатона. Нам будет удобнее не использовать, ни одну из этих калибровок, а вместо этого подстраивать Ψ так, чтобы уменьшить степень нелинейности уравнения (7.2.12).

Теперь мы можем приступить к интересующей нас проблеме. Мы будем искать решение уравнений (7.2.12) с ультрафиолетовой асимптотикой (7.2.10), которую мы получили из действия (7.2.7). Как мы увидим, можно использовать калибровочную свободу, чтобы положить детерминант метрике константе. Ниже мы изучим два случая: $N = 5$ и $N = 6$. Мы покажем, что, после подходящей замены координат и T -дуальности, соответствующие решения совпадают с решениями полученными из общего действия (7.0.17).

7.2.1 Метрика для деформированной $O(5)$ модели

Рассмотрим простейший случай: $N = 5$. В этом случае, таргет-пространство является четырехмерным. Модель отвечает графу



(7.2.14)

Мы используем параметризацию векторов α_r как в (7.1.13) (где $\beta = \sqrt{1+b^2}$)

$$\alpha_1 = bE_1 + i\beta e_1, \quad \alpha_2 = bE_1 - i\beta e_1, \quad \alpha_3 = -bE_1 + i\beta e_2, \quad \alpha_4 = bE_2 - i\beta e_2, \quad \alpha_5 = -bE_2 - i\beta e_2, \quad (7.2.15)$$

где E_1, E_2, e_1, e_2 ортонормированный базис в \mathbb{R}^4 с координатами (x_1, x_2, x_3, x_4) . Мы ожидаем, что решение уравнения (7.2.12) должно вести себя в ультрафиолете $t \rightarrow -\infty$ как

$$G_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + e^{\alpha t} (A_{\mu\nu} e^{x_1} + B_{\mu\nu} e^{-x_1-x_2} + C_{\mu\nu} e^{-x_1+x_2}) + \dots, \quad \Psi = (\rho, x) + \dots, \quad (7.2.16)$$

где

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

и ρ является неизвестной константой. Как было объяснено, анзац (7.2.16) отвечает возмущению свободной теории операторами

$$\int (\alpha_1, \partial\varphi)(\alpha_1, \bar{\partial}\varphi) e^{(\beta_{12}, \varphi)} d^2 z, \quad \int (\alpha_4, \partial\varphi)(\alpha_4, \bar{\partial}\varphi) e^{(\beta_{34}, \varphi)} d^2 z, \quad \int (\alpha_5, \partial\varphi)(\alpha_5, \bar{\partial}\varphi) e^{(\beta_{35}, \varphi)} d^2 z. \quad (7.2.17)$$

Более того, мы ожидаем, что опущенные члены обозначенные \dots в (7.2.16) являются однородными полиномами по

$$X = e^{\alpha t} e^{x_1}, \quad Y = e^{\alpha t} e^{-x_1-x_2}, \quad Z = e^{\alpha t} e^{-x_1+x_2}, \quad (7.2.18)$$

степени ≥ 2 . В ведущем порядке из уравнения (7.2.12) имеем

$$\alpha = \frac{3}{4}, \quad \rho = \left(-\frac{1}{4}, 0, -\frac{3i}{4}, \frac{i}{2} \right). \quad (7.2.19)$$

Решая эту асимптотическую задачу, можно увидеть, что решение остается в следующем анзаце для метрики $G_{\mu\nu}$ и дилатона Ψ

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F_1 & 0 & iF_5 & 0 \\ 0 & F_2 - \cosh(x_2)F_6 & 0 & -i \sinh(x_2)F_6 \\ iF_5 & 0 & F_3 & 0 \\ 0 & -i \sinh(x_2)F_6 & 0 & F_4 + \cosh(x_2)F_6 \end{pmatrix}, \quad \Psi = (\rho, x) + F_7. \quad (7.2.20)$$

В (7.2.20) функции F_k зависят только от x_1 и t : $F_k = F_k(x_1, t)$. Боле того, уравнения (7.2.12) совместны, если выбрать

$$F_2 = F_4, \quad F_2^2 = 1 + F_6^2. \quad (7.2.21)$$

Функция F_7 является произвольной и соответствует выбору условия калибровки. Мы можем использовать эту свободу, чтобы наложить дополнительное условие

$$\det G = F_1 F_3 + F_5^2 = 1. \quad (7.2.22)$$

При таком выборе проблема (7.2.12) имеет единственное решение удовлетворяющее асимптотическим условиям (7.2.16). Это решение имеет вид

$$\begin{aligned} F_3 &= \frac{(1-U)(1-UV)}{1-U^2V}, & F_5 &= \frac{U(1-V)}{1-U^2V} + \frac{2UV(1-U)}{3(1-U^2V)}, \\ F_6 &= V^{\frac{1}{2}} \left(\frac{(1+V)}{(1-V)^2} \frac{1+U^2V}{1-U^2V} - \left(\frac{1}{2} + \frac{4V}{(1-V)^2} \right) \frac{U}{1-U^2V} \right), & F_7 &= \log \left(\frac{(1-UV)^2}{1-V} \right) \end{aligned} \quad (7.2.23)$$

где

$$U = e^{\frac{3t}{4}} e^{x_1}, \quad V = \frac{1}{4} e^{\frac{3t}{2}} e^{-2x_1}.$$

Остальные функции F_k получаются из условий (7.2.21) и (7.2.22).

Существует выбор координат, в которых метрика $G_{\mu\nu}$ имеет особенно простой вид. Более точно, если мы сделаем сдвиг

$$x_3 \rightarrow x_3 + \frac{i}{3} \log((1-U)^3(1-UV)), \quad (7.2.24)$$

Это сдвиг зануляет элемент (1,3) метрики. Более того, удобно ввести новые координаты ζ , θ , ϕ_1 and ϕ_2 , заданные следующими формулами

$$F_3 = \frac{\kappa(1-\zeta^2)}{(1-\kappa^2\zeta^2)}, \quad \tanh\left(\frac{x_2}{2}\right) = \sin\theta, \quad \kappa = \frac{2-e^{\frac{3t}{2}}}{2+e^{\frac{3t}{2}}}, \quad \phi_1 = \frac{x_3}{2}, \quad \phi_2 = \frac{x_4}{2} - \frac{i}{2} \log \cos\theta. \quad (7.2.25)$$

В этих координатах метрика имеет вид (после рескейлинга $ds^2 \rightarrow 4\nu ds^2$, $t \rightarrow 4\nu t + \log 2$)

$$ds^2 = \frac{\kappa}{\nu} \left(\frac{d\zeta^2}{(1-\zeta^2)(1-\kappa^2\zeta^2)} + \frac{(1-\zeta^2)d\phi_1^2}{(1-\kappa^2\zeta^2)} + \zeta^2 d\theta^2 + 2i\zeta^2 \tan\theta d\theta d\phi_2 + \frac{(1-\kappa^2\zeta^4 \sin^2\theta)d\phi_2^2}{\kappa^2\zeta^2 \cos^2\theta} \right). \quad (7.2.26)$$

Метрику (7.2.26) можно найти в [69]. Она удовлетворяет уравнению потом Риччи (7.2.12) со функцией Ψ заданной

$$\Psi = \frac{1}{2} \log \left(\frac{(1-\kappa^2\zeta^2)^2}{\kappa(1-\kappa^2)\zeta^2 \cos^2\theta} \right) - i\phi_2, \quad (7.2.27)$$

и $\kappa = -\tanh(3\nu t)$. Более того (7.2.27) удовлетворяет

$$|\nabla\Psi|^2 - \frac{1}{2}\Delta\Psi = -\dot{\Psi}, \quad (7.2.28)$$

и поэтому Ψ мы можем рассматривать его как поле дилатона. Можно также произвести преобразование T -дуальности по изометрической координате ϕ_2

$$d\bar{s}^2 = \frac{\kappa}{\nu} \left[\frac{d\zeta^2}{(1-\zeta^2)(1-\kappa^2\zeta^2)} + \frac{(1-\zeta^2)d\phi_1^2}{(1-\kappa^2\zeta^2)} + \frac{\zeta^2}{1-\kappa^2\zeta^4 \sin^2\theta} (d\theta^2 + \cos^2\theta d\phi_2^2) \right], \quad (7.2.29)$$

но это преобразование приводит к ненулевому чисто мнимому B -полю

$$B = \frac{i\kappa^2 \sin\theta \cos\theta \zeta^4}{\nu(1-\kappa^2\zeta^4 \sin^2\theta)} d\theta \wedge d\phi_2. \quad (7.2.30)$$

В этом виде метрика и B -поле в точности совпадают с тем, что должно получаться из общего действия (7.0.17). Отметим, что метрика (7.2.29) и B -поле (7.2.30) удовлетворяют

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} H_\mu^{\lambda\sigma} H_{\nu\lambda\sigma} + \nabla_\mu V_\nu + \nabla_\nu V_\mu &= -\dot{G}_{\mu\nu}, \\ H_{\lambda\mu\nu} V^\lambda - \frac{1}{2} \nabla_\lambda H_{\mu\nu}^\lambda + \nabla_\mu \omega_\nu - \nabla_\nu \omega_\mu &= -\dot{B}_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (7.2.31)$$

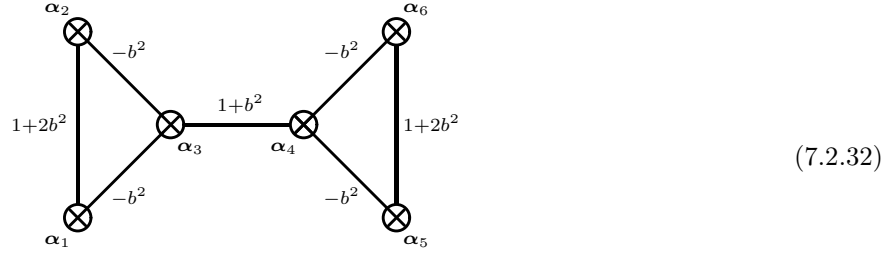
где V_μ и $\omega = \omega_\mu dx^\mu$ задаются

$$V_\mu = \left(\kappa^2 \xi \left(\frac{2\xi^2 \sin^2(\theta)}{1-\kappa^2\xi^4 \sin^2(\theta)} - \frac{2}{1-\kappa^2\xi^2} \right), 0, 0, 0 \right), \quad \omega = \frac{i\kappa\xi^2 \cos^2\theta}{(1-\kappa^2\xi^4 \sin^2\theta)} d\phi_2.$$

В пределе $\nu \rightarrow 0$ метрика (7.2.29) стремится к метрике круглой 4-сфера, в то время как B -поле, вектор V_μ и один форма ω исчезают.

7.2.2 Метрика $O(6)$ модели

Модель в этом случае пятимерна и определяется графом.



(7.2.32)

Вектора α_r могут быть параметризованы следующим образом ($\beta = \sqrt{1+b^2}$)

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= bE_1 + i\beta e_1, & \alpha_2 &= bE_1 - i\beta e_1, & \alpha_3 &= -bE_1 + i\beta e_2, \\ \alpha_4 &= bE_2 - i\beta e_2, & \alpha_5 &= -bE_2 + i\beta e_3, & \alpha_6 &= -bE_2 - i\beta e_3, \end{aligned} \quad (7.2.33)$$

где $(E_1, E_2, e_1, e_2, e_3)$ ортонормальный базис в \mathbb{R}^5 с координатами $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. В этом случае мы ищем решение уравнений (7.2.12) в виде

$$G_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + 2e^{\alpha t} (A_{\mu\nu}e^{x_1} + B_{\mu\nu}e^{-x_2} + C_{\mu\nu}e^{-x_1+x_2}) + \dots, \quad \Psi = (\rho, x) + \dots, \quad (7.2.34)$$

где

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Это отвечает возмущению операторами

$$\int (\alpha_1, \partial\varphi)(\alpha_1, \bar{\partial}\varphi)e^{(\beta_{12}, \varphi)} d^2z, \quad \int (\alpha_4, \partial\varphi)(\alpha_4, \bar{\partial}\varphi)e^{(\beta_{34}, \varphi)} d^2z, \quad \int (\alpha_6, \partial\varphi)(\alpha_6, \bar{\partial}\varphi)e^{(\beta_{56}, \varphi)} d^2z. \quad (7.2.35)$$

В ведущем порядке мы получаем

$$\alpha = \frac{2}{3}, \quad \rho = \frac{1}{6}(-1, 1, -4i, 2i, 4i). \quad (7.2.36)$$

Можно проверить, что в качестве решения подходит следующий анзац

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F_6 & \frac{1}{2}F_5 & iF_2 & -\frac{i}{2}F_5 & \frac{i}{2}F_5 \\ \frac{1}{2}F_5 & F_1 + e^{-x_2}F_3 + e^{x_2-x_1}F_4 & 0 & -ie^{x_2-x_1}F_4 & ie^{-x_2}F_3 \\ iF_2 & 0 & F_1 - F_2 + F_5 & 0 & 0 \\ -\frac{i}{2}F_5 & -ie^{x_2-x_1}F_4 & 0 & F_1 - e^{x_2-x_1}F_4 & 0 \\ \frac{i}{2}F_5 & ie^{-x_2}F_3 & 0 & 0 & F_1 - e^{-x_2}F_3 \end{pmatrix}, \quad (7.2.37)$$

$$\Psi = (\rho, x) + F_7,$$

где функции $F_k = F_k(x_1, t)$ не зависят от x_2 . Функция F_7 в (7.2.37) произвольна. Мы используем эту свободу, чтобы положить детерминант матрицы G функцией зависящей только от t . Теперь решение единственно и имеет следующий явный вид (здесь $X = e^{\frac{2}{3}t}e^{x_1}$, $Y = e^{\frac{4}{3}t}e^{-x_1}$)

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1 - XY}{1 + XY} + \frac{Y(1 - XY)^{-\frac{1}{3}}}{2(1 + XY)}, \quad F_2 = \frac{X(1 - XY)^{\frac{1}{3}}}{(1 + XY)}, \quad F_3 = \frac{(XY)^{\frac{1}{3}}\sqrt{4(1 - XY)^{4/3} + 2Y}}{2(1 - XY)^{\frac{1}{3}}(1 + XY)}, \\ F_4 &= \frac{(XY)^{\frac{1}{3}}\left(4(1 - XY) - 2X(1 - XY)^{\frac{1}{3}} + \frac{Y}{(1 - XY)^{1/3}}\right)}{2(1 + XY)\sqrt{4(1 - XY)^{4/3} + 2Y}}, \quad F_5 = -\frac{Y(1 - XY)^{-\frac{1}{3}}}{2(1 + XY)}, \\ F_7 &= \frac{3}{4}\log\left((1 - XY)^{4/3} + \frac{Y}{2}\right). \end{aligned} \quad (7.2.38)$$

а также длинное выражение для F_6 , которое можно получить из условия $\det G = \frac{1-XY}{1+XY}$. Сделаем замену координат ($\kappa = -\tanh t$)

$$\begin{aligned} x_1 &= \log \left(\frac{\zeta^2 (-2 \sinh t)^{\frac{2}{3}}}{2 \cosh^2 t (1 - \kappa^2 \zeta^2)} \right), & x_2 &= \log \left(\frac{-(-2 \sinh t)^{\frac{1}{3}} \zeta \tanh^2 \theta}{\cosh t} \right) \\ x_3 &= 2\phi_1 - i \log \left(\frac{1 - \kappa^2 \zeta^2}{1 - \zeta^2} \right), & x_4 &= 2\phi_2 - i \log \left(\frac{\zeta}{\cos^2 \theta} \right), & x_5 &= 2\phi_3 + i \log (\zeta \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (7.2.39)$$

В этих координатах метрика имеет вид ($ds^2 \rightarrow 4ds^2$, $t \rightarrow 4\iota t$)

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{\kappa}{\nu} \left(\frac{d\zeta^2}{(1 - \zeta^2)(1 - \kappa^2 \zeta^2)} + \frac{(1 - \zeta^2)d\phi_1^2}{(1 - \kappa^2 \zeta^2)} + \zeta^2 d\theta^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2i\zeta^2 \tan \theta d\theta d\phi_2 + \frac{(1 - \kappa^2 \zeta^4 \sin^2 \theta)d\phi_2^2}{\kappa^2 \zeta^2 \cos^2 \theta} + \frac{1}{\kappa^2 \zeta^2 \sin^2 \theta} d\phi_3^2 \right). \end{aligned} \quad (7.2.40)$$

Эта метрика T -дуальна метрике вида [69]

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{\kappa}{\nu} \left(\frac{d\zeta^2}{(1 - \zeta^2)(1 - \kappa^2 \zeta^2)} + \frac{(1 - \zeta^2)d\phi_1^2}{(1 - \kappa^2 \zeta^2)} + \zeta^2 d\theta^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2i\zeta^2 \tan \theta d\theta d\phi_2 + \frac{(1 - \kappa^2 \zeta^4 \sin^2 \theta)d\phi_2^2}{\kappa^2 \zeta^2 \cos^2 \theta} + \zeta^2 \sin^2 \theta d\phi_3^2 \right), \end{aligned} \quad (7.2.41)$$

по изометрии в направлении ϕ_3 . Эта метрика удовлетворяет уравнениям потока Риччи (7.2.12) с Ψ and κ заданным формулой

$$\Psi = \frac{1}{2} \log \left(\frac{(1 - \kappa^2 \zeta^2)^3}{\kappa(1 - \kappa^2)^{\frac{3}{2}} \zeta^2 \cos^2 \theta} \right) - 2i\phi_2, \quad \kappa = -\tanh(4\iota t). \quad (7.2.42)$$

Мы можем совершить преобразование T -дуальности также и по направлению ϕ_2 , что приведет метрику к диагональному виду

$$d\tilde{s}^2 = \frac{\kappa}{\nu} \left[\frac{d\zeta^2}{(1 - \zeta^2)(1 - \kappa^2 \zeta^2)} + \frac{(1 - \zeta^2)d\phi_1^2}{(1 - \kappa^2 \zeta^2)} + \frac{\zeta^2}{1 - \kappa^2 \zeta^4 \sin^2 \theta} (d\theta^2 + \cos^2 \theta d\phi_2^2) + \zeta^2 \sin^2 \theta d\phi_3^2 \right], \quad (7.2.43)$$

и генерирует ненулевое чисто мнимое B -поле

$$B = \frac{i\kappa^2 \sin \theta \cos \theta \zeta^4}{\nu(1 - \kappa^2 \zeta^4 \sin^2 \theta)} d\theta \wedge d\phi_2. \quad (7.2.44)$$

В этом виде метрика и B -поле совпадают с тем, что должно получиться из деформированного действия (7.0.17) в [70]. Метрика (7.2.43) и B -поле (7.2.44) удовлетворяют

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} H_{\mu}^{\lambda\sigma} H_{\nu\lambda\sigma} + \nabla_{\mu} V_{\nu} + \nabla_{\nu} V_{\mu} &= -\dot{G}_{\mu\nu}, \\ H_{\lambda\mu\nu} V^{\lambda} - \frac{1}{2} \nabla_{\lambda} H_{\mu\nu}^{\lambda} + \nabla_{\mu} \omega_{\nu} - \nabla_{\nu} \omega_{\mu} &= -\dot{B}_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (7.2.45)$$

где V_{μ} и $\omega = \omega_{\mu} dx^{\mu}$ заданы формулами

$$V_{\mu} = \left(\kappa^2 \xi \left(\frac{2\xi^2 \sin^2(\theta)}{1 - \kappa^2 \xi^4 \sin^2(\theta)} - \frac{3}{1 - \kappa^2 \xi^2} \right), 0, -\frac{\kappa^2 \xi^4 \sin(2\theta)}{2(1 - \kappa^2 \xi^4 \sin^2(\theta))}, 0, 0 \right), \quad \omega = \frac{i\kappa \zeta^2 \cos^2 \theta}{(1 - \kappa^2 \zeta^4 \sin^2 \theta)} d\phi_2.$$

В заключения раздела, отметим, что в теория с $N = 2n + 1$ является самодуальной по отношению к преобразованию $b^2 \rightarrow -1 - b^2$, в то время как теория с $N = 2n + 2$ не самодуальна. Было бы интересно изучить теорию с $N = 2n + 2$ в этой дуальной области параметров $b^2 \rightarrow -1 - b^2$. В частности, интересно бы было построить соответствующие решение уравнений потока Риччи и сравнить его с действием некоторой правильно выбранной сигма-модели. Мы привели некоторые предварительные шаги в этом направлении для $N = 6$ в приложении 7.7.

7.3 Заключение

В этой части работы, мы изучили феномен сильной/слабой дуальности в контексте двумерных сигма-моделей. Наши результаты обобщают хорошо известный феномен дуальности между моделью сосиски и возмущенной теорией синус-Лиувилля вместе с их трехмерными аналогами. Все результаты носят характер гипотез, но при этом мы провели ряд проверок.

В разделе 7.1.1 мы изучили конформную теорию поля связанную с квантовой теорией поля (7.1.16), (7.1.23). В частности, мы явно вычислили некоторые двухточечные корреляционные функции или, другими словами, амплитуды отражения (7.1.49). С другой стороны, эта конформная теория поля также обладает дуальным сигма-модельным описанием. Однако, вычисление амплитуд отражения с помощью дуального описания представляет сложную проблему. В основном из-за того, что дуальная сигма модель неизвестна во всех петлях. Оставаясь в однопетлевом приближении можно получить ответ только в приближении, так называемого, малого суперпространства. Проблема в этом пределе сводится к квантовой механике на кривом многообразии [58]

$$\left(-\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{8}R\right)\Psi = E\Psi, \quad (7.3.1)$$

где Δ и R – Лапласиан и скалярная кривизна метрики в таргет-пространстве сигма-модели. Было бы интересно сравнить амплитуды отражения, полученные в этой работе, с вычислениями в этой квантовой задаче.

Наши результаты для $O(N)$ сигма-модели могут быть обобщены до других интегрируемых сигма-моделей включая их суперсимметричные обобщения. Немедленное обобщение можно сделать, если рассмотреть супералгебру $\mathfrak{sl}(n|n)$. В этом случае, можно повторить аргументы нашей статьи с некоторыми малыми изменениями. Мы ожидаем, что соответствующая сигма-модель будет деформацией модели изученной в [71] с $U(n)$ тригонометрической S -матрицей. Мы планируем изучить это в дальнейших публикациях. В качестве другого примера дуальности, было бы интересно изучить интегрируемые деформации $AdS_5 \times S_5$ суперкосета [72] и найти их дуальное описание.

Приложение

7.4 Тригонометрическая деформация матрицы рассеяния $O(N)$ модели

В этом разделе, мы приведем явные выражения для деформации $O(N)$ S -матрицы [55, 56]. Как обычно, случаи четного и нечетного N нужно рассматривать отдельно.

Случай $N = 2n + 1$: Теория рассеяния для деформированной $O(2n + 1)$ сигма-модели и её дуального описания (7.1.16) содержит $2n + 1$ частиц одной и той же массы. Теория имеет $U(1)^n$ симметрию. Спектр состоит из n заряженных частиц $(\psi_k, \bar{\psi}_k)$ и одной нейтральной частицы Φ_n . Удобно нумеровать их как $(1, \dots, n, n + 1, n + 2, \dots, 2n + 1) = (\psi_1, \dots, \psi_n, \Phi_n, \bar{\psi}_n, \dots, \bar{\psi}_1)$, т.е. $\bar{i} = 2n + 2 - i$. Двухчастичная матрица рассеяния $S_{ij}^{kl}(\theta)$ для процесса $(i, j) \rightarrow (k, l)$ является **C**, **PT** симметричной и кроссинг инвариантной

$$S_{ij}^{kl}(\theta) = S_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{k}\bar{l}}(\theta), \quad S_{ij}^{kl}(\theta) = S_{kl}^{ij}(\theta), \quad S_{ij}^{kl}(\theta) = S_{i\bar{l}}^{k\bar{j}}(i\pi - \theta). \quad (7.4.1)$$

Явно она задается формулами

$$\begin{aligned} S_{ii}^{ii} &= F(\theta), \quad i \neq m + 1, \quad S_{n+1n+1}^{n+1n+1} = F(\theta) (t(\theta) + R(\theta)), \\ S_{ij}^{ij} &= F(\theta)t(\theta) \text{ for } i \neq j, i \neq \bar{j}; \quad S_{\bar{j}\bar{j}}^{\bar{j}\bar{j}} = F(i\pi - \theta); \quad S_{ji}^{ij} = F(\theta)r(\theta)e^{i\kappa_{ij}\lambda\theta}; \\ S_{\bar{j}\bar{j}}^{i\bar{i}} &= S_{ij}^{ji}(i\pi - \theta), \quad S_{11}^{1\bar{1}} = S_{\bar{1}\bar{1}}^{1\bar{1}} = F(\theta)R(\theta), \quad S_{i\bar{i}}^{i\bar{i}} = S(\theta)_{i-1, \bar{i}}^{\bar{i}-1, i} + S_{i, i-1}^{i-1, \bar{i}}(i\pi - \theta), \end{aligned} \quad (7.4.2)$$

где

$$\begin{aligned} t(\theta) &= \frac{\sinh\left(\frac{(N-2)\lambda\theta}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{(N-2)\lambda}{2}\left(\theta - \frac{2i\pi}{N-2}\right)\right)}, \quad r(\theta) = \frac{-i \sin \pi \lambda}{\sinh\left(\frac{(N-2)\lambda}{2}\left(\theta - \frac{2i\pi}{N-2}\right)\right)}, \\ R(\theta) &= \frac{-\sin \pi \lambda \sin\left(\frac{\pi\lambda(N-2)}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{(N-2)\lambda}{2}\left(\theta - \frac{2i\pi}{N-2}\right)\right) \sinh\left(\frac{(N-2)\lambda}{2}(\theta - i\pi)\right)}, \\ -F(\theta) &= \exp i\delta(\theta) = \exp\left(i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega \cosh\left(\frac{\pi\omega(N-4)}{2(N-2)}\right) \sinh\left(\frac{\pi\omega(p-1)}{N-2}\right) \sin \omega\theta}{\omega \cosh\left(\frac{\pi\omega}{2}\right) \sinh\left(\frac{\pi\omega p}{N-2}\right)}\right), \end{aligned} \quad (7.4.3)$$

и $p = \frac{1}{\lambda}$.

Случай $N = 2n + 2$: В этом случае, имеется $n + 1$ фермионных частиц $(\bar{\psi}_k, \psi_k)$, $k = 1, \dots, n + 1$ одной и той же массы. Введем обозначение $\bar{j} = 2n + 3 - j$ и пронумеруем частицы как $A_k = \psi_k$, $k = 1, \dots, m + 1$, $A_{2n+3-k} = A_{\bar{k}} = \bar{\psi}_k$. Точная матрица для этих частиц имеет вид

$$\begin{aligned} S_{ii}^{ii} &= F(\theta); \quad S_{ij}^{ij} = F(\theta)t(\theta), \quad i \neq \bar{j}; \quad S_{\bar{j}\bar{j}}^{\bar{j}\bar{j}} = F(i\pi - \theta); \\ S_{ji}^{ij} &= F(\theta)r(\theta)e^{i\kappa_{ij}\lambda\theta}, \quad j \neq \bar{i}, i \neq j; \quad S_{\bar{j}\bar{j}}^{i\bar{i}} = S_{ij}^{ji}(i\pi - \theta), \quad j \neq i; \\ S_{11}^{1\bar{1}} &= S_{n+1n+1}^{n+1\bar{1}} = F(\theta)R(\theta); \quad S_{i\bar{i}}^{i\bar{i}} = S_{i-1, \bar{i}-1}^{i-1, \bar{i}}(\theta) + S_{i, i-1}^{i-1, \bar{i}-1}(i\pi - \theta), \quad i \neq 1, n + 1. \end{aligned} \quad (7.4.4)$$

Функция $\kappa_{ij} = \kappa_{\bar{i}\bar{j}} = -\kappa_{ji} = -\kappa_{\bar{j}\bar{i}}$, $\kappa_{1\bar{1}} = \kappa_{1n+1} = 0$; $\kappa_{ij} = i - j - n \operatorname{sgn}(i - j)$, $i, j < n + 1$. Функция $F(\theta)$ задается тем же выражением (7.4.3).

7.5 Интегралы движения

Здесь мы изучим набор уравнений коммутативности (7.1.9) более детально. Пусть $\varphi(z)$ – набор $(N - 1)$ компонент кирального бозонного поля $\varphi(z) = (\varphi_1(z), \dots, \varphi_{N-1}(z))$ нормированный как

$$\varphi_i(z)\varphi_j(w) = -\delta_{ij} \log(z - w) + \dots \quad (7.5.1)$$

Отмети, что (7.1.9) выполняется тождественно для первого интегралов движения

$$\mathbf{I}_1^{\text{free}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\partial\varphi(z), \partial\varphi(z)) dz. \quad (7.5.2)$$

Нетривиальные уравнения появляются при рассмотрении интегралов движения высших спинов. Мы предполагаем $\mathbf{I}_2^{\text{free}} = 0$ и

$$\mathbf{I}_3^{\text{free}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{G}_4(z) dz \neq 0. \quad (7.5.3)$$

Плотность $\mathbf{G}_4(z)$ определена с точностью до полной производной. Её можно представить как

$$G_4 = A_{ijkl} \partial\varphi_i \partial\varphi_j \partial\varphi_k \partial\varphi_l + B_{ijk} \partial\varphi_i \partial\varphi_j \partial^2\varphi_k + C_{ij} \partial^2\varphi_i \partial^2\varphi_j, \quad (7.5.4)$$

с неизвестными тензорами A_{ijkl} , B_{ijk} и C_{ij} , которые обладают некоторой симметрией, очевидной из их определения. Операторное разложение полей (7.5.4) с экспоненциальными полями $V_\alpha(w) = e^{(\alpha, \varphi(w))}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1})$ имеет вид

$$\begin{aligned} W_4(z)V_\alpha(w) = & \frac{wV_\alpha(w)}{(z-w)^4} + \frac{\nu_i \partial\varphi_i(z)}{(z-w)^3} V_\alpha(w) + \frac{\lambda_{ij} \partial\varphi_i(z) \partial\varphi_j(z) + \kappa_i \partial^2\varphi_i(z)}{(z-w)^2} V_\alpha(w) + \\ & + \frac{\sigma_{ijk} \partial\varphi_i(z) \partial\varphi_j(z) \partial\varphi_k(z) + \rho_{ij} \partial\varphi_i(z) \partial^2\varphi_j(z)}{(z-w)} V_\alpha(w) + \dots \end{aligned} \quad (7.5.5)$$

где поля в правой части виковски упорядочены. Тензора в правой части (7.5.5) имеют вид

$$\begin{aligned} \omega = & A_{ijkl} \alpha_i \alpha_j \alpha_k \alpha_l + B_{ijk} \alpha_i \alpha_j \alpha_k + C_{ij} \alpha_i \alpha_j, \quad \nu_i = -4A_{ijkl} \alpha_j \alpha_k \alpha_l - 2B_{ijk} \alpha_j \alpha_k, \\ \lambda_{ij} = & 6A_{ijkl} \alpha_k \alpha_l + B_{ijk} \alpha_k, \quad \kappa_i = B_{jki} \alpha_j \alpha_k + 2C_{ij} \alpha_j, \quad \sigma_{ijk} = -4A_{ijkl} \alpha_l, \quad \rho_{ij} = -2B_{ikj} \alpha_k \end{aligned} \quad (7.5.6)$$

Используя это операторное разложение, мы можем вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_z} W_4(z)V_\alpha(w) dw = -(\tilde{\sigma}_{ijk} \partial\varphi_i(z) \partial\varphi_j(z) \partial\varphi_k(z) + \tilde{\rho}_{ij} \partial\varphi_i(z) \partial^2\varphi_j(z)) V_\alpha(z) - \frac{\omega}{6} \partial^3 V_\alpha(z), \quad (7.5.7)$$

где

$$\tilde{\sigma}_{ijk} = \sigma_{ijk} + \frac{1}{6}(\alpha_i \alpha_j \nu_k + \alpha_i \alpha_k \nu_j + \alpha_j \alpha_k \nu_i) - \frac{1}{3}(\lambda_{ij} \alpha_k + \lambda_{ik} \alpha_j + \lambda_{jk} \alpha_i), \quad \tilde{\rho}_{ij} = \rho_{ij} + \frac{1}{2} \nu_i \alpha_j - \alpha_i \kappa_j.$$

отметим, что правая часть (7.5.7) должна быть полной производной. Это условие приводит к

$$\tilde{\rho}_{ij} = \tilde{\rho}_{ji}, \quad \tilde{\sigma}_{ijk} = \frac{1}{6}(\tilde{\rho}_{ij} \alpha_k + \tilde{\rho}_{ik} \alpha_j + \tilde{\rho}_{jk} \alpha_i). \quad (7.5.8)$$

В соответствии с (7.1.9) эти уравнения должны выполняться для всех α_r для $r = 1, \dots, N$. Для двух наборов векторов (7.1.13) и (7.1.22) уравнения (7.5.8) могут быть решены. Решение дает явный вид плотности тока $G_4(z)$. Явно (здесь $a = -i\sqrt{1+b^2}$ и все плотности Вик упорядочены)

Случай $N = 2n + 1$:

$$\begin{aligned}
G_4(z) = & ((\partial\Phi, \partial\Phi) + (\partial\phi, \partial\phi))^2 + \frac{2n-1}{3} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{b^2} (\partial\Phi_k)^4 + \frac{1}{a^2} (\partial\phi_k)^4 \right) + \\
& + 2(2n-1) \sum_{k=1}^n ((\partial\Phi_k)^2 + (\partial\phi_k)^2) \left(\frac{1}{a} \sum_{j>k} \partial^2\Phi_j + \frac{1}{b} \sum_{j<k} \partial^2\phi_j - \frac{2}{2n-1} \sum_{j=1}^n (j-1) \left(\frac{1}{a} \partial^2\Phi_j + \frac{1}{b} \partial^2\phi_{n-j+1} \right) \right) + \\
& + \left(\frac{4(n+1)}{3} + \frac{2n-1}{3} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{2}{a^2} \right) \right) (\partial^2\Phi, \partial^2\Phi) + \left(\frac{4(n+1)}{3} + \frac{2n-1}{3} \left(\frac{2}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right) \right) (\partial^2\phi, \partial^2\phi) + \\
& + 2 \sum_{i \leq j} (i-1)(2(j-n)-1)(2-\delta_{ij}) \left(\frac{1}{a^2} \partial^2\Phi_i \partial^2\Phi_j + \frac{1}{b^2} \partial^2\phi_{n-i+1} \partial^2\phi_{n-j+1} \right) + \\
& + \frac{2}{ab} \left(4 \sum_{i,j} (i-1)(n-j) \partial^2\Phi_i \partial^2\phi_j - (2n-1) \sum_{i>j} (2(i-j)-1) \partial^2\Phi_i \partial^2\phi_j \right). \quad (7.5.9)
\end{aligned}$$

Случай $N = 2n + 2$:

$$\begin{aligned}
G_4(z) = & ((\partial\Phi, \partial\Phi) + (\partial\phi, \partial\phi))^2 + \frac{2n}{3} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{b^2} (\partial\Phi_k)^4 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{a^2} (\partial\phi_k)^4 \right) + \\
& + 4n \sum_{k=1}^n ((\partial\Phi_k)^2 + (\partial\phi_k)^2) \left(\frac{1}{a} \sum_{j>k} \partial^2\Phi_j + \frac{1}{b} \sum_{j<k} \partial^2\phi_j - \frac{1}{n} \left(\frac{1}{a} \sum_{j=1}^n (j-1) \partial^2\Phi_j + \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{n+1} \left(j - \frac{1}{2} \right) \partial^2\phi_{n-j+2} \right) \right) + \\
& + \left(\frac{4(2n+3)}{6} + \frac{2n}{3} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{2}{a^2} \right) \right) (\partial^2\Phi, \partial^2\Phi) + \left(\frac{4(2n+3)}{6} + \frac{2n}{3} \left(\frac{2}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right) \right) (\partial^2\phi, \partial^2\phi) + \\
& + 2 \sum_{i \leq j} \left(\frac{1}{a^2} (i-1)(2(j-n)-2)(2-\delta_{ij}) \partial^2\Phi_i \partial^2\Phi_j + \frac{1}{b^2} \left(i - \frac{1}{2} \right) (2(j-n)-1)(2-\delta_{ij}) \partial^2\phi_{n-i+2} \partial^2\phi_{n-j+2} \right) + \\
& + \frac{2}{ab} \left(4 \sum_{i,j} (i-1) \left(\frac{2n+1}{2} - j \right) \partial^2\Phi_i \partial^2\phi_j - n \sum_{i>j} (2(i-j)-1) \partial^2\Phi_i \partial^2\phi_j \right). \quad (7.5.10)
\end{aligned}$$

Из (7.5.9) и (7.5.10) можно увидеть, что

$$G_4 = ((\partial\Phi, \partial\Phi) + (\partial\phi, \partial\phi))^2 + \frac{2(N+2)}{3} ((\partial^2\Phi, \partial^2\Phi) + (\partial^2\phi, \partial^2\phi)) + O\left(\frac{1}{b^2}\right) \quad \text{at } b \rightarrow \infty \quad (7.5.11)$$

Видно, что в лидирующем порядке по $b \rightarrow \infty$ плотность G_4 удовлетворяет $O(N-1)$ симметрии и совпадает с плотностью изученной в [73].

7.6 Параметризация групповых элементов

Действие деформированного косета сигма-модели имеет вид

$$S = \frac{1}{2} \int \text{Tr} \left((\mathbf{g}\partial_+\mathbf{g}^{-1})^{(c)} \frac{1}{1 - \kappa \mathcal{R}_{\mathbf{g}} \circ \text{P}_c} (\mathbf{g}\partial_-\mathbf{g}^{-1})^{(c)} \right) d^2x, \quad (7.6.1)$$

Мы выбираем базис в алгебре Ли $SO(N)$ в виде

$$(T_{ab})_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{ai}\delta_{bj} - \delta_{bi}\delta_{aj}, \quad (7.6.2)$$

и $SO(N-1)$ подалгебра выбрана как $T_{a,b}$ с $a, b \neq 1$. Теперь, нужно выбрать параметризацию групповых элементов.

N=4

В этом случае, мы выберем следующую параметризацию косета $SO(4)/SO(3)$

$$\mathbf{g}^{-1} = \exp(\phi_1 T_{3,4}) \exp(\phi T_{1,2}) \exp(\arcsin \zeta T_{1,3}) \quad (7.6.3)$$

Метрика имеет вид

$$ds^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{d\zeta^2}{(1-\zeta^2)(1-\kappa^2\zeta^2)} + \frac{(1-\zeta^2)d\phi^2}{(1-\kappa^2\zeta^2)} + \zeta^2 d\phi_1^2 \right). \quad (7.6.4)$$

Случай $N = 3$ получается из случая $N = 4$, если положить ϕ_1 нулю.

N=6

В этом случае мы выберем следующую параметризацию $SO(6)/SO(5)$

$$\mathbf{g}^{-1} = \exp(\phi_2 T_{5,6}) \exp(\phi_1 T_{3,4}) \exp(\theta T_{3,5}) \exp(\phi T_{1,2}) \exp(\arcsin \zeta T_{1,3}) \quad (7.6.5)$$

Метрика имеет вид

$$ds^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{d\zeta^2}{(1-\zeta^2)(1-\kappa^2\zeta^2)} + \frac{\zeta^2}{1-\kappa^2\zeta^4 \sin^2 \theta} + \frac{(1-\zeta^2)d\phi^2}{(1-\kappa^2\zeta^2)} + \frac{\zeta^2 \cos^2 \theta}{1-\kappa^2\zeta^4 \sin^2 \theta} + \zeta^2 \sin^2 \theta d\phi_2^2 \right). \quad (7.6.6)$$

Случай $N = 5$ получается из этого, если положить ϕ_2 нулю.

Помимо метрики, интегрируемость требует введения B -поля. Дополнительный член в действии имеет вид

$$\mathcal{S}_B = \frac{1}{2} \int \text{Tr} \left(\epsilon_{ab} (\mathbf{g} \partial_a \mathbf{g}^{-1})^{(c)} \frac{1}{1-\kappa \mathcal{R}_{\mathbf{g}} \circ \mathcal{P}_c} (\mathbf{g} \partial_b \mathbf{g}^{-1})^{(c)} \right) d^2 x, \quad (7.6.7)$$

и прямое вычисление показывает, что это поле имеет вид

$$B = \frac{i\kappa\zeta}{1-\zeta^2\kappa^2} d\zeta \wedge d\phi + \frac{i\kappa\zeta^4 \sin \theta \cos \theta}{1-\kappa^2\zeta^4 \sin^2 \theta} d\theta \wedge d\phi_1 \quad (7.6.8)$$

Легко видеть, что первый член в (7.6.8) является полной калибровкой и может быть опущен.

7.7 Дуальная метрика для деформированной $O(6)$ сигма-модели

Рассмотрим сигма модель с 5-мерным таргет-пространством, которая дуальна, в смысле $b^2 \rightarrow -1 - b^2$, к теории изученной в разделе 7.2. Она отвечает диаграмме Дынкина вида

$$(7.7.1)$$

Вектор α_k может быть параметризован следующим образом

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= i\beta e_1 + bE_1, & \alpha_2 &= i\beta e_1 - bE_1, & \alpha_3 &= -i\beta e_1 + bE_2, \\ \alpha_4 &= -i\beta e_2 - bE_2, & \alpha_5 &= i\beta e_2 + bE_3, & \alpha_6 &= i\beta e_2 - bE_3. \end{aligned} \quad (7.7.2)$$

Мы ищем решение уравнениям (7.2.12) в виде

$$G_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + e^{\alpha t} (A_{\mu\nu} e^{x_2+x_1} + A_{\mu\nu}^+ e^{x_2-x_1} + B_{\mu\nu} e^{-x_2+x_3} + B_{\mu\nu}^+ e^{-x_2-x_3}) + \dots, \quad \Psi = (\rho, x) + \dots, \quad (7.7.3)$$

где

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Это решение отвечает возмущению операторами

$$\begin{aligned} & \int (\alpha_1, \partial\varphi)(\alpha_1, \bar{\partial}\varphi) e^{(\beta_{13}, \varphi)} d^2 z, & \int (\alpha_2, \partial\varphi)(\alpha_2, \bar{\partial}\varphi) e^{(\beta_{23}, \varphi)} d^2 z, \\ & \int (\alpha_5, \partial\varphi)(\alpha_5, \bar{\partial}\varphi) e^{(\beta_{45}, \varphi)} d^2 z, & \int (\alpha_6, \partial\varphi)(\alpha_6, \bar{\partial}\varphi) e^{(\beta_{46}, \varphi)} d^2 z. \end{aligned} \quad (7.7.4)$$

В ведущем порядке, получим

$$\alpha = 1, \quad \rho = (0, 0, 0, -\frac{i}{2}, -\frac{i}{2}) \quad (7.7.5)$$

Мы также полагаем детерминант метрики $G_{\mu\nu}$ интегралом движения подходящим выбором калибровки. После этого можно убедиться, что решение можно найти в следующем анзатце

$$\begin{pmatrix} \coth F + \frac{\cosh x_1}{\sinh F} & 0 & 0 & i \frac{\sinh x_1}{\sinh F} & 0 \\ 0 & \phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \coth \bar{F} + \frac{\cosh x_3}{\sinh F} & 0 & i \frac{\sinh x_3}{\sinh F} \\ i \frac{\sinh x_1}{\sinh F} & 0 & 0 & \coth F - \frac{\cosh x_1}{\sinh F} & 0 \\ 0 & 0 & i \frac{\sinh x_3}{\sinh F} & 0 & \coth \bar{F} - \frac{\cosh x_3}{\sinh F} \end{pmatrix},$$

и $\Psi = -\frac{i}{2}(x_4 + x_5) + \Phi$. Функции F, \bar{F} и Φ зависят от только x_2 и t , в то время, как ϕ зависит только от t . Поток Ричи (7.2.12) в этом случае приводит к системе обычных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \Phi'' &= \frac{1}{4} \left(\frac{F'^2}{\sinh^2 F} + \frac{\bar{F}'^2}{\sinh^2 \bar{F}} - 2\dot{\phi} \right), \\ F'' &= 2F'\Phi' + F'^2 \coth F + \phi(2\dot{F} + 1), \quad \bar{F}'' = 2\bar{F}'\Phi' + \bar{F}'^2 \coth \bar{F} + \phi(2\dot{\bar{F}} + 1). \end{aligned} \quad (7.7.6)$$

В нашем случае, имеется также дополнительная симметрия

$$\bar{F}(x_2, t) = F(-x_2, t), \quad \Phi(x_2, t) = \Phi(-x_2, t), \quad (7.7.7)$$

так что последнее решение в (7.7.6) может быть опущено. Анализирую первые члены в разложении $t \rightarrow -\infty$, можно показать, что

$$\phi = - \left(\frac{2K(m)}{\pi} \right)^2 \coth t, \quad F = -t + \log(\operatorname{cn}(iz|m) + i \operatorname{sn}(iz|m)), \quad (7.7.8)$$

где

$$z = \frac{2K(m)}{\pi} x_2, \quad m = -\frac{1}{\sinh^2 t},$$

и $K(z)$, $\operatorname{cn}(z|m)$, $\operatorname{sn}(z|m)$ стандартные эллиптические функции.

7.8 Решение уравнения (6.1.23) в бозонном случае

В этом приложении мы рассмотрим в деталях решение уравнения (6.1.23) в случае когда все корни являются бозонными: $\Theta_r \neq -1$ для всех $r = 1, \dots, n$. В этом случае $\mathbb{C}_{rrr} = 0$. Во-первых, давайте сначала рассмотрим случай, когда все индексы r, s и t в (6.1.23) принимают только два значения (скажем 1 и 2). Тогда имеется только два независимых уравнения $\mathbb{U}_{122} = 0$ и $\mathbb{U}_{211} = 0$. Явно, они имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_{12}\Theta_1}{\Theta_1+2}(w_1-w_2) &= -\frac{2(\Gamma_{12})^2}{\Theta_2+2}(w_1-w_2), \\ \frac{\Gamma_{12}\Theta_2}{\Theta_2+2}(w_1-w_2) &= -\frac{2(\Gamma_{12})^2}{\Theta_1+2}(w_1-w_2). \end{aligned} \quad (7.8.1)$$

Существуют четыре решения уравнений (7.8.1)

1. $w_1 = w_2$ и произвольное Γ_{12}, Θ_1 и Θ_2 ,
2. $\Gamma_{12} = 0$ и произвольное Θ_1, Θ_2, w_1 и w_2 ,
3. $\Gamma_{12} \neq 0, w_1 \neq w_2$ и $\Theta_2 = \Theta_1, \Gamma_{12} = -\frac{\Theta_1}{2}$,
4. $\Gamma_{12} \neq 0, w_1 \neq w_2$ и $\Theta_2 = \frac{4}{\Theta_1}, \Gamma_{12} = -1$.

Отметим, что случаи 3 и 4 связаны преобразованием (6.1.24) и поэтому решение типа 4 может быть опущено. Ниже, мы покажем, что решения типа 1 ведет к вырожденной матрице Грама и поэтому может быть также опущено. Оставшиеся два случая 2 и 3 можно графически представить как



Отметим, что до сих пор мы не наложили условия на параметры w_r . Эти условия возникают при наложении условий симметрии (6.1.23) на три разных индекса.

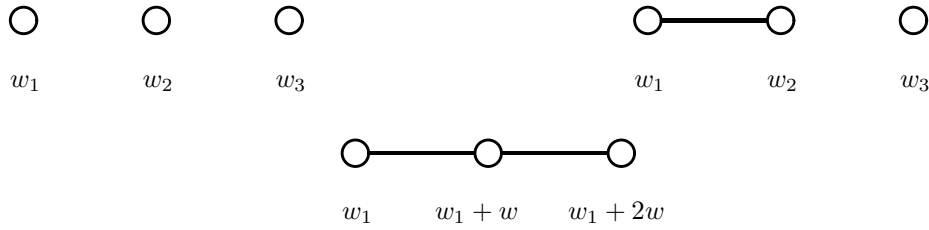
Во-вторых, легко показать, что вектора с равными значениями w_r не могут образовать связный граф. Например, рассмотрим случай, когда имеется только два неортогональных вектора (скажем \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2) такие, что соответствующие w совпадают: $w_1 = w_2$ и $\Gamma_{12} \neq 0$. Т.к. полный граф должен быть связным (матрица Грама не должна быть блочнодиагональной) должен существовать вектор (скажем \mathbf{a}_3) такой, что либо $\Gamma_{13} \neq 0$ либо $\Gamma_{23} \neq 0$ и $w_3 \neq w_1 = w_2$. Тогда можно решить уравнения (6.1.23) с упомянутыми условиями. Легко показать, что в этом случае имеется всего одно решение и соответствующий блок 3×3 матрицы Грама образуется векторами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ и \mathbf{a}_3 пропорционален

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Т.к. это аргумент применим для любого вектора \mathbf{a}_r связанного с парой $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ так, что $w_r \neq w_1 = w_2$, немедленно следует, что $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2$. Аналогичная логика работает, для всех графов с совпадающими w . Если все w совпадают, то все уравнения (6.1.23) удовлетворены, но решение является тривиальным и отвечает чистой калибровке $W_3(z) \sim \partial T(z)$. Следовательно, мы заключаем, что все w_r должны попарно различаться.

Теперь, рассмотрим все уравнения (6.1.23) для трехточек. Их имеется восемь: 2 для каждой пары и 2 два для тройки. Легко проверить, что с точностью до перестановок, существуют три различных

решения с попарно различными w :



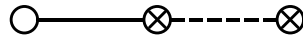
где w произвольный параметр. Видим, что для любой тройки связанных векторов имеется соотношение между w 's. А именно, параметр ω_r однородно растет: $\omega_2 = \omega_1 + \omega$, $\omega_3 = \omega_1 + 2\omega$. Очевидно, что решение запрещает трехвалентные вершины и циклы. Это означает, что граф это прямая связанная линия, т.е. A_n граф. Аналогичная рассуждение работает и для фермионного случая.

7.9 Экзотические решения

В разделе 6.2 мы описали регулярные диаграммы. Отвечающие им матрицы Грама построены из двухточечных блоков 1, 3 и 5 из (6.1.25).

Общее решение также включает экзотические теории. По определению, экзотические теории определяются графами с по крайней мере одной пунктирной линией (с точностью до преобразования (6.1.24)). Для того, чтобы описать эти общие решения достаточно привести все трехточечные графы с пунктирными линиями. Легко увидеть, что, с точностью до преобразования (6.1.24) и перестановок, имеет 4 возможности

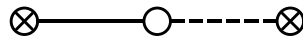
BFF:



$$\Gamma_{123} = \begin{pmatrix} 2\kappa & -\kappa & 0 \\ -\kappa & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C}_{111} = 0$$

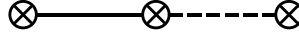
$$\mathbb{C}_{222} = \frac{2\kappa + 1}{6(\kappa + 1)}(\omega_1 - \omega_2), \quad \mathbb{C}_{333} = \frac{1 - \kappa}{6(\kappa + 1)}(\omega_1 - \omega_2), \quad \omega_3 = \omega_2 + \frac{\kappa}{\kappa + 1}(\omega_1 - \omega_2).$$

FBF:



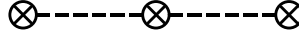
$$\Gamma_{123} = \begin{pmatrix} -1 & -\kappa & 0 \\ -\kappa & 2\kappa & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C}_{111} = -\frac{2\kappa + 1}{6(\kappa + 1)}(\omega_1 - \omega_2)$$

$$\mathbb{C}_{222} = 0, \quad \mathbb{C}_{333} = \frac{2 + \kappa}{6(\kappa + 1)}(\omega_1 - \omega_2), \quad \omega_3 = 2\omega_2 - \omega_1.$$

FFF:

$$\Gamma_{123} = \begin{pmatrix} -1 & -\varkappa & 0 \\ -\varkappa & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C}_{222} = -\mathbb{C}_{111} = \frac{2\varkappa + 1}{6(\varkappa + 1)}(\omega_2 - \omega_3),$$

$$\mathbb{C}_{333} = \frac{1 - \varkappa}{6(\varkappa + 1)}(\omega_1 - \omega_2), \quad \omega_3 = \omega_2 + \frac{\varkappa}{\varkappa + 1}(\omega_1 - \omega_2).$$

FFF':

$$\Gamma_{123} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C}_{111} = \frac{1}{6}(\omega_2 + \omega_3 - 2\omega_1), \quad \mathbb{C}_{222} = \frac{1}{6}(\omega_1 + \omega_3 - 2\omega_2),$$

$$\mathbb{C}_{333} = \frac{1}{6}(\omega_1 + \omega_2 - 2\omega_3).$$

Используя эти трехточечные блоки, вместе с правилами, определенными в разделе 6.1 можно построить общее решение.

Заключение

Текст научно-квалификационной работы отражает результаты работ автора [74–77]. Автор внес существенный вклад в эти работы.

Первая часть НКР базируется на результатах работ [74, 75]. В этих работах была изучена $N = 2$ суперконформная алгебра на мировом листе струны в НШР формулировке и её связь с пространственно-временной суперсимметрией, а также вычислены плоские координаты для модели Казама-Сузуки $\widehat{SU}(3)_4$.

Вторая часть НКР основана на работах [76, 77], где были классифицированы интегрируемые модели тодовского типа со током спина 3, а также предложено дуальное описание сигма-модели с $O(N)$ -симметрией.

Полученные результаты имеют ряд возможных применений в AdS/CFT-соответствии, а также в феноменологических моделях теории струн.

Литература

- [1] J. Polchinski. String theory, in 2 volumes. *Cambridge, UK: Univ. Pr.*, 1998.
- [2] M. B. Green, J.H. Schwarz, and E. Witten. Superstring theory, in 2 volumes. *Cambridge Monogr.Math.Phys.*, 1987.
- [3] R. Blumenhagen, D. Lust, and S. Theisen. Basic concepts of string theory. 2013.
- [4] K. Becker, M. Becker, and J.H. Schwarz. String theory and M-theory: A modern introduction. 2007.
- [5] A.A. Belavin, A. M. Polyakov, and A.B. Zamolodchikov. Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory. *Nucl.Phys.*, B241:333–380, 1984.
- [6] A. Neveu and J.H. Schwarz. Factorizable dual model of pions. *Nucl.Phys.*, B31:86–112, 1971.
- [7] P. Ramond. Dual Theory for Free Fermions. *Phys.Rev.*, D3:2415–2418, 1971.
- [8] E. P. Verlinde and H. L. Verlinde. Lectures on String Perturbation Theory. 1988.
- [9] A. Schwimmer and N. Seiberg. Comments on the $N = 2$, $N = 3$, $N = 4$ Superconformal Algebras in Two-Dimensions. *Phys.Lett.*, B184:191, 1987.
- [10] D. Gepner. Space-Time Supersymmetry in Compactified String Theory and Superconformal Models. *Nucl.Phys.*, B296:757, 1988.
- [11] D. Gepner. Lectures on $N = 2$ String Theory. 1989.
- [12] D. Friedan, E. J. Martinec, and S. H. Shenker. Conformal Invariance, Supersymmetry and String Theory. *Nucl.Phys.*, B271:93–165, 1986.
- [13] D. Friedan, E. J. Martinec, and S. H. Shenker. Covariant Quantization of Superstrings. *Phys.Lett.*, B160:55–61, 1985.
- [14] V.G. Knizhnik. Covariant Fermionic Vertex in Superstrings. *Phys.Lett.*, B160:403–407, 1985.
- [15] Robbert Dijkgraaf, Herman L. Verlinde, and Erik P. Verlinde. Topological strings in $d < 1$. *Nucl. Phys.*, B352:59–86, 1991.
- [16] B. Dubrovin. Integrable systems in topological field theory. *Nucl. Phys.*, B379:627–689, 1992.
- [17] Kyoji Saito. Period mapping associated to a primitive form. 19, 01 1983.
- [18] Alexander Belavin, Doron Gepner, and Yakov Kononov. Flat coordinates for Saito Frobenius manifolds and String theory. *Theor. Math. Phys.*, 189(3):1775–1789, 2016. [Teor. Mat. Fiz.189,no.3,429(2016)].
- [19] Alexander Belavin and Vladimir Belavin. On exact solution of topological CFT models based on Kazama-Suzuki cosets. *J. Phys.*, A49(41):41LT02, 2016.
- [20] Alexander Belavin and Vladimir Belavin. Flat structures on the deformations of Gepner chiral rings. *JHEP*, 10:128, 2016.

- [21] Morihiko Saito. On the structure of brieskorn lattice. *Annales de l'institut Fourier*, 39(1):27–72, 1989.
- [22] Morihiko Saito. On the structure of brieskorn lattices, ii. 39, 12 2013.
- [23] Doron Gepner. Fusion rings and geometry. *Commun. Math. Phys.*, 141:381–411, 1991.
- [24] Albrecht Klemm, Stefan Theisen, and Michael G. Schmidt. Correlation functions for topological Landau-Ginzburg models with $c \leq 3$. *Int. J. Mod. Phys.*, A7:6215–6244, 1992.
- [25] Changzheng Li, Si Li, and Kyoji Saito. Primitive forms via polyvector fields. 2013.
- [26] Changzheng Li, Si Li, Kyoji Saito, and Yefeng Shen. Mirror symmetry for exceptional unimodular singularities. 2014.
- [27] V. A. Fateev and Sergei L. Lukyanov. Additional symmetries and exactly soluble models in two-dimensional conformal field theory. *Sov. Sci. Rev. A. Phys.*, 15:1–117, 1990.
- [28] Alexander M. Polyakov. Quantum geometry of bosonic strings. *Phys. Lett.*, B103:207–210, 1981.
- [29] V. A. Fateev, A. B. Zamolodchikov, and Alexei B. Zamolodchikov. unpublished.
- [30] V. A. Fateev. The sigma model (dual) representation for a two-parameter family of integrable quantum field theories. *Nucl. Phys.*, B473:509–538, 1996.
- [31] B. L. Feigin and A. M. Semikhatov. The $\widehat{sl}(2) \otimes \widehat{sl}(2)/\widehat{sl}(2)$ coset theory as a Hamiltonian reduction of $\widehat{D}(2|1; \alpha)$. *Nucl. Phys.*, B610:489–530, 2001.
- [32] B. L. Feigin and A. M. Semikhatov. $W^{(2)}(n)$ algebras. *Nucl. Phys.*, B698:409–449, 2004.
- [33] V. A. Fateev. Integrable deformations of affine Toda theories and duality. *Nucl. Phys.*, B479:594–618, 1996.
- [34] Boris L. Feigin and Edward V. Frenkel. A family of representations of affine Lie algebras. *Russ. Math. Surv.*, 43:221–222, 1988.
- [35] B. L. Feigin and E. V. Frenkel. Quantization of the Drinfeld-Sokolov reduction. *Phys. Lett.*, B246:75–81, 1990.
- [36] V. A. Fateev and Sergei L. Lukyanov. The models of two-dimensional conformal quantum field theory with $Z(n)$ symmetry. *Int. J. Mod. Phys.*, A3:507, 1988.
- [37] M. Bershtein, B. Feigin, and G. Merzon. Plane partitions with a "pit": generating functions and representation theory.
- [38] M. Goulian and Miao Li. Correlation functions in Liouville theory. *Phys. Rev. Lett.*, 66:2051–2055, 1991.
- [39] V. A. Fateev and A. V. Litvinov. Multipoint correlation functions in Liouville field theory and minimal Liouville gravity. *Theor. Math. Phys.*, 154:454–472, 2008.
- [40] P. Goddard, A. Kent, and David I. Olive. Unitary representations of the Virasoro and Supervirasoro algebras. *Comm. Math. Phys.*, 103:105–119, 1986.
- [41] Vladimir V. Bazhanov, Sergei L. Lukyanov, and Alexander B. Zamolodchikov. Integrable structure of conformal field theory, quantum KdV theory and thermodynamic Bethe ansatz. *Comm. Math. Phys.*, 177:381–398, 1996.
- [42] A. V. Litvinov. On spectrum of ILW hierarchy in conformal field theory. *JHEP*, 11:155, 2013.
- [43] Edward Witten. On string theory and black holes. *Phys. Rev.*, D44:314–324, 1991.

- [44] Sidney R. Coleman. The quantum sine-gordon equation as the massive Thirring model. *Phys. Rev.*, D11:2088, 1975.
- [45] S. Mandelstam. Soliton operators for the quantized sine-gordon equation. *Phys. Rev.*, D11:3026, 1975.
- [46] Alexander M. Polyakov. Interaction of goldstone particles in two-dimensions. Applications to ferromagnets and massive Yang-Mills fields. *Phys. Lett.*, B59:79–81, 1975.
- [47] V. E. Zakharov and A. V. Mikhailov. Relativistically invariant two-dimensional models in field theory integrable by the inverse problem technique. *Sov. Phys. JETP*, 47:1017–1027, 1978.
- [48] Alexander M. Polyakov and P.B. Wiegmann. Theory of nonabelian goldstone bosons in two dimensions. *Phys.Lett.*, B131:121–126, 1983.
- [49] L. D. Faddeev, E. K. Sklyanin, and L. A. Takhtajan. The Quantum Inverse Problem Method. 1. *Theor. Math. Phys.*, 40:688–706, 1980. [Teor. Mat. Fiz.40,194(1979)].
- [50] Vladimir V. Bazhanov, Gleb A. Kotousov, and Sergei L. Lukyanov. Quantum transfer-matrices for the sausage model. 2017.
- [51] Alexander M. Polyakov. Hidden symmetry of the two-dimensional chiral fields. *Phys. Lett.*, B72:224–226, 1977.
- [52] E. Brezin and Jean Zinn-Justin. Renormalization of the nonlinear sigma model in $2 + \epsilon$ dimensions. Application to the Heisenberg ferromagnets. *Phys. Rev. Lett.*, 36:691–694, 1976.
- [53] Alexander B. Zamolodchikov and Alexei B. Zamolodchikov. Factorized S matrices in two-dimensions as the exact solutions of certain relativistic quantum field models. *Annals Phys.*, 120:253–291, 1979.
- [54] A. B. Zamolodchikov and V. A. Fateev. Model factorized S matrix and an integrable Heisenberg chain with spin 1. *Sov. J. Nucl. Phys.*, 32:298–303, 1980.
- [55] Michio Jimbo. Quantum R matrix for the generalized Toda system. *Commun. Math. Phys.*, 102:537–547, 1986.
- [56] V. V. Bazhanov. Trigonometric solution of triangle equations and classical Lie algebras. *Phys. Lett.*, B159:321–324, 1985.
- [57] Daniel Harry Friedan. Nonlinear models in $2 + \epsilon$ dimensions. *Annals Phys.*, 163:318, 1985.
- [58] V. A. Fateev, E. Onofri, and Alexei B. Zamolodchikov. The Sausage model (integrable deformations of O(3) sigma model). *Nucl. Phys.*, B406:521–565, 1993.
- [59] Sergei L. Lukyanov. The integrable harmonic map problem versus Ricci flow. *Nucl. Phys.*, B865:308–329, 2012.
- [60] Ctirad Klimcik. On integrability of the Yang-Baxter sigma-model. *J. Math. Phys.*, 50:043508, 2009.
- [61] Francois Delduc, Marc Magro, and Benoit Vicedo. On classical q-deformations of integrable sigma-models. *JHEP*, 11:192, 2013.
- [62] V. A. Fateev. Integrable Deformations of Sine-Liouville Conformal Field Theory and Duality. *SIGMA*, 13:080, 2017.
- [63] Ctirad Klimcik. Integrability of the bi-Yang-Baxter sigma-model. *Lett. Math. Phys.*, 104:1095–1106, 2014.
- [64] P. Baseilhac and V. A. Fateev. Expectation values of local fields for a two-parameter family of integrable models and related perturbed conformal field theories. *Nucl. Phys.*, B532:567–587, 1998.

- [65] Vladimir V. Bazhanov and Sergei L. Lukyanov. Integrable structure of Quantum Field Theory: Classical flat connections versus quantum stationary states. *JHEP*, 1409:147, 2014.
- [66] V. A. Fateev. Normalization factors in conformal field theory and their applications. *Mod. Phys. Lett.*, A15:259–270, 2000.
- [67] Chang-rim Ahn, P. Baseilhac, V. A. Fateev, Chan-ju Kim, and Chaiho Rim. Reflection amplitudes in nonsimply laced Toda theories and thermodynamic Bethe ansatz. *Phys. Lett.*, B481:114–124, 2000.
- [68] M. A. Bershtein, V. A. Fateev, and A. V. Litvinov. Parafermionic polynomials, Selberg integrals and three-point correlation function in parafermionic Liouville field theory. *Nucl. Phys.*, B847:413–459, 2011.
- [69] B. Hoare and A. A. Tseytlin. On integrable deformations of superstring sigma models related to $AdS_n \times S^n$ supercosets. *Nucl. Phys.*, B897:448–478, 2015.
- [70] Gleb Arutyunov, Riccardo Borsato, and Sergey Frolov. S-matrix for strings on η -deformed $AdS_5 \times S^5$. *JHEP*, 04:002, 2014.
- [71] Benjamin Basso and Adam Rej. On the integrability of two-dimensional models with $U(1) \times SU(N)$ symmetry. *Nucl. Phys.*, B866:337–377, 2013.
- [72] Francois Delduc, Marc Magro, and Benoit Vicedo. An integrable deformation of the $AdS_5 \times S^5$ superstring action. *Phys. Rev. Lett.*, 112:051601, 2014.
- [73] Sergei L. Lukyanov and Alexander B. Zamolodchikov. Integrable circular brane model and Coulomb charging at large conduction. *J. Stat. Mech.*, 0405:P05003, 2004.
- [74] A. A. Belavin and L. A. Spodyneiko. Gepner approach to space–time supersymmetry in ten-dimensional string theory. *Theor. Math. Phys.*, 185(2):1649–1664, 2015. [Teor. Mat. Fiz.185,no.2,329(2015)].
- [75] A. Belavin and L. Spodyneiko. Flat structures on Frobenius Manifolds in the case of irrelevant deformations. *J. Phys.*, A49(49):495401, 2016.
- [76] Alexey Litvinov and Lev Spodyneiko. On W algebras commuting with a set of screenings. *JHEP*, 11:138, 2016.
- [77] A. V. Litvinov and L. A. Spodyneiko. On dual description of the deformed $O(N)$ sigma model, to be published.