

© 1991 г.

УБЫВАЮЩИЕ РЕШЕНИЯ И ЗАКОНЫ ДИСПЕРСИИ В $(2 + 1)$ -МЕРНОМ МЕТОДЕ ОДЕВАНИЯ

Л. В. БОГДАНОВ, В. Е. ЗАХАРОВ

Предложена процедура выделения убывающих, несингулярных данных Коши для широкого класса $(2 + 1)$ -мерных нелинейных дифференциальных уравнений, использующая „метод одевания“ Захарова–Шабата. Развита техника одевания для уравнения Буссинеска. Вопрос о выделении малых убывающих решений для этого уравнения сводится к задаче Карлемана на кривых второго порядка на плоскости.

ВВЕДЕНИЕ

Развитие метода обратной задачи рассеяния привело к открытию существования обширного класса $(2 + 1)$ -мерных нелинейных дифференциальных уравнений, допускающих эффективное аналитическое исследование. Характеризуя эти уравнения, мы сознательно избегаем термина „интегрируемые уравнения“, потому что интегрируемыми в смысле Лиувилля эти уравнения являются далеко не всегда. Тем не менее они всегда имеют бесконечные (возможно, неполные) наборы законов сохранения, бесконечные наборы в той или иной степени простых аналитических решений и обширные группы симметрий, изучение которых далеко не закончено. Наиболее простой способ вычисления этих уравнений основан на „методе одевания“, ведущем начало с работы В.Е.Захарова и А.Б.Шабата [1] и далеко развитого впоследствии в работах [2–4]. В первоначальном варианте метод одевания [1] использовал алгебраические свойства интегрального уравнения типа Гельфанда–Левитана–Марченко, в наиболее современной трактовке [4] вместо него используется „нелокальная $\bar{\partial}$ -проблема“ на плоскости комплексного спектрального параметра. Тесная связь между этими подходами была проанализирована в работе [5].

Уравнения, о которых идет речь, разбиваются на большие классы, связанные сложными соотношениями эквивалентности, представляющими собой аналоги калибровочной эквивалентности в $(1 + 1)$ -мерных системах (см., например, [6]). В работах [6,7] показано, что в каждом классе можно выделить уравнение канонического типа, обладающее простой гамильтоновской структурой и принципом наименьшего действия, при этом неожиданно оказалось, что уравнение канонического типа вкладывается как частный случай (редукция) в известную систему „ N -волн“, описанную еще в работе [1]. В простейшем варианте эта система имеет прозрачный физический смысл, кроме нее имеют физическую интерпретацию (и имеют весьма фундаментальное значение с точки зрения приложений к физике)

Ключевые слова: интегрируемые уравнения, метод одевания.

еще уравнение Кадомцева–Петвиашвили, известное в двух, принципиально различных модификациях (КП-1 и КП-2), и уравнение Дэви–Стюартсона, допускающее четыре физически различные модификации. Среди других уравнений известно уравнение Веселова–Новикова [8], имеющее весьма компактную форму, но не нашедшее пока физических приложений.

Метод одевания при всех его достоинствах имеет один недостаток. Он является по существу своему локальным, т.е. строит фактически набор ростков решения, заданных в окрестности тех точек $(2+1)$ -мерного пространства, в которых нелокальная $\bar{\partial}$ -проблема разрешима. При этом решение может не существовать глобально. Обычно предполагается, что одна из координат t имеет физический смысл времени, так что уравнение принадлежит к эволюционному типу, и для него рассматривается задача Коши при фиксированном значении t . При этом возникает вопрос о том, какого рода данные Коши в плоскости x, y (остальные переменные) описывают заданное одевание, определяемой фиксацией ядра нелокальной $\bar{\partial}$ -проблемы. При одевании ядром общего вида данные Коши имеют в плоскости x, y сингулярности и не являются убывающими при $r \rightarrow \infty$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, так что преобразования Фурье в обычном смысле у них не существует.

В связи с этим возникает естественный вопрос о выделении тех классов одевающих ядер, которые обеспечивают „достаточно хорошие свойства“ (отсутствие сингулярностей и убывание при $r \rightarrow \infty$) данных Коши. Этот вопрос является достаточно трудным и полностью решен [9] только в одном случае (для частного случая уравнение Веселова–Новикова). Нетривиальным является даже более простой вопрос об описании достаточно малых (в смысле некоторой нормы) данных Коши. Для уравнения КП-1 он был решен в работе Манакова [10], для уравнения КП-2 — в известной работе Абловица, Фокаса и Бар-Якоба [11], в которой впервые использовалась нелокальная $\bar{\partial}$ -проблема. Для уравнения Веселова–Новикова эта задача была решена в работе Гриневича и Манакова [12]. Во всех этих работах использовались методы, отличные от метода одевания.

Первая цель настоящей работы — показать, что в рамках метода одевания выделение убывающих, несингулярных и малых данных Коши может быть проделано в общем виде при помощи весьма простого приема. Ранее этот прием был использован одним из авторов в работе [5], где были элементарно воспроизведены результаты работы [10, 11]. В настоящей работе мы также воспроизведем на языке метода одевания результат работы [12]. Далее мы покажем, что указанный прием весьма полезен при изучении некоторых $(1+1)$ -мерных систем, к числу которых относится, например, уравнение Буссинеска. Мы разовьем технику одевания для этого уравнения и покажем, что нелокальная $\bar{\partial}$ -проблема в данном случае сводится к задаче Карлемана на кривых второго порядка на плоскости. Далее мы рассмотрим вопрос о „законах дисперсии“, описываемых нашими уравнениями. Этот вопрос эквивалентен вопросу об описании двумерного многообразия, на котором обращается в нуль символ линейной части уравнения. Вопрос о законах дисперсии весьма важен с точки зрения выяснения возможных физических приложений изучаемого уравнения. Закон дисперсии инвариантен относительно калибровки и совпадает у всех уравнений, относящихся к одному классу эквивалентности. Мы покажем, что многообразие законов дисперсии является в нашем случае рациональным и дадим его явную рациональную параметризацию. В частности, среди построенных законов дисперсии содержатся все вырожденные законы дисперсии, описанные в работе [13]. (Для них многообразие законов дисперсии является определенной поверхностью переноса).

§ 1. ОБЩАЯ КОНСТРУКЦИЯ

Напомним основную конструкцию метода одевания, позволяющую строить нелинейные уравнения с бесконечными группами симметрий (см. [5]). Зададим на комплексной плоскости набор рациональных функций $K_i(\lambda)$ ($i = 1; 2; 3$) и рассмотрим набор коммутирующих дифференциальных операторов $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + K_i(\lambda)$, действующих на комплекснозначную функцию $\chi(\lambda, \bar{\lambda}, x_i)$. Относительно функции χ предположим, что она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \chi + \hat{R} \chi = 0, \quad (1.1)$$

где $\hat{R}$ — интегральный по $\lambda, \bar{\lambda}$ оператор, удовлетворяющий условиям

$$[D_i, \hat{R}] = 0. \quad (1.2)$$

Пусть q — совокупный дивизор полюсов функций $K_i(\lambda)$, U — совокупность значений функции χ и ее производных по λ в точках из q . В работе [4] было показано, что в U можно выделить конечную совокупность функций $u_k(x_1, x_2, x_3)$, удовлетворяющих замкнутой системе нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Вид этой системы зависит от выбора условия нормировки наложенного на функцию χ . Нормировка $\chi \rightarrow 1$ при $\lambda \rightarrow \infty$ называется канонической и рассматривается наиболее часто.

Оператор $\hat{R}$ действует на функцию χ по закону

$$\hat{R} \chi = \iint \chi(\eta, \bar{\eta}) R(\lambda, \bar{\lambda}, \eta, \bar{\eta}) d\eta \wedge d\bar{\eta}.$$

В силу условия (1.2) ядро оператора $\hat{R}$ имеет вид

$$\begin{aligned} R(\lambda, \bar{\lambda}, \eta, \bar{\eta}, x_i) = \\ = \exp\left(\sum_i x_i (K_i(\eta) - K_i(\lambda))\right) R_0(\lambda, \bar{\lambda}, \eta, \bar{\eta}), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где R_0 — произвольная функция четырех переменных. Каждый выбор ядра R_0 , равного нулю в некоторой окрестности точек дивизора q по λ и по η , приводит к построению некоторого точного решения системы уравнений на функции $u_k(x_i)$. Заметим, что эти функции зависят от трех переменных, и общие решения должны определяться функциями двух переменных. Отсюда ясно, что отображение $R_0 \rightarrow u_k$ весьма неоднозначно, и в классе „одевающих функций“ существуют эквивалентные одевания, приводящие к одному и тому же набору u_k . Нахождение этого соотношения эквивалентности является важной и пока не решенной до конца задачей теории.

В ряде важных случаев нелокальная $\bar{\partial}$ -проблема сводится к нелокальной задаче Римана на кривой $\lambda = \lambda(s)$. В этом случае ядро R_0 сингулярно

$$\begin{aligned} R_0 = T(s, s') \delta(\lambda - \lambda(s)) \delta(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}(s)) \times \\ \times \delta(\eta - \eta(s')) \delta(\bar{\eta} - \bar{\eta}(s')). \end{aligned} \quad (1.4)$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что переменная $x_3 = t$ имеет смысл времени, а переменные x_1, x_2 — смысл координат на плоскости. Иногда удобно считать их комплексными, $x_1 = z$, $x_2 = \bar{z}$.

При применении к нелинейным уравнениям метода одевания возникает следующий вопрос — какие одевания приводят к регулярным решениям нелинейных уравнений, не имеющим по крайней мере при достаточно малых t особенностей на плоскости x_1, x_2 ? На этот трудный вопрос мы пока не можем ответить. Основное содержание нашей работы состоит в простом замечании, позволяющем описать „окрестность нуля“, т.е. выделить одевания, приводящие к достаточно малым убывающим решениям нелинейных уравнений.

Суть этого замечания состоит в следующем. Рассмотрим многообразие в пространстве $\mathbb{C}^2$ переменных λ, η , на котором вещественная часть показателя экспоненты в формуле (1.3), определяющего зависимость от пространственных переменных x_1, x_2 (или $z, \bar{z}$), обращается в нуль. Это многообразие определяется условиями

$$\operatorname{Re}(K_i(\eta) - K_i(\lambda)) = 0, \quad i = 1, 2, \eta \neq \lambda, \quad (1.5)$$

или

$$\bar{K}_1(\eta) - \bar{K}_1(\lambda) = K_2(\lambda) - K_2(\eta), \quad \eta \neq \lambda, \quad (1.5')$$

и имеет в случае общего положения вещественную размерность 2. На многообразии (1.5) определено локально взаимно-однозначное преобразование

$$\begin{aligned} (\lambda, \eta) &\rightarrow (k_1, k_2), \\ k_1 &= i(K_1(\lambda) - K_1(\eta)), \quad k_2 = i(K_2(\lambda) - K_2(\eta)), \end{aligned} \quad (1.6)$$

т.е. функции k_1 и k_2 определяют на многообразии (1.5) локальные вещественные координаты.

Предположим, что носитель ядра интегрального оператора $\hat{R}_0$ принадлежит многообразию (1.5) (или (1.5')), а ядро оператора $\hat{R}_0$ достаточно мало (чтобы обеспечить существование и единственность решения задачи (1.1)) и регулярно на многообразии (1.5) (или (1.5')). Тогда решение задачи (1) $\chi(\lambda, \bar{\lambda}, x_1, x_2)$ существует и единственно при всех x_1, x_2 , так как ядро $\hat{R}_0$ остается в этом случае малым при любом x_1, x_2 , и стремится к 1 при $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \infty$ (следует из оценки поведения интеграла типа интеграла Фурье). Формально решение задачи (1.1) можно записать в виде

$$\chi = 1 - (1 + \bar{\partial}^{-1} \hat{R})^{-1} \bar{\partial}^{-1} \hat{R} 1. \quad (1.7)$$

Таким образом, мы нашли достаточное условие получения с помощью метода одевания в окрестности $t = 0$ несингулярных малых убывающих решений. Скорость убывания решений зависит от степени гладкости ядра $R_0(\lambda, \bar{\lambda}, \eta, \bar{\eta})$ и поведения ядра в особых точках преобразования (1.6).

В линейном пределе решение задачи (1.1) имеет вид

$$\chi = 1 - \bar{\partial}^{-1} \hat{R} 1. \quad (1.8)$$

При выполнении условия (1.5) ядро R_0 зависит от двух вещественных переменных. Коэффициенты разложения по λ на бесконечности выражения $\bar{\partial}^{-1} \hat{R} 1$ представляют собой интегралы типа обратного преобразования Фурье, в которых роль переменных k_1, k_2 играют функции $i(K_1(\eta) - K_1(\lambda)), i(K_2(\eta) - K_2(\lambda))$, а роль преобразования Фурье — ядро R_0 .

Таким образом, в линейном пределе метод одевания переходит в метод Фурье, причем закон дисперсии для линейного предела соответствующих уравнений

может быть параметризован следующим образом:

$$\begin{aligned} k_1 &= i(K_1(\eta) - K_1(\lambda)), \\ k_2 &= i(K_2(\eta) - K_2(\lambda)), \\ \omega &= i(K_3(\eta) - K_3(\lambda)) \end{aligned} \quad (1.9)$$

или

$$\begin{aligned} k &= \overline{K}_1(\eta) - \overline{K}_1(\lambda), \\ \omega &= i(K_3(\eta) - K_3(\lambda)). \end{aligned} \quad (1.9')$$

Если мнимая часть ω равна нулю, метод одевания дает малое регулярное решение, определенное на всей временной оси.

Параметризация (1.9) (или (1.9')) позволяет исследовать закон дисперсии для линейного предела уравнений, к которым применим метод одевания, без привлечения явной формы самих уравнений, которая может быть весьма громоздкой.

§ 2. ПРИМЕРЫ

1. Уравнение Кадомцева–Петвиашвили. Уравнению Кадомцева–Петвиашвили

$$\frac{\partial}{\partial x}(v_t + \frac{1}{4}v_{xxx} + 3v_x v) = -\frac{3}{4}\alpha^2 v_{yy} \quad (2.1)$$

соответствуют в методе одевания дифференциальные операторы

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x} + i\lambda, D_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{\alpha}\lambda^2, D_3 = \frac{\partial}{\partial t} + i\lambda^3$$

(для КП $\alpha = 1$, для КПИ $\alpha = i$), причем функция $v = -iu_x$, где $u(x, y, t)$ — первый коэффициент разложения по λ на бесконечности канонически нормированного решения задачи (1.1). Условие (1.5) для уравнения КПИ

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(i\eta - i\lambda) &= 0, \\ \operatorname{Re}(i\lambda^2 - i\eta^2) &= 0 \end{aligned}$$

определяет многообразие $\lambda \in \mathbb{R}, \eta \in \mathbb{R}$. Таким образом, малые убывающие решения для уравнения КПИ даются нелокальной задачей Римана

$$\begin{aligned} \chi^+(\lambda) - \chi^-(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_0(\lambda, \eta) \exp(i(-x(\lambda - \eta) - y(\eta^2 - \lambda^2) + \\ &+ t(\eta^3 - \lambda^3))) (\chi^+(\eta) + \chi^-(\eta)) d\eta; \lambda \in \mathbb{R}, \eta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Для уравнения КПИ условие (1.5)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(i\eta - i\lambda) &= 0, \\ \operatorname{Re}(\eta^2 - \lambda^2) &= 0 \end{aligned}$$

определяет многообразие $\eta = -\bar{\lambda}$. В этом случае малые убывающие решения даются $\bar{\partial}$ -проблемой

$$\frac{\partial \chi}{\partial \bar{\lambda}} + T(\lambda) \exp(-ix(\lambda + \bar{\lambda}) + y(\bar{\lambda} - \lambda^2) - it(\lambda^3 + \bar{\lambda}^3)) \chi(-\bar{\lambda}) = 0.$$

Таким образом, малые убывающие решения для КПИ даются нелокальной задачей Римана, а для КПИ — $\bar{\partial}$ -проблемой с сопряжением $\eta = -\bar{\lambda}$, и мы простым исследованием с помощью предложенных выше критериев получили задачи, которые использовались исторически для интегрирования КПИ и КПИ.

2. Уравнение Веселова–Новикова. Уравнению Веселова–Новикова

$$(\partial_t + \partial^3 + \bar{\partial}^3)u + 3\partial(u\bar{\partial}^{-1}\partial u) + 3\bar{\partial}(u\partial^{-1}\bar{\partial}u) = 0, \quad \partial = \frac{\partial}{\partial z}, \quad (2.2)$$

соответствуют в методе одевания дифференциальные операторы

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial z} + i\alpha\lambda^{-1}, D_2 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + i\alpha\lambda, D_3 = \frac{\partial}{\partial t} + i\alpha^3(\lambda^3 + \bar{\lambda}^{-3}), \quad \alpha = 1; i.$$

L -оператором уравнения Веселова–Новикова является двумерный оператор Шрёдингера, причем $\alpha = i$ соответствует значению энергии -1 , а $\alpha = 1$ энергии $+1$. Исследуем многообразие, определяемое условием (1.5'):

$$(\overline{i\alpha\eta^{-1}} - i\alpha\lambda^{-1}) = i\alpha\lambda - i\alpha\eta. \quad (2.3)$$

В случае энергии $+1$ это многообразие состоит из двух пересекающихся кусков $|\lambda| = |\eta| = 1$ и $\eta = -\bar{\lambda}^{-1}$, и убывающие решения даются комбинированной задачей: на единичной окружности — нелокальная задача Римана, вне единичной окружности — $\bar{\partial}$ -проблема с инволюцией $\eta = -\bar{\lambda}^{-1}$. В случае энергии -1 многообразие (1.5') состоит из одного куска; $\eta = \bar{\lambda}^{-1}$ и убывающие решения даются $\bar{\partial}$ -проблемой с инволюцией $\eta = \bar{\lambda}^{-1}$.

3. Уравнения с функциями $K_i(\lambda)$., обладающими симметриями.

Симметрии функций $K_i(\lambda)$, $i = 1; 2$, существенно упрощают исследование условия (1.5) (см. [7]). Пусть функции $K_i(\lambda)$ обладают симметрией

$$\overline{K_i(\bar{\lambda})} = -K_i(\lambda), \quad i = 1; 2. \quad (2.4)$$

Уравнения (5) имеют в этом случае решение $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, соответствующее нелокальной задаче Римана на вещественной оси. При наличии симметрии

$$\overline{K_i(-\bar{\lambda})} = K_i(\lambda), \quad i = 1; 2, \quad (2.5)$$

уравнения (5) имеют решение $\eta = -\bar{\lambda}$, соответствующее $\bar{\partial}$ -проблеме с сопряжением. В случае наличия обеих симметрий для получения убывающих решений можно использовать комбинированную задачу (нелокальная задача Римана на вещественной оси, вне вещественной оси — $\bar{\partial}$ -проблема с сопряжением $\eta = -\bar{\lambda}$).

§ 3. МАТРИЧНОЕ ОБОБЩЕНИЕ

Случай матричной нелокальной $\bar{\partial}$ -проблемы требует модификации. Решение χ ищется в классе комплексных матричнозначных функций переменного λ , ядро оператора $\hat{R}$ также матричнозначное. Коммутирующие дифференциальные операторы задаются формулами $D_i\chi = \frac{\partial\chi}{\partial x_i} + \chi I_i(\lambda)$, причем $I_i(\lambda)$ — коммутирующие матричнозначные функции. Формула (1.3) приобретает вид

$$R = \exp(I_i(\eta)x_i)R_0\exp(-I_i(\lambda)x_i). \quad (3.1)$$

Приведем простые примеры использования развитой техники в матричном случае. Рассмотрим систему „ N -волн“:

$$[I_2, \frac{\partial Q}{\partial x_1}] - [I_1, \frac{\partial Q}{\partial x_2}] + I_2[I_1, \frac{\partial Q}{\partial x}] - I_1[I_2, \frac{\partial Q}{\partial x}] + [[I_2, Q], [I_1, Q]] = 0. \quad (3.2)$$

Этой системе соответствуют коммутирующие дифференциальные операторы $D_0\chi = (\frac{\partial}{\partial x} + i\lambda)\chi$, $D_k\chi = \frac{\partial\chi}{\partial x_k} + i\chi I_k\lambda$, $k = 1; 2$ (I_1 и I_2 — диагональные матрицы),

а функция Q получается в методе одевания как первый коэффициент разложения на бесконечности канонически нормированного решения матричной нелокальной $\bar{\partial}$ -проблемы (1.1). Заметим, что диагональные элементы матрицы Q в уравнение (3.2) не входят.

Условия получения малых убывающих (в смысле убывания каждого недиагонального матричного элемента) решений имеют вид

$$\operatorname{Im}(I_i^{pp}\eta - I_i^{qq}\lambda) = 0 \quad \forall p, q. \quad (3.3)$$

В случае вещественных матриц I_1, I_2 совокупности этих условий удовлетворяет только многообразие $\lambda \in \mathbb{R}, \eta \in \mathbb{R}$ и, таким образом, малые убывающие решения даются нелокальной задачей Римана на вещественной оси.

Аналогично исследуется уравнение DSII:

$$\begin{cases} iu_t + \frac{1}{2}(u_{xx} - u_{yy}) + |u|^2 u = \Phi u, \\ \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 2|u|_{xx}^2. \end{cases} \quad (3.4)$$

Этому уравнению соответствуют коммутирующие дифференциальные операторы $D_1\chi = \frac{\partial\chi}{\partial x} + i\lambda\chi\sigma_3$, $D_2\chi = \frac{\partial\chi}{\partial y} - \lambda\chi$, $D_3\chi = \frac{\partial\chi}{\partial t} - i\lambda^2\chi\sigma_3$, а функции u и $\bar{u}$ даются антидиагональными элементами первого коэффициента разложения на бесконечности канонически нормированного решения нелокальной $\bar{\partial}$ -проблемы (на вопросах редукции мы не останавливаемся). Условие получения малых убывающих решений в этом случае имеет вид

$$\operatorname{Im}(\eta + \lambda) = 0; \quad \operatorname{Re}(\eta - \lambda) = 0, \quad (3.5)$$

если ядро $\bar{\partial}$ -проблемы — бездиагональная матрица. Условию (3.5) удовлетворяет только многообразие $\eta = \bar{\lambda}$, и, таким образом, малые убывающие решения даются $\bar{\partial}$ -проблемой с сопряжением $\eta = \bar{\lambda}$.

§ 4. ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА

Введем сначала слегка видоизмененное уравнение КП

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) v + \frac{1}{4} v_{xxx} + 3v_x v \right) = -\frac{3}{4} \alpha^2 v_{yy}, \quad (4.1)$$

которому соответствуют $K_1 = i\lambda$, $K_2 = \frac{1}{\alpha}\lambda^2$, $K_3 = \pm i\lambda + i\lambda^3$. Рассмотрим многообразие

$$\lambda^3 \pm \lambda - (\eta^3 \pm \eta) = 0. \quad (4.2)$$

Если носитель ядра интегрального оператора $\hat{R}$ принадлежит многообразию (4.2), то решение задачи (1.1) с оператором (1.3) не зависит от t . Мы получаем возможность применять технику метода одевания к следующему одномерному уравнению:

$$\left(\frac{3}{4} \alpha^2 v_{yy} \mp v_{xx} \right) = - \left(\frac{1}{4} v_{xx} + \frac{3}{2} v^2 \right)_{xx}. \quad (4.3)$$

Для получения убывающих решений уравнения Буссинеска (4.3) нам необходимо исследовать пересечение многообразия (4.2) с многообразием, определяемым условием (1.5). При $\alpha = i$ получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \lambda\eta + (\eta^2 \pm 1) &= 0, \\ \lambda \in \mathbb{R}, \quad \eta \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

(Мы исключили локальную часть задачи (1.1), которая не дает убывающих решений). Уравнение (4.4) имеет решения только при знаке минус;

$$\eta = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{4-3\lambda^2}-\lambda). \quad (4.5)$$

Уравнение (4.4) в этом случае определяет эллипс в плоскости $\lambda \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{R}$. Равенство нулю ядра нелокальной задачи Римана вне этого эллипса является достаточным условием получения малых убывающих решений уравнения Буссинеска (при знаке $-$ и $\alpha = i$). Формула (4.5) определяет специальный характер нелокальности в нелокальной задаче Римана.

При $\alpha = 1$ из условия (1.5) и уравнения (4.2) получаем

$$\lambda^2 - \lambda\bar{\lambda} + \bar{\lambda}^2 \pm 1 = 0. \quad (4.6)$$

Уравнение (4.6) можно переписать в виде

$$\xi^2 - 3\mu^2 \pm 1 = 0, \quad \xi = \operatorname{Re}\lambda, \quad \mu = \operatorname{Im}\lambda. \quad (4.7)$$

Уравнение (4.7) определяет гиперболу в плоскости комплексной переменной λ . Нелокальная $\bar{\partial}$ -проблема с сопряжением $\eta = -\bar{\lambda}$, ядро которой равно нулю вне гиперболы (4.7), представляет собой задачу Карлемана. Решения этой задачи имеют разрыв на гиперболе (4.7), значение которого определяется значением решения в комплексно-сопряженной точке кривой. Таким образом, задачей, дающей малые убывающие решения для уравнения Буссинеска при $\alpha = 1$, является задача Карлемана на гиперболе (4.7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Захаров В.Е., Шабат А.Б., *Схема интегрирования нелинейных эволюционных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния.1*, Функцион. анализ и его прил. 6 (1974), 43-53.
- [2] Захаров В.Е., Шабат А.Б., *Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния*, Функцион. анализ и его прил. 13 (1979), 13-22.
- [3] Захаров В.Е., Манаков С.В., *Многомерные интегрируемые системы и методы построения их решений*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ, т. 133, 1984, с. 77-91.
- [4] Захаров В.Е., Манаков С.В., *Построение многомерных нелинейных интегрируемых уравнений и их решений*, Функцион. анализ и его прил. 19 (1985), 11-25.
- [5] Захаров В.Е., *Ударные волны, распространяющиеся по солитонам на поверхности жидкости*, Изв. высш. уч. зав. Радиофизика XXIX (1986), 1073-1080.
- [6] Bogdanov L.V., Manakov S.V., *The non-local $\bar{\partial}$ -problem and $(2+1)$ -dimensional soliton equations*, J. Phys. A: Math. Gen. 21 (1988), L537-L544.
- [7] Богданов Л.В., *Нелокальная $\bar{\partial}$ -проблема и $(2+1)$ -мерные нелинейные интегрируемые уравнения*. Автореф. дис. на соис. учен. степ. канд. физ.-мат. наук, Черноголовка, 1988.
- [8] Веселов А.П., Новиков С.П., *Конечнозонные двумерные операторы Шрёдингера. Явные формулы и эволюционные уравнения*, ДАН СССР 279 (1984), 20-24.
- [9] Гриневич П.Г., Новиков С.П., *Двумерная "обратная задача рассеяния" для отрицательных энергий и обобщенно-аналитические функции. I. Энергии ниже основного состояния*, Функцион. анализ и его прил. 22 (1988), 23-33.
- [10] Manakov S.V., *The inverse scattering transform for the time-dependent Schrödinger equation and Kadomtsev-Petviashvili equation*, Physica 3D 3 (1981), 420-427.
- [11] Ablowitz M.J., Bar Yaacov D., Fokas A.S., *On the inverse scattering transform for the Kadomtsev-Petviashvili equation*, Stud. Appl. Math. 69 (1983), 135-143.
- [12] Гриневич П.Г., Манаков С.В., *Общая задача теории рассеяния для двумерного оператора Шрёдингера, $\bar{\partial}$ -метод и нелинейные уравнения*, Функцион. анализ и его прил. 20 (1986), 14-24.
- [13] Zakharov V.E., Schulman E.I., *On additional motion invariants of classical Hamiltonian wave systems*, Physica 29D 29 (1988), 283-320.

Поступило 6 мая 1990 г.