Письма в ЖЭТФ, том 106, вып. 3, с. 175 – 178

Численный и аналитический расчет параметров степенных спектров гравитационных волн на глубокой воде

В. В. Геогджаев[a,b1)], *В. Е. Захаров*[a,b,c,d,e]

[a] *Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, 117997 Москва, Россия*

[b] *Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия*

[c] *University of Arizona, Tuscon, 85721 Arizona, USA*

[d] *Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия*

[e] *Waves and Solitons LLC, 85015 Arizona, USA*

Поступила в редакцию 27 июня 2017 г.

Найдено асимптотическое поведение коэффициента взаимодействия для четырехволновых взаимодействий гравитационных волн на глубокой воде в предельном случае малости двух волновых векторов по сравнению с двумя другими (длинно-короткие взаимодействия). Данное поведение коэффициента позволяет численно определить безразмерные колмогоровские константы для степенных спектров Колмогорова–Захарова. Полученные результаты важны для сравнения теории слабой турбулентности с экспериментами и наблюдениями.

DOI: 10.7868/S0370274X17150103

Введение. Спектр ветрового морского волнения определяется нелинейными четырехволновыми взаимодействиями, описываемыми кинетическим уравнением Хассельманна [1], которое имеет семейство стационарных решений, известное как спектры Колмогорова–Захарова (KZ) (см., например, [2]).

В простейшем изотропном случае эти спектры являются степенными:

$$N_1 = c_p \frac{P^{1/3}}{k^4}, \tag{1}$$

$$N_2 = c_q \frac{Q^{1/3}}{k^{23/6}}. \tag{2}$$

В (1), (2) величина P – поток энергии (направлен в сторону больших волновых векторов k), Q – поток волнового действия (направлен в сторону малых волновых векторов). Здесь и далее мы полагаем плотность воды $\rho = 1$ и ускорение свободного падения $g = 1$.

Подобные спектры неоднократно наблюдались как в океане, так и в лабораторных экспериментах (см., например, [3]).

В настоящей статье мы приводим результаты численного расчета констант c_p и c_q, подтверждаемые аналитической оценкой асимптотик для степенных спектров (см. далее).

Асимптотики коэффициента взаимодействия. Дисперсионное соотношение для гравитационных волн на глубокой воде имеет вид

$$\omega = \sqrt{|\mathbf{k}|} \tag{3}$$

(здесь и далее полагаем ускорение свободного падения $g = 1$).

Мы используем гамильтоново описание гравитационных волн [4]. После канонического преобразования получаем комплексные нормальные переменные $b_{\mathbf{k}}$, удовлетворяющие уравнению [5, 6]:

$$\frac{\partial b_{\mathbf{k}}}{\partial t} + i\frac{\partial H}{\partial b^*_{\mathbf{k}}} = 0, \tag{4}$$

где гамильтониан

$$H = H_0 + H_{\text{int}} \tag{5}$$

представляем в виде ряда по формально малым амплитудам волн. Главный член дает линейное приближение

$$H_0 = \int \omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} b^*_{\mathbf{k}}\, d\mathbf{k}. \tag{6}$$

Следующий порядок описывает слабую нелинейность:

$$H_{\text{int}} = \int T_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4} b^*_{\mathbf{k}_1} b^*_{\mathbf{k}_2} b_{\mathbf{k}_3} b_{\mathbf{k}_4} \times \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4)\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2\, d\mathbf{k}_3\, d\mathbf{k}_4. \tag{7}$$

1) e-mail: vvg@mail.geogjaev.ru

Ядро T было впервые выведено в [4–6]. Различные выражения для этого ядра можно сравнить в [7, 8]. Мы представляем здесь новую, более простую форму T

$$
\begin{aligned}
T_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4} = -\frac{1}{4}\frac{1}{(k_1k_2k_3k_4)^{1/4}} \times \\
\times \Bigg\{ \frac{1}{2}\left(k_{1+2}^2 - (\omega_1+\omega_2)^4\right) \times \\
\times \left(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2 - k_1k_2 + \mathbf{k}_3\mathbf{k}_4 - k_3k_4\right) - \\
- \frac{1}{2}\left(k_{1-3}^2 - (\omega_1-\omega_3)^4\right) \times \\
\times \left(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_3 + k_1k_3 + \mathbf{k}_2\mathbf{k}_4 + k_2k_4\right) - \\
- \frac{1}{2}\left(k_{1-4}^2 - (\omega_1-\omega_4)^4\right) \times \\
\times \left(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_4 + k_1k_4 + \mathbf{k}_2\mathbf{k}_3 + k_2k_3\right) + \\
+ \left(\frac{4(\omega_1+\omega_2)^2}{k_{1+2} - (\omega_1+\omega_2)^2} - 1\right) \times \\
\times (\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2 - k_1k_2)(\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4 - k_3k_4) + \\
+ \left(\frac{4(\omega_1-\omega_3)^2}{k_{1-3} - (\omega_1-\omega_3)^2} - 1\right) \times \\
\times (\mathbf{k}_1\mathbf{k}_3 + k_1k_3)(\mathbf{k}_2\mathbf{k}_4 + k_2k_4) + \\
+ \left(\frac{4(\omega_1-\omega_4)^2}{k_{1-4} - (\omega_1-\omega_4)^2} - 1\right) \times \\
\times (\mathbf{k}_1\mathbf{k}_4 + k_1k_4)(\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3 + k_2k_3) \Bigg\},
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где k_{1+2}, k_{1-3}, k_{1-4} — модули векторов $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3$, $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4$ соответственно. Подчеркнем, что (8) рассчитано только для резонансного многообразия:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4, \\
&\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Матричный элемент T удовлетворяет условиям симметрии

$$T_{1234} = T_{2134} = T_{1243} = T_{3412}. \tag{10}$$

Теперь предположим, что два волновых вектора, например $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_3$, много короче остальных двух ($\mathbf{k}_2$ и $\mathbf{k}_4$). Учтя резонансное соотношение (9), можно увидеть, что $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_3$ имеют приблизительно одинаковую длину. Вектора $\mathbf{k}_2$ и $\mathbf{k}_4$ приблизительно равны как по длине, так и по направлению. Пример такой конфигурации показан на рис. 1.

Обозначим $k_1 = |\mathbf{k}_1|$, $k_2 = |\mathbf{k}_2|$ и т.д. Имеем $k_1 \approx k_3 \ll k_2 \approx k_4$.

После весьма громоздких вычислений мы находим следующую асимптотику для коэффициента взаимодействия:

$$
\begin{aligned}
T_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4} = \frac{1}{2}k_1^2k_2T_{\theta_1\theta_3} + o(k_1^2), \\
T_{\theta_1\theta_3} = (\cos\theta_1 + \cos\theta_3)(1 + \cos(\theta_1 - \theta_3)),
\end{aligned}
\tag{11}
$$

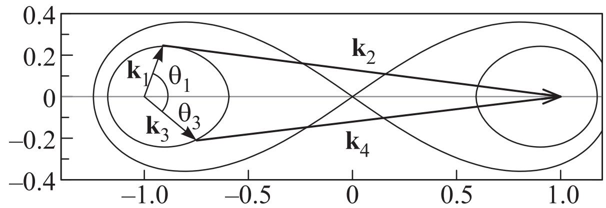

Рис. 1. Волновой квадруплет для длинно-коротких взаимодействий. Изображена кривая $\omega_1 + \omega_2 = \mathrm{const}$, любые две ее точки составляют резонансный квадруплет. Углы θ_1 и θ_3 берутся по отношению к вектору $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4$. "Восьмерка" представляет собой кривую Филлипса

где θ_1 – угол между малым вектором $\mathbf{k}_1$ и вектором $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ (см. рис. 1), аналогично определяется θ_3.

В диагональном случае $\theta_1 = \theta_3$, $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_3$, $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_4$:

$$T(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = 2k_1^2k_2\cos(\theta_1). \tag{12}$$

Степенные решения кинетического уравнения. Стохастическое поле гравитационных волн статистически описывается спектром волнового действия $N_{\mathbf{k}}$:

$$\langle b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}'}^* \rangle = N_{\mathbf{k}}(t)\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}. \tag{13}$$

Действие $N_{\mathbf{k}}(t)$ подчиняется уравнению Хассельманна (кинетическому уравнению):

$$\frac{dN}{dt} = S_{\mathrm{nl}}, \tag{14}$$

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{nl}} = \pi g^2 \int\limits_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3} \left(T_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}\right)^2 \times \\
\times \left(N_{\mathbf{k}}N_{\mathbf{k}_2}N_{\mathbf{k}_3} + N_{\mathbf{k}_1}N_{\mathbf{k}_2}N_{\mathbf{k}_3} - \right. \\
\left. - N_{\mathbf{k}}N_{\mathbf{k}_1}N_{\mathbf{k}_2} - N_{\mathbf{k}}N_{\mathbf{k}_1}N_{\mathbf{k}_3}\right) \times \\
\times \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)\,\delta(\omega + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \times \\
\times\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2\, d\mathbf{k}_3.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Будем искать решение стационарного уравнения

$$S_{\mathrm{nl}} = 0. \tag{16}$$

Предположим, что решение уравнения (16) является степенной функцией

$$N = ak^{-x}. \tag{17}$$

Тогда

$$S_{\mathrm{nl}} = a^3\, g^{\frac{3}{2}}\, k^{-3x + \frac{19}{2}}\, F(x), \tag{18}$$

где F – безразмерная функция, зависящая только от x.

Интегральная форма для функции F. Безразмерная функция F может быть представлена в интегральной форме.

Введем базовый вектор

$$\mathbf{k}_\mathrm{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = \frac{1}{2}(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \tag{19}$$

(здесь использовано условие резонанса (9)). Затем нормируем вектора квадруплета $\tilde{\mathbf{k}}_1$, $\tilde{\mathbf{k}}_2$, $\tilde{\mathbf{k}}_3$, $\tilde{\mathbf{k}}_4$ следующим образом:

$$\mathbf{k}_i = k_\mathrm{b}\tilde{\mathbf{k}}_i. \tag{20}$$

Нормированный коэффициент взаимодействия $\tilde{T}$ имеет вид

$$T_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4} = k_\mathrm{b}^3 \tilde{T}_{\tilde{\mathbf{k}}_1\tilde{\mathbf{k}}_2\tilde{\mathbf{k}}_3\tilde{\mathbf{k}}_4}. \tag{21}$$

Вместо нормированных ω_i мы введем переменные s и s':

$$s = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2\sqrt{gk_\mathrm{b}}} \quad s' = \frac{\omega_3 + \omega_4}{2\sqrt{gk_\mathrm{b}}}. \tag{22}$$

(Условие резонанса принимает вид $s = s'$.)

Теперь, приняв нормированные вектора $\tilde{\mathbf{k}}_1$ и $\tilde{\mathbf{k}}_3$ за независимые переменные, получим следующий вид для F:

$$F(x) = 2\pi \int\limits_{\tilde{k}_1<\tilde{k}_2,\, \tilde{k}_3<\tilde{k}_4} \left(\tilde{T}_{\tilde{\mathbf{k}}_1\tilde{\mathbf{k}}_2\tilde{\mathbf{k}}_3\tilde{\mathbf{k}}_4}\right)^2 \left(\tilde{k}_1\tilde{k}_2\tilde{k}_3\tilde{k}_4\right)^{-x} \times$$
$$\times \left(\tilde{k}_1^{-\frac{23}{2}+3x} + \tilde{k}_2^{-\frac{23}{2}+3x} - \tilde{k}_3^{-\frac{23}{2}+3x} - \tilde{k}_4^{-\frac{23}{2}+3x}\right) \times$$
$$\times \left(\tilde{k}_1^x + \tilde{k}_2^x - \tilde{k}_3^x - \tilde{k}_4^x\right) \delta(s - s')\, d\tilde{\mathbf{k}}_1\, d\tilde{\mathbf{k}}_3. \tag{23}$$

Входящие в (23) переменные s и $\tilde{\mathbf{k}}_2$ определяются через $\tilde{\mathbf{k}}_1$, а переменные s' и $\tilde{\mathbf{k}}_4$ – через $\tilde{\mathbf{k}}_3$.

Свойства функции F. Легко показать, что интегралы в (23) сходятся, если

$$\frac{5}{2} < x < \frac{19}{4}; \tag{24}$$

это “окно возможностей” для степенных решений. На концах этого интервала $F \to \infty$. Используя асимптотику (11), мы находим

$$F \to \frac{25\pi^3}{4}\frac{1}{x - \frac{5}{2}}, \quad x \to \frac{5}{2},$$
$$F \to \frac{1045\pi^3}{256}\frac{1}{\frac{19}{4} - x}, \quad x \to \frac{19}{4}. \tag{25}$$

Подчеркнем, что (25) является результатом строгих аналитических вычислений.

Функция F была рассчитана численно. Отличное совпадение асимптотического поведения F с асимптотами, полученными аналитически, подтверждает точность численного кода.

Функция F показана на рис. 2.

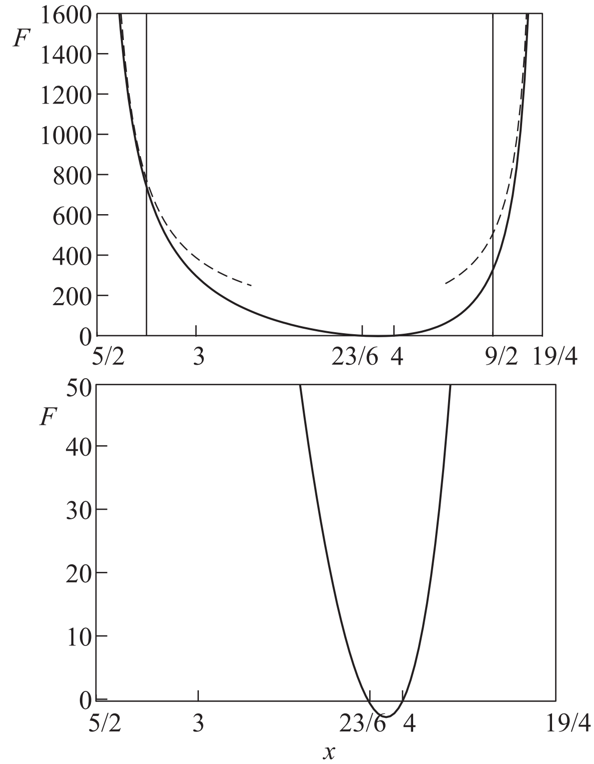

Рис. 2. График функции F с ее асимптотами. На втором рисунке часть графика с нулями функции в увеличенном масштабе

В соответствии с общей теорией [6] функция F имеет ровно два нуля: $x = 4$ и $x = 23/6$. Соответствующими им спектрами Колмогорова–Захарова являются

$$N_k^{(1)} = c_p P_0^{1/3}\frac{1}{k^4}, \tag{26}$$

$$N_k^{(2)} = c_q Q_0^{1/3}\frac{1}{k^{23/6}}, \tag{27}$$

где P_0 – поток энергии, Q_0 – поток волнового действия. Безразмерные константы c_p and c_q определяются первыми производными F:

$$c_p = \left(\frac{3}{2\pi F'(4)}\right)^{1/3}, \tag{28}$$

$$c_q = \left(-\frac{3}{2\pi F'(23/6)}\right)^{1/3}. \tag{29}$$

Различные оценки c_p и c_q приведены в [9].

Наши численные вычисления производных функции F при $x = 4$ и $x = 23/6$ дают

$$c_p = 0.203, \quad c_q = 0.194. \tag{30}$$

Необходимо подчеркнуть, что известный спектр Филлипса [10]

$$N_\mathbf{k} = \frac{\alpha}{\omega k^4} \sim k^{-9/2}$$

также принадлежит к “окну возможностей” для степенных спектров, хотя и не является колмогоровским.

Мы рассчитали, что при $x = 9/2$ значение

$$F = 327.$$

Авторы благодарят С.И. Бадулина за полезные обсуждения. Авторы признательны за поддержку Российскому научному фонду, грант # 14-22-00174.

---

1. K. Hasselmann, J. Fluid Mech. **12**, 481 (1962).
2. V.E. Zakharov, V.S. Lvov, and G. Falkovich, *Kolmogorov Spectra of Turbulence I. Wave turbulence*, Springer-Verlag, Berlin (1992).
3. V.E. Zakharov, S.I. Badulin, P. A. Hwang, and G. Caulliez, J. Fluid Mech. **780**, 503 (2015).
4. V.E. Zakharov, Prikl. Mekh. Tekh. Fiz. **9**(2), 86 (1968) [J. Appl. Mech. Tech. Phys. **9**(2), 190 (1968/1972)].
5. V.P. Krasitskii, J. Fluid Mech. **272**, 1 (1994).
6. V.E. Zakharov, Eur. J. Mech. B/Fluids **18**(3), 327 (1999).
7. A.I. Dyachenko and Y.V. Lvov, J. Phys. Oceanography **25**, 3237 (1995).
8. S.I. Badulin, A.N. Pushkarev, D. Resio, and V.E. Zakharov, Nonlin. Processes Geophys. **12**, 891 (2005).
9. S.I. Badulin and V.E. Zakharov, Nonlin. Processes Geophys. **24**, 237 (2017).
10. O.M. Phillips, J. Fluid Mech. **4**, 426 (1958).