

А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р

С И Б И Р С К О Е О Т Д Е Л Е Н И Е

С О В Е Т Ф И З И Ч Е С К О Й С Е К Ц И И О Б Ъ Е Д И Н Е Н Н О Г О У Ч Е Н О Г О С О В Е Т А
П О Ф И З И К О - М А Т Е М А Т И Ч Е С К И М Н А У К А М

На правах рукописи

В. Е. Захаров

Н Е К О Т О Р Ы Е В О П Р О С Ы Н Е Л И Н Е Й Н О Й Т Е О Р И И
П О В Е Р Х О С Т Н Ы Х В О Л Н

Диссертация на соискание ученой
степени кандидата физико-матема-
тических наук

Научный руководитель -

член-корреспондент АН СССР

профессор Р. З. Сагдеев

г. Новосибирск
1966 г.

О Г Л А В Л Е Н И Е

В в е д е н и е	Стр.
Г л а в а I.....	
§ 1. Канонические переменные	7
§ 2. Упрощенные уравнения	15
§ 3. Устойчивость установившихся волн конечной амплитуды	20
§ 4. Решения, близкие к периодической волне конечной амплитуды	27
Г л а в а II	
§ 1. Кинетические уравнения для капиллярных волн . .	33
§ 2. Кинетические уравнения для гравитационных волн .	39
§ 3. Бесстолкновительная кинетика волн	43
Г л а в а III	
§ 1. Размерностные оценки	46
§ 2. Точные решения кинетических уравнений	52
§ 3. Локальность слабой турбулентности	59
§ 4. Затухание капиллярных волн	64
§ 5. Затухание гравитационных волн	67

В в е д е н и е

В настоящее время бурно развивается теория волн в нелинейных средах с дисперсией. В значительной степени успехи этой теории обусловлены широким использованием аналогий с квантовой теорией многих частиц; суть этих аналогий состоит в том, что классическое волновое поле можно трактовать как квантованное бозе - поле в пределе больших чисел заполнения. При этом нелинейные эффекты можно описывать в терминах взаимодействия квантов этого поля (квазичастиц.) Разумеется следует учитывать только индуцированные процессы /1,2/.

Этот подход оказался особенно плодотворным для нелинейных волн в плазме, где на основании квантовых аналогий исследована устойчивость периодических волн конечной амплитуды /3-6/, а также получены кинетические уравнения для волн, описывающие турбулентные состояния плазмы (теория слабой турбулентности плазмы) /7-11/.

Настоящая диссертация посвящена приложению некоторых идей теории многих частиц к задаче о нелинейных волнах на поверхности бесконечно глубокой жидкости. Теория таких волн является одним из классических разделов гидродинамики, берущим начало от работ Стокса /12/, причем основное внимание обращалось на проблему существования при тех или иных условиях установившихся периодических волн конечной амплитуды. Первое строгое доказательство сущест-

зования таких волн дал А.Н. Некрасов /13/. (Обзор современного состояния проблемы дан в статье Н.Н.Моисеева /14/).

В настоящей диссертации разбираются главным образом вопросы устойчивости периодических волн конечной амплитуды, а также проблемы статистического описания волн. Наиболее существенным результатом диссертации является получение точных выражений для энергетического спектра слабой турбулентности поверхностных волн, аналогичных колмогоровскому спектру в обычной турбулентности.

Диссертация разбита на три главы.

В первой главе строится необходимый математический аппарат и рассматриваются динамические аспекты теории поверхностных волн. Всюду, наряду с полем тяжести учитываются эффекты поверхностного натяжения.

Уравнения для поверхностных волн в их обычной форме /12,15/ не являются удобными для применения квантовых аналогий. Поэтому мы преобразуем их к новым переменным

$\eta(\vec{r}, t)$ - форма поверхности и $\psi(\vec{r}, t)$ - гидродинамический потенциал на поверхности. Эти переменные оказываются каноническими, причем гамильтонианом является полная энергия жидкости. Далее легко совершить каноническое преобразование к комплексным нормальным переменным $a_k(t)$, в которых уравнения для поверхностных волн сводятся к одному уравнению вида:

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} = -i \frac{\delta H}{\delta a_k^*}$$

$$H = \int \omega_k a_k a_k^* dk + H_{int}$$

Отсюда видно, что переменные Q_k^* , Q_k - есть классические аналоги квантовых операторов рождения и уничтожения частиц /16,17/ смотри также /18/.

Эти уравнения, полученные в § 1 гл. I представляют собой основу для применения квантовомеханических аналогий. Дальнейшая задача состоит в том, чтобы пользуясь малостью нелинейности, упростить гамильтониан взаимодействия. Различные варианты его упрощения приведены в § 2.

Далее исследуются неустойчивости периодической волны конечной амплитуды. Прежде всего это распадные неустойчивости, аналогичные тем, которые известны для нелинейных волн в плазме /3,5/ - разные типы распадных неустойчивостей рассматриваются для капиллярных и гравитационных волн.

Кроме распадных рассматриваются еще неустойчивости, обусловленные коллективным взаимодействием квазичастиц. Они аналогичны неустойчивости основного состояния бозе-газа с притяжением (неустойчивость отрицательного давления)^{ж)}.

В § 4 изучаются стационарные "волны огибающих", распространяющиеся по периодической волне конечной амплитуды. Это могут быть установившиеся периодические волны конечной амплитуды. Кроме них в устойчивом случае существуют уединенные волны разрежения, аналогичные тем, которые могут распространяться в плазме /20,21/.

В неустойчивом случае возможны решения типа уединенных пакетов, распространяющиеся без искажения своей формы.

^{ж)} Впервые неустойчивости такого типа обнаружили А.А.Веденов и Л.И.Рудаков /19/.

Эти пакеты можно представить себе как результат развития неустойчивости периодической волны конечной амплитуды.

Все эти типы волн являются квазиклассическими, т.е. их длины велики по сравнению с длиной исходной волны.

Во второй главе диссертации излагается статистическая теория поверхностных волн.

В основу статистического описания положено предположение о хаотичности фаз различных колебаний. При этом волновое поле описывается величиной $n_k = \langle |Q_k|^2 \rangle$ имеющей физический смысл плотности квазичастиц в фазовом пространстве. Чтобы получить уравнение для n_k , необходимо расцепить бесконечную цепочку для корреляционных функций. Проще всего выразить четвертые корреляции через двойные. При этом получается кинетическое уравнение со столкновительным членом, описывающим распады квазичастиц. Это уравнение пригодно для капиллярных волн. Кинетические уравнения с распадным столкновительным членом с помощью аналогичных методов были получены Кадомцевым и Петвиашвили /7/, а также несколькими другими методами Галеевым и Карпманом /8/, С.Иорданским и Куликовским /9/, В.П.Силиным /10/.

Для гравитационных волн распадный столкновительный член обращается в ноль, и мы должны обращаться к корреляциям более высокого порядка. Непосредственное расцепление шестрехных корреляций через двойные приводит к расходимостям, для устранения которых необходимо предварительно выделить коллективное взаимодействие волн, приводящее к взаимному сдвигу их частот (Учет коллективного взаимодействия сводится к замене частоты ω_k на $\omega_k + \int S_{kk} n_k dk$

После этого легко получается кинетическое уравнение со столкновительным членом, описывающим рассеяние квазичастиц. В связи с этим естественно возникает понятие "длины пробега" квазичастицы. В случаях, когда плотность квазичастиц сильно меняется на длине, много меньшей длины пробега, столкновительным членом можно пренебречь, и мы придем к теории коллективного взаимодействия волн, аналогичной бестолкновительной кинетике плазмы /22,23/. Эту ситуацию можно осуществить для узких (в K -пространстве) волновых пакетов. В рамках этой теории также можно получить неустойчивость типа отрицательного давления. Заметим, что уравнение, аналогичное кинетическому уравнению для гравитационных волн, получал К.Хассельман /24-26/. Однако, он не учитывал коллективного взаимодействия волн.

Третья глава диссертации посвящена исследованию стохастизованных волновых полей (слабой турбулентности волн) на основе выведенных во второй главе кинетических уравнений.

Здесь устанавливаются далеко идущая аналогия между слабой турбулентностью поверхностных волн и турбулентностью несжимаемой жидкости. Как известно, /27-28/, в турбулентности несжимаемой жидкости используется гипотеза А.Н. Колмогорова о том, что спектральная функция энергии в некоторой области волновых чисел определяется только количеством энергии, диссипируемой в единицу времени и имеет вид: $\epsilon_k \sim \rho^{2/3} k^{-5/3}$. Для двумерного случая аналогичное рассуждение приводит к спектру $\epsilon_k \sim \rho^{2/3} k^{-2}$. Однако, в теории поверхностных волн мы имеем другие параметры той же размерности: для гравитационных волн $\epsilon_k \sim g/k^3$ для

капиллярных волн $\varepsilon_k \sim \frac{\sigma}{k}$, и однозначно определить спектр невозможно. Однако, анализируя размерности в кинетических уравнениях, мы можем получить дополнительную информацию о размерностных соотношениях, позволяющую однозначно определить спектр. Для гравитационных волн он имеет вид $\varepsilon_k \sim \rho^{1/3} g^{1/2} k^{-5/2}$, для капиллярных волн - $\varepsilon_k \sim \rho^{1/2} \sigma^{1/4} k^{-7/4}$

Существенно, однако, что можно продвинуться дальше этих чисто размерностных оценок - удается показать, что найденные спектры обращают в ноль столкновительные члены кинетических уравнений. Кроме того для слабой турбулентности удается об основать гипотезу локальности, т.е. гипотезу о том, что интенсивно взаимодействуют масштабы только одного порядка.

Эти результаты применяются к задаче о затухании волн за счет нелинейных эффектов (перекачки энергии в более короткие волны) которые, по крайней мере для гравитационных волн играют главную роль. Удастся построить правдоподобную картину затухания, характерной чертой которой является существование области волновых чисел, в которой спектр определяется только потоком энергии в область больших волновых чисел. Как и в обычной турбулентности, поток энергии не зависит от величины и конкретного механизма диссипации энергии. Для гравитационных волн механизмом является образование "барашков", т.е. заострений на гребнях волн, которые, как показал Филлипс /29-31/ определяют спектр в области самых больших волновых чисел.

Этому вопросу уделено внимание в конце диссертации.

Основные материалы в диссертации изложены в работах /18,21,36/47-49/ и доложены на Всесоюзном симпозиуме по коллективным процессам в плазме (Новосибирск, 1966 г.).

Г л а в а I

§ I

Канонические переменные

Рассмотрим потенциальное течение идеальной жидкости бесконечной глубины в однородном поле тяжести. Выберем систему координат так, что невозмущенная поверхность жидкости совпадает с плоскостью (x, y) . Ось z направлена от поверхности. В дальнейшем все векторные обозначения относятся к двумерным векторам в плоскости (x, y) .

Пусть $\eta(\vec{r}, t)$ — форма поверхности жидкости, $\Phi(\vec{r}, z, t)$ — гидродинамический потенциал. Течение жидкости описывается уравнением Лапласа /12,15/

$$\Delta \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.1)$$

с двумя условиями на поверхности

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \sqrt{1 + (\nabla \eta)^2} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{z=\eta} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \nabla \eta \nabla \Phi \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\eta = -\frac{1}{2}(\nabla \Phi)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2 + \alpha \nabla \frac{\nabla \eta}{\sqrt{1+(\nabla \eta)^2}} \Big|_{z=\eta} \quad (1.3)$$

и условием на бесконечности

$$\Phi \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow -\infty$$

Здесь g - ускорение силы тяжести, α - коэффициент поверхностного натяжения.

Уравнения (1) - (3) сохраняют полную энергию

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2} \int d\vec{r} \int_{-\infty}^{\eta} \left[(\nabla \Phi)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] dz + \\ & + \frac{1}{2} g \int \eta^2 d\vec{r} + \alpha \int \left[\sqrt{1+(\nabla \eta)^2} - 1 \right] d\vec{r} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Первое слагаемое в этом выражении есть кинетическая энергия, второе и третье соответственно, потенциальная энергия в поле тяжести и за счет поверхностных сил.

Введем величину $\Psi(\vec{r}, t) = \Phi(\vec{r}, z, t) \Big|_{z=\eta}$

Задание величин η и Ψ в силу единственности решения краевой задачи для уравнения Лапласа полностью определяет течение жидкости. Воспользовавшись формулой

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=\eta}$$

получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial t} + g\eta - \alpha \nabla \frac{\nabla \eta}{\sqrt{1+(\nabla \eta)^2}} = & -\frac{1}{2}(\nabla \Phi)^2 + \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2 - \frac{\partial \Phi}{\partial z} (\nabla \Phi \nabla \eta) \Big|_{z=\eta} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Уравнения (1.2) и (1.5) вместе с уравнением Лапласа экви-

валентны системе (I.1) - (I.3). Докажем, что уравнения (I.2), (I.5) можно представить в виде :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \psi} \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \eta} \quad (\text{I.6})$$

Здесь $\mathcal{E}$ - энергия, символы $\frac{\delta}{\delta \eta}$, $\frac{\delta}{\delta \psi}$ обозначают вариационную производную.

Рассмотрим сначала варьирование по ψ . Очевидно, варьирование потенциальной энергии дает ноль. Преобразуем кинетическую энергию по формуле Грина

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{кин}} &= \frac{1}{2} \int d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} dz \left[(\nabla \Phi)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \int \psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS = \\ &= \frac{1}{2} \int \psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \sqrt{1 + (\nabla \eta)^2} d\vec{r} \end{aligned}$$

Здесь dS есть дифференциал поверхности.

Нормальная производная $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ связана с ψ с помощью функции Грина краевой задачи для уравнения Лапласа /32/

$$\frac{\partial \Phi(s)}{\partial n} = \int G(s, s_1) \psi(s_1) dS_1 \quad (\text{I.7})$$

Здесь s, s_1 - точки на поверхности. Функция G симметрична - $G(s, s_1) = G(s_1, s)$

Вариация кинетической энергии состоит из двух слагаемых

$$\delta \mathcal{E}_{\text{кин}} = \int \left[\delta \psi(s) \frac{\partial \Phi(s)}{\partial n} + \psi(s) \frac{\partial}{\partial n} \delta \Phi(s) \right] dS$$

Пользуясь формулой (I.7) и симметрией функции Грина убеждаемся, что оба слагаемые равны

$$\delta \mathcal{E}_{\text{кин}} = \int \delta \psi(s) \frac{\partial \Phi(s)}{\partial n} ds = \int \delta \psi(\vec{r}) \frac{\partial \Phi}{\partial n} \sqrt{1+(\nabla \eta)^2} d\vec{r}$$

Из последнего равенства получаем сразу уравнение (I.2).

Рассмотрим теперь варьирование по η . ж)

Варьирование потенциальной энергии сразу дает члены стоящие в левой части уравнения (I.5). Варьирование кинетической энергии дает

$$\delta \mathcal{E}_{\text{кин}} = \frac{1}{2} \int \left[(\nabla \Phi)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] d\vec{r} + \\ + \int d\vec{r} \int_{-\infty}^{\eta} dz \left[(\nabla \Phi, \nabla \delta \Phi) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \delta \Phi \right) \right]$$

Здесь $\delta \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \delta \eta$ вариация потен-

циала за счет изменения границы. Пользуясь тем, что Φ удовлетворяет уравнению Лапласа, применим ко второму интегралу теорему Грина

$$\int d\vec{r} \int_{-\infty}^{\eta} dz \left[(\nabla \Phi, \nabla \delta \Phi) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \delta \Phi \right) \right] = \\ = \int \frac{\partial \Phi}{\partial n} \delta \Phi ds = \int \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \nabla \eta \nabla \Phi \right) \frac{\partial \Phi}{\partial z} \bigg|_{z=\eta} \delta \eta(\vec{r}) d\vec{r}$$

ж)

Это простое доказательство принадлежит Р.М.Гарипову.

Окончательно имеем:

$$\delta \mathcal{E}_{\text{кин}} = \int \left[\frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 + \nabla \eta \nabla \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]_{z=\eta} \delta \eta(\vec{r}) d\vec{r}$$

откуда сразу получаем уравнение (I.5).

Таким образом, уравнения (I.2) и (I.5) есть уравнения Гамильтона, а Ψ и η — канонические переменные, причем Ψ есть обобщенная координата, а η — обобщенный импульс. Энергия жидкости $\mathcal{E}$ является гамильтонианом.

Для замыкания уравнений (I.2), (I.5) необходимо решить краевую задачу для уравнения Лапласа. Найдем решение этой задачи в виде ряда по степеням η . Этот ряд удобнее писать, сделав преобразование Фурье по переменным x и y

$$\eta(\vec{k}) = \frac{1}{2\pi} \int \eta(\vec{r}) e^{-i(\vec{k}\vec{r})} d\vec{r}$$

$$\Psi(\vec{k}) = \frac{1}{2\pi} \int \Psi(\vec{r}) e^{-i(\vec{k}\vec{r})} d\vec{r}$$

Не останавливаясь на подробностях, приведем сразу результат разложения (до второго порядка)

$$\Phi(k, z) = e^{ikz} \left\{ \Psi(k) + \int |k_1| \Psi(k_1) \eta(k_2) \delta(k - k_1 - k_2) dk_1 dk_2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int (|k - k_3| + |k - k_2| - |k_1|) |k_1| \Psi(k_1) \eta(k_2) \eta(k_3) \times \right. \\ \left. \times \delta(k - k_1 - k_2 - k_3) dk_1 dk_2 dk_3 \right\} \quad (\text{I.8})$$

Если произвести линеаризацию уравнений (I.2) и (I.5), а в разложении (I.8) ограничиться первым членом, мы получим теорию малых колебаний поверхности жидкости, которая описывает распространение волн с законом дисперсии

$$\omega(k) = \sqrt{gk + \alpha k^3}$$

Совершим теперь преобразование к комплексной переменной a_k по формулам

$$\eta(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \int \frac{|k|^{1/2}}{\omega_k^{1/2}} \left(a_k e^{i(\vec{k}\vec{r})} + a_k^* e^{-i(\vec{k}\vec{r})} \right) d\vec{k} \quad (I.9)$$

$$\psi(\vec{r}) = -\frac{i}{2\pi\sqrt{2}} \int \frac{\omega_k^{1/2}}{|k|^{1/2}} \left(a_k e^{i(\vec{k}\vec{r})} - a_k^* e^{-i(\vec{k}\vec{r})} \right) d\vec{k}$$

тогда

$$\eta_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|k|^{1/2}}{\omega_k^{1/2}} (a_k + a_{-k}^*) \quad (I.10)$$

$$\psi_k = -\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\omega_k^{1/2}}{|k|^{1/2}} (a_k - a_{-k}^*)$$

Преобразования (I.9) можно рассматривать как каноническое преобразование с комплексными коэффициентами к переменным a_k, a_k^* ; уравнения Гамильтона (I.6) сводятся к одному уравнению

$$\frac{\delta a_k}{\delta t} = -i \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta a_k^*}$$

С помощью формул (I.4), (I.8) и (I.10) выразим энергию в виде ряда по степеням a_k .

$$\begin{aligned} H = & \int \omega_k a_k a_k^* dk + \int V_{-k, k_1, k_2} (a_k^* a_{k_1} a_{k_2} + a_k a_{k_1}^* a_{k_2}^*) \times \\ & \times \delta_{k-k_1-k_2} dk dk_1 dk_2 + \frac{1}{3} \int V_{k, k_1, k_2} \times \\ & \times (a_k a_{k_1} a_{k_2} + a_k^* a_{k_1}^* a_{k_2}^*) \delta_{k+k_1+k_2} dk dk_1 dk_2 + \quad (I.11) \\ & + \frac{1}{2} \int W_{k, k_1, k_2, k_3} a_k^* a_{k_1}^* a_{k_2} a_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} \times \\ & \times dk dk_1 dk_2 dk_3 \end{aligned}$$

I3.

где

$$V_{KK_1K_2} = \frac{1}{8\pi\sqrt{2}} \left\{ \left[(KK_1) + |K||K_1| \right] \left(\frac{\omega_K \omega_{K_1}}{\omega_{K_2}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{|K_2|}{|K||K_1|} \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\ \left. + \left[(KK_2) + |K||K_2| \right] \left(\frac{\omega_K \omega_{K_2}}{\omega_{K_1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{|K_1|}{|K||K_2|} \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\ \left. + \left[(K_1K_2) + |K_1||K_2| \right] \left(\frac{\omega_{K_1} \omega_{K_2}}{\omega_K} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{|K|}{|K_1||K_2|} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (I.I2)$$

$$W_{KK_1K_2K_3} = \frac{1}{16 (2\pi)^2} (|K||K_1||K_2||K_3|)^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \left\{ \left(\frac{\omega_K \omega_{K_1}}{\omega_{K_2} \omega_{K_3}} \right)^{\frac{1}{2}} (2|K| + 2|K_1| - |K - K_2| - |K - K_3| - |K_1 - K_2| - |K_1 - K_3|) - \right. \\ + \left(\frac{\omega_{K_2} \omega_{K_3}}{\omega_K \omega_{K_1}} \right)^{\frac{1}{2}} (2|K_2| + 2|K_3| - |K - K_2| - |K - K_3| - |K_1 - K_2| - |K_1 - K_3|) - \\ - \left(\frac{\omega_{K_1} \omega_{K_3}}{\omega_K \omega_{K_2}} \right)^{\frac{1}{2}} (2|K_3| + 2|K_1| - |K_2 + K_3| - |K - K_3| - |K - K_1| - |K_1 + K_2|) - \\ - \left(\frac{\omega_{K_1} \omega_{K_2}}{\omega_K \omega_{K_3}} \right)^{\frac{1}{2}} (2|K_2| + 2|K_1| - |K_2 + K_3| - |K - K_2| - |K - K_1| - |K_1 + K_3|) - \\ - \left(\frac{\omega_K \omega_{K_3}}{\omega_{K_1} \omega_{K_2}} \right)^{\frac{1}{2}} (2|K_3| + 2|K| - |K_2 + K_3| - |K_1 - K_3| - |K - K_1| - |K + K_2|) - \\ \left. - \left(\frac{\omega_K \omega_{K_2}}{\omega_{K_1} \omega_{K_3}} \right)^{\frac{1}{2}} (2|K_2| + 2|K| - |K_2 + K_3| - |K_1 - K_2| - |K - K_1| - |K + K_3|) \right\} \\ - \frac{32}{32\pi^2} \frac{(|K||K_1||K_2||K_3|)^{\frac{1}{2}} (KK_1)(K_2K_3)}{(\omega_K \omega_{K_1} \omega_{K_2} \omega_{K_3})^{\frac{1}{2}}} \quad (I.I3)$$

Существуют ещё члены четвертого порядка по a , пропорциональные произведениям вида $a^* a a a$ и $a a a a$ и им сопряженным. Мы их не учитывали, так как в § 3 будет показано, что они дают малый вклад.

Заметим, что функции V и W подчиняются следующим соотношениям

$$V_{k, k_1, k_2} = V_{k, k_2, k_1} = V_{k_1, k, k_2} \quad (I.14)$$

$$V_{-k, -k_1, -k_2} = V_{k, k_1, k_2}$$

$$W_{k, k_1, k_2, k_3} = W_{k_1, k, k_2, k_3} = W_{k, k_1, k_3, k_2} = W_{k_2, k_3, k, k_1}$$

$$W_{-k, -k_1, -k_2, -k_3} = W_{k, k_1, k_2, k_3}$$

Уравнение для a_k имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_k}{\partial t} + i \omega_k a_k = -i \int \left\{ V_{-k, k_1, k_2} a_{k_1} a_{k_2} \delta_{k-k_1-k_2} + \right. \\ + 2 V_{-k_2, k, k_1} a_{k_1}^* a_{k_2} \delta_{k+k_1-k_2} + \\ + V_{k, k_1, k_2} a_{k_1}^* a_{k_2}^* \delta_{k+k_1+k_2} \Big\} dk_1 dk_2 - \\ - i \int W_{k, k_1, k_2, k_3} a_{k_1}^* a_{k_2} a_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3 \end{aligned} \quad (I.15)$$

Из уравнения (I.15) ясно, что переменные a_k есть нормальные переменные задачи о малых колебаниях.

§ 2

УПРОЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение (I.15) является приближенным, и справедливо при малой нелинейности, грубо говоря при условии $\frac{a}{\lambda} \ll 1$, где a - характерная амплитуда волн, а λ - характерная длина волны. В этом же приближении можно провести значительное упрощение уравнения (I2). Для этого представим $a(k)$ в виде:

$$a(k) = [A(k, t) + f(k, t)] \exp[-i\omega(k)t] \quad (\text{I.16})$$

Будем считать, что $A(k, t)$ меняется медленно по сравнению с f , причем $f \ll A$. Подставим $a(k)$ в виде (I.16) в уравнение (I.15), и получим уравнение для A и для f . В уравнении для f учтем только члены, квадратичные по A . Полагая A постоянным за время изменения f , проинтегрируем это уравнение по времени. Это дает:

$$\begin{aligned} f = & - \int \left\{ V(-k, k_1, k_2) \frac{\exp i t [\omega(k) - \omega(k_1) - \omega(k_2)]}{\omega(k) - \omega(k_1) - \omega(k_2)} \delta(k - k_1 - k_2) \right. \\ & \times A(k_1) A(k_2) + 2 V(-k_1, k, k_2) \frac{\exp i t [\omega(k) + \omega(k_1) - \omega(k_2)]}{\omega(k) + \omega(k_1) - \omega(k_2)} \times \\ & \times \delta(k + k_1 - k_2) A^*(k_1) A(k_2) + \\ & \left. + V(k, k_1, k_2) \frac{\exp i t [\omega(k) + \omega(k_1) + \omega(k_2)]}{\omega(k) + \omega(k_1) + \omega(k_2)} A_{k_1}^* A_{k_2}^* \delta(k + k_1 + k_2) \right\} dk_1 dk_2 \end{aligned} \quad (\text{I.17})$$

Учтем в уравнении для A те из членов, пропорциональных $A f$, которые содержат наиболее медленные

экспоненты. Очевидно, все медленные экспоненты содержатся в членах, пропорциональных $A^* A A$. Собирая все такие члены, получим:

$$\frac{\partial A(k)}{\partial t} = -i \int T(k, k_1, k_2, k_3) \exp i t [\omega(k) + \omega(k_1) - \omega(k_2) - \omega(k_3)] \times \\ \times \delta(k + k_1 - k_2 - k_3) A^*(k_1) A(k_2) A(k_3) dk_1 dk_2 dk_3 \quad (I.18)$$

$$\text{Здесь} \\ T(k, k_1, k_2, k_3) = -4 \frac{\omega(k_2 + k_3) V(-k - k_1, k, k_1) V(-k_2 - k_3, k_2, k_3)}{\omega^2(k_2 + k_3) - [\omega(k_2) + \omega(k_3)]^2}$$

$$- 4 \frac{\omega(k_1 - k_3) V(-k, k_2, k - k_2) V(-k_3, k_1, k_3 - k_1)}{\omega^2(k_1 - k_3) - [\omega(k_1) - \omega(k_3)]^2} - \quad (I.19)$$

$$- 4 \frac{\omega(k_1 - k_2) V(-k, k_3, k - k_3) V(-k_2, k_1, k_2 - k_1)}{\omega^2(k_1 - k_2) - [\omega(k_1) - \omega(k_2)]^2} + W(k, k_1, k_2, k_3)$$

Уравнение (I.18) удобно применять для изучения процессов резонансного взаимодействия между волнами типа тех, что рассмотрены в работах/33-34/. Заметим, что уравнение (I.18) по форме аналогично уравнению для бозе-газа с взаимодействием в пределе больших чисел заполнения /35/. Очевидно, что все отброшенные члены в гамильтониане (I.11) не могут дать вклада в уравнение (I.19).

Для применимости уравнения (I.18) необходимо выполнение условия $f \ll A$. Для этого во всяком случае, нужно, чтобы знаменатели в формулах (I.17) и (I.19) не обращались в нуль. Существование нулей знаменателя определяется сущест-

вованим решения у системы уравнений:

$$\begin{aligned}\omega_k &= \omega_{k_1} + \omega_{k_2} \\ \vec{k} &= \vec{k}_1 + \vec{k}_2\end{aligned}\quad (I.20)$$

Если эта система не имеет решений, то уравнение (I.19) применимо при достаточно малых $\frac{a}{\lambda}$, если она имеет решение, то необходимо положить дополнительные ограничения.

Заметим, что если $\omega(k)$ — монотонная функция, то для существования I.20) достаточным условием является выполнение неравенства

$$\omega(k_0) > \omega(k_1) + \omega(k - k_1) \quad (I.21)$$

где $\vec{k}_0, \vec{k}_1$ направлены по одной прямой. Действительно, если это равенство выполнено, то добавляя к $\vec{k}_1$ компоненты, перпендикулярные вектору $\vec{k}_0$ можно увеличить правую часть неравенства (I.21) и превратить его в равенство. Напротив, выполнение неравенства, обратного неравенству (I.21) служит достаточным условием отсутствия решений у уравнений (I.20). Для гравитационных волн, имеющих закон дисперсии $\omega_k = \sqrt{g} k$ выполняется неравенство, противоположное неравенству (I.21). Соответственно, уравнения (I.20) не могут иметь решений, и при малых $\frac{a}{\lambda}$ уравнение (I.16) применимо. Для капиллярных волн $(k \gg (\frac{g}{\lambda})^{1/2})$, имеющих закон дисперсии $\omega_k = \sqrt{a} k^3$ выполняется неравенство (I.21). Так что уравнение (I.18), вообще говоря, неприменимо. Однако, если предположить, что волновой пакет является достаточно узким, т.е. a_k отлично от нуля только при $|k - k_0| \ll k_0$, то уравнения (I.20) удовлетворить невозможно при любых $\omega(k)$. Следовательно, в

предположении узости пакета, уравнение (I.18) годится при любых законах дисперсии, в частности, и для капиллярных волн.

В предположении узости пакета можно произвести дальнейшее упрощение уравнения (I.18). Введем переменную и $\vec{x} = \vec{k} - \vec{k}_0$ и разложим $\omega(k)$ в ряд по степеням $\vec{x}$ до второго порядка

$$\omega(k) = \omega(k_0) + x_x c + \frac{1}{2} (\lambda_{11} x_x^2 + \lambda_{12} x_y^2) + \dots$$

Здесь x_x, x_y — проекции вектора $\vec{x}$ на направление, параллельное и перпендикулярное вектору k_0 .

$$c = \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k=k_0} \quad \text{— групповая скорость волн,}$$

$$\lambda_{11} = \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_{k=k_0} \quad \lambda_{12} = \frac{1}{k} \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k=k_0}$$

— собственные числа тензора $\frac{\partial^2 \omega}{\partial k_a \partial k_b}$. Далее заменим приближенно $T_{k_1 k_2 k_3}$ на $w = T_{k_0, k_0, k_0, k_0}$ и введем переменную

$$b_k = A_k \exp i \left[x_x c + \frac{1}{2} (\lambda_{11} x_x^2 + \lambda_{12} x_y^2) \right] t$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial t} + i \left(x_x c + \frac{\lambda_{11}}{2} x_x^2 + \frac{\lambda_{12}}{2} x_y^2 \right) b = \\ = -i w \int b_{k_1} b_{k_2} b_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3 \end{aligned} \quad (I.22)$$

Заметим, что λ_{12} всегда положительно, тогда как λ_{11} обращается в ноль при $k_0 = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^{1/2} - 1} \left(\frac{g}{a}\right)^{1/2}$ причем при

меньших k , λ_{11} отрицательно, а при больших — положительно.

Совершим обратное преобразование Фурье по переменным x

$$b(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int b(x_x, x_y, t) e^{-i(x x_x + y x_y)} dx_x dx_y$$

$v(x, y, t)$ имеет смысл огибающей волнового пакета.

Получим

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{i}{2} \left(\lambda_{\parallel} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \lambda_{\perp} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = -iW|v|^2 v \quad (I.23)$$

Для дальнейшего упрощения этого уравнения, введем $\tau = t - \frac{1}{c} x$ (что соответствует переходу в систему отсчета, движущуюся со скоростью, равной групповой скорости волны) и будем считать, что решение зависит только от τ и $z = x \cos \alpha + y \sin \alpha$.

Получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} - \frac{i}{2} \lambda \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -iW|\psi|^2 \psi \quad (I.24)$$

где $\lambda = \lambda_{\parallel} \cos^2 \alpha + \lambda_{\perp} \sin^2 \alpha$

Уравнение (I.24) имеет точное решение

$$A(k) = v_0 \delta(k - k_0) \exp(-it \Omega(k_0)) \quad (I.25)$$

$$\Omega(k_0) = W|v_0|^2$$

Здесь v_0 - произвольная постоянная,

$$W = T(k_0, k_0, k_0, k_0)$$

В переменных τ, ψ решение (I.25) имеет вид:

$$\begin{aligned} \eta &= a \cos(kx - \omega t) & a &= \frac{k_0^{1/2}}{\pi^{1/2} \omega_{k_0}^{1/2}} |v_0| \\ \psi &= a \sin(kx - \omega t) & \omega &= \omega(k_0) + \Omega(k_0) \end{aligned}$$

Вычисление дает:

$$\begin{aligned} \Omega(k_0) &= |v_0|^2 \left[\frac{4V(-2k_0, k_0, k_0)^2}{4\omega_{k_0}^2 - \omega_{2k_0}^2} - W(k_0, k_0, k_0, k_0) \right] = \\ &= \omega_k(k_0)^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\omega_k^2}{4\omega_k^2 - \omega_{2k}^2} + \frac{1}{4} - \frac{3dk^3}{16\omega_k} \right) \quad (I.26) \end{aligned}$$

В пределе малых k эта формула приобретает вид $\Omega(k) = \frac{1}{2} \omega_k (ka)^2$, что совпадает с формулой, полученной Стоксом в 1847 году.^[12] Таким образом, решение (I.24) аппроксимирует периодическую волну конечной амплитуды.

При $k = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{g}{a}\right)^{1/2}$ сдвиг частоты $\Omega(k)$ обращается в бесконечность; при больших k он отрицателен. В пределе $k \rightarrow \infty$ имеем

$$\Omega(k_0) = -\frac{1}{16} \omega_k (ka)^2$$

С квантовомеханической точки зрения установившиеся периодические волны конечной амплитуды можно рассматривать как совокупность большого числа квантов с одинаковыми импульсами. Сдвиг частоты — есть результат коллективного взаимодействия квантов.

§ 3.

УСТОЙЧИВОСТЬ УСТАНОВИВШИХСЯ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

Рассмотрим развитие малых возмущений на фоне установившейся периодической волны. Будем искать $Q(k)$ в виде

$$Q(k) = b_0 \delta(k-k_0) e^{-i\omega t} + \alpha_k e^{-i\omega_k t} \quad (I.27)$$

α_k будем предполагать малым в том смысле, что

$$\int |\alpha_k| dk \ll |b_0|$$

Линеаризуем уравнение (I.15) по α_k . При этом в правой части уравнения учтем только медленно-меняющиеся по времени

члены. Получим

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} = -2i v_0 e^{i\delta t} V(-k_0, k_0, k_0 - k) a_{k_0 - k}^* \quad (I.28)$$

$$\chi = \omega_k + \omega_{k-k_0} - \omega_{k_0} - \Omega_{k_0}$$

Из уравнения исключим $a_{k_0 - k}^*$, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-i\delta t} \frac{\partial a_k}{\partial t} \right) = \frac{8\pi^2 \omega_{k_0}}{k_0} a^2(V_{-k_0, k, k_0 - k})^2 e^{-i\delta t} a_k \quad (I.29)$$

Уравнение (I.29) допускает решение в виде $a_k = c e^{qt}$ где

$$q = \frac{i\delta}{2} \pm \sqrt{|v_0|^2 (V_{-k_0, k, k_0 - k})^2 - \frac{\delta^2}{4}} \quad (I.30)$$

Неустойчивость имеет место, если выражение под радикалом положительно. Для того, чтоб неустойчивость существовала при сколь угодно малых v_0 , необходимо существование решений уравнения $\chi = 0$. Если в том уравнении пренебречь малым членом $\Omega(k_0)$, то мы придем к системе уравнений (I.20). Как было установлено в § 3, эта система разрешима для капиллярных волн; таким образом, неустойчивость этого типа имеет место для капиллярных волн. Неустойчивые волновые вектора сосредоточены вблизи поверхности $\omega_k = \omega_{k_1} + \omega_{k-k_1}$

в слое, толщина которого пропорциональна амплитуде. Максимальный инкремент неустойчивости имеет порядок

$$\text{Re } q \sim \omega_k (ka)$$

С квантовомеханической точки зрения уравнения (I.27) описывают динамику индуцированного распада квантов. В связи с накоплением квантов в конечном состоянии распад

имеет характер неустойчивости. Для гравитационных волн эта неустойчивость невозможна. Однако, для них возможны более медленные неустойчивости.^[36] Воспользуемся уравнением (I.18) и подставим в него $A(k)$ в виде

$$A(k) = b_0 \delta(k - k_0) e^{-i\Omega(k)t} + \alpha_k$$

линеаризуя по α_k , получим

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial t} = \lambda_{T_{k, k_0, k_0, k}} |b_0|^2 \alpha_k + e^{-2i\Omega(k)t} \times \\ \times T_{k, 2k_0 - k, k_0, k_0} b^2 \alpha_{2k_0 - k}^*$$

Это уравнение можно привести к уравнению типа (I.28); оно имеет решения, пропорциональные e^{qt} , причем для q получаем

$$q = \frac{i\delta}{2} \pm \sqrt{|b_0|^4 T_{k, 2k_0 - k, k_0, k_0}^2 - \frac{\delta^2}{4}}$$

$$\delta = \omega_k + \omega_{2k_0 - k} - 2\omega_{k_0} + 2|b_0|^2 (T_{k, k_0, k_0, k} + (I.31) \\ + T_{2k - k_0, k_0, k_0, 2k - k_0} - T_{k_0, k_0, k_0, k_0})$$

Рассмотрим сначала случай, когда

$$|k - k_0| \frac{d\omega}{dk} \gg \omega |b|^2$$

(I.32)

В этом случае, членами, пропорциональными b^2 в формуле можно пренебречь,

(I.31). Условие существования неустойчивости при сколь

угодно малых амплитудах $\delta = 0$ эквивалентно существованию решений у системы уравнений

$$2\omega_k = \omega_{k_1} + \omega_{k_2}$$

$$2\vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$$

(I.33)

Очевидно, что для существования решений этой системы достаточно выполнение неравенства

$$\omega\left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right) > \frac{\omega(k_1) + \omega(k_2)}{2} \quad (I.34)$$

где векторы k_1 и k_2 направлены по одной прямой. Неравенство (I.34) есть требование выпуклости вверх функции $\omega(k)$. Для гравитационных волн $(k \ll (\frac{g}{\alpha})^{1/2})$ это неравенство заведомо выполняется. Наоборот, для капиллярных волн, выполняется обратное неравенство, означающее, что неустойчивость указанного типа невозможна.

Уравнения (I.33) задают поверхность в K -пространстве. Неустойчивые вектора лежат вблизи этой поверхности в слое, толщина которого пропорциональна ℓ^2 . Максимальный инкремент неустойчивости для гравитационных волн имеет порядок $\gamma \sim \omega_k (ak)^2$.

Рассмотренная выше неустойчивость есть результат индуцированного рассеяния квантов из ~~состояния~~ с одинаковыми импульсами. Существуют неустойчивости и более высокого порядка, отвечающие законам сохранения

$$n \omega_k = \sum_{\ell=1}^m \omega(k_\ell)$$

$$n \vec{k} = \sum_{\ell=1}^m \vec{k}_\ell$$

и представляющие собой развитие соответствующих многоквантовых индуцированных процессов. По порядку величины инкремент таких неустойчивостей равен $\gamma \sim \omega(ak)^{m+n-2}$

Все эти неустойчивости можно называть распадными.

Перейдем теперь к неустойчивостям, развивающимся в результате коллективного взаимодействия n квантов, составляющих волну.

Для этого воспользуемся непосредственно уравнением (I.29). Волне конечной амплитуды соответствует решение $\psi = v_0 e^{-iW/v_0^2 t}$.

Будем теперь искать решение в виде

$$\psi = e^{-iW/v_0^2 t} \left\{ v_0 + d e^{-i\omega t + i\kappa_0 z} + d e^{-i\omega t - i\kappa_0 z} \right\}$$

$$\kappa_0 \ll k_0$$

Тогда для ω получим:

$$\omega = \sqrt{W/v_0^2 \lambda \kappa_0^2 + \frac{\lambda^2}{4} \kappa_0^4} \quad (\text{I.35})$$

Из формулы (I.35) видно, что неустойчивость возможна если $W\lambda < 0$, причем неустойчивы лишь возмущения с достаточно малыми волновыми векторами

$$\kappa_0^2 < \frac{4W}{\lambda} v_0^2$$

Рассмотрим случаи различных волновых чисел для поверхностных волн.

$$\text{I. } k_0 < \left(\sqrt{\frac{4}{3}} - 1 \right)^{1/2} \left(\frac{g}{a} \right)^{1/2}$$

В этой области $W > 0$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_{II} < 0$. Область неустойчивости в плоскости κ_x , κ_y ограничена неравенствами

$$0 < |\lambda_{II}| \kappa_x^2 - \lambda_1 \kappa_y^2 < 4|v|^2 W$$

т.е. лежит между гиперболой
и её асимптотами.

$$4|B|^2 W = \lambda_{||} x^2 - \lambda_{\perp} y^2$$

2. В области

$$\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^{1/2} - 1} \left(\frac{g}{\alpha}\right)^{1/2} < k_0 < \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{g}{\alpha}\right)^{1/2}$$

где $\lambda_1 > 0$, $\lambda_{||} > 0$, $W > 0$ неустойчивость вообще невозможна.

3. В области капиллярных волн

$$k_0 > \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{g}{\alpha}\right)^{1/2}, \text{ где } \lambda_1 > 0, \lambda_{||} > 0, W < 0$$

область неустойчивости есть внутренность эллипса

$$\lambda_{||} x^2 + \lambda_{\perp} y^2 = 4|B|^2 W$$

Для интерпретации полученной неустойчивости, заметим, что уравнение (I.24) можно рассматривать как уравнение для волновой функции конденсата в слабонеидеальном бозе-газе /36,37/, роль конденсата в нашем случае играет периодическая волна конечной амплитуды. При этом константа λ есть обратная масса, W - длина рассеяния. Тогда формула (I.35) совпадает с формулой Боголюбова, описывающей возмущения в Бозе-газе. Неравенство $W\lambda < 0$ означает, что либо масса положительна, но взаимодействие есть притяжение, либо, наоборот, взаимодействие приводит к отталкиванию, но масса отрицательна. В обоих случаях бозе-газ неустойчив. Таким образом, рассмотренная выше неустойчивость аналогична слипанию частиц бозе-конденсата при их притяжении. Неустойчивость должна приводить к разбиению волны на отдельные волновые пакеты.

Полученную неустойчивость можно трактовать с другой точки зрения.

Сделаем в уравнении (I.24) замену переменных

$$\psi = \sqrt{n} e^{\lambda z} \int v dz$$

Уравнение (I.35) перейдет в систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (nv) &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} &= -w\lambda \frac{\partial n}{\partial z} + \frac{\lambda^2}{2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \sqrt{n} \end{aligned} \quad (I.36)$$

Эта система уравнений подобна уравнениям газовой динамики с адиабатической зависимостью давления от плотности

$$p = \frac{w\lambda n^2}{2}$$

и отличается от них добавочным членом, содержащим третью производную по z . Если рассматривать достаточно крупномасштабные движения, с характерным масштабом L , то при

$$\frac{1}{L} \ll \frac{2w\lambda n_0}{\lambda}$$

этим членом можно пренебречь. При положительном давлении ($w\lambda > 0$) уравнения (I.36) описывают звуковые волны со скоростью равной $\sqrt{w\lambda n_0}$. При отрицательном давлении ($w\lambda < 0$) скорость звука становится мнимой, это означает, что начальные возмущения нарастают экспоненциально по закону $e^{t\sqrt{|w\lambda|n_0}}$. Поэтому эту неустойчивость можно назвать неустойчивостью типа отрицательного давления.

§ 4.

РЕШЕНИЯ, БЛИЗКИЕ К ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ВОЛНЕ
КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

Уравнение (I.23) допускает частичное разделение переменных. Будем искать его решение в виде:

$$\phi = e^{-ist} f(\xi, \eta) \quad \xi = x - V_x t, \quad \eta = y - V_y t \quad (\text{I.37})$$

Огибающая этого решения не зависит от времени в системе отсчета, движущейся со скоростью V_x, V_y .

Уравнение для f имеет вид:

$$isf - (c - V_x) \frac{\partial f}{\partial \xi} + V_y \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{i}{2} \lambda_{\parallel} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{i}{2} \lambda_{\perp} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = iW|f|^2 f \quad (\text{I.38})$$

Будем предполагать, что $|c - V_x| \ll c, |V_y| \ll c$, т.е. что скорость системы координат, в которой огибающая неизменна, близка к групповой скорости волн. При этом предположении достаточно рассмотреть случай $V_x = c, V_y = 0$, все остальные решения можно получить изменяя K_0 .

Вводя переменную $Z = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha$ предположим, что решение зависит только от Z , получим:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial Z^2} + \frac{2S_{\perp}}{\lambda} f = \frac{2W}{\lambda} |f|^2 f \quad (\text{I.39})$$

$$\lambda = \lambda_{\parallel} \cos^2 \alpha + \lambda_{\perp} \sin^2 \alpha$$

Введем $f = \psi e^{i\varphi}$; f - можно рассматривать как двумерный вектор. Тогда уравнение (I.39) можно рассматривать как уравнение движения частицы в центрально-симметричном

поле с потенциалом

$$U(\eta) = \frac{S_1 \eta^2}{\lambda} - \frac{W}{2\lambda} \eta^4$$

z - играет роль времени.

Уравнение (I.39) имеет интегралы движения - момент импульса

$$M = \eta^2 \frac{d\varphi}{dz}$$

и энергию

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{d\eta}{dz} \right)^2 + U_{\text{эфф}}(\eta)$$

$$U_{\text{эфф}} = U(\eta) + \frac{M^2}{2\eta^2} \text{ эффективная потенциальная энергия.}$$

Заметим, что уравнение (I.39) соответствует стационарным ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) решениям системы гидродинамических уравнений (I.36). При этом момент импульса $M = \frac{\eta v}{\lambda}$

Поэтому случай $M = 0$ соответствует $v = 0$, т.е. случаю, когда отбоящая постоянна в системе отсчета, движущейся с групповой скоростью C .

Решения уравнения (I.39) даются квадратурами

$$z = \int \frac{d\eta}{\sqrt{2(E - U_{\text{эфф}})}}; \quad \varphi = M \int \frac{d\eta}{\eta^2 \sqrt{2(E - U_{\text{эфф}})}} \quad (\text{I.40})$$

Решения уравнения (I.40) существенно различны при разных знаках коэффициента $\frac{W}{\lambda}$. Рассмотрим сначала случай, когда $\frac{W}{\lambda} > 0$. Заметим, что этот случай, когда неустойчивость типа отрицательного давления развиваться не может. Положим для определенности $\lambda > 0$, $W > 0$. Заметим, что величину S_1 мы можем менять по своему усмотрению.

Очевидно, при $S_1 < 0$ финитных решений быть не может. При $S_1 > 0$ финитные решения существуют. График эффективной потенциальной энергии для этого случая изображен на рис. I.

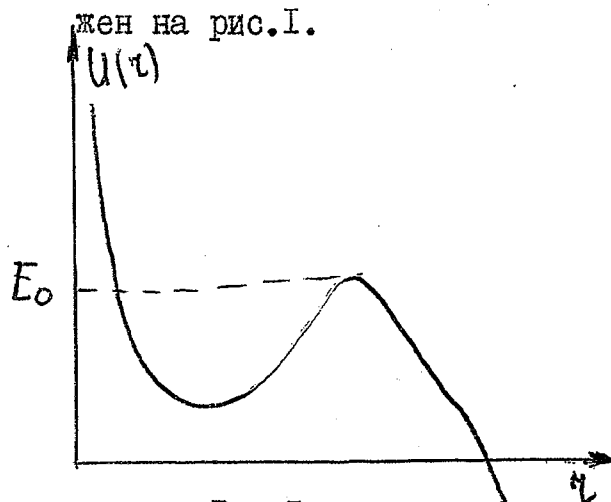


Рис. I

Финитные решения существуют только при $E \leq E_0$. При $E < E_0$ решения являются периодическими, по мере приближения E к E_0 период возрастает. При $E = E_0$ решение имеет характер уединенной волны разрежения. При $M = 0$ решения (рис. 2) имеют

разрыв производной в точке $\eta = 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда W и λ имеют разные знаки. Из результатов предыдущего параграфа следует,

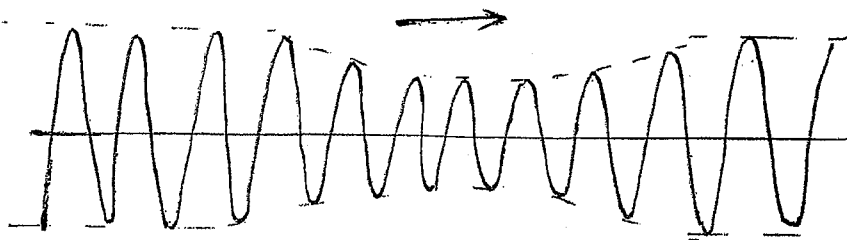
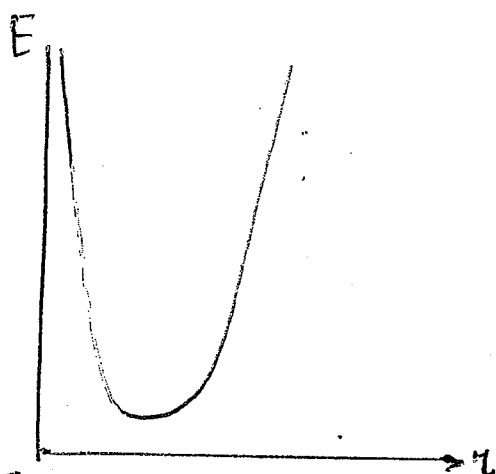


рис. 2

что в этом случае может развиваться неустойчивость типа отрицательного давления. Положим для определенности $\lambda < 0$, $W > 0$. Этот случай осуществляется для гравитационных волн.

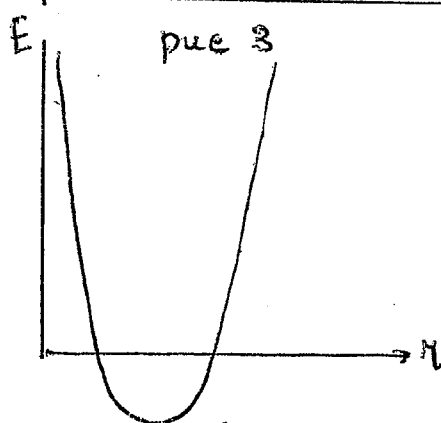
В случае $S < 0$ эффективная потенциальная энер-

гия имеет вид, изображенный на рис.3. Видно, что при любом



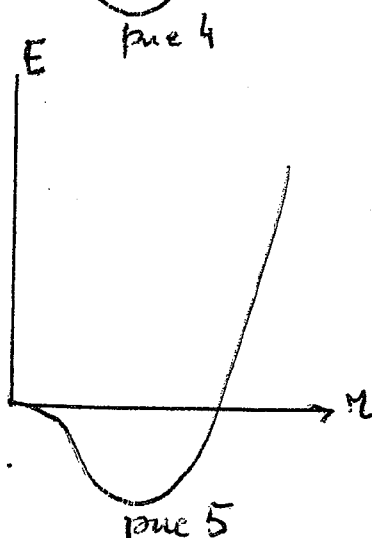
M и при любом E существуют периодические решения. Заметим, что очень большие значения

E мы не имеем права рассматривать, так как можем выйти пределы применимости предположения об узости пакета.



Для случая $S > 0$, эффективная потенциальная энергия изображена на рис.4, и качественно мало отличается от предыдущего случая. Особый интерес представляет случай

$M = 0$. (рис.5).



При $E > 0$ решение подобно рассмотренному выше случаю имеет особенность при $n = 0$. Однако, при $E < 0$ решение не имеет особенности и представляет собой периодическую структуру, распространяющуюся с постоянной скоростью без искажения фазовых соотношений в волне.

При $E = 0$ решение описывает уединенный пакет волн. В этом случае квадратуры (I.40) можно взять в явном виде.

$\varphi = 0$, а η задается формулой

$$\eta(z) = \sqrt{\frac{2s}{w}} \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{s}{\lambda}\right)^{1/2} z} \quad (\text{I.41})$$

Из формулы (I.40) получаем связь между сдвигом частоты s в пакете и максимальной амплитудой волн в пакете

$$s = \frac{w|\eta|^2}{2}$$

Сравнивая с формулой (I.25) видим, что сдвиг частоты для уединенного пакета вдвое меньше, чем для периодической волны, амплитуда которой совпадает с максимальной амплитудой волн в пакете.

Напишем явное выражение для формы поверхности, соответствующей уединенному пакету (см. рис. 6)

$$\eta(x, t) = a \frac{\cos(kx - \omega t)}{\operatorname{ch}\left\{k^3 a^2 \left[(\cosh^2)(x - ct) + (\sinh^2)y\right]\right\}} \quad (\text{I.42})$$

$$\omega = \sqrt{gk} \left(1 + \frac{1}{4}(ka)^2\right)$$

Здесь

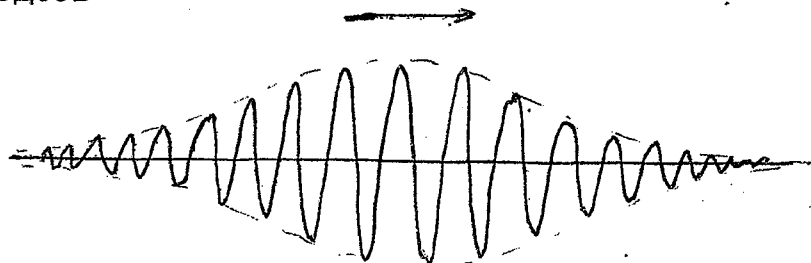


Рис. 6

Заметим, что кроме решений, сохраняющих форму огибающей в системе отсчета, движущейся с групповой скоростью,

или близкой к ней, существуют подобные решения в системе, движущейся с любой скоростью, в том числе и в неподвижной.

Рассмотрим этот последний случай. и ограничимся случаем, когда f не зависит от x .

Тогда уравнение имеет вид:

$$sf + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = w |f|^2 f$$

Это уравнение в точности совпадает с уравнением (I.39).

Поэтому в этом случае возможны все типы рассмотренных выше волн. Огибающие представляют собой неподвижные, периодические по оси y структуры. Для капиллярных волн, когда $w < 0$, может существовать решение, ограниченное по y , описываемое той же формулой, что и уединенный пакет.

$$f(y) = \sqrt{\frac{2s}{w}} \frac{1}{\operatorname{ch}\left[\left(\frac{s}{\lambda_1}\right)^{1/2} y\right]}$$

Заметим, что это явление в точности аналогично известному в нелинейной оптике явлению самофокусировки мощных световых пучков /38-40/.

Г л а в а П

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

§ I

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН

Статистические свойства волновых полей описываются в терминах корреляционных функций вида

$$\langle a_{k_1}(t_1) \dots a_{k_\ell}(t_\ell) a_{k_{\ell+1}}^*(t_{\ell+1}) \dots a_{k_n}^*(t_n) \rangle$$

Мы будем пользоваться корреляционными функциями, взятыми в один и тот же момент времени, кроме того, мы будем предполагать, что волновое поле является статистически однородным.

Введем обозначения для первых корреляционных функций

$$\begin{aligned} \langle a_k a_k^* \rangle &= n_k \delta_{k-k_1} \\ \langle a_k a_{k_1}^* a_{k_2}^* \rangle &= I_{kk_1k_2} \delta_{k-k_1-k_2} \\ \langle a_k^* a_{k_1}^* a_{k_2}^* \rangle &= y_{kk_1k_2} \delta_{k+k_1+k_2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Получим уравнение для a_k . Для этого умножим уравнения (I.15) на a_k^* , затем сложим с комплексно-сопряженным выражением и потом произведем усреднение.

Получим в результате

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_k}{\partial t} &= 2 \gamma_m \int \left\{ V_{-k, k_1, k_2} I_{k k_1 k_2}^* \delta_{k-k_1-k_2} - \right. \\ &- 2 V_{-k_2, k, k_1} I_{k_2 k k_1} \delta_{k+k_1-k_2} + \\ &\left. + V_{k, k_1, k_2} y_{k k_1 k_2} \delta_{k+k_1+k_2} \right\} dk_1 dk_2 + \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

Аналогичным способом можно получить уравнения для Γ_{k,k_1,k_2} , χ_{k,k_1,k_2} и для всех остальных корреляционных функций. При этом в правой части каждого уравнения будут стоять корреляционные функции более высокого порядка, чем в левой.

Однако бесконечная система уравнений, которая при этом получится, не только не имеет решений, но и является принципиально неопределенной до тех пор, пока не сделано каких-либо предположений о свойствах статистического ансамбля, по которому производится усреднение. Таким предположением является гипотеза о случайности фаз отдельных колебаний.

Строго говоря, полная случайность фаз может осуществляться только для системы, описываемой линейными уравнениями и означает, что ансамбль, по которому производится усреднение, представляет собой совокупность всевозможных состояний волнового поля, причем амплитуды всех волн, составляющих поле, фиксированы, а фазы независимы и имеют равномерное распределение.

В этом случае все величины, описывающие поле (например, высота поверхности в данной точке) распределены по Гауссу, так как представляют собой сумму большого числа независимых случайных величин /41/42/ /.

При учете нелинейного взаимодействия описанная картина нарушается. Во-первых, теряет смысл разбиение поля на отдельные волны, так как вследствие взаимодействия волна "живет" конечное время. Таким образом, можно говорить не о волнах, а об отдельных волновых пакетах, имеющих

[43]
 конечную ширину по частотам. В пределах такого пакета фазы сильно коррелированы. Но даже и фазы далеко отстающих (по частотам) друг от друга пакетов не являются вполне независимыми, так как резонансное взаимодействие волн создает известную корреляцию фаз.

Тем не менее мы будем считать, что все эти эффекты малы, и эта статистическая картина волнового поля подобна описанной выше картине для линейного случая. Более того, мы выдвигаем гипотезу о том, что любое начальное состояние поля должно со временем приводить к установлению статистической картины со случайными фазами. Рассмотренные выше неустойчивости являются аргументом в пользу этой гипотезы.

С математической точки зрения случайность фаз означает, что все нечетные корреляционные функции обращаются в нуль, а среди четных отличны от нуля только функции, содержащие одинаковое количество a_k и a_k^* , но и они выражаются через произведения парных корреляционных функций $\langle a_k a_{k_1}^* \rangle$. Применяя гипотезу случайных фаз к системе взаимодействующих волн, мы будем полагать равными нулю нечетные корреляционные функции, начиная с некоторой, а четные разлагать на произведение парных. Рассмотрим простейший случай. Положим, что все корреляции пятого порядка обращаются в нуль, а среди корреляций четвертого порядка единственная отличная от нуля есть

$$\langle a_k^* a_{k_1}^* a_{k_2} a_{k_3} \rangle = n_{k_1} n_{k_2} (\delta_{k_1 - k_3} \delta_{k_2 - k_1} - \delta_{k_2 - k_3} \delta_{k_1 - k_4}) \quad (2.3)$$

Будем также предполагать, что в среду внесено некоторое бесконечно малое затухание, которое описывается прибавлением к частоте малого члена $-i\gamma$

Такое затухание всегда вносится нелинейным взаимодействием.

Напишем уравнение для $I_{kk_1k_2}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{kk_1k_2}}{\partial t} + i(\omega_k - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} - 3i\gamma) I_{kk_1k_2} = \\ = -2i V_{-k, k_1, k_2} n_{k_1} n_{k_2} + 2i V_{-k_2, k, k_1} n_k n_{k_1} + \\ + 2i V_{-k, k_1, k_2} n_k n_{k_2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Будем предполагать далее, что уже установилось частичное равновесие, при котором старшие корреляционные функции меняются с тем же временем, что и младшие. Характерное время изменения (время релаксации) во всяком случае много больше, чем $\frac{1}{\omega_k}$. Поэтому членом $\frac{\partial}{\partial t}$ в уравнении (2.4) можно пренебречь. Далее, пользуясь формулой

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x + i\epsilon} = -\pi \delta(x),$$

получим:

$$\begin{aligned} I_{kk_1k_2} = 2\pi \delta(\omega_k - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}) (V_{-k, k_1, k_2} n_{k_1} n_{k_2} - \\ - V_{-k_2, k, k_1} n_k n_{k_1} - V_{-k_1, k, k_2} n_k n_{k_2}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Аналогичный вид имеет выражение для $I_{kk_1k_2}$, с той разницей, что оно пропорционально $\delta(\omega_k + \omega_{k_1} + \omega_{k_2})$

Поэтому $I_{kk_1k_2} = 0$.

Подставляя (2.5) в (2.2), получим:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = 4\pi \int \left\{ |V_{-k, k_1, k_2}|^2 \delta(k - k_1 - k_2) \delta(\omega_k - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}) \right. \\ \left. (n_{k_1} n_{k_2} - n_k n_{k_1} - n_k n_{k_2}) + 2 |V_{-k_2, k, k_1}|^2 \times \right. \\ \times \delta(k + k_1 - k_2) \delta(\omega_k + \omega_{k_1} - \omega_{k_2}) \times \\ \left. \times (n_{k_1} n_{k_2} + n_k n_{k_2} - n_k n_{k_1}) \right\} dk_1 dk_2 \quad (2.6)$$

Мы получили кинетическое уравнение со столкновительным членом, описывающим распады волн. Это уравнение можно рассматривать как предел (при $\hbar \rightarrow \infty$) квантового кинетического уравнения /44/. для возбуждений в твердом поле. Аналогичные уравнения были получены в теории плазмы /7-II/.

Заметим, что кинетическое уравнение (2.6) применимо только для описания капиллярных волн, так как гравитационные волны обладают нераспадным законом дисперсии.

Уравнение (2.6) сохраняет энергию волн $\mathcal{E} = \int \omega_k n_k dk$ и импульс системы волн $\vec{\mathcal{S}} = \int \vec{k} n_k dk$. Формально столкновительный член уравнения (2.6) обращается в ноль распределением Рэлея - Джинкса $n_k = \frac{T}{\omega_k}$.

Пусть полное число волн $N = \int n dk$. Тогда характерное обратное время релаксации, оцененное из уравнения (2.6) есть

$$\frac{1}{\tau} \sim \frac{|V|^2}{\omega_k} N \quad (2.7)$$

Сравним его с инкрементом развития распадной неустойчивости (1.30) $\text{Re } \gamma \sim |V| \sqrt{N}$.

Можно считать, что время развития рас-

падной неустойчивости по порядку величины равно времени хаотизации фаз колебаний. Оно должно быть много меньше времени релаксации. Для применимости кинетического уравнения должны выполняться неравенства

$$\frac{1}{\tau} \ll \text{Re } q \ll \omega \quad (2.8)$$

Из формулы (2,7) видно, что $\frac{1}{\tau} \sim \frac{(\text{Re } q)^2}{\omega}$, так что неравенство (2.8) выполняется.

Возможен, однако, случай когда время релаксации существенно меньше. Рассмотрим взаимодействие трех узких спектров ширины δk ; полное число частиц в каждом спектре порядка N . Пусть, далее, средние волновые числа спектров $\vec{k}_0, \vec{k}_1, \vec{k}_2$ удовлетворяют условиям

$$\vec{k}_0 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$$

$$\omega(k_0) = \omega(k_1) + \omega(k_2)$$

Характерные плотности частиц имеют порядок $\frac{N}{(\delta k)^2}$. Левая часть уравнения (2.6) имеет порядок $\frac{N}{(\delta k)^2} \frac{1}{\tau}$. Чтобы оценить порядок правой части заметим, что вследствие δ -функции от частот, интегрирование в столкновительном члене происходит по дуге кривой, определяемой законами сохранения; длина этой дуги $\sim \delta k$. В результате имеем для правой части оценку $\frac{N^2}{(\delta k)^4} \frac{V^2}{\omega} k \cdot \delta k$, откуда $\frac{1}{\tau} \sim \frac{k}{\delta k} \frac{|V| N}{\omega}$. Отсюда видно, что при взаимодействии узких волновых пакетов время релаксации уменьшается. Неравенство (2.8) дает нам минимальную ширину пакетов, взаимодействие которых ещё

можно описывать с помощью кинетических уравнений

$$\frac{\delta k}{k} \sim \frac{\gamma}{\omega} \sim \frac{V\sqrt{N}}{\omega}$$

§ 2.

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Для гравитационных волн распадный столкновительный член обращается в ноль, поэтому необходимо обращаться к корреляциям более высокого порядка, чем четвертая. Мы ограничимся рассмотрением корреляций шестого порядка. В целях сокращения выкладок будем пользоваться приближенными динамическим уравнением (I.15). Введем обозначение:

$$\langle a_k^* a_{k_1}^* a_{k_2} a_{k_3} \rangle = \delta(n + k_1 - k_2 - k_3) I_{k k_1 k_2 k_3}$$

Выразим теперь n_k через $I_{k k_1 k_2 k_3}$; для этого умножим уравнение (I.18) на a_k^* и сложим с комплексно-сопряженным выражением. Получим

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = 2 \gamma_m \int I_{k, k_1, k_2, k_3} I_{k, k_1, k_2, k_3} \delta(n + k_1 - k_2 - k_3) \times \quad (2.9) \\ \times dk_1 dk_2 dk_3$$

Аналогичным образом выразим I_{k, k_1, k_2, k_3} через шестерную корреляционную функцию. Для замыкания системы уравнений произведем расщепление шестерной корреляционной функции на

двойные и четверные

$$\begin{aligned} \langle a_k^* a_{k_1}^* a_{k_2}^* a_{k_3} a_{k_4} a_{k_5} \rangle &= \langle a_k^* a_{k_3} \rangle \langle a_{k_1}^* a_{k_2}^* a_{k_4} a_{k_5} \rangle + \\ &+ \langle a_k^* a_{k_4} \rangle \langle a_{k_1}^* a_{k_2}^* a_{k_3} a_{k_5} \rangle + \\ &+ \langle a_k^* a_{k_5} \rangle \langle a_{k_1}^* a_{k_2}^* a_{k_3} a_{k_4} \rangle \end{aligned} \quad (2.10)$$

Используя это, напомним уравнение для $I_{k k_1 k_2 k_3}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{k k_1 k_2 k_3}}{\partial t} - i (\omega_k + \omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3} + 4i\gamma) I_{k k_1 k_2 k_3} = \\ = 2i I_{k k_1 k_2 k_3} \left\{ \int S_{k k'} n_{k'} dk' + \int S_{k_1 k'} n_{k'} dk' - \right. \\ \left. - \int S_{k_2 k'} n_{k'} dk' - \int S_{k_3 k'} n_{k'} dk' \right\} + i n_k \int T_{k k_1 k_5 k_6} \times \\ \times I_{k_2 k_3 k_5 k_6} \delta(k + k_2 - k_5 - k_6) dk_5 dk_6 + i n_k \int T_{k_1 k_2 k_5 k_6} \times \\ \times I_{k_2 k_3 k_5 k_6} \delta(k + k_3 - k_5 - k_6) dk_5 dk_6 - i n_{k_3} \int T_{k_2 k_3 k_5 k_6} \times \\ \times I_{k k_1 k_5 k_6} \delta(k + k_1 - k_5 - k_6) dk_5 dk_6 - i n_{k_2} \int T_{k_2 k_3 k_5 k_6} \times \\ \times I_{k k_1 k_5 k_6} \delta(k + k_1 - k_5 - k_6) dk_5 dk_6 \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$S_{k k_1} = 2 T_{k k_1 k k_1}$$

В правой части уравнения (2.11) есть члены двух сортов. Члены, не содержащие интегралов от $I_{k k_1 k_2 k_3}$ приводят фактически только к изменению частоты, которое можно учесть, введя

$$\Omega_k = \omega_k + \int S_{k k_1} n_{k_1} dk_1 \quad (2.12)$$

Изменение частоты есть результат коллективного взаимодействия волн.

Заметим, что расщепление четверных корреляций через двойные в этих членах привело бы к расходимости.

Члены, в которых $I_{k k_1 k_2 k_3}$ стоят под интегралом описывают индивидуальное взаимодействие волн. Производя в этих членах расщепление четверных корреляций на двойные по форму-

времени, мы получим:

$$y_m I_{k k_1 k_2 k_3} = \pi \delta(\Omega_k + \Omega_{k_1} - \Omega_{k_2} - \Omega_{k_3}) \times (2.13) \\ \times T_{k k_1 k_2 k_3} (n_{k_1} n_{k_2} n_{k_3} + n_k n_{k_2} n_{k_3} - n_k n_{k_1} n_{k_2} - n_k n_{k_1} n_{k_3})$$

Подставляя (2.13) в (2.11) получим окончательное уравнение:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = 2\pi \int |T_{k k_1 k_2 k_3}|^2 (n_{k_1} n_{k_2} n_{k_3} + n_k n_{k_2} n_{k_3} - \\ - n_k n_{k_1} n_{k_2} - n_k n_{k_1} n_{k_3}) \delta(k + k_1 - k_2 - k_3) \times (2.14) \\ \delta(\Omega_k + \Omega_{k_1} - \Omega_{k_2} - \Omega_{k_3}) dk_1 dk_2 dk_3 = st(n, n, n)$$

которое вместе с уравнением (2.12) составляет полную систему.

Учтем еще зависимость n от пространственных координат.

Для этого нужно производную по времени $\frac{\partial n}{\partial t}$ заменить на полную производную $\frac{dn}{dt} = \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial k} \frac{\partial n}{\partial \Omega} + \frac{\partial \Omega}{\partial \Omega} \frac{\partial n}{\partial k}$

Заметим далее, что для применимости этого уравнения сдвиг частоты $\Omega - \omega \ll \omega$ должен быть мал по сравнению с ω_k .

Это приводит к требованию

$$\int S_{k k_1} n_{k_1} dk_1 \ll \omega_k (2.15)$$

В связи с этим пренебрежем сдвигом частоты в столкновительном члене и в групповой скорости, но сохраним этот сдвиг в члене, пропорциональном $\frac{\partial \Omega}{\partial \Omega}$. Получим окончательно:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial n}{\partial \Omega} + \frac{\partial \Omega}{\partial \Omega} \frac{\partial n}{\partial k} = st(n, n, n) (2.16)$$

Система уравнений (2.12) (2.16) вполне аналогична кинетическому уравнению с учетом самосогласованного поля в плазме [2.2]. Столкновительный член в кинетическом

уравнении описывает рассеяние волн друг на друга. Интегралами движения являются полное число частиц $N = \int n dk$, импульс $S = \int \vec{k} n dk$, энергия $\mathcal{E} = \int \omega_k n_k dk$. Характерное время релаксации имеет порядок $\frac{1}{\epsilon} \sim \frac{|W|^2 N^2}{\omega_k}$. Учитывая, что $W \sim \frac{V^2}{\omega_k}$ (см (1.19)), приходим к выводу, что время релаксации за счет рассеяния связано с временем релаксации за счет распадов соотношением

$$\tau_{\text{расс}} \sim (\tau_{\text{расп}})^2 \cdot \omega$$

Характерное время размешивания фаз имеет порядок обратного инкремента неустойчивости двухквантовых распадов (1.19).

Обозначим этот инкремент ν ($\nu \sim \omega N$)

Тогда критерий применимости кинетического уравнения (2.16) можно записать в виде

$$\frac{1}{\tau_{\text{расс}}} \ll \nu \ll \omega \quad (2.17)$$

Для широких пакетов $\frac{1}{\tau_{\text{расс}}} \sim \frac{\nu^2}{\omega}$ и это требование выполняется автоматически. Для узких пакетов неравенство

(2.17) накладывает дополнительное условие на ширину пакета

$\frac{\delta k}{k} \gg \frac{\omega N}{\omega_k}$. Таким образом, требование на ширину пакета здесь менее жесткое, чем в распадном случае.

Заметим, что уравнением (2.16) можно пользоваться не только для гравитационных волн, но и для капиллярных, если n_k выбрано так, что условия распада не могут быть выполнены. Например, это уравнение пригодно для описания

узких ($\Delta k \ll k$) пакетов капиллярных волн.

§ 3.

БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНАЯ КИНЕТИКА ВОЛН

Наряду с временем релаксации естественно возникает "длина пробега волн" $L \sim \frac{\omega}{k} \tau$

С другой стороны можно ввести "длину корреляции фазы"

$$l \sim \frac{\omega}{k} \frac{1}{\nu}$$

Будем рассматривать задачу с пространственными неоднородностями удовлетворяющим условию

$$\frac{1}{L} \ll \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial x} \ll \frac{1}{l}$$

Тогда в кинетическом уравнении можно пренебречь столкновительным членом, и мы приходим к бесстолкновительной кинетике волн, в которой учитываются только коллективные взаимодействия волн. Соответствующие уравнения особенно просты в случае узкого пакета $\Delta k \ll k$. Рассмотрим этот случай.

Перейдем в систему отсчета, движущуюся с групповой скоростью $\mathbf{c} = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}}$ и введем $\vec{x} = \vec{r} - \vec{r}_0$. Разложим $\frac{d\omega}{d\mathbf{k}}$ по степеням x и заменим $T_{kk, kk}$ на w . Получим:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \left(\lambda_{11} x_x \frac{\partial n}{\partial x} + \lambda_1 x_y \frac{\partial n}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.20)$$

$$\varphi = w \int n d\mathbf{x} \quad \lambda_{11} = \frac{d^2 \omega}{d k^2}; \quad \lambda_1 = \frac{1}{k} \frac{d\omega}{d k}$$

Система уравнений (2.20) вполне аналогична системе уравнений Власова и Пуассона для плазмы (22).

Рассмотрим одномерный случай, когда n зависит только от $z = x \cos \alpha + y \sin \alpha$ и
 $x = -x \sin \alpha + y \cos \alpha$; $\lambda = \lambda_{\parallel} \cos^2 \alpha + \lambda_{\perp} \sin^2 \alpha$
 Уравнение для n приобретает вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \lambda x \frac{\partial n}{\partial z} + \frac{\partial n}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (2.21)$$

$$\varphi = w \int n dx$$

Рассмотрим малые возмущения на фоне однородного волнового пакета с функцией распределения $n_0(x)$. Будем искать решение в виде $n_x = n_0(x) + n_1(x) e^{-ist + ipz}$ и линеаризуем по n_1 . В результате мы получим дисперсионное уравнение

$$1 + w \int \frac{p}{s - \lambda p x} \frac{\partial n_0}{\partial x} dx = 0 \quad (2.22)$$

При интегрировании по x полюс следует обходить снизу. Пусть ширина пакета $n_0(x)$ есть δk . Рассмотрим сначала случай узкого пакета

$$\frac{wN}{\omega} \ll \frac{\delta k}{k} \ll \left(\frac{wN}{\omega} \right)^{1/2} \quad (2.23)$$

В этом случае можно разложить знаменатель в формуле (2.21) по степеням x . Тогда дисперсионное уравнение (2.22) преобразуем к виду

$$1 - \frac{w \lambda p^2}{s^2} - \frac{i \pi w}{\lambda} \frac{\partial n_0}{\partial x} \bigg|_x = \frac{s}{\lambda p} = 0 \quad (2.24)$$

В предположении (2.23) можно считать мнимую добавку малой. Тогда $S^2 = W \lambda N p^2$. При $W \lambda < 0$ возникает неустойчивость, вполне аналогичная неустойчивости отрицательного давления (гл. I § 3). Критерий существования и инкремент для неё те же, что и соответствующей неустойчивости волны конечной амплитуды. Заметим, что максимально допустимые волновые вектора неустойчивости ограничены обратной корреляционной длиной $\frac{1}{\ell}$.

При $W \lambda > 0$ уравнение (2.24) описывает распространение звука по волновому пакету с хаотическими фазами. Частота звука

$$S = p \sqrt{W \lambda N} \left(1 - \frac{i\pi}{2} \frac{W}{\lambda} \frac{\partial n_0}{\partial x} \right)_{x=k} \left(\frac{WN}{\omega} \right)^{1/2}$$

Мнимая часть частоты соответствует "затуханию Ландау" этого звука за счет резонансного взаимодействия с волнами пакета /45/. Заметим, что для "двугорбой" функции распределения, для которой существует область $\frac{\partial n_0}{\partial x} > 0$, мнимая часть меняет знак. Соответствующая неустойчивость аналогична пучковой неустойчивости плазмы /46/.

Заметим, что для более широких пакетов $\frac{\delta k}{k} \gtrsim \left(\frac{WN}{\omega} \right)^{1/2}$ звуковые волны сильно затухают.

В тех случаях, когда имеет место неустойчивость, она приводит к размытию волнового пакета до ширины

$$\delta k \sim k \left(\frac{WN}{\omega} \right)^{1/2}$$

Г л а в а III

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ СЛАБОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

§ I.

РАЗМЕРНОСТНЫЕ ОЦЕНКИ

Следуя установившейся в физике плазмы терминологии стохастизованное состояние поля поверхностных волн будем называть слабой турбулентностью волн /1,2,43/. В дальнейшем будем предполагать слабую турбулентность статистически однородной, сдвигами частот за счет нелинейности пренебрежем.

Слабая турбулентность капиллярных волн описывается кинетическим уравнением: см. (2,6).

$$\frac{\partial n}{\partial t} = st(n, n)$$

$$st(n, n) = 2\pi \int \left\{ |V-k, k_1, k_2|^2 \delta_{k-k_1-k_2} \delta(\omega_k - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}) \right. \\ \times (n_{k_1} n_{k_2} - n_k n_{k_1} - n_k n_{k_2}) + 2|V-k_2, k, k_1|^2 \times (3.1) \\ \times \delta(k+k_1-k_2) \delta(\omega_k + \omega_{k_1} - \omega_{k_2}) (n_k n_{k_1} + n_k n_{k_2} - \\ \left. - n_k n_{k_1}) \right\} dk_1 dk_2$$

Здесь $\omega_k = \sqrt{gk}$. Ядро V получается подстановкой этого значения частоты в формулу (I.12). Учитывая, что $k = k_1 + k_2$, получим:

$$V-k, k_1, k_2 = \frac{2^{1/4}}{8\pi\sqrt{2}} \left\{ \left(\frac{k k_1}{k_2} \right)^{1/4} \left[(|k| - |k_1|)^2 - k_2^2 \right] + \right. \\ \left. + \left(\frac{k k_2}{k_1} \right)^{1/4} \left[(|k| - |k_2|)^2 - k_1^2 \right] - \left(k k_2 \right)^{1/4} \left[(|k_1| - |k_2|)^2 - k^2 \right] \right\} \quad (3.2)$$

Слабая турбулентность гравитационных волн описывается кинетическим уравнением: (см (2.14))

$$\frac{\partial n}{\partial t} = st(n, n, n)$$

$$st(n, n, n) = 2\pi \int |T_{kk_1 k_2 k_3}|^2 \delta_{n+k_1-k_2-k_3} \times \delta(\omega_k + \omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3}) (n_{k_1} n_{k_2} n_{k_3} + n_k n_{k_2} n_{k_3} - n_k n_{k_1} n_{k_2} - n_k n_{k_1} n_{k_3}) dk_1 dk_2 dk_3 \quad (3.3)$$

Здесь $T_{kk_1 k_2 k_3}$ описывается формулой (I.19).

Коэффициентные функции V и W могут быть получены из формулы (I.12, I.13) подстановкой $\omega_k = \sqrt{g}k$, $\alpha = 0$,

что дает:

$$V_{kk_1 k_2} = \frac{\sqrt[4]{g}}{8\pi\sqrt{2}} \left\{ \left(\frac{k_2}{k k_1} \right)^{1/4} [(k k_2) + |k| |k_2|] + \left(\frac{k}{k_1 k_2} \right)^{1/4} [(k_1 k_2) + |k_1| |k_2|] + \left(\frac{k_1}{k k_2} \right)^{1/4} [(k k_2) + |k| |k_2|] \right\}$$

$$W_{kk_1 k_2 k_3} = \frac{1}{6(2\pi)^2} (k k_1 k_2 k_3)^{1/2} \left\{ \left(\frac{k k_1}{k_2 k_3} \right)^{1/4} (2|k| + 2|k_1| - |k - k_2| - |k - k_3| - |k_1 - k_2| - |k_1 - k_3|) + \left(\frac{k_2 k_3}{k k_1} \right)^{1/4} \times \right. \quad (3.4)$$

$$(2|k_2| + 2|k_3| - |k - k_2| - |k - k_3| - |k_1 - k_2| - |k_1 - k_3|) +$$

$$- \left(\frac{k_1 k_3}{k k_2} \right)^{1/4} (2|k_3| + 2|k_1| - |k_2 + k_3| - |k - k_3| - |k - k_2| - |k_1 + k_2|) -$$

$$\left(\frac{k_1 k_2}{k_4 k_3} \right)^{1/4} (2|k_2| + 2|k_1| - |k_2 + k_3| - |k - k_3| - |k - k_2| - |k_1 + k_2|) -$$

$$\left(\frac{k k_3}{k_1 k_2} \right)^{1/4} (2|k_3| + 2|k| - |k_2 + k_3| - |k_1 - k_2| - |k - k_1| - |k + k_3|) -$$

$$\left(\frac{k k_2}{k_1 k_3} \right)^{1/4} \times$$

$$\left. \left(2|k_2| + 2|k_1| - |k_2 + k_3| - |k_1 - k_2| - |k - k_1| - |k + k_3| \right) \right\}$$

Эти кинетические уравнения есть предельные случаи квантовых кинетических уравнений соответственно для распадов и рассеяния квазичастиц.

Однако, смысл кинетических уравнений (3.1) и (3.2) весьма существенно отличается от смысла обычных кинетических уравнений, описывающих релаксацию системы к состоянию термодинамического равновесия. Уравнения (3.1) и (3.2) формально имеют термодинамические решения - распределения Рэлея-Джинса. Для капиллярных волн это $n_k = \frac{T}{\omega_k}$, для гравитационных волн $n_k = \frac{T}{\cos t + \omega_k}$. Однако, эти решения приводят к бесконечной величине полной энергии волн.

В дальнейшем будем пользоваться спектральной плотностью энергии $E_k = 2\pi k \omega_k n_k$, взятой в полярной нормировке. Тогда полная энергия волн $\mathcal{E} = \int E_k dk$. Для распределений Рэлея-Джинса при больших k , $E_k \sim k$ поэтому расходимость является квадратичной.

Вследствие этого можно говорить только о частичном термодинамическом равновесии "обрезанном" на некотором k_0 .

Существенной особенностью кинетики поверхностных волн является обязательное присутствие затухания в области больших волновых чисел. Для капиллярных волн механизмом затухания служит вязкость, для гравитационных волн - нелинейные процессы, приводящие к образованию "барашков" на гребнях. Поэтому естественно предполагать, что k_0 определяется границей затухания волн. Заметим, что если существует область термодинамического равновесия, то между ней и областью затухания должна существовать промежуточная область, где спектральная функция переходит из возрастающей в убывающую.

Однако, ядра кинетических уравнений (включая δ - функцию от частот) являются однородными функциями своих аргументов. Поэтому никакой другой величины размерности K , кроме K_0 , у нас нет - это означает, что переходная область должна иметь размер порядка K_0 . Таким образом, основная энергия волн должна быть сосредоточена в этой промежуточной области, так что говорить о термодинамическом равновесии в этой задаче не имеет смысла.

Таким образом, уравнения (3.1) и (3.2) описывают существенно неравновесные процессы. Примером такого неравновесного процесса является распад периодической волны конечной амплитуды. Пусть характерное волновое число этой волны есть $K_1 \ll K_0$. Рассмотренные в главе I неустойчивости приводят к тому, что за времена порядка обратного инкремента неустойчивости энергия волны оказывается распределенной в области волновых чисел $K \sim K_1$, причем фазы всех волн хаотизируются.

В дальнейшем энергия волн будет переходить в области больших K и диссипироваться в области затухания $K \sim K_0$. Естественно ввести величину P - количество энергии, диссипируемой в единицу времени на единицу площади поверхности жидкости. Её же можно интерпретировать как поток энергии в область больших K .

В дальнейшем основную роль будет играть гипотеза о том, что в области $K_1 \ll K \ll K_0$ энергетический спектр турбулентности полностью определяется потоком энергии в область больших волновых чисел.

Аналогичная ситуация имеет место в теории турбулентности несжимаемой жидкости. Там этой гипотезы оказывается

достаточно, чтобы используя соображения размерности получить спектр энергии. Этот спектр $E_k \sim \rho^{2/3} k^{-5/3}$ был получен А.Н. Колмогоровым.

Рассмотрим аналог колмогоровского спектра для двумерного случая. Пусть плотность жидкости ρ . Тогда поверхностная плотность энергии жидкости $\mathcal{E}$ имеет размерность

$$\mathcal{E} \sim \frac{\rho}{\tau^2 k^3} \quad \text{откуда} \quad \frac{1}{\tau^2} \sim \frac{\mathcal{E}^{1/2} k^{3/2}}{\rho^{1/2}}$$

Поток энергии $P \sim \frac{\mathcal{E}}{\tau} \sim \frac{(\mathcal{E} k)^{1/2}}{\rho^{1/2}}$ отсюда $\mathcal{E} \sim \frac{P^{2/3} \rho^{1/2}}{k}$

Для спектральной плотности энергии (обозначим её для этого случая через K_k) получаем: $K_k \sim \frac{P^{2/3}}{k^2}$
Здесь в дальнейшем $\rho = 1$

Однако полученное нами выражение для спектральной плотности не является единственно возможным. Так как, по сравнению с теорией несжимаемой жидкости, мы имеем дополнительные размерные константы. Для гравитационных волн такой константой является ускорение силы тяжести g , для капиллярных волн — коэффициент поверхностного натяжения. Соответственно возможны ещё следующие выражения для спектра энергии — для гравитационных волн $G_k = \frac{g}{k^3}$, для капиллярных волн $\Pi_k \sim \frac{\sigma}{k}$

Общее выражение для спектра энергии в случае гравитационных волн дается формулой

$$E_k \sim G_k f \left(\frac{K_k}{G_k} \right) \quad (3.5)$$

а для случая капиллярных волн

$$\varepsilon_k \sim \pi_k g \left(\frac{k_k}{\pi_k} \right) \quad (3.6)$$

Здесь f и g - произвольные функции. Заметим, что до сих пор наши рассуждения были точными и мы не пользовались предположением о малости нелинейности. Однако, это предположение позволило нам вывести кинетическое уравнение, из которых можем получить дополнительную информацию о функциях f и g . Действительно поток энергии в область больших k можно интерпретировать как изменение полной энергии волн в единицу времени, т.е.

$$P = \int \omega_k \frac{\partial h}{\partial t} dk$$

Как видно из (3.1) и (3.3) для капиллярных волн $\frac{\partial h}{\partial t} \sim h^2$, а для гравитационных волн $\frac{\partial h}{\partial t} \sim h^3$

Учитывая это, сразу получаем, что для капиллярных волн $E_k \sim P^{1/2}$ а для гравитационных волн $E_k \sim P^{1/3}$. Сравним эти формулы с формулами (3.5) и (3.6) найдем окончательно

для капиллярных волн

$$E_k \sim \alpha^{1/4} P^{1/2} k^{-7/4} \quad (3.7)$$

для гравитационных волн

$$E_k \sim g^{1/2} P^{1/3} k^{-5/2} \quad (3.8)$$

Для гравитационных волн сохраняющейся величиной является число волн $N = \int \frac{\epsilon_k}{\omega_k} dk$

Можно было бы представить себе спектр, который определяется только потоком числа частиц Q . Как и в предыдущем случае $N \sim Q^{1/3}$. Колмогоровский спектр для числа частиц есть $N \sim Q^{1/3} k^{-13/6}$, а спектр, обусловленный ускорением силы тяжести $N \sim g/k^{7/2}$, откуда легко найти аналог спектра (3.8) для случая, когда сохраняется поток частиц

$$\epsilon_k \sim g^{1/2} Q^{1/3} k^{-7/3} \quad (3.9)$$

§ 2.

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Покажем, что полученные нами спектры обращают в ноль столкновительные члены кинетических уравнений.

Рассмотрим сначала капиллярные волны.

Напишем уравнение: (см (3.4))

$$st(n, n) = 0 \quad (3.10)$$

Ядро этого уравнения $Q(k, k_1, k_2) = 2\pi |V - k_1 k_2|^2$ есть однородная функция степени $9/2$, удовлетворяющая условиям симметрии (I, I4). Будем искать полярно-симметричные решения этого уравнения.

Воспользуемся независимостью коэффициентной функции от углов, проведем усреднение по углам в уравнении (3.10). Для этого представим δ -функцию от волновых векторов в виде:

$$\delta(k \pm k_1 \pm k_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{i(\vec{r}, \vec{k} \pm \vec{k}_1 \pm \vec{k}_2)} d\vec{r}$$

Проинтегрировав уравнение (3.10) по углам между векторами $\vec{r}$ и $\vec{k}$, $\vec{r}$ и $\vec{k}_1$, $\vec{r}$ и $\vec{k}_2$ перейдем к интегрированию по модулям векторов $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$, причем, δ -функция от волновых чисел заменится на выражение:

$$\int_0^\infty \chi_0(k\chi) \chi_0(k_1\chi) \chi_0(k_2\chi) \chi d\chi = \frac{1}{\Delta}$$

где $\Delta = \frac{1}{2} \sqrt{2(k_1^2 k_2^2 + k^2 k_1^2 + k^2 k_2^2)} k - k_1 - k_2$ - есть площадь треугольника, образованного векторами $\vec{k}$, $\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$.

После этого перейдем в уравнении (3.8) к переменным $\omega = k^{3/2}$, $\omega_1 = k_1^{3/2}$, $\omega_2 = k_2^{3/2}$ и для сохранения симметрии ядра умножим уравнение на величину $\omega^{1/3}$.

После интегрирования по переменной ω_2 получим:

$$\begin{aligned} & \int d\omega_1 P_{\omega, \omega_1, \omega - \omega_1} (n_{\omega_1} n_{\omega - \omega_1} - n_{\omega} n_{\omega_1} - \\ & - n_{\omega} n_{\omega - \omega_1}) + 2 \int_0^\infty d\omega_1 P_{\omega + \omega_1, \omega, \omega_1} (n_{\omega_1} n_{\omega + \omega_1} + \\ & + n_{\omega} n_{\omega + \omega_1} - n_{\omega} n_{\omega_1}) = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$P_{\omega, \omega_1, \omega_2} = \frac{(\omega \omega_1 \omega_2)^{1/3} Q_{\omega, \omega_1, \omega_2}}{\sqrt{2 \left[\omega_1^{4/3} (\omega - \omega_1)^{4/3} + \omega^{4/3} \omega_1^{4/3} + \omega^{4/3} (\omega - \omega_1)^{4/3} \right] - \omega^{8/3} - \omega_1^{8/3} - (\omega - \omega_1)^{8/3}}}$$

$P_{\omega, \omega_1, \omega_2}$ - есть однородная положительно определенная функция степени $\frac{8}{3}$.

Будем искать решение уравнения (3.11) в виде $P_{\omega} = A \omega^S$, где A - произвольная постоянная, а S - неизвестная величина.

Произведем замену переменных во втором интеграле уравнения (3.10) по формулам

$$\omega_1 \rightarrow \frac{\omega - \omega_1}{\omega_1} \cdot \omega$$

$$d\omega_1 \rightarrow - \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 d\omega_1$$

Функция $P_{\omega + \omega_1, \omega, \omega_1}$ вследствие её однородности и симметрии (см. (3.6)) преобразуется следующим образом

$$P_{\omega + \omega_1, \omega, \omega_1} \rightarrow P_{\omega \frac{\omega}{\omega_1}, (\omega - \omega_1) \frac{\omega}{\omega_1}, \omega_1 \cdot \frac{\omega}{\omega_1}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^{8/3} P_{\omega, \omega - \omega_1, \omega_1}$$

Теперь видно, что после такой замены два интеграла сворачиваются в один, а подынтегральное выражение легко факторизуется.

Уравнение для неизвестной величины S , таким образом, имеет вид;

$$\int_0^{\omega} d\omega_1 \frac{P_{\omega, \omega_1, \omega - \omega_1} \left[\omega_1^S (\omega - \omega_1)^S - \omega^S \omega_1^S - \omega^S (\omega - \omega_1)^S \right]}{\omega_1^{2S + 14/3} (\omega - \omega_1)^{2S + 14/3}} \times$$

$$\times \left[\omega_1^{2S + 14/3} (\omega - \omega_1)^{2S + 14/3} - \omega^{2S + 14/3} \omega_1^{2S + 14/3} - \omega^{2S + 14/3} (\omega - \omega_1)^{2S + 14/3} \right] =$$

$$= 0 \quad (3.12)$$

Очевидно, что подинтегральное выражение зануляется при значениях S , равных

$$S = -1 \quad S = -17/6$$

Вследствие положительной определенности функции P , других степенных решений уравнение (3.9) не имеет.

Первому из значений S соответствует решение

$$n_{\omega} = \frac{\text{const}}{\omega}, \text{ т.е. распределение Релея-Джинса.}$$

Второму корню соответствует решение $n_{\omega} = \frac{\text{const}}{\omega^{17/6}}$

В k -пространстве этим решениям соответствуют распределения

$$n_k = \text{const} \cdot k^{-3/2}$$

$$n_k = \text{const} \cdot k^{-13/4}$$

Что для спектральной плотности энергии в цилиндрической нормировке дает

$$E_k = \text{const} \cdot k$$

$$E_k = \text{const} \cdot k^{-7/4}$$

Таким образом, найденный ранее ^{из} соображений размерности, спектр (3.7) действительно обращает в ноль столкновительный член кинетического уравнения. см [47]

Обратимся теперь к кинетическому уравнению для гравитационных волн. Рассмотрим уравнение

$$st(n, n, n) = 0$$

(3.13)

Ядро уравнения $2\pi |T_{k, k_1, k_2, k_3}|^2$ есть однородная функция степени 6, удовлетворяющая соотношениям симметрии (I.14).

Как и в случае капиллярных волн, будем предполагать, что решение зависит только от модуля k . Умножим уравнение (3.13) на k и усредним по углам. Получим:

$$\int F_{k, k_1, k_2, k_3} \delta(\sqrt{k} + \sqrt{k_1} - \sqrt{k_2} - \sqrt{k_3}) (n_{k_1} n_{k_2} n_{k_3} + n_k n_{k_2} n_{k_3} - n_k n_{k_1} n_{k_2} - n_k n_{k_1} n_{k_3}) dk_1 dk_2 dk_3$$

$$F_{k, k_1, k_2, k_3} = 2\pi k k_1 k_2 k_3 \int e^{i(\lambda, k + k_1 - k_2 - k_3)} |T_{k, k_1, k_2, k_3}|^2 d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3$$

$d\Omega_i$ - элемент угла в плоскости k_i :

Очевидно F_{k, k_1, k_2, k_3} является однородной функцией степени 8, и подчиняется тем же условиям симметрии, что и W_{k, k_1, k_2, k_3} .

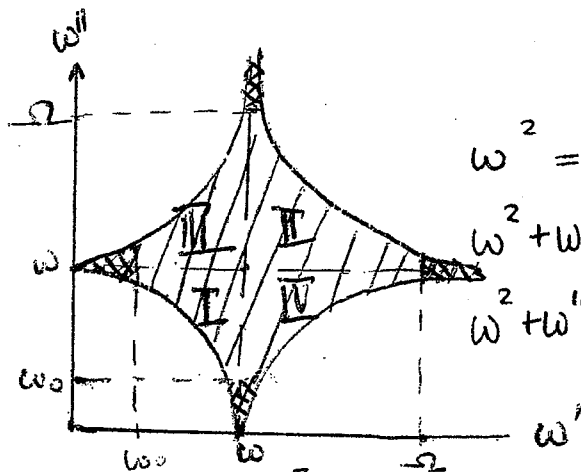
Перейдем теперь к переменной $\omega = \sqrt{k}$ и умножим ядро для сохранения симметрии на $\frac{d\omega}{d\omega} = 2\omega$. Получим уравнение:

$$\int R_{\omega, \omega' + \omega'' - \omega, \omega', \omega''} (n_{\omega'} n_{\omega''} n_{\omega' + \omega'' - \omega} + n_{\omega} n_{\omega'} n_{\omega''} - n_{\omega} n_{\omega'} n_{\omega' + \omega'' - \omega} - n_{\omega} n_{\omega''} n_{\omega' + \omega'' - \omega}) \times d\omega' d\omega'' = 0$$

(3.14)

Здесь $R(\omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = (\omega \omega_1 \omega_2 \omega_3)^2 F(\omega^2, \omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2)$

Функция R удовлетворяет соотношениям симметрии (I.14) и является однородной функцией порядка 20. Интегрирование в плоскости ω' , ω'' ведется по заштрихованной области (рис. 7).



Границы области определяются уравнениями

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \omega'^2 + \omega''^2 \\ \omega^2 + \omega'^2 &= (\omega - \omega' - \omega'')^2 \\ \omega^2 + \omega''^2 &= (\omega - \omega' - \omega'')^2\end{aligned}\quad (3.15)$$

рис. 7.

Будем искать решение в виде $\eta_\omega = c \omega^S$. Разобьем область интегрирования на четыре области (I, II, III, IV) и посредством замены переменных отобразим каждую из областей (II, III, IV) на область I.

Формулы замены переменной следующие:

Для области II:

$$\omega' \rightarrow \frac{\omega \omega''}{\omega' + \omega'' - \omega} \quad \omega'' \rightarrow \frac{\omega \omega'}{\omega' + \omega'' - \omega} \quad (3.16)$$

Для области III:

$$\omega' \rightarrow \frac{(\omega' + \omega'' - \omega) \omega}{\omega''} \quad \omega'' \rightarrow \frac{\omega^2}{\omega''}$$

Для области IV:

$$\omega' \rightarrow \frac{\omega^2}{\omega'} \quad \omega'' \rightarrow \frac{(\omega' + \omega'' - \omega) \omega}{\omega'}$$

Рассмотрим на примере области II как преобразуются (3.16) подинтегральные выражения. Заметим, что при преобразовании (3.16)

$$\omega' + \omega'' - \omega \quad \text{переходит в} \quad \frac{\omega^2}{\omega' + \omega'' - \omega}$$

Так что

$$\begin{aligned} R_{\omega, \omega' + \omega'' - \omega, \omega'', \omega'} &\rightarrow R_{\omega, \frac{\omega^2}{\omega' + \omega'' - \omega}, \frac{\omega'' \omega}{\omega' + \omega'' - \omega}, \frac{\omega \omega'}{\omega' + \omega'' - \omega}} \\ &\rightarrow \left(\frac{\omega}{\omega' + \omega'' - \omega} \right)^{20} R_{\omega' + \omega'' - \omega, \omega, \omega'', \omega'} = \\ &= \left(\frac{\omega}{\omega' + \omega'' - \omega} \right)^{20} R_{\omega, \omega' + \omega'' - \omega, \omega', \omega''} \end{aligned}$$

Здесь мы использовали свойства однородности и симметрии функции R . Аналогично преобразуется выражение в скобках, содержащее произведения η_{ω} . Якобиан преобразования равен

$$\frac{\omega^3}{(\omega' + \omega'' - \omega)^3}. \text{ Выполняя преобразование во всех областях и собирая все члены, мы получим уравнение}$$

$$\begin{aligned} \int_{(I)} \frac{R_{\omega, \omega' + \omega'' - \omega, \omega', \omega''}}{\omega'^s \omega''^s (\omega' + \omega'' - \omega)^s} &\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega' + \omega'' - \omega} \right)^s - \right. \\ &- \left(\frac{\omega}{\omega'} \right)^s - \left(\frac{\omega}{\omega''} \right)^s \left. \right] \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega' + \omega'' - \omega} \right)^{23+3s} - \right. \\ &- \left. \left(\frac{\omega}{\omega'} \right)^{23+3s} - \left(\frac{\omega}{\omega''} \right)^{23+3s} \right] d\omega' d\omega'' \end{aligned} \quad (3.17)$$

Интегрирование ведется по области (I). Функция R положительна, скобки под интегралом в уравнении (3.17) об-

ращаются в нуль при $S=0$, $S=-1$, $23+3S=0$, $23+3S=-1$

Первое решение является вырожденным и соответствует $n_\omega = \text{const}$

Второе решение $n_\omega = \frac{\text{const}}{\omega}$ есть распределение Релея-Джинса.

Третье и четвертое ($n_\omega = \frac{\text{const}}{\omega^8}$, $n_\omega = \frac{\text{const}}{\omega^{23/3}}$) решения при пересчете к спектральной плотности энергии дают

$$E_k \sim k^{-7/3}$$

$$E_k \sim k^{-5/2}$$

что совпадает с найденными ранее по размерности спектрами (3.8) и (3.9).

§ 3.

ЛОКАЛЬНОСТЬ СЛАБОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Найденные нами степенные спектры являются пока только формальными решениями уравнений $st(n, h)=0$, $st(n, h, n)=0$

Необходимо ещё выяснить, сходятся ли интегралы в этих выражениях. Проверим это сначала для капиллярных волн. Рассмотрим область малых ω (ограничим её для примера величиной ω_0).

Из уравнения (3.II) видно, что все, "опасные" члены можно собрать в выражение

$$2 \int_0^{\omega_0} (P_{\omega, \omega_1, \omega - \omega_1} n_{\omega - \omega_1} - P_{\omega, \omega_1, \omega - \omega_1} n_\omega - P_{\omega, \omega_1, \omega + \omega_1} n_\omega + P_{\omega, \omega_1, \omega + \omega_1} n_{\omega + \omega_1}) n_{\omega_1} d\omega_1 \quad (3.I8)$$

Далее вычисление показывает, что функция P имеет асимптотику

$$P_{\omega, \omega_1, \omega - \omega_1} \sim P_{\omega + \omega_1, \omega, \omega_1} \sim \omega_1^2 \omega^{2/3} \quad \text{при} \quad \omega_1 \ll \omega$$

Поэтому, выражение (3.18) можно преобразовать к виду

$$C \omega^{2/3} \frac{\partial^2 h_\omega}{\partial \omega^2} = \int_0^{\omega_0} \omega_1^4 n_{\omega_1} d\omega_1 \quad (3.19)$$

Отсюда видно, что для $n_\omega \sim \omega^{-17/6}$ интеграл на малых ω сходится.

Рассмотрим теперь область больших частот. Пусть Ω — её нижняя граница. Все "опасные" члены можно собрать в выражение

$$2 \int_{\Omega}^{\infty} R_{\omega+\omega_1, \omega, \omega_1} (n_{\omega+\omega_1} - n_{\omega}) n_{\omega_1} d\omega_1 \approx \sim \omega^3 \int_{\Omega}^{\infty} \omega_1^{2/3} \frac{\partial n_{\omega_1}}{\partial \omega_1} d\omega_1 \quad (3.20)$$

из которого ясно, что для спектра $n_\omega \sim \omega^{-17/6}$ сходимость на больших ω обеспечена.

Обратимся теперь к гравитационным волнам. Здесь опасными в смысле расходимости, являются области, закрашенные на рис. 7 двойной штриховкой. Рассмотрим сначала область малых частот ($\omega < \omega_0$). Заметим, что интегрирование по обеим "опасным" областям малых ω дает одинаковый вклад. Наиболее опасные члены группируются в выражение

$$\int R_{\omega, \omega' + \omega'' - \omega, \omega', \omega''} (n_{\omega'} n_{\omega''} n_{\omega' + \omega'' - \omega} - n_{\omega} n_{\omega'} n_{\omega' + \omega'' - \omega}) d\omega' d\omega'' \quad (3.21)$$

Рассмотрим теперь асимптотику ядра подинтегрального выражения.

Следует рассматривать асимптотику только в той области, в которой стремятся к нулю одновременно два аргумента. Это объясняется тем, что вследствие невозможности распадов гравитационных волн, область фазового пространства, в которой один аргумент много меньше всех остальных, является нефизической. Пусть малые аргументы имеют порядок k_1 , большие — K .

Вычисление показывает, что хотя отдельные члены в формуле для $T_{k_1 k_2 k_3}$ ведут себя при $k_1 \rightarrow 0$ как $K^2 k_1$ происходит сокращение главных членов, так что асимптотика следующая

$$T_{k_1 k_2 k_3} \sim k_1^2 K \quad \text{при } k_1 \ll K$$

Отсюда легко находим, что при $\omega_1 \ll \omega$, $R \sim \omega_1^{14} \omega^6$. Далее при $\omega_0 \ll \omega$, границы области интегрирования в выражении (3.21) можно приближенно записать

$$0 < \omega'' - \omega < \omega'$$

Кроме того, можно считать, что $n_{\omega' + \omega'' - \omega} \simeq n_{\omega'}$ поскольку $\omega_1 = \omega'' - \omega \rightarrow 0$

В результате выражение (3.21) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \int_0^{\omega} d\omega' (n_{\omega'})^2 \int_0^{\omega'} \omega_1^{14} \omega^6 (n_{\omega + \delta\omega} - n_{\omega}) d\delta\omega \approx \\ & \approx \omega^6 \frac{\partial n_{\omega}}{\partial \omega} \int_0^{\omega_0} \omega_1^{16} n_{\omega'}^2 d\omega' \end{aligned} \quad (3.22)$$

Очевидно, что для $n\omega = \frac{c}{\omega^8}$ и для $n\omega = \frac{c}{\omega^{23/3}}$ сходимость на малых ω обеспечена.

Рассмотрим теперь область больших частот. Здесь также имеются две области, вклад от которых одинаков.

Рассмотрим область, в которой $\omega' \rightarrow \infty$

Снова выделим группу опасных членов:

$$\int R(\omega, \omega' + \omega'' - \omega, \omega', \omega'') (n\omega n\omega' n\omega'' - n\omega n\omega'' n\omega' + \omega'' - \omega) \times d\omega' d\omega'' \quad (3.23)$$

Границы области интегрирования по $\omega_1 = \omega'' - \omega$ в асимптотической области имеют вид:

$$-\frac{\omega^2}{\omega'} \ll \omega_1 \ll \frac{\omega^2}{\omega'}$$

учитывая асимптотику ядра $\frac{\omega^2}{\omega'}$ перепишем (3.23) в виде

$$n^2 \omega^{14} \int_{-\infty}^{\infty} \omega'^6 d\omega' \int_{-\frac{\omega^2}{\omega'}}^{\frac{\omega^2}{\omega'}} (n\omega' - n\omega' - \omega_1) d\omega_1 \sim \sim n\omega^2 \omega'^6 \int_{-\infty}^{\infty} \omega'^4 \frac{\partial n\omega'}{\partial \omega'} d\omega' \quad (3.24)$$

Отсюда видно, что для $n\omega \sim \frac{c}{\omega^8}$ и $n\omega \sim \frac{c}{\omega^{23/3}}$ сходимость на больших ω обеспечена.

Заметим теперь, что все полученные нами степенные решения приводят к тому, что полная энергия волн расходится на малых ω .

Реальный физический спектр должен быть обрезан на малых ω . Пусть граница этого обрезания ω_0 . Вблизи ω_0 содержится основная энергия волн, поэтому область $\sim \omega_0$ можно

назвать энергосодержащей. С другой стороны на очень больших частотах, где включено затухание, спектр турбулентности также существенно отличается от найденного. Пусть граница затухания Ω , причем $\omega_0 \ll \Omega$.

Рассмотрим, как влияет обрезание спектра в области больших и малых частот на спектр в промежуточной области.

Рассмотрим сначала капиллярные волны. $n_\omega \sim \omega^{-17/6}$

Тогда вклад области интегрирования по $\omega_1 \sim \omega$ имеет по счету степеней в уравнении (3.11) порядок ω^{-2} .

Вклад энергосодержащей области дается формулой (3.19). Из неё видно, что этот вклад имеет порядок

$$\omega^{-2} \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^{13/6}$$

Из формулы (3.20) можно оценить возможность вклад области затухания — $\omega^{-2} \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^{13/6}$

Эти оценки показывают, что при $\omega_0 \ll \omega \ll \Omega$ вклады энергосодержащей области и области затухания малы.

Рассмотрим теперь гравитационные волны и проверим вклады этих областей для спектра $n_\omega = \frac{c}{\omega^3}$

Попрежнему вклад области частот порядка ω пропорционален ω^{-2} .

Из формул (3.22) и (3.24) можно заключить, что вклад энергосодержащей области имеет порядок $\omega^{-2} \frac{\omega_0}{\omega}$, а вклад области затухания $\omega^{-2} \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^4$, так что эти вклады малы. Аналогичные оценки легко получить для спектра $n_\omega \sim \omega^{-23/3}$

Мы показали, таким образом, что в тех случаях, когда осуществляются степенные спектры, наиболее сильно взаимо-

действуют между собой волны, частоты, которые имеют один порядок величины.

В теории турбулентности несжимаемой жидкости аналогичное утверждение составляет содержание гипотезы локальности турбулентности (27, 28). Доказательства этой теории для гидродинамической турбулентности не существует.

§ 4.

ЗАТУХАНИЕ КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН

Рассмотрим задачу о затухании капиллярных волн.

Введем в кинетическое уравнение декремент затухания волн за счет вязкости. Уравнение примет вид:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = st(\eta, \eta) - 2\nu k^2 \eta_k \quad (3.24)$$

ν — коэффициент вязкости.

Оценим порядки разных членов в этом уравнении. Пусть характерное время затухания есть τ . Тогда член $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ имеет порядок $\frac{\eta}{\tau}$, тогда как член $st(\eta, \eta)$ имеет порядок $\frac{\nu^2 \eta^2 k^2}{\omega_k} \sim \eta^2 k^5$ и при достаточно больших k много больше члена $\frac{\partial \eta}{\partial t}$. Таким образом, член $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ существенен только на малых k . Обозначим границу влияния члена $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ через a . Ясно далее, что вязкость влияет на больших k . Пусть граница влияния вязкости есть b . Попробуем аппроксимировать решение в области $a \ll k \ll b$ с помощью

степенного спектра, найденного нами ранее

Если $E_k \sim c k^{-7/4}$, то $n_k \sim \frac{E_k}{k \omega_k} \sim c k^{-17/4}$

Как мы установили, при подстановке в столкновительный член главный вклад дают интегралы по ~~в~~ области $k_1 \sim k$

Поэтому порядок столкновительного члена может быть найден

по счету степеней $St(n, n) \sim c^2 k^{-7/2}$

С другой стороны, вязкий член имеет порядок $\nu c k^{-9/4}$

Отсюда граница влияния вязкого члена есть

$$\nu \sim \left(\frac{c}{\nu}\right)^{1/5}$$

Естественно считать, что при $k \gg \nu$ решение быстро убывает.

Поскольку решение $n_k = c k^{-17/4}$ быстро убывает с ростом k , основная часть энергии заключается в области

$k \sim a$, где существенна нестационарность. Пусть решение в этой области имеет порядок n_0 . Из условия сшивки на границе области нестационарности $n_0 \sim c a^{-17/4}$. При $k < a$ решение ограничено.

Вычислим теперь величину энергии, диссипируемой в единицу времени. Эта величина

$$P \sim \int \omega_k \frac{\partial n}{\partial t} dk \sim \int_0^{\nu} \frac{\nu k^2 \omega_k c}{k^{17/4}} k dk \sim \nu^{1/2} c^2.$$

Мы обнаруживаем, что количество диссипируемой энергии зависит от коэффициента вязкости. Решение в области $a \ll k \ll \nu$ можно переписать в виде

$$n_k \sim \nu^{-1/4} k^{-17/4} \nu^{1/2}$$

отсюда

$$n_0 \sim \nu^{-1/4} a^{-17/4} \nu^{1/2}$$

... () .

Полагая приближенно:

$$p \sim \frac{\partial n}{\partial t} \omega_k a^2$$

Получим окончательно:

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} \sim n_0^2 a^5$$

Откуда $n \sim n_0 \left(\frac{\tau}{t} \right)$, т.е. n_0 убывает

$$\tau \sim n_0 a^5 \sim \omega_0 \frac{\mathcal{E}}{\alpha}$$

обратно пропорционально времени.

Здесь $\mathcal{E}$ — плотность энергии волн.

Заметим, что кинетическое уравнение получено в приближении малой нелинейности, т.е. при $\frac{\mathcal{E}}{\alpha} \ll 1$

Найдем теперь границу вязкого затухания

$$\nu \sim \left(\frac{\mathcal{E}}{\alpha} \right)^{4/5} \sim \frac{n_0^{4/5} a^{-17/5}}{\nu^{4/5}}$$

Критерий существования области $a \ll k \ll \nu$ приводит к условию, $\nu \gg a$, которое как легко видеть, совпадает с условием $\tau \nu a^2 \ll 1$, т.е. с требованием, что декремент нелинейного затухания много больше вязкого декремента. Отсюда получаем окончательный критерий применимости теории

$$\frac{\nu a^2}{\omega_0} \ll \frac{\mathcal{E}}{\alpha} \ll 1$$

§ 5.

ЗАТУХАНИЕ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

В затухание гравитационных волн вязкие эффекты вносят ничтожно малый вклад.

Основным механизмом затухания гравитационных волн является механизм образования "барашков" на гребнях волн. Этот механизм является чисто нелинейным и связан с перекачкой энергии в область больших K . Обсудим возможную картину затухания гравитационных волн. Пусть основная энергия волн содержится в области $K \sim K_0$. Эти волны мы будем предполагать пологими (если Q — средняя амплитуда волн, то $KQ \ll 1$) тогда применимо приближение слабой нелинейности. Фазы всех волн хаотичны, так что слабая турбулентность волн описывается кинетическим уравнением. За счет рассеяния волны друг на друга происходит уход энергии волн в область больших K . В процессе рассеяния сохраняется энергия и полное число квазичастиц, поэтому средняя энергия волн должна быть неизменной. Поскольку часть энергии уходит в большие K , вся энергосодержащая область дрейфует в направлении малых K . В области очень больших K роль нелинейных эффектов возрастает и кинетическое уравнение перестает быть применимым. Энергия, попавшая в эту область, диссипируется в результате образования "барашков".

Из-за наличия двух законов сохранения невозможно осуществить режим затухания, при котором имеет место поток

квазичастиц в область больших k . Поэтому из двух степенных решений уравнения (3.3) следует выбрать решение $(\epsilon_k \sim p^{1/3} k^{-5/2})$, соответствующее постоянному потоку энергии. Сделаем соответствующие оценки:

N — полное число частиц, k_0 — граница энергосодержащей области. Число частиц, уходящих в область больших k , мало, поэтому N есть инвариант. Тогда

$$p \sim \frac{\partial}{\partial t} \int \omega_k n_k dk \sim N \frac{g^{1/2}}{k_0^{1/2}} \frac{\partial k_0}{\partial t}$$

Из условия сшивки на границе энергосодержащей области

$$n_0 \sim \frac{N}{k_0^2} \sim g^{1/2} p^{1/3} k_0^{-4}$$

Отсюда $p \sim \frac{N^3}{g^{1/2}} k_0^6$ Окончательно имеем:

$$\frac{N g^{1/2}}{k_0^{1/2}} \frac{\partial k_0}{\partial t} \sim \frac{N^3 k_0^6}{g^{3/2}}$$

откуда находим закон изменения среднего волнового числа со временем

$$k_0 \sim \left(\frac{N^2}{g t} \right)^{2/11}$$

Рассмотрим теперь область больших волновых чисел.

Обратимся к формуле для сдвига частоты за счет взаимодействия (2.12)

$$\Delta \omega = \int S_{kk_1} n_{k_1} dk_1$$

Пользуясь асимптотикой

$$S_{kk_1} \sim k_1^2 k \quad \text{при } k_1 \ll k$$

получим для $\Delta \omega$

$$\Delta \omega \sim k \int k_1^2 n_{k_1} dk_1 \sim k k_0^2 N$$

Кинетическое уравнение перестает работать в области, где сдвиг частоты порядка самой частоты

$$\Delta \omega \sim g^{1/2} k_1^{1/2}$$

откуда

$$k_1 \sim \frac{g}{k_0^2 N^2}$$

Найденное значение k_1 можно считать границей области затухания. Очевидно, при $k_0 \rightarrow 0$, $k_1 \rightarrow \infty$.

Критерием применимости теории служит неравенство

$k_1 \gg k_0$, что дает:

$$\left(\frac{g}{k_0^2} \right)^2 \gg \left(g^{1/2} k_0^{1/2} N_0 \right)^2 \quad (3.25)$$

Но $g^{1/2} k_0^{1/2} N \sim \xi$ — порядка полной энергии волн, $\frac{g}{k_0^2}$ — есть плотность потенциальной энергии жидкости при условии, что амплитуда волны порядка её длины.

Таким образом, полученный критерий (3.25) совпадает с условием малой нелинейности ($Kg \ll 1$) волн.

Рассмотрим теперь спектр в области затухания.

Здесь спектр определяется наличием "барашков". "Барашки" представляют собой линии разрыва производной у функции $\eta(\vec{r})$

Поэтому преобразование Фурье поверхности имеет асимптотику

$$\eta_k \sim \frac{1}{k^2}, \text{ откуда } \varepsilon_k \sim \frac{2g}{k^3} \quad (h_k \sim \frac{2g}{k^{3/2}}).$$

Найдем теперь константу α из условия сшивки с решением на границе области затухания.

$$h_k \sim \frac{p^{1/3}}{k^4}$$

$$\frac{g^{1/2} p^{1/3}}{k_1^4} \sim \frac{2g}{k_1^{9/2}}$$

$$\alpha \sim \frac{k_0}{k_1}$$

Таким образом, спектр в области больших k есть

$$E_k \sim \frac{k_0}{k_1} \frac{g}{k^3} \quad (3.26)$$

Ранее Филлипсом /29,30/ был получен спектр $E_k = g \frac{g}{k^3}$, коэффициент пропорциональности g считался абсолютной константой. Из формулы (3.26) видно, что спектр Филлипса соответствует случаю, когда $k_0 \sim k_1$, т.е. случаю, когда отсутствует область слабой нелинейности и вместе с ней область применимости у кинетического уравнения.

Заметим, что спектр Филлипса соответствует случаю, когда на гребне каждой волны образуется "барашек". Из формулы (3.26) видно, что в нашем случае средняя частота волн с барашками есть $\left(\frac{k_0}{k_1}\right)^{1/2}$ и теория пригодна для того случая, когда эта величина мала. Заметим ещё что из формул $k_1 \sim \frac{g}{k_0^4 N^2}$ и $k_0 \sim \left(\frac{N^2}{g t}\right)^{1/11}$ можно оценить, как меняется относительное число барашков ν со временем

$$\nu \sim \nu_0 t^{-\frac{6}{11}}$$

Л и т е р а т у р а

1. Веденов А.А., Велихов Е.П., Сагдеев Р.З. УФН, 73. 701 (1961)
2. Галеев А.А., Карпман В.И., Сагдеев Р.З.
1965, 5 № 1, стр.60.
3. Ораевский В.Н., Сагдеев Р.З. ЖТФ, 32 (1963), 1291.
4. Карпман В.И., Сагдеев Р.З. ЖТФ, 33 (1963).
5. Ораевский В.Н. Ядерный синтез т.4, вып.4.
6. Галеев А.А., Ораевский В.Н. ДАН СССР, 147, 71 (1962).
7. Кадомцев Б.Б. Петвиашвили В.Н. ЖЭТФ, 43, 2234 (1962г)
8. Галеев А.А., Карпман В.Н. ЖЭТФ, 43, 2234 (1962).
9. Иорданский С.В., Куликовский А.Г. ЖЭТФ 46, 732 (1964).
10. Силин В.П. ПМТФ, 1, 31, 1964.
11. Камак и др. "Ядерный синтез" дополнение. Часть 2, 423(1962)
12. Ламб Г. Гидродинамика. ОГИЗ - Гостехиздат, 1946 г. Москва.
13. Некрасов А.Н. Точная теория волн установившегося вида на поверхности жидкости. Изд. АН СССР, М., 1951г, Москва.
14. Моисеев Н.Н. Вводная статья к сборнику "Поверхностные волны". Физматгиз, 1960 г. Москва.
15. Стокер Дж.Дж. Волны на воде. Изд. иност. лит. 1959 г. Москва.
16. Абрикосов А.А., Горьков П.П., Дзялошинский И.Е. "Методы квантовой теории поля в статистической физике". Физматгиз. Москва, 1962г.
17. Швебер С. Введение в теорию квантовых полей". Москва, 1963 г. И.И.Л.
18. Захаров В.Е. ПМТФ, № 1, стр.14, 1965 г.
19. Веденов А.А., Рудаков Л.И. ДАН СССР, т.159, стр.739, 1964г.
20. Карпман В.И. ЖТФ, 33, 959 (1963).
21. Захаров В.Е. ПМТФ, № 6, стр.96, 1964 г.
22. Власов А.А. Теория многих частиц. М.-Л., Гостехиздат, 1950.

23. Сагдеев Р.В. Вопросы теории плазмы, т.IV, Атомиздат, Москва, 1964г.
24. Hasselmann K. *Youngh. of Fluid Mech.*
12. 1962-2, 481
25. Hasselmann K. *Youngh of Fluid Mech.* 15, 1963. 273
26. Hasselmann K. *Youngh of Fluid Mech.* 15. 1963. 385
27. Колмогоров А.Н. ДАН СССР, 1941 г., 30, № 4, стр.299.
28. Обухов А.М. Изв.АН СССР серия географ.и геофиз. 1941г., 5, № 4-5, стр.453.
29. Филлипс О.М. В сб. "Ветровые волны", Москва. Изд.иностр. лит., 1962, стр.219.
30. Филлипс О.М. Катц Е.Дж. Там же, стр.238.
31. Phillips O.M. *Youngh of Fluid Mech.* 4. 1958. 426
32. Гюнтер А.А. Теория потенциала. Физматгиз, Москва, 1960г.
33. Longuet-Kiggins M.S. *Youngh of Fluid Mech.*
12. 1962. 321
34. Longuet-Kiggins M.S. Phillips O.M.
Youngh of Fluid Mech. 12. 1962. 333
35. Боголюбов Н.Н. Изв.АН СССР, сер.Физ. II, 77 (1947).
36. Захаров В.Е. Доклад на всесоюзном симпозиуме по коллек-
тивным процессам в плазме. Новосибирск, 1966 г. ЖЭТФ (в
печати).
37. Питаевский Л.П. ЖЭТФ, т.40, вып.2, стр.646.
38. Ахманов А.Л., Хохлов Р.В. Проблемы нелинейной оптики, изд.
АН СССР, 1964 г., Москва.
39. Таланов В.Н. Изв.Вузов. Радиофизика, 7, 564, 1964.
40. R. Y. Chiao, E. Garmire, S. H. Towns. *Phys. Rev. Lett*
13. 479 (1964)
41. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей, М., Физматгиз, 1961г.
42. Longuet-Kiggins M.S. *Youngh. of Fluid Mech.*
17. 1963. 459

- 43. Кадомцев Б.Б. Вопросы теории плазмы, т. IУ, Атомиздат, 1964 г. Москва.
- 44. Пайерлс "Квантовая теория твердых тел", И.И.Л. Москва 1956 г.
- 45. Ландау Л.Д. ЖЭТФ, I6, вып.7 (1946).
- 46. Ахиезер А.И., Файнберг Я.Б. ЖЭТФ, 2I, I262 (195Iг.).
- 47. Захаров В.Е. ПМТФ, 1965, № 4, стр.35.
- 48. Захаров В.Е. ЖЭТФ, 1966 г., № 8, т.5I.
- 49. Захаров В.Е., Филоненко Н.Н. ДАН СССР (в печати).