Специальная Кэлерова геометрия и киральные алгебры.

К. Р. Алешкин

Аннотация

Совместно с Александром Белавиным нами был недавно разработан метод для вычисления специальной Кэлеровой геометрии для большого класса многообразий Калаби-Яу. Наш метод использует определённую версию соответствия Ландау-Гинзбург/Калаби-Яу. Мы получаем ответ в качестве ряда вокруг достаточно симметричных точек в пространстве модулей, а также для произвольного числа модулей, что отличает это от всех предыдущих вычислений.

1 Специальная геометрия.

Теорию суперструн можно рассматривать, как двумерную суперсимметричную сигма-модель, а именно теорию отображений двумерных римановых поверхностей в 10-мерное таргет-пространство. Ограничение 10ти измерений возникает из требования отсутствия в теории конформной аномалии. Для того, чтобы получить из неё интересную с феноменологической точки зрения теорию, надо компактифицировать 10-мерное таргет-пространство на 6-мерное многообразия. Чтобы в теории осталась суперсимметрия (тогда теорию можно контролировать), последнее должно допускать ковариантно постоянный спинор, то есть иметь голономию SU(3), или быть пространством Калаби-Яу.

В этом случае Лагранжиан четырёхмерной теории определяется геометрией этого пространства. Более того, несмотря на то, что метрика Калаби-Яу не известна явно ни в одном нетривиальном случае, всё равно имеется много интересных величин, которые можно определить. В этом докладе я расскажу, как определить двухточечные функции скаляров вектор-мультиплетов низкоэнергетичной 4-хмерной теории.

Из теории струн показывается, что эта метрика является метрикой Вейля-Петерссона на пространстве модулей комплексных структур данного многообраия Калаби-Яу. Более того, она совпадает с естественной метрикой на пространстве метрик (метрикой де-Вита) и связана с метрикой Замолодчикова. Эта метрика является Кэлеровой, как показывается с помощью леммы Кодаиры. Соответствующий Кэлеров потенциал K равняется голоморфному объёму многообразия Калаби-Яу. Голоморфный объём - это интеграл произведения голоморфной формы объёма на её комплексно сопряжённую. Разлагая последнюю по базису когомологий, можно получить выражение для K через периоды (интегралы) голоморфной формы.

У нас получилось вычислить последнее выражение в следующем подходе. Для простоты рассмотрим гиперповерхности во взвешенных проективных пространствах. Последние - есть фактор $\mathbb{C}^5//\mathbb{C}^*$. Тогда гиперповерхность должна задаваться уравнением $W = 0$ в $\mathbb{C}^5$. Полином W должен удовлетворть трём свойствам:

1) квазиодноодность
2) трансверсальность
3) сбалансированность

Для таких гиперповерхностей есть простая явная формула для голоморфной формы объёма. Также она может быть записана через двойной вычет 5-мерной формы, которая выглядит ещё проще и симметричнее.

Главным фактом, который позволяет построить Ландау-Гинзбург/Калаби-Яу соответствие является связь периодов этой пятимерной формы (а значит и голоморфной формы объёма) с комплексными осцилляторными интегралами, связанными с теорией особенностей. Эту формулу можно доказать как с помощью дифференциальных уравнений, так и геометрическими методами. При этом циклы интегрирования являются линейными комбинациями циклов Лефшеца.

1.1 Модели Ландау-Гинзбурга

Модели Ландау-Гинзбурга (а точнее N=(2,2) суперсимметричные модели Ландау-Гинзбурга) допускают простое математическое описание. Их киральное кольцо тесно связано с теорией особенности, задаваемой суперпотенциалом теории.

А именно, суперпотенциал задаёт изолированную квазиоднородную особенность в $\mathbb{C}^5$. Важнейшим инвариантом особенностей является кольцо Милнора, которое является кольцом деформаций особенности, которые не сводятся к координатным преобразованиям.

Более точно, нам необходимо инвариантное подкольцо этого кольца (киральная алгебра) относительно группы "квантовой симметрии которая являтся подгруппой корней из единицы в группе $\mathbb{C}^*$ из определения проективного пространства.

Кольцо Милнора естественно изоморфно некоторому количеству групп гомологий и когомологий. В частности можно определить скрученные суперпотенциалом в какой-то точке дифференциалы де-Рама.

Тогда соответствуюшие группы когомологий де Рама будут нетривиальны только в максимальной степени, и там естественно изоморфны кольцу Милнора.

Последние группы когомологий обладают естественным спариванием с группой относительных гомологий (циклов Лефшеца), которое даётся осцилляторными интегралами.

Помимо этого спаривания на кольце также есть естественное спаривание вычетов, которое само выражается через осцилляторные интегралы. Эти две формулы позволяют определить спаривание циклов Лефшеца, если мы знаем соответствующие интегралы. Также все эти структуры имеют инвариантные аналоги.

Соответствие Ландау-Гинзбург/Калаби-Яу Из равенства осцилляторных интегалов периодам голоморфной формы следует соответствие ЛГ/КЯ.

Во-первых группа третьих когомологий Калаби-Яу (или её подгруппа в общем случае) изоморфна инвариантному кольцу Милнора. Во-вторых все структуры на одной стороне переходят в соответствующие структуры на другой стороне при этом изоморфизме. Например: фильтрация Ходжа переходит в фильтрацию степени, комплексное сопряжение в естественную вещественную структуру на кольце Милнора, спаривание Пуанкаре в спаривание вычета (почти), а голоморфный объём в определённое ограничение потенциала tt^* метрики.

Это соответствие и позволяет вычислить голоморфный объём через осцилляторные интегралы. В случаях, когда есть достаточно симметрии, осцилляторные интегралы выражаются через произведения одномерных интегралов, которые выражаются через гамма-функции. Именно это происходит в случае трёхмерной квинтики, позволяя написать явную формулу для 101-мерного пространства параметров.

В качестве обобщений мы планируем расширить область применения формул на больший класс пространств, а также рассмотреть другие точки пространства модулей и связать периоды и метрику в различных точках, чтобы получить более глобальное описание геометрии.