

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Захаров, Интегрирование уравнений глубокой
жидкости со свободной поверхностью,
ТМФ, 2020, том 202, номер 3, 327–338

<https://www.mathnet.ru/tmf9811>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 64.106.38.20

29 апреля 2025 г., 17:41:36



© 2020 г.

В. Е. Захаров^{*†‡}

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ГЛУБОКОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Показано, что уравнения Эйлера, описывающие нестационарное потенциальное течение двумерной глубокой жидкости со свободной поверхностью при отсутствии гравитации и поверхностного натяжения, могут быть проинтегрированы точно при специальном выборе граничных условий на бесконечности. Предполагается, что поверхность жидкости на бесконечности является невозмущенной, тогда как скорость растет пропорционально расстоянию и обратно пропорционально времени. Это означает, что жидкость сжимается по автомодельному закону. Рассматриваются возмущения автомодельно сжимающейся жидкости, показано, что их эволюция может быть точно описана аналитически после конформного отображения поверхности жидкости на нижнюю полуплоскость и введения двух произвольных функций, аналитических в этой полуплоскости. Если одна из этих функций равна нулю, решение предъядвляется в явном виде. В общем случае решение представляется быстро сходящимся рядом, члены которого вычисляются по рекуррентным формулам.

Ключевые слова: интегрируемость, конформное преобразование, капля, пузырь, особенность.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9811>

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Результаты, полученные в данной работе, не являются новыми. Они неоднократно докладывались на научных конференциях, в последний раз – на российско-французском симпозиуме по математической гидродинамике, проходившем в августе 2016 г. в Новосибирске [1]. Но публикуются эти результаты впервые. Полученное решение совпадает с решением, полученным недавно Карабутом и Журавлевой [2] несколько другим способом.

Работа поддержана грантом РНФ № 19-72-30028.

^{*}Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН, Москва, Россия.
E-mail: zakharov@itp.ac.ru

[†]Сколковский институт науки и технологий, Сколково, Московская обл., Россия

[‡]University of Arizona, Tucson, Arizona, USA

Хорошо известно, что уравнения “мелкой воды” являются генератором многих интегрируемых систем, в частности уравнения Кортевега–де Фриза, уравнения Буссинеска, системы уравнений Каупа–Броера, нелинейного уравнения Шредингера. Интегрируемы также $(2 + 1)$ -мерные обобщения этих систем – уравнение Кадомцева–Петвиашвили, уравнение Дэви–Стюартсона. Эти результаты содержатся в стандартных монографиях, посвященных методу обратной задачи рассеяния (см., например, [3]). Недавно было показано, что $(2 + 1)$ -мерное обобщение модели Каупа–Броера также интегрируемо [4].

В связи с этим естественно возникает вопрос об интегрируемости уравнений глубокой жидкости. Впервые гипотеза об интегрируемости этих уравнений, причем в присутствии гравитации, была сформулирована в работе [5], в которой изучались волны малой амплитуды и было установлено, что в главном порядке теории возмущений волны, бегущие в одну сторону, неспособны генерировать волны, распространяющиеся в противоположном направлении. Недавно этот результат был усилен [6]: выяснилось, что суммарные волновые действия волн, распространяющихся в разных направлениях, являются интегралами движения. Пока неизвестно, может ли этот результат быть распространен на волны конечной амплитуды, зато выяснилось существование совершенно других интегралов движения [7], [8], не имеющих пока физической интерпретации. Их число не является фиксированным, но зависит от начальных условий. Однако их существование подтверждено детальными численными экспериментами. Имеются еще точные решения, описывающие капиллярные волны произвольной амплитуды [9].

В настоящей статье мы рассматриваем глубокую жидкость без гравитации и поверхностного натяжения. Мы показываем, что при наложении несколько искусственных граничных условий на бесконечности уравнение Эйлера, описывающее эту жидкость, удается проинтегрировать точно. К сожалению, пока не удастся заменить “искусственные” граничные условия на “естественные”. Однако полученные результаты представляют несомненный интерес с точки зрения математики. Кроме того, можно надеяться, что их удастся применить для описания поведения мелкомасштабных возмущений на фоне крупномасштабных, а это будет иметь уже значительную практическую пользу.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Мы рассматриваем потенциальное течение глубокой жидкости в $(1+1)$ -геометрии. Жидкость занимает область

$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \eta(x, t), \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1)$$

Течение потенциально, $\mathbf{v} = \nabla \Phi$, потенциал подчиняется уравнению Лапласа $\Delta \Phi = 0$ и уравнению Бернулли

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \Phi)^2 + P = 0. \quad (2)$$

На поверхности выполняются кинематические

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{y=\eta} \quad (3)$$

и динамические условия

$$P = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \Phi)^2 = 0 \Big|_{y=\eta}. \quad (4)$$

Если поверхность жидкости является плоской и неподвижной (так, что $\eta = 0$), то условия дают

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 \Big|_{y=0} = 0. \quad (5)$$

Единственное нетривиальное решение уравнения Бернулли (2), удовлетворяющее условиям (5), имеет вид

$$\Phi = \frac{1}{2} \frac{(x - x_0)^2 - y^2}{t - t_0}, \quad P = -\frac{y^2}{(t - t_0)^2}, \quad (6)$$

где x_0, t_0 – произвольные константы.

Формулы (6) задают единственное нетривиальное решение нестационарного уравнения Бернулли, не возмущающее свободную поверхность жидкости. Положим $x_0 = 0, t_0 = 0$. Тогда

$$\Phi = \frac{1}{2} \frac{x^2 - y^2}{t}. \quad (7)$$

Это решение есть частный случай более общего класса автомодельных решений

$$\eta = t^\alpha F\left(\frac{x}{t^\alpha}\right), \quad \Phi = t^{2\alpha-1} \Phi\left(\frac{x}{t^\alpha}, \frac{y}{t^\alpha}\right), \quad (8)$$

где α – произвольная вещественная константа. В рассматриваемом случае $\alpha = 0, F \equiv 0$. Выбор $\alpha = 3$ приводит к решению класса Дирихле с параболическим профилем поверхности. Если $\alpha = 2$, автомодельная подстановка (8) совместима с уравнением в присутствии гравитации.

Заметим, что уравнения в настоящем разделе инвариантны относительно замены $t \rightarrow -t, \Phi \rightarrow -\Phi, y \rightarrow -y, \eta \rightarrow -\eta$, поэтому достаточно рассматривать случай $t > 0$.

3. КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

Осуществим конформное отображение области, занятой жидкостью на физической плоскости $z = x + iy$, на комплексную полуплоскость $w = u + iv, v < 0$. Отображение осуществляется функцией $Z = Z(w, t)$, аналитической в нижней полуплоскости. Мы предположим, что эти функции имеют заданную степенную асимптотику в нижней полуплоскости при $v \rightarrow -\infty$. Тогда они полностью определяются их значениями на вещественной оси, с которой они продолжаются на всю комплексную плоскость.

Кинематическое граничное условие (3) порождает следующее уравнение:

$$Z_t \bar{Z}_u - \bar{Z}_t Z_u + \Phi_u - \bar{\Phi}_u = 0. \quad (9)$$

Динамическое граничное условие (4) удобно записать в виде

$$\Psi_t Z_u - \Psi_u Z_t + \frac{1}{2} \frac{\bar{\Phi}_u^2}{\bar{Z}_u} = 0, \quad (10)$$

где

$$\Psi = \frac{1}{2}(\Phi + \bar{\Phi}). \quad (11)$$

Подробный вывод этих уравнений можно найти в статьях [10], [8]. Заметим, что комплексная скорость V_z имеет вид

$$V = \Phi_z = \frac{\Phi_u}{Z_u}. \quad (12)$$

Уравнения (9), (10) имеют следующее точное решение:

$$Z = Z_0 = (t - t_0)u, \quad \Phi = \Phi_0 = \frac{1}{2}(t - t_0)u^2. \quad (13)$$

В данном случае $Z = \bar{Z}$, $\Phi = \bar{\Phi} = \Psi$.

Теперь

$$V = \frac{x}{t - t_0}. \quad (14)$$

Таким образом, это решение представляет собой конформный образ построенного выше автомодельного решения. Подчеркнем, что это решение описывает при $t < t_0$ сжимающуюся, а при $t > t_0$ растягивающуюся жидкость. В дальнейшем мы будем рассматривать только случай растягивающейся жидкости $t > t_0$. Решения для случая сжимающейся жидкости могут быть получены заменой переменных, описанной выше.

При $t = t_0$ решение имеет особенность и давление становится бесконечным во всем объеме жидкости. Таким образом, решение имеет физический смысл только при $t \neq t_0$. Однако решение (13) может рассматриваться как первые члены разложения Тейлора более общего локально аналитического решения уравнений (9), (10).

Рассмотрим теперь возмущение решения (13) $Z = Z_0 + \tilde{Z}(u)$, $\Phi = \Phi_0 + \tilde{\Phi}(u)$. Возмущения $\tilde{Z}(u)$ и $\tilde{\Phi}(u)$ аналитичны в нижней полуплоскости и достаточно быстро убывают при $u \rightarrow \infty$. В дальнейшем упростим систему обозначений и положим $t - t_0 = \tau$, $\partial/\partial t = \partial/\partial \tau$, $\tau > 0$.

Далее будем полагать

$$Z \rightarrow u\tau + Z, \quad \Phi \rightarrow \frac{1}{2}u\tau^2 + \Phi. \quad (15)$$

Поправки Z , Ψ подчиняются уравнениям

$$\Phi_u - uZ_u + \tau Z_\tau + Z_\tau \bar{Z}_u - \bar{Z}_\tau Z_u = \bar{\Phi}_u + \tau \bar{Z}_\tau - u \bar{Z}_u, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\tau\Phi_t - u\tau Z_t + \frac{1}{2}u^2 Z_u - \frac{1}{2}u\Phi_u + \Psi_t Z_u + Z_t \Psi_u = \\ & = -\frac{\tau}{2}\bar{\Phi}_\tau + \frac{1}{2}u\bar{\Phi}_u + \frac{1}{2}\frac{(u\tau + \bar{\Phi}_u)^2}{\tau + \bar{Z}_u} - \frac{1}{2}u^2\tau. \end{aligned} \quad (17)$$

Введем оператор проектирования на нижнюю полуплоскость $P^- = (1 + i\hat{H})/2$, где $\hat{H}$ – преобразование Гильберта. Потребуем, чтобы применение оператора P^- к уравнениям (16), (17) приводило к обращению в нуль правых частей. После этого уравнения (16), (17) принимают следующий простой вид:

$$\Phi_u - uZ_u + \tau Z_\tau = A, \quad (18)$$

$$\tau \frac{\partial}{\partial \tau}(\Phi - uZ) = uA - B, \quad (19)$$

где

$$A = P^-(\bar{Z}_\tau Z_u - Z_\tau \bar{Z}_u), \quad (20)$$

$$B = \Phi_\tau Z_u - \Phi_u Z_\tau + P^-(\bar{\Phi}_\tau Z_u - \bar{\Phi}_u Z_\tau). \quad (21)$$

Правые части уравнений (16), (17) обращаются в нуль, если потребовать

$$P^-(u^2 Z_u) = 0, \quad (22)$$

$$P^-(u \Phi_u) = 0. \quad (23)$$

Уравнения (18), (19) имеют простое решение, которое мы назовем *элементарным*. Пусть Z , Φ не зависят от τ . Тогда $A = 0$, $B = 0$ и уравнение (19) удовлетворяется автоматически. Уравнение (18) удовлетворяется, если положить

$$Z = \alpha(u), \quad \Phi = \partial^{-1} u \alpha_u(u), \quad (24)$$

где $\alpha(u)$ – функция, аналитическая в нижней полуплоскости и удовлетворяющая условию (22). Условие (23) при этом удовлетворяется автоматически.

Изучению элементарных решений мы посвятим следующий раздел. Пока же рассмотрим более общие решения. Будем считать, что общее решение представлено рядом по обратным степеням τ :

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_n}{\tau^n}, \quad \Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_n}{\tau^n}. \quad (25)$$

Нелинейные члены A , B также разлагаются по обратным степеням τ , но их разложение содержит только члены низших порядков

$$Z_n = \frac{1}{n-1} A_n + \frac{1}{n(n-1)} \frac{\partial}{\partial u} (B_n - u A_n). \quad (26)$$

Величина Φ_n определяется из уравнения

$$\Phi_n = u Z_n - \frac{1}{n} (u A_n - B_n). \quad (27)$$

Нелинейные члены A_n и B_n включают коэффициенты Z_k и Φ_k при $k \leq n-1$, таким образом, выражения для Z_n и Φ_n являются рекуррентными формулами. При $n \rightarrow \infty$ выражения Z_n , Φ_n возникают в результате деления на большие числа, поэтому с ростом n они убывают экспоненциальным образом, так что ряды (25) сходятся при любых конечных значениях τ .

При $n = 2$ имеем

$$A_2 = -P^-(\bar{Z}_1 \alpha - \bar{\alpha} Z_1), \quad B_2 = -P^-(\bar{u} \bar{Z}_1 \alpha - u \bar{\alpha} Z_1), \quad (28)$$

остальные члены в выражении для B_2 сокращаются.

Быстрое убывание Z_n и Φ_n означает, что общее решение строится явным образом по двум произвольным аналитическим функциям $\alpha(u)$, $Z_1(u)$.

4. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим элементарное решение, определяемое функцией $\alpha(u)$. Поскольку эта функция аналитически продолжается в нижнюю полуплоскость, мы будем использовать обозначение $\alpha(w)$, $w = u + iv$. В общем случае

$$Z = w(t - t_0) + \alpha(w), \quad Z_w = t - t_0 + \alpha_w, \quad (29)$$

$$\Phi = \frac{1}{2} w^2(t - t_0) + \partial^{-1} w \alpha_w, \quad \Phi_w = w(t - t_0 + \alpha_w), \quad (30)$$

$$\Phi_Z = V = \frac{\Phi_w}{Z_w} = w, \quad (31)$$

где $V = u_x - iv_y$ — комплексная скорость. Оказывается, что в случае элементарных решений она совпадает с конформной переменной w .

Уравнение (29) определяет $w = w(z, t)$. Это функция, заданная на физической плоскости и аналитическая в области, занятой жидкостью.

Продифференцируем уравнение (29) по z и t последовательно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z}(t - t_0 + \alpha'(w)) &= 1, \\ w + (t - t_0 + \alpha'(w))w_t &= 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Из соотношений (32) следует уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (33)$$

т. е.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial z} = 0. \quad (34)$$

Тождества (33), (34) распространяются на всю часть физической плоскости, занятую жидкостью. Кроме того, выполняется граничное условие

$$V \rightarrow \frac{z}{t - t_0}, \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (35)$$

Разделим в уравнении (34) действительную и мнимую части, пользуясь соотношениями

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = -\frac{\partial V_y}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial x}. \quad (36)$$

Получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} - V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} - V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Сравнивая со стандартными уравнениями Эйлера, получаем следующие результаты:

$$\frac{\partial}{\partial x}(P + Vy^2) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}(P + V_y^2) = 0. \quad (38)$$

Интегрирование соотношений (38) дает $P = -V_y$.

Уравнение (34) было независимо получено Карабутом и Журавлевой [1]. Мы этим уравнением больше пользоваться не будем, но вернемся к уравнению (29), рассмотрев его на вещественной оси, т. е. положив $w = u$.

Итак, теперь

$$Z = u(t - t_0) + \alpha(u). \quad (39)$$

Пусть

$$\alpha(u) = \sum_{n=0}^N \frac{A_n}{u - iv} \quad (40)$$

– рациональная функция (случай кратных полюсов мы не рассматриваем). Если $\alpha(u)$ – рациональная функция, то действительная и мнимая части Z связаны алгебраической кривой рода ноль, у которой с неизбежностью существуют особые точки. На вещественной плоскости (x, y) они проявляют себя как точки самопересечения, поэтому в данном случае уравнение (39) естественным образом описывает появление капель и пузырей.

Для удовлетворения условия (22) нужно требовать выполнения условия

$$\sum A_n = 0, \quad (41)$$

но если хотя бы один из полюсов устремляется к бесконечности, это условие можно ослабить. Мы рассмотрим простейший случай единственного полюса, расположенного на мнимой оси. Вычет в этом полюсе мы будем считать вещественным. Тогда уравнение (39) принимает вид

$$Z = ut + \frac{A}{u - ia}, \quad a > 0. \quad (42)$$

Разделяя действительную и мнимую части, получаем

$$x = ut + \frac{Au}{u^2 + a^2}, \quad (43)$$

$$y = \frac{aA}{u^2 + a^2}. \quad (44)$$

Координаты x, y подчиняются уравнению алгебраической кривой $F(x, y) = 0$,

$$F(x, y) = ay[x^2 + (y + at)^2] - A(y + at)^2 = 0. \quad (45)$$

Функция $x(u)$ является нечетной, тогда как функция $y(u)$ – четной. В результате получаем, что $y(x)$ – тоже четная функция, $y(-x) = y(x)$.

Формула (44) показывает, что $y(x)$ имеет тот же знак, что и A . При $A > 0$

$$0 < y(x) < y_{\max}, \quad y_{\max} = \frac{A}{a}, \quad (46)$$

при $|x| \rightarrow \infty$ имеет место асимптотика

$$y \rightarrow \frac{aAt^2}{x^2 + a^2t^2}. \quad (47)$$

Рассмотрим уравнение $x(u) = 0$ и напомним, что $t > 0$. Если $A > 0$, то это уравнение имеет единственное решение $u = 0$. Но если A отрицательно, $A = -|A|$, то в интервале времен

$$0 < t < \frac{|A|}{a^2} \quad (48)$$

имеют место еще два решения

$$u = \pm \sqrt{\frac{A}{a^2} - t}. \quad (49)$$

В этом интервале времен точка кривой (45) расположена на отрицательном отрезке мнимой оси в точке

$$y_0 = -at > -y_{\max}. \quad (50)$$

В этой точке происходит самопересечение поверхности и конформное преобразование (42) перестает быть обратимым. До сих пор в работах [10], [8] мы избегали неоднозначных обратимых конформных преобразований, однако это не значит, что они не имеют физического смысла. Физически неоднозначность конформного преобразования означает существование пузыря. При $t = 0$ пузырь имеет форму окружности, касающейся горизонтальной поверхности снизу (напомним, что мы рассматриваем случай $A < 0$). При возрастании времени пузырь уменьшается и полностью исчезает при

$$t_0 = -\frac{A}{a^2}. \quad (51)$$

В этот момент на поверхности образуется особенность, имеющая вид “складки Уитни”,

$$y = -y_{\max} + \left(\frac{A}{a} x^2\right)^{1/3}. \quad (52)$$

При $A > 0$ конформное преобразование является неособым при всех $t > 0$, но в момент времени $t = 0$ имеется особенность. Поверхность представляет собой круглую каплю радиуса $A/(2a)$. Кривая (45) принимает простой вид:

$$F(x, y) = y \left[x^2 + \left(y - \frac{1}{2} \frac{A}{a} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{A^2}{a^2} \right] = 0. \quad (53)$$

При $t > 0$ $x(u)$ есть однозначная функция, и капля оказывается соединенной с основной поверхностью “стеблем”. Для описания формирования капли при отрицательных временах можно воспользоваться отражением времени и вертикальной координаты, описанным в разделе 2. Конечный результат состоит в том, что можно положить $A = a = 1$ и при всех временах воспользоваться уравнениями

$$x = u \left(t + \frac{1}{u^2 + a^2} \right), \quad y = \frac{1}{u^2 + a^2}. \quad (54)$$

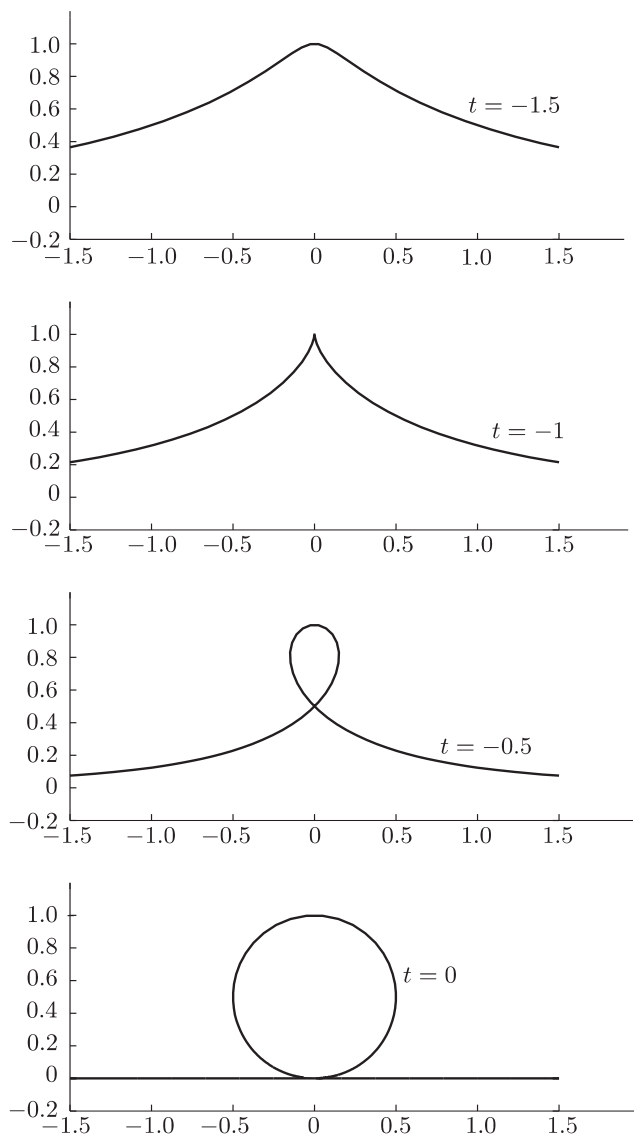


Рис. 1. Появление капли.

Численное решение этих уравнений приведено на рис. 1, 2.

При $A < 0$ решение (42) описывает формирование пузыря. Соответствующие графики могут быть получены заменой $y \rightarrow -y$, $t \rightarrow -t$.

Заметим, что в области времен, удовлетворяющих условию (48), конформное отображение

$$Z = wt + \frac{A}{w - ia} \quad (55)$$

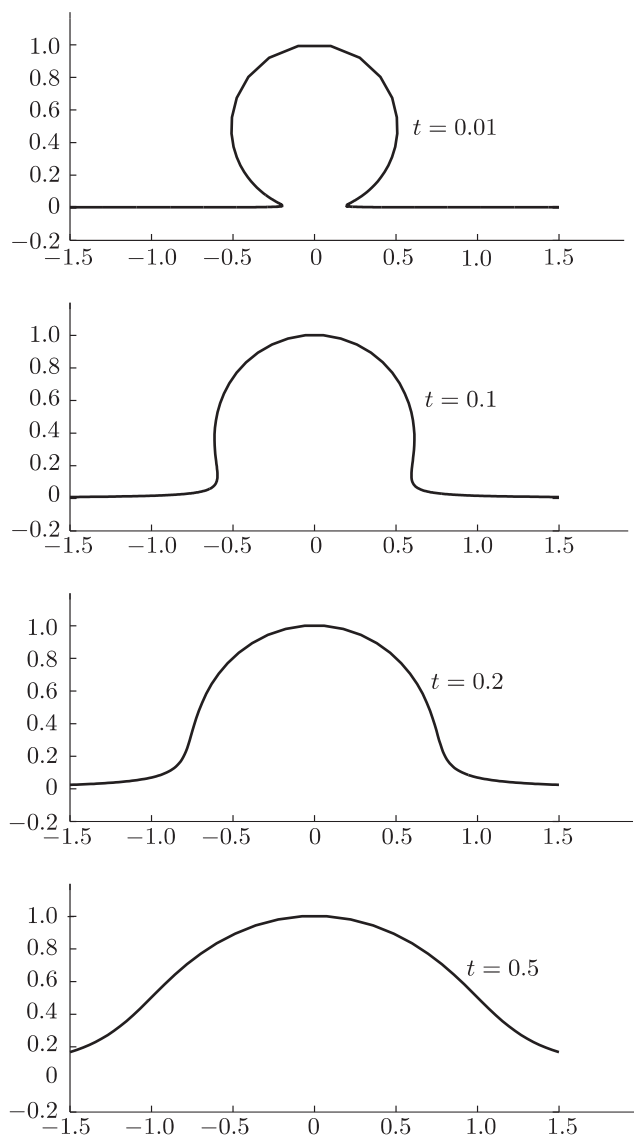


Рис. 2. Исчезновение капли.

перестает отображать отрицательную полуплоскость $\text{Im } w < 0$ на односвязную область, поскольку выражение

$$\frac{\partial Z}{\partial w} = t - \frac{A}{(w - ia)^2} \quad (56)$$

приобретает нуль в отрицательной полуплоскости.

Вопрос о физической реализуемости полученных решений в области неоднозначной обратимости конформного преобразования (55) нуждается в дополнительном исследовании. Но в области его однозначности вне интервала (48) он сомнений не

вызывает. В этой области обратное преобразование, определяющее комплексную скорость, задается решением квадратного уравнения (55)

$$w = \frac{Z + iat + \sqrt{(Z - iat)^2 - 4At}}{2t} \quad (57)$$

при $Z \rightarrow \infty$, $w \rightarrow Z/t$ в соответствии с изложенной выше теорией. Вопрос о том, имеет ли физический смысл второе решение этого уравнения, мы в данной статье не обсуждаем.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты, несмотря на некоторую их экзотичность, являются сильным аргументом в пользу гипотезы об интегрируемости уравнений глубокой жидкости, по крайней мере в случае отсутствия гравитации и поверхностного натяжения. Полученное ранее решение Карабута и Журавлевой [11]–[13], также несколько экзотическое, находится в согласии с результатом настоящей статьи. В обоих случаях получены точные решения уравнений Эйлера. А как говорил Л. Д. Ландау, точные решения украшают жизнь.

Заметим, что уравнение Хопфа для глубокой жидкости уже возникало раньше в работе [14]. Оно не было “экзотическим”, поскольку граничные условия были стандартными. Однако оно является приближенным.

Часть результатов, опубликованных в данной статье, была независимо получена Зубаревым и Карабутом [15].

Благодарности. Автор благодарит В. В. Геогджаева за помощь в оформлении статьи.

Конфликт интересов. Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, “Are equations of deep water with a free surface integrable?”, *Russian-French Workshop “Mathematical hydrodynamics”. Abstract* (August 22–27, 2016, Novosibirsk, Russia), Novosibirsk State University, Novosibirsk, 2016, 55.
- [2] E. A. Karabut, E. N. Zhuravleva, “Reduction of free-boundary problem to the system of differential equation”, IX *International Scientific Conference “Solitons, Collapses and Turbulence: Achievements, Developments and Perspectives” (SCT-19) in honor of Vladimir Zakharov’s 80th birthday. Abstracts* (Yaroslavl, August 5–9, 2019), Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, 2019, 67.
- [3] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи рассеяния*, Наука, М., 1980.
- [4] P. Nabelek, V. E. Zakharov, “Dressing method in application to the Kaup–Broer system”, in preparation.
- [5] A. I. Dyachenko, V. E. Zakharov, “Is free-surface hydrodynamics an integrable system?”, *Phys. Lett. A*, **190**:2 (1994), 144–148.
- [6] A. I. Dyachenko, “New integrals of motions for water waves”, IX *International Scientific Conference “Solitons, Collapses and Turbulence: Achievements, Developments and Perspectives” (SCT-19) in honor of Vladimir Zakharov’s 80th birthday. Abstracts* (Yaroslavl, August 5–9, 2019), Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, 2019, 39.
- [7] V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, *Free-surface hydrodynamics in the conformal variables*, arXiv:1206.2046.

- [8] A. I. Dyachenko, S. A. Dyachenko, P. M. Lushnikov, V. E. Zakharov, “Dynamics of poles in two-dimensional hydrodynamics with free surface: new constant of motion”, *J. Fluid Mech.*, **871** (2019), 891–925, arXiv: 1809.09584.
- [9] Л. Н. Сретенский, *Теория волновых движений жидкости*, Наука, М., 1977.
- [10] A. I. Dyachenko, P. M. Lushnikov, V. E. Zakharov, “Non-canonical Hamiltonian structure and Poisson brackets for two-dimensional hydrodynamics with free surface”, *J. Fluid Mech.*, **869** (2019), 526–552.
- [11] E. A. Karabut, E. N. Zhuravleva, “Unsteady flows with a zero acceleration of the free boundary”, *J. Fluid Mech.*, **754** (2014), 308–331.
- [12] Е. А. Карабут, Е. Н. Журавлева, “Нестационарные течения с нулевым ускорением на свободной границе”, *Докл. РАН*, **458**:6 (2014), 656–659.
- [13] Е. А. Карабут, Е. Н. Журавлева, “Размножение решений в плоской задаче о движении жидкости со свободной границей”, *Докл. РАН*, **469**:3 (2016), 295–298.
- [14] A. I. Dyachenko, E. A. Kuznetsov, M. D. Spector, V. E. Zakharov, “Analytical description of the free surface dynamics of ideal fluid (canonical formalism and conformal mapping)”, *Phys. Lett. A*, **221**:1–2 (1999), 73–79.
- [15] Н. М. Зубарев, Е. А. Карабут, “Точные локальные решения для формирования особенностей на поверхности идеальной жидкости”, *Письма в ЖЭТФ*, **107**:7 (2018), 434–439.

Поступила в редакцию 4.09.2019,
после доработки 4.09.2019,
принята к публикации 2.10.2019