С. И. Бадулин, В. Е. Захаров, Спектр Филлипса и модель диссипации ветрового волнения,
ТМФ, 2020, том 202, номер 3, 353–363

https://www.mathnet.ru/tmf9801

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 202, № 3
март, 2020

С. И. Бадулин[*†], **В. Е. Захаров**[†‡]

СПЕКТР ФИЛЛИПСА И МОДЕЛЬ ДИССИПАЦИИ ВЕТРОВОГО ВОЛНЕНИЯ

Рассматривается обобщение кинетического уравнения Хассельманна, предложенное Ньюэллом и Захаровым в 2008 г. Новое уравнение учитывает не только резонансные четырехволновые взаимодействия, но и диссипацию, связанную с обрушением волн. В уравнение вводится функция диссипации, зависящая от потока энергии по спектру. Эта функция определена с точностью до функционального параметра, оптимальный выбор которого должен быть сделан по результатам сравнения с экспериментом. Кинетическое уравнение, снабженное такой функцией диссипации, должно описывать обычно наблюдаемый в экспериментах переход от спектра Колмогорова–Захарова $E(\omega) \sim \omega^{-4}$ к спектру Филлипса $E(\omega) \sim \omega^{-5}$. Версию функции диссипации, выраженную в терминах спектра энергии, можно использовать в задачах численного моделирования и прогноза морского волнения.

Ключевые слова: спектр Филлипса, кинетическое уравнение Хассельманна для волн на воде, спектры Колмогорова–Захарова.

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf9801

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что спектры морского волнения как в присутствии, так и в отсутствие ветра имеют степенные "хвосты", причем в коротковолновой области форма "хвостов" универсальна и дается знаменитым спектром Филлипса [1]

$$E(\omega) = \alpha_{\mathrm{Ph}} g^2 \omega^{-5}. \tag{1}$$

Здесь $\alpha_{\mathrm{Ph}} = 0.0081$ – константа Филлипса. Филлипс высказал справедливое предположение о том, что его спектр обязан своим существованием и крайней устойчи-

Работа поддержана Российским научным фондом (грант № 19-72-30028) при участии МИГО ГРУПП (http://migogroup.ru).

[*]Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН, Москва, Россия.
E-mail: badulin.si@ocean.ru

[†]Сколковский институт науки и технологий, Сколково, Московская обл., Россия

[‡]University of Arizona, Tucson, Arizona, USA. E-mail: zakharov@math.arizona.edu

востью явлению обрушения волн. Однако первоначальная гипотеза о том, что волновое поле в данной асимптотической области есть комбинация предельных волн Стокса [2], опровергается тем, что среднеквадратичная крутизна предельных волн Стокса $\mu = \langle \nabla \eta^2 \rangle^{1/2} \approx 0.329$ (η – возвышение свободной поверхности, угловые скобки означают усреднение по пространству) [3], [4] существенно превышает крутизны даже самых крутых волн ($\mu \simeq 0.1$), наблюдающихся в океане. Кроме того, волны Стокса большой амплитуды сильно неустойчивы.

Физически корректная интерпретация спектра Филлипса была предложена в работе Ньюэлла и Захарова [5]. Было показано, что “море Филлипса” представляет собой ансамбль локализованных “брэйкеров”, равномерно распределенных по обратным масштабам. При этом сам же Филлипс заметил [6], что максимальный масштаб брейкера приблизительно на порядок меньше длины доминантной волны. Анализируя многочисленные эксперименты [7]–[12], Филлипс показал, что в этой промежуточной области также осуществляется универсальный спектр $E(\omega) \sim \omega^{-4}$. Филлипсом же было высказано предположение, что данный спектр есть результат одновременного действия трех факторов: накачки от ветра, нелинейного взаимодействия волн и диссипации. Эта точка зрения до сих пор довольно широко распространена, однако является ошибочной хотя бы потому, что установление спектра ω^{-4} наблюдается при численном моделировании зыби [13]. Кроме того, достоверно установлено [14]–[16], что в диапазоне частот $\omega_p < \omega < 3.5\omega_p$ определяющим физическим эффектом является нелинейное взаимодействие волн. По этой причине теоретическое объяснение спектра $E(\omega) \sim \omega^{-4}$ выглядит очень просто: это есть точное решение стационарного уравнения Хассельманна. Этот факт был установлен Захаровым и Филоненко еще в 1966 г. [17].

В современных терминах спектр в промежуточной области выглядит следующим образом:

$$E(\omega, \theta) = 2C_p \frac{P^{1/3} g^{4/3}}{\omega^4}. \tag{2}$$

Здесь P – поток энергии в область больших волновых чисел, C_p – константа Колмогорова. Согласно вычислениям Геогджаева и Захарова [18] $C_p \approx 0.203$. Спектр (2) есть частный пример слабо турбулентных спектров Колмогорова–Захарова (КЗ), подробно описанных в монографии [19].

К заслуге Филлипса следует отнести то, что предложенный им в работе [6] вариант функции диссипации имеет разумный физический смысл. Попытка улучшить функцию диссипации Филлипса стала отправной точкой настоящей статьи. В заключение статьи мы обсуждаем “рабочие” варианты для проведении дополнительных численных экспериментов с целью выбора оптимальной функции диссипации.

2. СПЕКТР ФИЛЛИПСА И АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВОЛН НА ВОДЕ

Кинетическое уравнение Хассельманна [20] для пространственного спектра волнового действия $N_{\mathbf{k}}$ ветрового волнения можно записать в виде

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \nabla_{\mathbf{r}} N_{\mathbf{k}} = S_{\mathrm{nl}} + S_{\mathrm{in}} + S_{\mathrm{diss}}. \tag{3}$$

Индексы $\mathbf{k}$, $\mathbf{r}$ при ∇ использованы для градиентов волнового вектора $\mathbf{k}$ и координаты $\mathbf{r}$ соответственно. Для $N_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t)$ и $\omega_{\mathbf{k}}$ индекс $\mathbf{k}$ означает зависимость от волнового вектора. Член $S_{\rm nl}$ в правой части (3) отвечает за четырехволновые резонансные взаимодействия. Члены $S_{\rm in}$ и $S_{\rm diss}$ описывают соответственно генерацию волнового действия и его диссипацию. В отличие от теоретической зависимости $S_{\rm nl}$, получаемой "из первых принципов", зависимости $S_{\rm in}$ и $S_{\rm diss}$ базируются в основном на феноменологических параметризациях (см. работу [21]). С этим обстоятельством связаны большие различия функций $S_{\rm in}$ и $S_{\rm diss}$, используемых в моделировании и прогнозе процесса волнения [22], [23], [16]. Обоснованность и физическая корректность эмпирических зависимостей $S_{\rm in}$ и $S_{\rm diss}$ обычно не обсуждаются критически: критерий количественного совпадения считается более важным, чем вопрос физической обоснованности соответствующих моделей. Во многих случаях применимость приближений и гипотез может быть проверена с помощью динамических фазо-разрешающих моделей (см., например, статьи [24]–[28]).

Интеграл столкновения

$$S_{\rm nl}(\mathbf{k},\mathbf{x},t) = \pi g^2 \int |T_{0123}|^2 (N_0N_1N_2 + N_1N_2N_3 - N_0N_2N_3 - N_0N_1N_3) \times \\ \times \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)\delta(\omega_0+\omega_1-\omega_2-\omega_3)\,d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}_2\,d\mathbf{k}_3 \tag{4}$$

играет центральную роль в нашей работе. Явные выражения можно найти во многих статьях (см., например, работу [22]). Ключевым является свойство однородности степенной дисперсионной зависимости $\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{g|\mathbf{k}|}$ и, как следствие, однородности зависимости коэффициента взаимодействия T_{0123} от волнового вектора $\mathbf{k}$,

$$|T(\kappa\mathbf{k}_0,\kappa\mathbf{k}_1,\kappa\mathbf{k}_2,\kappa\mathbf{k}_3)|^2 = \kappa^6|T(\mathbf{k}_0,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3)|^2, \tag{5}$$

и самого интеграла столкновений от волнового вектора:

$$S_{\rm nl}[\kappa\mathbf{k},\nu N_{\mathbf{k}}] = \kappa^{19/2}\nu^3 S_{\rm nl}[\mathbf{k},N_{\mathbf{k}}], \tag{6}$$

или частоты ω:

$$S_{\rm nl}[\upsilon\omega,\nu N_\omega] = \upsilon^{11}\nu^3 S_{\rm nl}[\omega,N_\omega]. \tag{7}$$

Здесь κ, υ, ν – произвольные положительные коэффициенты. Основное предположение теории слабой нелинейности – малость волнового периода T по сравнению со временем нелинейных взаимодействий $T_{\rm nl}$:

$$\frac{T}{T_{\rm nl}} = \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}N_{\mathbf{k}}}\frac{dN_{\mathbf{k}}}{dt} = \frac{S_{\rm nl}}{\omega_{\mathbf{k}}N_{\mathbf{k}}} \ll 1, \tag{8}$$

может нарушаться при больших временах и/или для достаточно коротких волн. Однако для специального случая, так называемого обобщенного спектра Филлипса, отношение (8) не зависит от масштаба волны, т.е. предположение слабой нелинейности, справедливое для начального волнового поля, продолжает выполняться в любой последующий момент времени [5]. Для классического спектра Филлипса энергии волн на глубокой воде

$$E_{\mathbf{k}} \sim |\mathbf{k}|^{-4} \qquad \text{или} \qquad E_\omega \sim \omega^{-5} \tag{9}$$

или волнового действия

$$N_{\mathbf{k}} \sim |\mathbf{k}|^{-9/2} \qquad \text{или} \qquad N_\omega \sim \omega^{-6} \tag{10}$$

условие (8) выполняется для любых параметров преобразования растяжения κ, υ и ν в формулах (6), (7). Другими словами, асимптотическое приближение оказывается формально справедливым для любого волнового масштаба. Более того, можно показать, что условие (8) остается справедливым для любого слагаемого $S_{\mathrm{nl}}^{(n)}$, описывающего резонасные взаимодействия n волн в асимптотическом разложении интеграла столкновений (3) [5]

$$S_{\mathrm{nl}} = \sum_{n=4}^{\infty} S_{\mathrm{nl}}^{(n)}. \tag{11}$$

Обобщенный спектр Филлипса (9), (10) не удовлетворяет консервативному кинетическому уравнению (3) а значит, его можно реализовать только как баланс внешней силы (диссипации) и резонансных взаимодействий волн между собой. По этой причине решение (9), (10) не совпадает с классическими решениями КЗ для прямого и обратного каскадов [17], [29] (см. обозначения в [22])

$$N^{(1)}(\mathbf{k}) = C_p P^{1/3} g^{-2/3} |\mathbf{k}|^{-4}, \qquad N^{(1)}(\omega,\theta) = 2C_p P^{1/3} g^{4/3} \omega^{-5}, \tag{12}$$

$$N^{(2)}(\mathbf{k}) = C_q Q^{1/3} g^{-1/2} |\mathbf{k}|^{-23/6}, \qquad N^{(2)}(\omega,\theta) = 2C_q Q^{1/3} g^{4/3} \omega^{-14/3}. \tag{13}$$

Здесь

$$Q = \int_0^{\omega} \int_{-\pi}^{\pi} S_{\mathrm{nl}}\, d\omega\, d\theta, \qquad P = -\int_0^{\omega} \int_{-\pi}^{\pi} \omega S_{\mathrm{nl}}\, d\omega\, d\theta \tag{14}$$

суть потоки волнового действия и энергии, а C_q, C_p – соответствующие константы Колмогорова. Интеграл столкновений S_{nl} для решений (12), (13) обращается в нуль (потоки постоянны), а оценки критериев применимости кинетического уравнения (8) требуют большой осторожности. Используя простейший (не значит тривиальный) прием [14], [15], представим интеграл столкновений S_{nl} в виде суммы двух слагаемых: нелинейной накачки $F_{\mathbf{k}}$ и заведомо положительного члена нелинейного затухания $\Gamma_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}}$ ($\Gamma_{\mathbf{k}}$ – коэффициент нелинейного затухания),

$$S_{\mathrm{nl}} = F_{\mathbf{k}} - \Gamma_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}}.$$

Коэффициент затухания $\Gamma_{\mathbf{k}}$ дает физически корректную оценку времени нелинейных волновых взаимодействий в кинетическом уравнении (3). В соответствии с (8) асимптотическое приближение перестает быть справедливым, когда (см. уравнение (17) в работе [14])

$$\Gamma_{\mathbf{k}} \omega \simeq 4\pi g |\mathbf{k}|^9 N_{\mathbf{k}}^2 = \pi \omega^{12} g^{-4} N_{\omega}^2 \simeq 1. \tag{15}$$

Для спектра Филлипса (9), (10) безразмерная величина (15) зависит только от уровня спектра, но не от масштаба волны. Для решения прямого каскада КЗ (12) критерий применимости можно записать как

$$4\pi C_p^2 g^{-1/3} P^{2/3} |\mathbf{k}_{\mathrm{br}}| = 4\pi C_p^2 g^{-4/3} P^{2/3} \omega_{\mathrm{br}}^2 \simeq 1 \tag{16}$$

и выразить через масштаб волн (длину, частоту) и скорость ветра, воспользовавшись одной из эмпирических параметризаций спектров ветрового волнения [30]

$$E(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} E(\omega,\theta)\, d\theta = \beta g u_* \omega^{-4}, \tag{17}$$

где u_* – скорость трения ветра, g – ускорение свободного падения и эмпирический коэффициент $\beta \approx 0.13$ [8], [31], [32]. Получаем (ср. с работой [5])

$$\omega_{\mathrm{br}} \approx 0.9\frac{u_*}{g}. \tag{18}$$

Для скорости ветра $U_{10} = 15$ м/с (на стандартной высоте 10 м над поверхностью моря) критерий (16) нарушается для волн короче 20 см, что очень близко к обычно рассматриваемому диапазону ветрового волнения. Эта оценка приводит нас к идее связать баланс нелинейных взаимодействий и нелинейной же диссипации со спектром Филлипса, формально существующим во всем диапазоне длин волн.

3. МОДЕЛЬ СПЕКТРА ФИЛЛИПСА И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПОТОКИ

Формальному критерию применимости приближения слабой нелинейности (15), (16) можно удовлетворить с помощью функции диссипации, которая абсорбирует спектральный поток. Одномерный вариант кинетического уравнения (см., например, [33])

$$\frac{dE(\omega)}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial \omega} + S_{\mathrm{diss}}(P,\omega) \tag{19}$$

описывает баланс дивергенции спектрального потока энергии (задаваемого интегралом столкновений S_{nl} (4)) и функции диссипации S_{diss}, которая зависит только от этого потока P и частоты ω. Анализ размерности дает выражение

$$S_{\mathrm{diss}} = -\Psi\left(\frac{P\omega^3}{g^2}\right)\frac{P}{\omega}. \tag{20}$$

Член P/ω имеет те же свойства однородности, что и член нелинейного переноса S_{nl} (6), т. е. реализуется общий принцип “лечить подобное подобным” (или “клин клином вышибают”). Безразмерный аргумент Ψ с учетом свойств однородности (6) можно легко связать с функцией насыщения Филлипса [34] и спектром энергии (действия). В изотропном случае

$$B(\omega) = \frac{\mu_{\mathrm{d}}^2}{2} = \frac{\omega^6 N(\omega)}{2g^2} = \frac{\omega^5 E(\omega)}{2g^2} \sim \left(\frac{P\omega^3}{g^2}\right)^{1/3}, \tag{21}$$

т. е. функция $B(\omega)$ пропорциональна квадрату дифференциальной крутизны волнения μ_{d}. Соответствующее интегральное выражение

$$s^2 = 2\int_0^{\omega} B(\omega)\,\frac{d\omega}{\omega} \tag{22}$$

известно как среднеквадратичный наклон поля поверхностных волн. При этом среднеквадратичный наклон s в (22) логарифмически растет с частотой для спектра Филлипса. В модели Филлипса [6] $B(\omega)$ используется как показатель степени насыщения волнового поля, стремясь к постоянной величине для спектра ω^{-5}. Величину $B(\omega)$ для (1) как модели полностью развитого волнения [35] можно легко оценить (ср. с формулой (7) в [36])

$$\lim_{\omega\to\infty} B(\omega) = \frac{\alpha_{\mathrm{Ph}}}{2} \approx 4.05\cdot 10^{-3}. \tag{23}$$

Аналогичное насыщение можно в явной форме получить для стационарного решения уравнения (20) и степенной зависимости:

$$\Psi = a\left(\frac{P\omega^3}{g^2}\right)^R. \tag{24}$$

Стационарное решение (20) не единственно. Простейшее решение отвечает насыщению функции диссипации во всем диапазоне частот,

$$\Psi = a\left(\frac{P\omega^3}{g^2}\right)^R = 3, \tag{25}$$

для произвольных параметров a и R. Второе решение описывает переход от постоянного потока P_0 при $\omega \to 0$ к бесконечно затухающему потоку с тем же пределом диссипативной функции $\Psi \to 3$ в высоких частотах:

$$\frac{P}{P_0} = \left(1 + \frac{a}{3}\left(\frac{P_0\omega^3}{g^2}\right)^R\right)^{-1/R}. \tag{26}$$

Решения (25), (26) показаны на рис. 1 как функции безразмерной частоты

$$\Omega = \left(\frac{\omega^3 P_0}{g^2}\right)^{1/3}\left(\frac{a}{3}\right)^{1/(3R)}. \tag{27}$$

Вырожденное решение $\Psi = 3$ (25) отвечает бесконечно большим потокам энергии в пределе $\omega \to 0$ (сплошные линии на рис. 1а, 1б). Решения (26) для различных показателей R демонстрируют переход от конечного потока энергии в низких частотах к степенному затуханию потока при $\omega \to \infty$. Коэффициент затухания $\Psi(P\omega^3/g^2)$ ведет себя как ступенчатая функция вблизи безразмерной частоты $\Omega = 1$ при больших значениях R (см. рис. 1в). Поток энергии P в (26) можно конвертировать с учетом формулы (6) в спектральную плотность энергии, которая также показывает переход от решения КЗ ω^{-4} к спектру Филлипса ω^{-5} (см. рис. 1г). Этот переход, очевидно, тем резче, чем выше R.

Решение (26) дает возможность связать параметры перехода с имеющимися экспериментальными результатами. Данные Форристолла [11] дают для частоты перехода оценку $\omega_{\mathrm{tr}} = g\omega_{\mathrm{tr}}/U_{10} \approx 4 \div 5$. Для характерной величины обратного возраста волнения, меньшей 2, это дает отношение частоты перехода к частоте спектрального пика $\omega_{\mathrm{tr}}/\omega_p \approx 2 \div 3$, что хорошо согласуется с наблюдениями Хванга [37]. Для параметризации (17) получаем оценки потока [30]

$$P_0 = 0.12\frac{\rho_a}{\rho_w}\frac{u_*^3}{g} \tag{28}$$

и неизвестного коэффициента в выражении функции диссипации (24)

$$a = 3\left(0.06\frac{\omega_{\mathrm{tr}} u_*}{g}\right)^{-3R}. \tag{29}$$

Ненулевая величина R означает нелинейность диссипации как функции спектрального потока, тогда как S_{diss} (20) остается существенно нелинейной функцией спектральной плотности $E(\omega)$ и при $R = 0$.

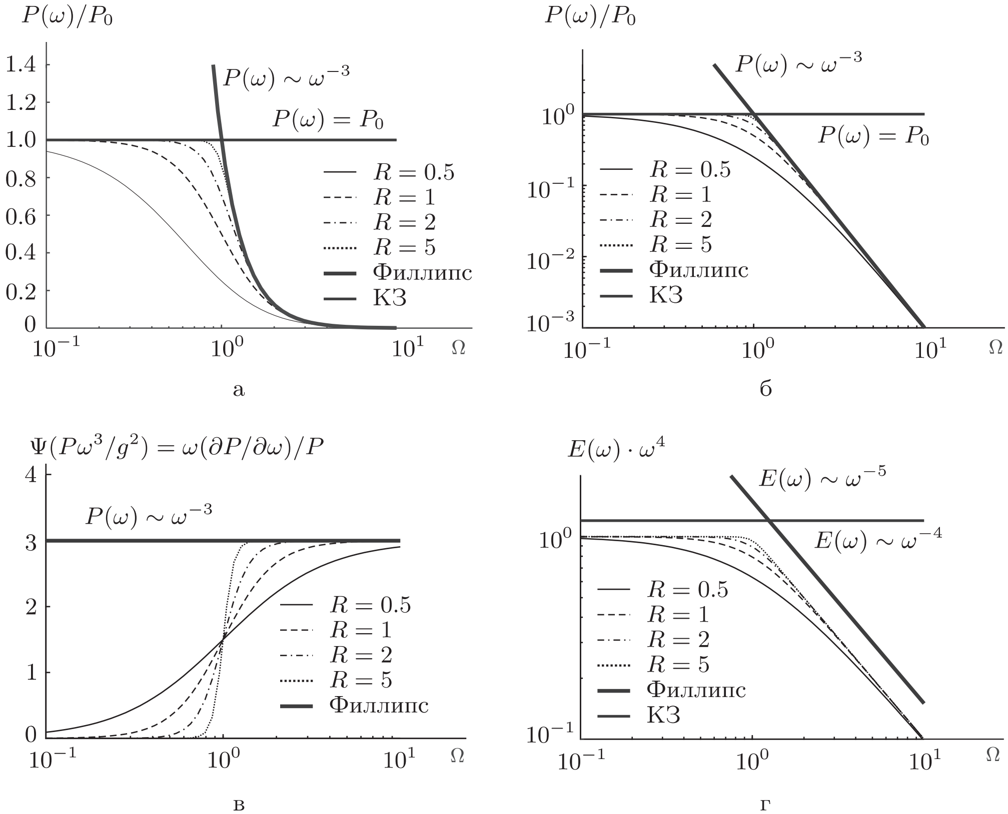

Рис. 1. Стационарные решения модели (20). Безразмерный спектральный поток для решений при различных показателях R в полулогарифмических и логарифмических осях (а, б). Функции диссипации для различных R (в). Показаны $\Psi = 3$ для вырожденного решения (25) и решения для степенной зависимости (26). Компенсированные спектры, полученные с учетом соотношений однородности для потоков и спектров (6) (г). Показаны асимптотические зависимости, отвечающие спектрам КЗ (12), (13) и Филлипса (9).

4. ЛОКАЛЬНАЯ ЗАМЕНА ФУНКЦИИ ДИССИПАЦИИ

Предлагаемая функция диссипации (20) нелокальна, поскольку зависит от спектрального потока P (14). По этой причине ее сложно использовать при решении задач моделирования и прогноза морского волнения. В этом разделе мы показываем способ построения “локальной замены” функции диссипации S_{diss} по типу широко используемых параметризаций [21]. Рассмотрим степенное распределение

$$N(\mathbf{k}) = b|\mathbf{k}|^{-x} \qquad \text{или} \qquad E(\omega) = 4\pi b\omega^{4-2x}g^{x-2}. \tag{30}$$

Поток энергии в (30) можно вычислить аналитически [18],

$$P = -\frac{2\pi b^3 g^{3x-10}}{12-3x}\omega^{24-6x}F(x), \tag{31}$$

где безразмерная функция $F(x)$ зависит только от показателя x. Для спектра Филлипса ω^{-5} и показателя $x = 9/2$ получаем формулу

$$\frac{P\omega^3}{g^2} = \frac{F(9/2)}{48\pi^2}\left(\frac{E\omega^5}{g^2}\right)^3. \tag{32}$$

Для безразмерного декремента диссипации насыщенного состояния спектра Филлипса $\Psi = 3$ в (25) имеем с учетом (21) и оценки $F(9/2) \approx 327$ [18]

$$\gamma_{\text{E}} = \frac{S_{\text{diss}}}{\omega E} = \frac{3P}{\omega^2 E} = \frac{F(9/2)}{16\pi^2}B^2(\omega) \approx 2.07\left(\frac{E\omega^5}{g^2}\right)^2. \tag{33}$$

Аналогичные оценки для экспериментально полученной Донеланом функции диссипации [38], выраженной через функцию насыщения Филлипса

$$S_{\text{diss}} = 36\omega E(\mathbf{k})(B(\mathbf{k}))^n \tag{34}$$

с $n = 2.5$ ($R = 0.5$ в выражении через спектральные потоки), дают величины, почти в четыре раза ме́ньшие теоретических (33), (21):

$$\gamma_{\text{E}} = 1.36 \cdot 10^{-4} \gg \gamma_{\text{E}}^{\text{Donelan}} = 36 \cdot B^{2.5}(\omega) \approx 3.8 \cdot 10^{-5}. \tag{35}$$

"Коррекция" (34), предложенная самим Донеланом и учитывающая, по его мнению, влияние длинных волн на относительно короткие [38],

$$S_{\text{diss}} = 36\omega E(\mathbf{k})(1 + 500 \cdot s^2)^2(B(\mathbf{k}))^n \tag{36}$$

кардинально меняет оценки (35) за счет большого множителя (500!) при формально малой величине s (22). Консервативная оценка при $s^2 = 0.02$ [36] дает оценку $\gamma_{\text{E}}^{\text{Donelan}} \approx 46 \cdot 10^{-4}$, теперь уже более чем на порядок превышающую теоретическую величину (35).

Рассмотренный пример демонстрирует уже отмеченные выше проблемы экспериментальных оценок декрементов диссипации, дающих даже в рамках одной работы [38] разброс на два порядка по величине. Вместе с тем следует отметить качественное подобие зависимостей (35), (36) и некоторых прогностических параметризаций (см., например, статью [39]) теоретическим, предлагаемым в настоящей работе. Зависимости (35), (36) оперируют исключительно параметрами волнения, отражая, таким образом, принципиальную физическую связь процесса обрушения с собственной динамикой волн, но не с процессами взаимодействия этих волн с ветровым потоком.

Таким образом, простая модель диссипации (19) не противоречит экспериментальным результатам. Принципиальный физический эффект насыщения диссипации (25), учитываемый и эмпирическими формулами [38], делает не столь важным вопрос о конкретном виде зависимости от характеристик волнового поля. Можно предложить анзац диссипативной функции, отражающий ее основные особенности:

• характерный масштаб (частота) перехода между спектрами КЗ и Филлипса, связанный с безразмерной частотой $\Omega = 1$ решения (26), (27) и экспериментально оцениваемый как $\omega_{\text{tr}} \approx 3 \div 4\omega_p$;

• нелинейность зависимости от безразмерного спектра энергии (33), которая определяет эффект насыщения функции диссипации и выражается в терминах безразмерной энергии, дифференциальной крутизны μ_{d} (21) или функции насыщения Филлипса $B(\omega)$ (34).

Результат можно представить в виде

$$S_{\mathrm{diss}}(\omega)=C_{\mathrm{Phillips}}\,\omega\mu_{\mathrm{d}}^{4}E(\omega)\Theta(\omega-\omega_{\mathrm{tr}}), \tag{37}$$

где Θ – функция Хэвисайда, задающая переход между спектрами КЗ и Филлипса. Соответствие функции диссипации (37) задаче установления спектра Филлипса было продемонстрировано нами ранее [40]. Альтернативная форма функции диссипации была использована в недавней работе [28], где переход к спектру Филлипса обеспечивался пороговым значением крутизны μ_{d}. Выбор этих двух опций, обеспечивающих переход между спектрами КЗ и Филлипса, можно сделать по результатам масштабного численного моделирования, которое авторы планируют провести в ближайшем будущем.

5. ВЫВОДЫ

Перечислим основные результаты работы.

• Предложена простая модель диссипации ветрового волнения. Эта модель реализует спектр Филлипса ω^{-5} как результат баланса нелинейного переноса, связанного с волновыми взаимодействиями, и нелинейной диссипации.

• Стационарные решения этой простой модели описывают насыщение функции нелинейной диссипации при произвольной ее зависимости от спектрального потока. Полученные решения отвечают переходу от спектра КЗ ω^{-4} к диссипативному спектру Филлипса ω^{-5}.

• Параметры перехода от спектра КЗ к спектру Филлипса согласуются количественно с имеющимися экспериментальными данными [11].

• Предложена локальная (по волновым масштабам) теоретически обоснованная замена нелинейной диссипативной функции. Сравнение с экпериментальной нелинейной параметризацией функции диссипации Донелана [38] показывает качественное соответствие форм зависимости. Эта диссипативная функция оказывается почти линейной функцией спектрального потока и существенно нелинейной (сильнее, чем кубическая зависимость) функцией спектральной плотности энергии. Возможность количественного сравнения существенно осложняется большим разбросом экспериментальных оценок.

Конфликт интересов. Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] O. M. Phillips, “The equilibrium range in the spectrum of wind-generated waves”, *J. Fluid Mech.*, **4** (1958), 426–434.

[2] Е. А. Кузнецов, “Спектры турбулентности, порождаемые сингулярностями”, *Письма в ЖЭТФ*, **80**:2 (2004), 92–98.

[3] P. M. Lushnikov, S. A. Dyachenko, D. A. Silantyev, “New conformal mapping for adaptive resolving of the complex singularities of Stokes wave”, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **473**:2202 (2017), 20170198, 19 pp., arXiv: 1703.06343.

[4] S. A. Dyachenko, P. M. Lushnikov, A. O. Korotkevich, "Branch cuts of Stokes wave on deep water. Part I: Numerical solution and Padé approximation", *Stud. Appl. Math.*, **173**:4 (2016), 419–472.

[5] A. C. Newell, V. E. Zakharov, "The role of the generalized Phillips' spectrum in wave turbulence", *Phys. Lett. A*, **372**:23 (2008), 4230–4233.

[6] O. M. Phillips, "Spectral and statistical properties of the equilibrium range in wind-generated gravity waves", *J. Fluid Mech.*, **156** (1985), 505–531.

[7] С. А. Китайгородский, "Некоторые приложения методов теории подобия при анализе ветрового волнения как вероятностного процесса", *Изв. АН СССР. Сер. Геофиз.*, 1962, № 1, 105–117.

[8] Y. Toba, "Local balance in the air-sea boundary processes. II. Partition of wind stress to waves and current", *J. Oceanogr. Soc. Japan*, **29**:2 (1973), 70–75.

[9] S. Kawai, K. Okada, Y. Toba, "Field data support of three-seconds power law and $gu * \sigma^{-4}$-spectral form for growing wind waves", *J. Oceanogr. Soc. Japan*, **33** (1977), 137–150.

[10] H. Mitsuyasu, H. Tasai, F. Suhara, T. Mizuno, S. Ohkusu, T. Honda, K. Rikiishi, "Observation of power spectrum of ocean waves using a clover-leaf buoy", *J. Phys. Oceanogr.*, **10** (1982), 286–296.

[11] G. Z. Forristall, "Measurements of a saturated range in ocean wave spectra", *J. Geophys. Res.*, **86**:C9 (1981), 8075–8084.

[12] K. K. Kahma, "A study of the growth of the wave spectrum with fetch", *J. Phys. Oceanogr.*, **11**:11 (1981), 1503–1515.

[13] S. I. Badulin, V. E. Zakharov, "Ocean swell within the kinetic equation for water waves", *Nonlinear Proc. Geophys.*, **24**:2 (2017), 237–253, arXiv: 1607.05313.

[14] В. Е. Захаров, С. И. Бадулин, "О балансе энергии ветровых волн", *Докл. РАН*, **440**:5 (2011), 691–695.

[15] V. E. Zakharov, "Energy balance in a wind-driven sea", *Phys. Scr.*, **T142** (2010), 014052, 14 pp.

[16] V. E. Zakharov, S. I. Badulin, V. V. Geogjaev, A. N. Pushkarev, "Weak-turbulent theory of wind-driven sea", *Earth and Space Sci.*, **6**:4 (2019), 540–556.

[17] В. Е. Захаров, Н. Н. Филоненко, "Спектр энергии для стохастических колебаний поверхности жидкости", *Докл. АН СССР*, **170**:6 (1966), 1292–1295.

[18] В. В. Геогджаев, В. Е. Захаров, "Численный и аналитический расчет параметров степенных спектров гравитационных волн на глубокой воде", *Письма в ЖЭТФ*, **106**:3 (2017), 175–178.

[19] V. E. Zakharov, V. S. L'vov, G. Falkovich, *Kolmogorov Spectra of Turbulence I. Wave Turbulence*, Springer, Berlin, 1992.

[20] K. Hasselmann, "On the nonlinear energy transfer in a gravity wave spectrum. Part 1. General theory", *J. Fluid Mech.*, **12** (1962), 481–500.

[21] L. Cavaleri, J.-H. G. M. Alves, F. Ardhuin et al. [The WISE Group], "Wave modelling – the state of the art", *Progr. Ocean.*, **75**:4 (2007), 603–674.

[22] S. I. Badulin, A. N. Pushkarev, D. Resio, V. E. Zakharov, "Self-similarity of wind-driven seas", *Nonlinear Proc. Geophys.*, **12**:6 (2005), 891–945.

[23] V. E. Zakharov, "Analytic theory of a wind-driven sea", *Procedia IUTAM*, v. 26 (IUTAM Symposium Wind Waves, London, UK, 4–8 September 2017), eds. R. Grimshaw, J. Hunt, E. Johnson, Elsevier, Amsterdam, 2018, 43–58, arXiv: 1802.05216.

[24] A. I. Dyachenko, A. O. Korotkevich, V. E. Zakharov, "Weak turbulent Kolmogorov spectrum for surface gravity waves", *Phys. Rev. Lett.*, **92**:13 (2004), 134501, 4 pp., arXiv: physics/0308099.

[25] S. Yu. Annenkov, V. I. Shrira, "Role of non-resonant interactions in the evolution of nonlinear random water wave fields", *J. Fluid Mech.*, **561** (2006), 181–207.

[26] A. O. Korotkevich, A. N. Pushkarev, D. Resio, V. E. Zakharov, “Numerical verification of the weak turbulent model for swell evolution”, *Eur. J. Mech. B/Fluids*, **27**:4 (2008), 361–387.

[27] A. O. Korotkevich, V. E. Zakharov, *On the applicability of the Hasselmann kinetic equation to the Phillips spectrum*, arXiv: 1212.6522.

[28] А. О. Короткевич, А. О. Прокофьев, В. Е. Захаров, “О темпе диссипации океанских волн, вызванной их обрушением”, *Письма в ЖЭТФ*, **109**:5 (2019), 312–319.

[29] В. Е. Захаров, М. М. Заславский, “Форма спектра энергонесущих компонент водной поверхности в слаботурбулентной теории ветровых волн”, *Изв. АН СССР. Физ. атмосф. и океана*, **19**:3 (1983), 282–291.

[30] С. И. Бадулин, В. В. Геогджаев, “Оценка параметров роста ветрового волнения по спектральным потокам”, *Изв. вузов. Радиофизика*, **61**:8–9 (2018), 614–621.

[31] M. A. Donelan, J. Hamilton, W. H. Hui, “Directional spectra of wind-generated wave”, *Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, **315**:1534 (1985), 509–562.

[32] J. A. Battjes, T. J. Zitman, L. H. Holthuijsen, “A reanalysis of the spectra observed in JONSWAP”, *J. Phys. Oceanogr.*, **17**:8 (1987), 1288–1295.

[33] A. N. Pushkarev, D. Resio, V. E. Zakharov, “Weak turbulent approach to the wind-generated gravity sea waves”, *Phys. D*, **184**:1–4 (2003), 29–63.

[34] O. M. Phillips, “On the response of short ocean wave components at a fixed wavenumber to ocean current variations”, *J. Phys. Oceanogr.*, **14**:9 (1984), 1425–1433.

[35] G. J. Komen, S. Hasselmann, K. Hasselmann, “On the existence of a fully developed wind-sea spectrum”, *J. Phys. Oceanogr.*, **14**:8 (1984), 1271–1285.

[36] P. A. Hwang, D. W. Wang, “Directional distributions and mean square slopes in the equilibrium and saturation ranges of the wave spectrum”, *J. Phys. Oceanogr.*, **31**:5 (2001), 1346–1360.

[37] P. A. Hwang, “Spectral signature of wave breaking in surface wave components of intermediate-length scale”, *J. Marine Systems*, **66**:1–4 (2007), 28–37.

[38] M. A. Donelan, “A nonlinear dissipation function due to wave breaking”, *ECMWF Workshop on Ocean Wave Forecasting* (Shinfield Park, Reading, UK, 2–4 July, 2001), Reading, UK, 2001, 87–94.

[39] A. J. Van der Westhuysen, M. Zijlema, J. A. Battjes, “Nonlinear saturation-based whitecapping dissipation in SWAN for deep and shallow water”, *Coast. Eng.*, **54**:2 (2007), 151–170.

[40] S. I. Badulin, V. E. Zakharov, *The generalized Phillips’ spectra and new dissipation function for wind-driven seas*, arXiv: 1212.0963.

Поступила в редакцию 29.08.2019,
после доработки 29.08.2019,
принята к публикации 2.10.2019