

Специальная Кэлерова геометрия и киральные алгебры.

Константин Алешкин

(совместно с А. Белавиным)

ИТФ Ландау, Черноголовка

2018

Суперструнные компактификации.

Один из способов понимать теорию струн (например, IIB) это $2d$ $N=(2,2)$ суперсимметричная сигма-модель в 10-мерное пространство-время. В классическом подходе к феноменологии таргет-пространством является $\mathbb{R}^{1,3} \times X$, где X - 6-шестимерное вещественное многообразие, снабжённое коварианто постоянным спинором $\rightarrow X$ трёхмерное многообразие Калаби-Яу.

Для феноменологии затем берётся предел 4d супергравитации. В теории IIB для скаляров Φ_a векторных мультиплетов соответствующая часть низкоэнергетичного действия имеет вид:

$$S = \int_{\mathbb{R}^{1,3}} d^4x \left[G_{a\bar{b}}(\Phi, \bar{\Phi}) \partial_i \Phi^a \partial^i \bar{\Phi}^{\bar{b}} + C_{abc}(\Phi) \Phi^a \Phi^b \Psi^c + \dots \right],$$

Где $G_{a\bar{b}}$, C_{abc} специальная Кэлера метрика и константы Юкавы соответственно.

Специальная Кэлерова метрика

Пусть $\delta_a g_{ij}$ обозначают Риччи-плоские деформации метрики.
Тогда в теории их теории струн легко следует, что

$$G_{a\bar{b}} = \int_{X_\phi} d^6x \sqrt{g} \delta_a g_{ij} \cdot \overline{\delta_b g^{ij}}$$

С помощью следующей цепочки соответствий

$$\delta_a g_{i\bar{j}} \rightarrow (h_a)^i_{\bar{j}} \in H^1(X_\phi, TX_\phi) \rightarrow (\chi_a)_{i\bar{j}k} \in H^{2,1}(X_\phi)$$

Можно получить красивую формулу для специальной Кэлеровой метрики

$$G_{a\bar{b}} = \frac{1}{V} \int_{X_\phi} \chi_a \wedge \overline{\chi_b}, \quad V = \int_{X_\phi} \Omega \wedge \overline{\Omega}$$

и, более того

$$G_{a\bar{b}} = \partial_a \overline{\partial_b} K(\phi, \bar{\phi}),$$
$$e^{-K} = V = \int_{X_\phi} \Omega \wedge \overline{\Omega}$$

Её можно переписать через **периоды (интегралы)** $\omega_\mu(\phi)$ голоморфной формы объёма

Гиперповерхности во взвешенном $\mathbb{P}_{\bar{k}}^4$

$\mathbb{P}_{\bar{k}}^4 = \mathbb{C}^5 // \mathbb{C}^*$ действующий с весами $\bar{k} = (k_1, \dots, k_5)$

Гиперповерхность задаётся полиномом от пяти координат

$$X_\phi := \{W(x, \phi) = 0\} \subset \mathbb{P}_{\bar{k}}^4$$

❶ (квази)однородность:

$$W(\lambda^{k_i} x_i, \phi) = \lambda^d W(x_i, \phi)$$

❷ трансверсальность:

$$\{dW_0(x) = 0\} \cap \{W_0(x) = 0\} = 0 \in \mathbb{C}^5$$

❸ сбалансированность (условие КЯ): $\sum_{i=1}^5 k_i = d$.

В таком случае голоморфная форма объёма имеет явное выражение

$$\Omega_\phi := \frac{x_5 dx^1 dx^2 dx^3}{\partial W(x, \phi) / \partial x_4}.$$

Периоды как осциллирующие интегралы

Голоморфную форму объёма можно переписать как

$$\Omega = \operatorname{Res}_{x_5=0} \operatorname{Res}_{W=0} \frac{dx_1 \cdots dx_5}{W(x, \phi)}$$

В том смысле, что

$$\int_{\gamma} \Omega = \int_{\Gamma} \frac{dx_1 \cdots dx_5}{W(x, \phi)}.$$

Ключевой факт:

Последний интеграл связан с **осциллирующими интегралами**:

$$\int_{\Gamma} \frac{dx_1 \cdots dx_5}{W(x, \phi)} = \int_{\Gamma^{\pm}} e^{\mp W(x, \phi)} d^5 x.$$

Выше

$$\gamma \in H_3(X), \quad \Gamma \in H_5(\mathbb{C}^5 \setminus W=0), \quad \Gamma^{\pm} \in H_5(\mathbb{C}^5, \operatorname{Re} W_0 \rightarrow \pm\infty).$$

Модели Ландау-Гинзбурга

$W_0(x)$ - квазиоднородная изолированная особенность в $\mathbb{C}^5$ степени d .

Важнейшим инвариантом является **кольцо Милнора (или Якоби)**:

$$R_0 := \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_5]}{\langle \partial_1 W_0(x), \dots, \partial_5 W_0(x) \rangle}$$

Вспомним, что $\mathbb{P}_{\bar{k}}^4 = \mathbb{C}^5 // \mathbb{C}^*$. Q (группа квантовой симметрии) $:= \mathbb{Z}_d \subset \mathbb{C}^*$ группа корней степени d из единицы.

1. Нужным нам объектом будет **Q -инвариантное кольцо Милнора $R_0^Q := Q$ -инвариантные элементы R_0 .**
2. Определим скрученные дифференциалы $D_{\pm} := e^{\mp W_0} \circ d \circ e^{\pm W_0}$.
3. соответствующие скрученные кохомологии де-Рама изоморфны кольцу Милнора

$$R_0 \simeq H_{D_{\pm}}^5(\mathbb{C}^5), \quad e_{\mu}(x) \rightarrow e_{\mu}(x) d^5 x$$

Модели Ландау-Гинзбурга 2

Группа когомологий $H_{D^\pm}^5(\mathbb{C}^5)$ обладает натуральным спариванием с относительными гомологиями $H_5(\mathbb{C}^5, \text{Re}W_0 \rightarrow \mp\infty)$, данное осцилляторными интегралами:

$$\langle e_\mu(x) d^5x, \Gamma_\nu^\mp \rangle = \int_{\Gamma_\nu^\mp} e^{\pm W_0(x)} d^5x$$

а также билинейное **спаривание вычета**:

$$\eta_{\mu\nu} = \text{Res} \frac{e_\mu(x) \cdot e_\nu(x) d^5x}{\partial_1 W_0 \cdots \partial_5 W_0},$$

которое, в свою очередь, выражается* через осциллирующие интегралы:

$$\eta_{\mu\nu} = \sum_a \int_{\Gamma_+^a} e_\mu(x) e^{-W_0(x)} d^5x \int_{\Gamma_a^-} e_\nu(x) e^{-W_0(x)} d^5x$$

Все структуры введённые выше имеют Q -инвариантные аналоги.

$(X_\phi, W\mathbb{P}^4)$	$(W(x, \phi), \mathbb{C}^5)$
$H^3(X_\phi) = F^3 H^3 \supset \dots \supset F^0 H^3 = \langle \Omega \rangle$	$R_0^Q = R^{\leq 3d} \supset \dots \supset R^{\leq 0} = \langle 1 \rangle$
Комплексное сопряжение на $H^3(X_\phi) : \overline{\chi_\mu} \rightarrow M_\mu^\nu \chi_\nu$	Вещественная структура Ландау-Гинзбурга R
Периоды: $\int_\gamma \Omega$	Комплексные осциллирующие интегралы: $\int_{\Gamma_+} e^{-W(x, \phi)} d^5 x$
Спаривание Пуанкаре $H^3(X_\phi) : \int_X \chi_\mu \wedge \chi_\nu$	Спаривание вычета $\eta_{\mu\nu}$
Потенциал метрики Вейля-Петерссона: $e^{-K} = \int_{X_\phi} \Omega \wedge \overline{\Omega}$	Кэлеров потенциал tt^* метрики: $\sum_a \int_{\Gamma_+^a} e^{-W(x, \phi)} d^5 x \overline{\int_{\Gamma_-^a} e^{W(x, \phi)} d^5 x}$

ЛГ формула для Кэлера потенциала

После несложных преобразований мы можем записать Кэлера потенциал метрики в следующем виде

$$e^{-K} = \langle 1, \Gamma^a \rangle M_a^b \overline{\langle \Gamma_b, 1 \rangle},$$

где $\langle 1, \Gamma^a \rangle$ спаривание осцилляторными интегралами и M_a^b матрица вещественной структуры на циклах в базисе Γ_a :

$$\overline{\Gamma_a} = \bar{M}_a^b \Gamma_b.$$

Это выражение упрощается в базисе Γ_a дуальному к базису $e_\mu(x) d^5x$, $\langle e_\mu(x), \Gamma_a \rangle = \delta_{\mu a}$:

$$e^{-K} = \langle 1, \Gamma_a \rangle \eta^{ab} M_b^d \overline{\langle \Gamma_d, 1 \rangle},$$

где $\eta^{ab} = \eta_{ab}$ метрика вычета, введенная выше.

Ингредиенты в формуле:

- 1 Осциллирующие интегралы $\langle 1, \Gamma^a \rangle = \int_{\Gamma_a^+} e^{-W} d^5x$.
- 2 Спаривание вычета $\eta_{\mu\nu}$.
- 3 Матрица вещественной структуры M_a^b .

Во многих случаях мы можем вычислить все три ингредиента сводя вычисления к простой комбинаторике и одномерным гамма-интегралам.

Кэлеров потенциал для 101-мерного пространства модулей Квинтики

Для трёхмерной квинтики суперпотенциал задаётся формулой

$$W(x, \phi) = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + \sum_s \phi^s e_s(x),$$

где $e_s(x) = e_{(s_1, \dots, s_5)}(x) = x_1^{s_1} \cdots x_5^{s_5}$ так, что $s_i \leq 5$, $\sum s_i = 5$. Всего есть 101 такая деформация. Критическим факт - наличие $\mathbb{Z}_5^5$ группы симметрии, так называемой **группы фазовой симметрии**.

Периоды вычисляются через одномерные интегралы

$$\int_{\Gamma} e^{W(x, \phi)} d^5 x = \sum_{\vec{m}} \prod_s \frac{\phi_s^{m_s}}{m_s!} \prod_i \int_{(\Gamma)_i} x^{\sum_s m_s s_i} e^{-x^5} dx$$

А вещественная структура через уравнение

$$\text{Im} \int_{\Gamma} [e_{\mu}(x) + M_{\mu}^{\nu} e_{\nu}(x)] e^{-\sum_i x_i^5} d^5 x = 0$$

Кэлоров потенциал для 101-мерного пострганства модулей Квинтики

Подставляя все явные выражения в формулу

$$e^{-K(\phi, \bar{\phi})} = \langle 1, \Gamma_\mu \rangle \eta_{\mu\lambda} M_{\lambda\nu} \overline{\langle \Gamma_\nu, 1 \rangle}$$

Мы получаем явное выражение для Кэлорова потенциала на
полном протранстве модулей комплексных структур

$$e^{-K(\phi)} = \sum_{\mu=0}^{203} (-1)^{\deg(\mu)/5} \prod \gamma\left(\frac{\mu_i + 1}{5}\right) |\sigma_\mu(\phi)|^2,$$

$$\sigma_\mu(\phi) = \sum_{n_1, \dots, n_5 \geq 0} \prod_{i=1}^5 \frac{\Gamma(\frac{\mu_i + 1}{5} + n_i)}{\Gamma(\frac{\mu_i + 1}{5})} \sum_{m \in \Sigma_n} \prod_s \frac{\phi_s^{m_s}}{m_s!},$$

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5), \quad 0 \leq \mu_i \leq 3, \quad \sum_{i=1}^5 \mu_i = 0, 5, 10, 15.$$

$$\gamma(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)}, \quad \Sigma_n = \{m_s \mid \sum_s m_s s_i = 5n_i + \mu_i\}$$

Обобщения: что-то сделано, что-то в процессе, а что-то ещё только в планах

- 1 Полиномы с достаточно большой группой фазовой симметрии в $\mathbb{P}_k^4 = \mathbb{C}^5 // \mathbb{C}^*$
- 2 Гиперповерхности с достаточной группой фазовой симметрии в торических многообразиях $\mathbb{P}_\Delta = \mathbb{C}^N // (\mathbb{C}^*)^M$
- 3 Другие точки в пространствах модулей (например точка Большой Комплексной Структуры, конифолд, более общие точки) и матрица связности