

МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ С ПЕРЕМЕННЫМ СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Бурцев С. П., Захаров В. Е., Михайлов А. В.

В традиционной схеме метода обратной задачи рассеяния спектральный параметр вспомогательной линейной задачи считается постоянной величиной. В работе предлагается считать его величиной переменной, удовлетворяющим переопределенной системе дифференциальных уравнений, которая однозначно определяется вспомогательной линейной задачей. Нелинейные уравнения, возникающие при таком подходе, содержат, как правило, явную зависимость от координат. Этот метод позволяет построить, кроме известных уравнений (уравнение гравитации, уравнение Гайзенберга в аксиальной геометрии и т. д.), ряд новых интегрируемых уравнений, имеющих прикладное значение.

ВВЕДЕНИЕ

Метод обратной задачи рассеяния, открытый в 1967 году, является сейчас незаменимым инструментом математической физики, позволяющим эффективно исследовать многочисленные нелинейные уравнения в частных производных, возникающие в приложениях. Весьма общая формулировка этого метода была предложена в работе [1] (см. также [2]).

В рамках этой формулировки нелинейные интегрируемые уравнения возникают как условия совместности переопределенной системы линейных уравнений

$$(B.1) \quad \Phi_{\xi} = U\Phi, \quad \Phi_{\eta} = V\Phi.$$

Здесь U , V и Φ — матричные $N \times N$ комплекснозначные функции ξ , η и спектрального параметра λ , который предполагается произвольной комплексной константой. Зависимость U и V от λ считается рациональной. В случае общего положения имеем

$$(B.2) \quad U(\lambda, \xi, \eta) = u_0(\xi, \eta) + \sum_{n=1}^{N_1} \frac{u_n(\xi, \eta)}{\lambda - \lambda_n(\xi)},$$

$$V(\lambda, \xi, \eta) = v_0(\xi, \eta) + \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n(\xi, \eta)}{\lambda - \mu_n(\eta)},$$

где $\lambda_n \neq \mu_n$. Ситуации совпадающих и кратных полюсов получаются из (B.2) с помощью предельных переходов. При этом важную роль играет полиномиальный случай

$$(B.3) \quad U = u_0 + u_1\lambda + \dots + u_i\lambda^i, \quad V = v_0 + v_1\lambda + \dots + v_j\lambda^j.$$

Условие совместности уравнений (B.1) имеет вид

$$(B.4) \quad U_{\eta} - V_{\xi} + [U, V] = 0.$$

Уравнения на функции u_n, v_n возникают из требования выполнения условия (B.4) тождественно по λ . Для решения этих уравнений используется «метод одевания», основанный на задаче Римана — Гильберта на комплексной плоскости λ . В сформулированную схему укладывается после соответствующих редукций большинство систем, интегрируемых методом обратной задачи.

Метод одевания наиболее развит в том случае, когда полюса $\lambda_n(\mu_n)$ не зависят от переменных $\xi(\eta)$. Возникающие при этом уравнения имеют постоянные коэффициенты. В частности, если положить

$$(B.5) \quad \Phi_{\xi} = \frac{u}{\lambda - 1} \Phi, \quad \Phi_{\eta} = \frac{v}{\lambda + 1} \Phi,$$

$$u = -g_{\xi} g^{-1}, \quad v = g_{\eta} g^{-1}, \quad g = \Phi|_{\lambda=0},$$

то для g получим уравнение «главного кирального поля» (см. [2])

$$(B.6) \quad (g_{\xi} g^{-1})_{\eta} + (g_{\eta} g^{-1})_{\xi} = 0.$$

К уравнению (B.6) близко по форме уравнение

$$(B.7) \quad (\alpha g_{\xi} g^{-1})_{\eta} + (\alpha g_{\eta} g^{-1})_{\xi} = 0,$$

имеющее переменные коэффициенты. Здесь $\alpha = \alpha(\xi, \eta)$ — скалярная функция, подчиняющаяся уравнению

$$(B.8) \quad \alpha_{\xi\eta} = 0.$$

Пусть g — симметричная вещественная матрица 2×2 , а $\alpha^2 = \det g$, тогда уравнение (B.7) описывает гравитационное поле в теории тяготения Эйнштейна при условии, что метрический тензор зависит только от двух переменных.

Уравнение (B.7) в общем случае не укладывается в изложенную выше схему. Однако в работах [3] было показано, что к нему при произвольной матричной размерности N также можно применить метод обратной задачи, причем требование вещественности и симметрии матрицы g не является обязательным. В работах [3] было найдено, что уравнение (B.7) является условием совместности следующей переопределенной системы:

$$(B.9) \quad D_1 \Phi = \frac{u}{\lambda - \alpha} \Phi, \quad D_2 \Phi = \frac{v}{\lambda + \alpha} \Phi,$$

где

$$(B.10) \quad D_1 = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{2\alpha_{\xi}}{\lambda - \alpha} \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda}, \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{2\alpha_{\eta}}{\lambda + \alpha} \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda},$$

$$u = -\alpha g_{\xi} g^{-1}, \quad v = \alpha g_{\eta} g^{-1}, \quad g = \Phi|_{\lambda=0}.$$

Операторы D_1, D_2 коммутируют при выполнении условия (B.8). В работах [3] для уравнения (B.7) был развит метод одевания и построены классы точных решений. К уравнению (B.7) возможен и другой подход. Как было показано в [4, 5], оно может быть извлечено из системы (B.4), если считать, что λ является некоторой функцией от ξ, η и дополнительной комп-

лексной константы z :

$$(B.11) \quad \lambda(z, \xi, \eta) = [h - f - z + \sqrt{(z - 2h)(z + 2f)}] / [f + h],$$

$$f = f(\xi), \quad h = h(\eta), \quad \alpha = f + h,$$

где f и h — произвольные функции. Далее величину z мы будем называть скрытым спектральным параметром. Отметим, что в работе [5] второй подход был развит глубже. В статье [4] для уравнений гравитации было найдено только представление Лакса. В работе [5] для систем типа (B.7) был построен метод одевания, найдены точные решения и исследованы законы сохранения.

В настоящей статье мы покажем, что прием, использованный в [4, 5], эквивалентен приему [3] и может быть развит до уровня общего метода, который будем называть методом обратной задачи с переменным спектральным параметром. Традиционный метод обратной задачи [1, 2] является частным случаем предлагаемого метода.

Уравнение (B.7) является примером интегрируемого уравнения, имеющего переменные коэффициенты. Этот пример отнюдь не является единичным. Целый ряд подобных уравнений приведен, например, в работе [6]. Простейший способ построения таких уравнений был намечен еще в работе [1]. В формулах (B.1), (B.2) можно считать, что полюса λ_n являются произвольными функциями переменной ξ , а полюса μ_n — также произвольными функциями переменной η . Условия (B.4) дадут теперь уравнения с переменными коэффициентами. В работе [7] было показано, что таким образом можно прийти к уравнению (B.7) в частном случае $N=2$, $g=g^{tr}$, отвечающему приложениям к теории гравитации.

Из работ [3, 8] следует, что метод одевания в случае «движущихся полюсов» существенно модифицируется по сравнению со случаем постоянных полюсов, изложенным в [1, 2].

Предлагаемый метод представляет возможность систематически изучать интегрируемые нелинейные уравнения в частных производных с переменными коэффициентами. Оказывается, что каждому уравнению с постоянными коэффициентами, к которому применима схема метода обратной задачи [1], кратко описанная выше, соответствует целый класс уравнений с переменными коэффициентами, подпадающих под действие нового метода. Уравнения из этого класса мы будем называть деформациями исходного уравнения. К этому классу также мы будем относить уравнения, интегрируемые в рамках схемы [1] с «движущимися полюсами» $\lambda_n(\xi)$, $\mu_n(\eta)$. Так, уравнение (B.7) является деформацией уравнения главного кирального поля (B.6). Ранее был известен еще один пример такого рода — уравнение Гайзенберга, моделирующее эволюцию цилиндрически симметричных конфигураций намагниченности изотропного магнетика [9]:

$$(B.12) \quad S_t = S \times \left(S_{rr} + \frac{1}{r} S_r \right), \quad S^2 = 1, \quad S = (S_1, S_2, S_3).$$

Это уравнение является деформацией уравнения Гайзенберга, используемого в одномерной ситуации:

$$(B.13) \quad S_t = S \times S_{xx}, \quad S^2 = 1.$$

В общем случае, как и в рассмотренных примерах, переменные коэффициенты деформаций подчиняются некоторой системе уравнений в частных производных (например, для уравнения гравитации роль этой системы играет уравнение (B.8)). Упомянутая система в общем случае нелинейна, и вопрос о ее решениях представляет самостоятельный интерес. Дело в том, что эти системы, вообще говоря, не обладают свойством Пенлеве, т. е. их точные редукции к обыкновенным дифференциальным уравнениям допускают подвижные критические точки. Тем не менее иногда удается свести задачу о построении общего решения этих уравнений в частных производных к задаче интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения. Не исключено, что эти системы являются интегрируемыми, но, может быть, в совершенно новом смысле.

В некоторых случаях с помощью замен переменных и полей деформация уравнения приводится к исходному недеформированному уравнению. Эти деформации мы будем называть тривиальными. Примером такого рода может служить известное уравнение Кортвега — де Фриза с «цилиндрической расходимостью»:

$$(B.14) \quad u_t + 6uu_x + u_{xxx} + \frac{u}{2t} = 0.$$

Соответствующая замена была найдена впервые в [10].

Существуют и представляют большой интерес специальные случаи, когда деформированные уравнения имеют постоянные коэффициенты. Таковой, например, является система уравнений

$$(B.15) \quad E_n = \rho, \quad N_{\xi} + \frac{1}{2}(\bar{\rho}E + \rho\bar{E}) = c, \quad \rho_{\xi} = NE,$$

(c — константа), являющаяся нетривиальной деформацией известной системы Максвелла — Блоха (о физических приложениях системы (B.15) см. ниже).

Процедура интегрирования деформированных уравнений при помощи метода одевания заметно отличается от изложенной в [1]. Описанию этой процедуры мы предполагаем посвятить отдельную статью.

1. СЛУЧАЙ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

Основная идея метода обратной задачи с переменным спектральным параметром заключается в следующем. Пусть недеформированная система является условием совместности (B.1), (B.2) в случае «неподвижных полюсов» λ_n, μ_n . Для получения деформаций этой системы мы будем считать в (B.2), что полюса λ_n, μ_n суть некоторые функции от ξ и η , а λ — функция от ξ, η и локально аналитическая функция скрытого спектрального параметра z (в этом случае простые дроби $1/(\lambda - \lambda_n), 1/(\lambda - \mu_n)$ являются линейно независимыми). Эти функции отнюдь не являются произвольными. Они подчиняются системе уравнений, которая однозначно фиксируется тем требованием, что условие (B.4) выполняется тождественно по z и возникающая при этом система нелинейных уравнений на матрицы u_n, v_n имеет в точности калибровочную недоопределенность. В силу изложенного уравнения

на λ имеют следующий вид:

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{\lambda - \lambda_n} = p_n + \sum_{m=1}^{N_1} \frac{a_{nm}}{\lambda - \lambda_m} + \sum_{m=1}^{N_2} \frac{b_{nm}}{\lambda - \mu_m},$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\lambda - \mu_n} = q_n + \sum_{m=1}^{N_1} \frac{c_{nm}}{\lambda - \lambda_m} + \sum_{m=1}^{N_2} \frac{d_{nm}}{\lambda - \mu_m},$$

где коэффициенты $p_n, q_n, a_{nm}, b_{nm}, c_{nm}, d_{nm}$ — функции ξ и η .

Рассмотрим систему (1.1). Все уравнения этой системы должны определять одну и ту же производную λ_η . Отсюда имеем

$$(1.3) \quad p_1 = \dots = p_{N_1} = p, \quad a_{nm} = a_n \delta_{nm}, \quad b_{nm} = b_m / (\lambda_n - \mu_m)^2.$$

При этом

$$(1.4) \quad a_n = 2p\lambda_n - \bar{p} - \sum_{m=1}^{N_2} \frac{b_m}{(\lambda_n - \mu_m)^2},$$

$$(1.5) \quad \frac{\partial \lambda_n}{\partial \eta} = -p\lambda_n^2 + \bar{p}\lambda_n + \bar{p} - \sum_{m=1}^{N_2} \frac{b_m}{\lambda_n - \mu_m},$$

здесь $\bar{p}, \tilde{p}$ — некоторые функции ξ и η . Теперь

$$(1.6) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \eta} = -p\lambda^2 + \bar{p}\lambda + \bar{p} - \sum_{m=1}^{N_2} \frac{b_m}{\lambda - \mu_m}.$$

Аналогично из (1.2) получаем

$$(1.7) \quad q_1 = \dots = q_{N_2} = q, \quad d_{nm} = d_n \delta_{nm}, \quad c_{nm} = c_m / (\mu_n - \lambda_m)^2,$$

причем

$$(1.8) \quad d_n = 2q\mu_n - \tilde{q} - \sum_{m=1}^{N_1} \frac{c_m}{(\mu_n - \lambda_m)^2},$$

$$\frac{\partial \mu_n}{\partial \xi} = -q\mu_n^2 + \tilde{q}\mu_n + \tilde{q} - \sum_{m=1}^{N_1} \frac{c_m}{\mu_n - \lambda_m},$$

$\hat{q}, \tilde{q}$ — неизвестные пока функции и

$$(1.9) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} = -q\lambda^2 + \tilde{q}\lambda + \tilde{q} - \sum_{m=1}^{N_1} \frac{c_m}{\lambda - \lambda_m}.$$

Подставляя (B.2) в (B.4) и учитывая (1.1)–(1.9), получаем матричную систему

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial \eta} - \frac{\partial v_0}{\partial \xi} + [u_0, v_0] &= -p \sum_{n=1}^{N_1} u_n + q \sum_{n=1}^{N_2} v_n, \\ \frac{\partial u_n}{\partial \eta} + [u_n, v_0] + \sum_{m=1}^{N_2} \frac{v_m}{\lambda_n - \mu_m} &= -a_n u_n + c_n \sum_{m=1}^{N_2} \frac{v_m}{(\mu_n - \lambda_m)^2}, \\ \frac{\partial v_n}{\partial \xi} + [v_n, u_0] + \sum_{m=1}^{N_1} \frac{u_m}{\mu_n - \lambda_m} &= -d_n v_n + b_n \sum_{m=1}^{N_1} \frac{u_m}{(\lambda_n - \mu_m)^2}, \end{aligned}$$

в которую входят неизвестные пока коэффициентные функции $\lambda_n, \mu_n, c_n, b_n, \bar{p}, \bar{q}, p, \hat{q}, \tilde{q}, q$. Для их определения заметим, что уравнения (1.6), (1.9) должны быть совместны и определять λ как функцию ξ, η и постоянной интегрирования z — скрытого спектрального параметра. Вычисляя из (1.6), (1.9) двумя способами $\lambda_{\xi\eta}$, найдем после простых преобразований

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \xi} + p\tilde{q} &= \frac{\partial q}{\partial \eta} + q\bar{p}, & \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi} - 2p\hat{q} &= \frac{\partial \tilde{q}}{\partial \eta} - 2q\bar{p}, \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi} - \bar{p}\tilde{q} + 3p \sum_{m=1}^{N_1} c_m &= \frac{\partial \hat{q}}{\partial \eta} - \hat{q}\bar{p} + 3q \sum_{m=1}^{N_2} b_m, \\ \frac{\partial c_n}{\partial \eta} + 2c_n \left(-\bar{p} + 2p\lambda_n - \sum_{m=1}^{N_2} \frac{b_m}{(\lambda_n - \mu_m)^2} \right) &= 0, & n=1, \dots, N_1, \\ \frac{\partial b_n}{\partial \xi} + 2b_n \left(-\tilde{q} + 2q\mu_n - \sum_{m=1}^{N_1} \frac{c_m}{(\mu_n - \lambda_m)^2} \right) &= 0, & n=1, \dots, N_2. \end{aligned}$$

Уравнения (1.11) вместе с уравнениями (1.5), (1.8) составляют систему условий совместности уравнений (1.6), (1.9).

В тривиальном частном случае, когда λ, λ_n и μ_n — постоянные, правые части в (1.10) также равны нулю. Уравнения (1.10) определяют теперь «недеформированную» систему общего положения, интегрируемую в рамках метода обратной задачи (В.1), (В.2) с «неподвижными полюсами» λ_n, μ_n . В общем случае система (1.10), дополненная уравнениями (1.5), (1.8), (1.11), представляет собой ее деформацию. Заметим, что скалярная система (1.5), (1.8), (1.11) не зависима от матричной системы (1.10) и может рассматриваться независимо.

Эта система представляет собой набор $2(N_1+N_2)+3$ уравнений на $2(N_1+N_2+3)$ неизвестных функций. Недоопределенность связана здесь с возможностью совершить произвольное дробно-линейное преобразование

$$(1.12) \quad \lambda \rightarrow (\alpha\lambda + \beta) / (\gamma\lambda + \delta),$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — некоторые функции от ξ и η . Имеет место

Предложение 1. Дробно-линейным преобразованием систему (1.6), (1.9) можно привести к виду

$$(1.13) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \eta} + \sum_{m=1}^{N_2} \frac{b_m}{\lambda - \mu_m} = 0, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} + \sum_{m=1}^{N_1} \frac{c_m}{\lambda - \lambda_m} = 0.$$

Условия совместности системы (1.13) имеют вид

$$(1.14) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \lambda_n}{\partial \eta} + \sum_{m=1}^{N_2} \frac{b_m}{\lambda_n - \mu_m} &= 0, & \frac{\partial c_n}{\partial \eta} - 2c_n \sum_{m=1}^{N_2} \frac{b_m}{(\lambda_n - \mu_m)^2} &= 0, \\ \frac{\partial \mu_n}{\partial \xi} + \sum_{m=1}^{N_1} \frac{c_m}{\mu_n - \lambda_m} &= 0, & \frac{\partial b_n}{\partial \xi} - 2b_n \sum_{m=1}^{N_1} \frac{c_m}{(\mu_n - \lambda_m)^2} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь число уравнений и число неизвестных функций совпадают и равны $2(N_1+N_2)$.

Несложное доказательство предложения 1 мы не приводим. Заметим только, что система (1.14) возникает из (1.5), (1.8), (1.11), если положить $\hat{p}=\tilde{p}=p=\hat{q}=\tilde{q}=q=0$. Кроме того, матричная система (1.10) имеет калибровочную недоопределенность (N_1+N_2+1 матричных уравнений на N_1+N_2+2 матриц $u_n, v_k, n=0, 1, \dots, N_1; k=0, 1, \dots, N_2$). Это связано с возможностью совершать в системе (B.1) калибровочное преобразование

$$(1.15) \quad \Phi = g\Phi, \quad \tilde{U} = -g^{-1}g_\xi + g^{-1}Ug, \quad \tilde{V} = -g^{-1}g_\eta + g^{-1}Vg,$$

где g — произвольная невырожденная матричная функция от ξ и η . Помимо преобразования (1.15) в системе (B.1) возможна замена координат

$$(1.16) \quad \xi' = \xi'(\xi), \quad \eta' = \eta'(\eta).$$

Две деформированные системы, отличающиеся преобразованиями (1.12), (1.15), (1.16), мы будем называть обобщенно калибровочно эквивалентными. Те деформации, которые с помощью точечных преобразований и преобразований (1.15) сводятся к недеформированным уравнениям, мы будем называть тривиальными, а все остальные — нетривиальными. Пусть система уравнений на λ дробно-линейным преобразованием приведена к форме (1.13). Теперь $p=q=0$, и в уравнении (1.10) можно калибровочным преобразованием одновременно обратить в нуль функции u_0 и v_0 . Система (1.10) принимает тогда простой вид:

$$(1.17) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial \eta} + \left[u_n, \sum_{m=1}^{N_2} \frac{v_m}{\lambda_n - \mu_m} \right] &= \sum_{m=1}^{N_2} \frac{b_m u_n + c_n v_m}{(\lambda_n - \mu_m)^2}, \\ \frac{\partial v_n}{\partial \xi} + \left[v_n, \sum_{m=1}^{N_1} \frac{u_m}{\mu_n - \lambda_m} \right] &= \sum_{m=1}^{N_1} \frac{c_m v_n + b_n u_m}{(\mu_n - \lambda_m)^2}. \end{aligned}$$

К системе (1.14), (1.17) можно прийти совершенно другим способом. Пусть λ — постоянный спектральный параметр, но уравнения (B.1) заменены на уравнения

$$(1.18) \quad D_1 \Phi = U \Phi, \quad D_2 \Phi = V \Phi.$$

Здесь операторы $D_{1,2}$ имеют вид

$$(1.19) \quad \begin{aligned} D_1 &= \frac{\partial}{\partial \xi} + F \frac{\partial}{\partial \lambda}, \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial \eta} + G \frac{\partial}{\partial \lambda}, \\ F &= - \sum_{m=1}^{N_1} \frac{c_m}{\lambda - \lambda_m}, \quad G = - \sum_{m=1}^{N_2} \frac{b_m}{\lambda - \mu_m}, \end{aligned}$$

а матрицы U и V по-прежнему задаются соотношением (B.2). Требуем, чтобы операторы D_1 и D_2 коммутировали. В силу этого получаем

$$(1.20) \quad F_\eta + G F_\lambda = G_\xi + F G_\lambda.$$

Уравнение (1.20) есть условие обращения в нуль коммутатора векторных полей $D_{1,2}$. Подставляя (1.19) в (1.20), после простых преобразований получим уравнения (1.14).

Условие совместности системы (1.18) имеет вид

$$(1.21) \quad D_1 U - D_2 V + [U, V] = 0.$$

Уравнение (1.21) (в случае канонической калибровки $u_0 = v_0 = 0$), как легко убедиться, эквивалентно системе (1.17).

В уравнениях (1.18) также можно совершать дробно-линейные и калибровочные преобразования, а также растяжения координат. В заключение этого раздела заметим, что схема получения деформированных уравнений, использующая дифференцирование по параметру λ , непосредственно вытекает из работ [3], тогда как техника, связанная с введением переменного параметра λ , возникла из попыток понять результат Мейсона [4].

Заметим еще, что система (1.13), (1.14) содержит простой частный случай. Пусть $c_n = 0$, $\partial \lambda / \partial \xi = 0$. Тогда $\mu_n = \mu_n(\eta)$, $b_n = b_n(\eta)$ — произвольные функции одной переменной. Зависимость $\lambda = \lambda(z, \eta)$ находится из решения обыкновенного дифференциального уравнения (1.13), а полюса $\lambda_{\eta n} = \lambda|_{z=z_n}$.

2. ДЕФОРМАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ГЛАВНОГО КИРАЛЬНОГО ПОЛЯ

Переходя к рассмотрению конкретных примеров, заметим, что в дальнейшем мы не будем обязательно приводить рассматриваемую систему к виду (1.14), (1.17), но будем использовать свободу относительно калибровочных и дробно-линейных преобразований по своему усмотрению. Пусть матричные функции U и V имеют лишь по одному простому полюсу. Дробно-линейным преобразованием можно перевести эти полюса в точки $\lambda = \pm 1$. Выбирая каноническую калибровку, приведем уравнения (B.1) к виду

$$(2.1) \quad \Phi_\xi = \frac{u}{\lambda - 1} \Phi, \quad \Phi_\eta = \frac{v}{\lambda + 1} \Phi.$$

В отличие от (B.6) здесь λ является переменным и подчиняется уравнениям

$$(2.2) \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{\lambda - 1} = \frac{a}{\lambda - 1} + \frac{b}{\lambda + 1}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\lambda + 1} = \frac{c}{\lambda + 1} + \frac{d}{\lambda - 1}.$$

С учетом (2.2) условия совместности системы (2.1) имеют вид

$$(2.3) \quad u_\eta + \frac{1}{2}[u, v] = -au + dv, \quad v_\xi - \frac{1}{2}[v, u] = -cv + bu.$$

Условия совместности системы (2.2) могут быть записаны в виде

$$(2.4) \quad b_\xi + 2bc = 0, \quad d_\eta + 2da = 0,$$

$$(2.5) \quad (a+b)_\xi = (c+d)_\eta = -ac - 3bd.$$

Из (2.5) следует, что можно ввести функцию α по формулам

$$(2.6) \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \ln \alpha = a + b, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \ln \alpha = c + d.$$

С учетом (2.6) из (2.3) следует

$$(2.7) \quad (\alpha u)_\eta = (\alpha v)_\xi.$$

Выражая u и v из (2.1), имеем для Φ

$$(2.8) \quad (\alpha(\lambda-1)\Phi_\xi\Phi^{-1})_\eta = (\alpha(\lambda+1)\Phi_\eta\Phi^{-1})_\xi.$$

Уравнение (2.8) справедливо тождественно по «скрытому параметру» z — константе интегрирования системы (2.2). В тривиальном частном случае $a=b=c=d=0$, $\lambda=\text{const}$, $\alpha=1$ (2.8) переходит при $\lambda=0$ в уравнение главного кирального поля. Система (2.2)–(2.8) представляет собой наиболее общую деформацию этих уравнений. Уравнения (2.4)–(2.5) просто интегрируются в частном случае

$$(2.9) \quad a=b=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\ln\alpha, \quad c=d=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\ln\alpha,$$

упрощаясь до одного уравнения $\alpha_{\xi\eta}=0$. Система (2.2) при этом также интегрируется и дает формулу (B.11), определяющую $\lambda=\lambda(z, \xi, \eta)$ как функцию скрытого спектрального параметра z , расположенного на двусторонней римановой поверхности. Устремляя на верхнем листе $z\rightarrow\infty$, получаем $\lambda\rightarrow 0$. Уравнение (2.8) при этом переходит в уравнение гравитации (B.7).

Известны и другие случаи интегрируемости системы (2.4)–(2.5). Пусть $d=0$, $b\neq 0$. Тогда подстановка

$$(2.10) \quad b=\frac{1}{R^2}, \quad c=\frac{R_\xi}{R}, \quad a=-\frac{R_{\xi\eta}}{R_\xi}+\frac{R_\eta}{R}$$

позволяет дважды проинтегрировать уравнение по ξ , после чего система приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с подвижными критическими точками

$$(2.11) \quad R_\eta = -\frac{1}{R} + \beta_{(\eta)}R + \gamma_{(\eta)}.$$

Здесь $\beta_{(\eta)}$ и $\gamma_{(\eta)}$ — произвольные функции. Это уравнение в общем случае не интегрируется в квадратурах.

Более прост случай $d=b=0$. Тогда подстановка $a=\frac{\partial}{\partial\eta}\ln\alpha$,

$c=\frac{\partial}{\partial\xi}\ln\alpha$ снова приводит к уравнению

$$\alpha_{\xi\eta}=0, \quad \alpha=f(\xi)+h(\eta).$$

Уравнения (2.2) теперь интегрируются и дают

$$(2.12) \quad \lambda = \frac{-f(\xi)+h(\eta)+z}{f(\xi)+h(\eta)}.$$

Из уравнения (2.8) при $z=0$ имеем

$$(2.13) \quad (f\Phi_\xi\Phi^{-1})_\eta + (h\Phi_\eta\Phi^{-1})_\xi = 0.$$

Еще один случай интегрируемости: $c=d=0$. Теперь a и b — произвольные функции от η , и уравнения (2.2) в общем виде не интегрируются. Интересно, что теперь можно положить a и b произвольными константами. При этом уравнение (2.8) примет вид

$$(2.14) \quad a(\Phi_{\xi}\Phi^{-1})_{\eta} + b(\Phi_{\eta}\Phi^{-1})_{\xi} + a(a+b)\Phi_{\xi}\Phi^{-1} = 0.$$

Как (2.3), так и (2.14) становятся уравнениями с постоянными коэффициентами. В общем случае решение системы (2.4), (2.5) нам не известно.

3. ДЕФОРМАЦИИ $U-V$ -СИСТЕМЫ И УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА — БЛОХА

Уравнения главного кирального поля калибровочно-эквивалентны некоторой системе уравнений на две матричные функции U и V , известной как « $U-V$ -система». В частном случае из этой системы выводится уравнение «синус-Гордон». Деформации этих уравнений удобно рассматривать независимым образом. Рассмотрим систему (B.1), в которой функции U и V имеют по одному простому полюсу. Дробно-линейным преобразованием переведем полюса в точки $\lambda=0, \infty$. Положим

$$(3.1) \quad U = \lambda u_1 + u_0, \quad V = v/\lambda.$$

Функция λ подчиняется системе уравнений

$$(3.2) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \eta} = a\lambda + b + \frac{c}{\lambda}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\lambda} = \tilde{a}\lambda + \tilde{b} + \frac{\tilde{c}}{\lambda}.$$

С учетом их из (B.4) извлекаем систему уравнений

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} &= -au_1 + \tilde{a}v, & \frac{\partial u_0}{\partial \eta} + [u_1, v] &= -bu_1 + \tilde{b}v, \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} + [v, u_0] &= cu_1 - \tilde{c}v. \end{aligned}$$

При $a=\tilde{a}=b=\tilde{b}=c=\tilde{c}=0$ система (3.3) переходит в « $U-V$ -систему» [11]. (Обычно полагают $u_1=J$ — постоянная диагональная матрица.)

В нашем случае коэффициенты $a, \tilde{a}, b, \tilde{b}, c, \tilde{c}$ подчиняются следующей из (3.2) системе уравнений

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \tilde{a}_{\eta} + 2\tilde{a}a &= 0, & \tilde{b}_{\eta} + \tilde{b}a + 3b\tilde{a} &= 0, & c_{\xi} + 2c\tilde{c} &= 0, \\ b_{\xi} + b\tilde{c} + 3\tilde{b}c &= 0, & a_{\xi} + \tilde{c}_{\eta} + 2b\tilde{b} + 4\tilde{a}c &= 0. \end{aligned}$$

Выбор U и V в виде (3.1) допускает растяжение параметра λ ($\lambda \rightarrow e^x \lambda$), поэтому система (3.4) является недоопределенной. Растяжением λ можно обратить функцию $a_{(\xi, \eta)}$ в нуль, а функцию $\tilde{a}_{(\xi, \eta)}$ в константу. Далее, возможно следующее дерево вариантов.

1. $\tilde{a}=1, c \neq 0$. Заменой

$$(3.5) \quad c = e^{2x}, \quad \tilde{c} = -\chi_{\xi}, \quad b = pe^x$$

система (3.4) приводится к симметричному виду:

$$(3.6) \quad \tilde{b}_{\eta} + 3pe^x = 0, \quad p_{\xi} + 3\tilde{b}e^x = 0, \quad \chi_{\xi\eta} = 2p\tilde{b}e^x + 4e^{2x}.$$

Система (3.6) (как и система (2.4)–(2.5)) в общем виде пока не решена. В частном случае $\tilde{b}=p=0$ она эквивалентна уравнению Лиувилля

$$(3.7) \quad \chi_{\xi\eta} = 4e^{2x}.$$

2. $\tilde{a}=1$, $c=0$, $b \neq 0$. В этом случае система (3.4) подстановкой

$$(3.8) \quad b=e^x, \quad \tilde{c}=-\chi_{\xi}, \quad \tilde{b}=1/2\chi_{\xi\eta}e^{-x}$$

приводится к одному уравнению:

$$(3.9) \quad \chi_{\xi\eta\eta} - \chi_{\eta}\chi_{\xi\eta} + 6e^{2x} = 0.$$

Совершим еще подстановку $Y_{\eta}=e^x$. Уравнение (3.9) трижды интегрируется по η , после чего становится обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка с подвижными критическими точками

$$(3.10) \quad Y_{\xi} + Y^3 + f_1(\xi)Y + f_0(\xi) = 0,$$

здесь $f_{0,1}(\xi)$ — произвольные функции. В общем случае оно в квадратурах не интегрируется.

3. $\tilde{a}=1$, $b=c=0$. В этом случае уравнения (3.4) тривиализуются. $\tilde{b}$ и $\tilde{c}$ могут быть сделаны произвольными функциями от ξ . Теперь λ не зависит от η , но найти явную зависимость λ от ξ и z в общем случае не удастся.

Рассмотрим простейший случай $\tilde{b}=\tilde{c}=0$. Тогда $\lambda=1/\sqrt{2(\xi+z)}$, а система (3.3) принимает вид

$$(3.11) \quad \frac{\partial u_1}{\partial \eta} = v, \quad \frac{\partial u_0}{\partial \eta} + [u_1, v] = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} + [v, u_0] = 0.$$

Положим

$$(3.12) \quad u_1 = \begin{bmatrix} 0 & \psi \\ \bar{\psi} & 0 \end{bmatrix}, \quad u_0 = i \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & -s \end{bmatrix}, \quad \bar{s} = s.$$

Имеем

$$(3.13) \quad s_{\eta} = i(\psi\bar{\psi}_{\eta} - \bar{\psi}\psi_{\eta}), \quad \psi_{\xi\eta} = 2is\psi_{\eta}.$$

Представляло бы большой интерес найти применение системе (3.13).

4. Перейдем к рассмотрению случая $\tilde{a}=0$. Теперь $\partial u_1/\partial \eta=0$ и можно выбрать $u_1=J$ — постоянная матрица. В общем положении растяжением λ можно добиться $\tilde{b}=1$. Теперь, если $c \neq 0$, замена переменных $c=e^{2x}$, $\tilde{c}=-\chi_{\xi}$, $b=1/2\chi_{\xi\eta}$ приводит к уравнению

$$(3.14) \quad \chi_{\eta\xi\xi} - \chi_{\xi}\chi_{\eta\xi} + 6e^{2x} = 0,$$

отличающемуся от (3.9) заменой $\xi \leftrightarrow \eta$. При $c=0$ подстановка $b=e^x$, $\tilde{c}=-\varphi_{\xi}$ приводит к уравнению Лиувилля $\varphi_{\xi\eta}=2e^x$. Наиболее интересен случай $b=\tilde{b}=0$. Теперь из (3.4) имеем

$$(3.15) \quad \tilde{c}_{\eta}=0, \quad c_{\xi} + 2c\tilde{c}=0.$$

Уравнение (3.3) упрощается до вида

$$(3.16) \quad \frac{\partial u_0}{\partial \eta} + [J, v] = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} + [v, u_0] = cJ - \tilde{c}v.$$

Положим

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad u_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{bmatrix}, \quad v = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} N - \rho \\ -\bar{\rho} - N \end{bmatrix}.$$

Имеем

$$(3.17) \quad E_{\eta} - \rho = 0,$$

$$(3.18) \quad N_{\xi} + \frac{1}{2}(\rho \bar{E} + \bar{\rho} E) = -\tilde{c}N - 4c,$$

$$(3.19) \quad \rho_{\xi} - NE = -\tilde{c}\rho.$$

Система уравнений (3.17)–(3.19) при $c = \tilde{c} = 0$ переходит в известную систему Максвелла – Блоха [12], описывающую распространение импульса излучения в двухуровневой среде. Интересен случай $\tilde{c} = 0$, $c = \text{const}$. Система (3.17)–(3.19) теперь приобретает вид (В.15). Для спектрального параметра имеем $\lambda = \sqrt{2c(\eta + z)}$, так что деформация (В.15) уравнений Максвелла – Блоха является нетривиальной. С физической точки зрения это система Максвелла – Блоха, в которой происходит накачка атомов, находящихся в возбужденном состоянии. При этом величина $\sqrt{|\rho|^2 + N^2}$ меняется по закону

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \sqrt{|\rho|^2 + N^2} = -4c \frac{N}{\sqrt{|\rho|^2 + N^2}}.$$

Пусть $c = 0$, $\tilde{c} = \text{const}$, тогда деформация оказывается уже тривиальной. Действительно, теперь $\lambda = z\psi(\xi)$, $\psi(\xi) = \exp[-\tilde{c}\xi]$. Замена $v = \psi\tilde{v}$, $u_0 = \psi\tilde{u}_0$, $\frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}}$ приводит систему к недеформированному виду

$$\Phi_{\tilde{\xi}} = (zJ + \tilde{u}_0)\Phi, \quad \Phi_{\eta} = \frac{\tilde{v}}{z}\Phi.$$

4. ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ

Значительное число интегрируемых систем относится к случаю, когда матрицы U , V в (В.1) являются полиномами от спектрального параметра λ :

$$(4.1) \quad U = u_0 + u_1\lambda + \dots + u_m\lambda^m,$$

$$(4.2) \quad V = v_0 + v_1\lambda + \dots + v_n\lambda^n.$$

Пусть спектральный параметр является переменным. Тогда должна выполняться следующая система уравнений на λ :

$$(4.3) \quad \lambda_x = p_0 + p_1\lambda + \dots + p_k\lambda^k,$$

$$(4.4) \quad \lambda_t = q_0 + q_1\lambda + \dots + q_l\lambda^l,$$

здесь $k \leq m$, $l \leq n$. Кроме того, $p_k \neq 0$, $q_l \neq 0$. Условия совместности системы (4.3), (4.4) могут быть исследованы в общем виде. Положим для определенности $k \leq l$. Тогда справедливо

Предложение 2. *Имеет место альтернатива: $k = 1$ или $k = l$.*

Действительно, пусть $1 < k \leq l$. Дифференцируя (4.3) по t , а (4.4) по x ,

выражая производные из (4.3), (4.4), найдем в старшем порядке по λ :

$$(4.5) \quad (l-k)p_k q_l \lambda^{k+l-1} = 0.$$

Отсюда $k=l$.

Рассмотрим обе возможности.

1. Пусть $k=1$. Уравнение (4.3) имеет вид

$$(4.6) \quad \lambda_x = p_0 + p_1 \lambda.$$

Совершим преобразование

$$(4.7) \quad \lambda = a + b\mu$$

и потребуем выполнения условий $a_x = p_0 + p_1 a$, $b_x = p_1 b$. Теперь система (4.3), (4.4) принимает вид

$$(4.8) \quad \mu_x = 0, \quad \mu_t = \tilde{q}_0 + \tilde{q}_1 \mu + \dots + \tilde{q}_l \mu^l,$$

где $\tilde{q}_0, \dots, \tilde{q}_l$ — произвольные функции t .

2. $k=l$. Чтобы найти общее совместное решение системы (4.3), (4.4), заметим, что она теперь допускает произвольное криволинейное преобразование координат: $x = x(x', t')$, $t = t(x', t')$. Преобразование можно выбрать таким образом, что $p_k = 0$. В силу доказанного выше при этом автоматически обращаются в нуль все p_i ($2 \leq i \leq k-1$), и уравнение (4.3) приводится к виду (4.6). Далее, линейным преобразованием параметра λ можно обратить в нуль p_0 и p_1 . Итак, чтобы получить общее решение системы (4.3), (4.4) при $k=l$, следует рассмотреть общее решение системы (4.8) и затем совершить в этой системе произвольную замену координат и произвольное линейное преобразование функции λ .

В рассматриваемых ниже примерах нам будет встречаться только случай $k < l$, когда система (4.3), (4.4) может быть приведена к виду (4.8) линейным преобразованием λ . Систему (4.8) можно еще более упростить, используя линейное преобразование $\mu = c_{(t)} + d_{(t)} \hat{\lambda}$ и замену времени t . Окончательно получаем

$$\hat{\lambda}_x = 0, \quad \hat{\lambda}_t = \hat{q}_2 \hat{\lambda}^2 + \hat{q}_3 \hat{\lambda}^3 + \dots + \hat{\lambda}^l.$$

Эта система возникает из (4.8), если положить: $\tilde{q}_0 = \tilde{q}_1 = 0$, $\tilde{q}_i = 1$. Примеры различных деформаций систем полиномиального типа приведены в приложении.

5. СЛУЧАЙ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА НА КРИВОЙ КОНЕЧНОГО РОДА

В системе (B.1) спектральный параметр может быть расположен не только на римановой сфере, но и на алгебраической кривой конечного рода [13]. В этом случае удобно не совершать явной униформизации алгебраической кривой, но вводить аналоги простых дробей — линейно независимые рациональные на кривой функции w_i , связанные квадратичными соотношениями (см. [13]). В общем виде имеем

$$(5.1) \quad U = \sum_{i=1}^N u_i w_i, \quad V = \sum_{i=1}^N v_i w_i.$$

Здесь функции w_i удовлетворяют набору квадратичных соотношений

$$(5.2) \quad \Pi_{sij} w_i w_j + \Psi_{si} w_i = 0,$$

$$s=1, \dots, N-\rho \quad (\rho - \text{род кривой}),$$

которые учитываются при вычислении условий совместности системы (B.1).

Спектральный параметр — униформизирующий параметр системы квадрик (5.2) — здесь с самого начала является скрытым, хотя и постоянным. Чтобы сделать его переменным, предположим, что все w_i являются функциями от x, t и подчиняются системе уравнений

$$(5.3) \quad \frac{\partial w_i}{\partial x} = A_{ijk} w_j w_k + P_{ij} w_j, \quad \frac{\partial w_i}{\partial t} = B_{ijk} w_j w_k + Q_{ij} w_j.$$

Переопределенная система (5.3) должна рассматриваться совместно с алгебраическими уравнениями (5.2). При этом как коэффициенты A_{ijk} , B_{ijk} , P_{ij} , Q_{ij} , так и параметры квадрик Π_{sij} , Ψ_{si} должны считаться функциями от x и t .

Общая задача такого рода совершенно не изучена. Мы, однако, приведем один достаточно интересный пример. Рассмотрим известное уравнение Ландау — Лифшица [14, 15]:

$$(5.4) \quad S_t = S \times (S_{xx} + J S), \quad S^2 = 1,$$

где J — постоянная диагональная матрица 3×3 , $S = (S_1, S_2, S_3)$. В случае (5.4) матрицы U и V имеют вид

$$(5.5) \quad U = i \sum_{a=1}^3 S_a \sigma_a w_a^{(1)}, \quad V = 2i \sum_{a=1}^3 S_a \sigma_a w_a^{(2)} + i \sum_{a, b, c=1}^3 \varepsilon_{abc} S_b \frac{\partial S_c}{\partial x} \sigma_a w_a^{(1)}.$$

Здесь функции $w^{(i)}$ подчиняются уравнениям

$$(5.6) \quad (w_a^{(1)})^2 - (w_b^{(1)})^2 = 2A_a - 2A_b,$$

$$(5.7) \quad w_a^{(2)} = w_b^{(1)} w_c^{(1)}, \quad a, b \text{ и } c \text{ не равны друг другу.}$$

σ_a — матрицы Паули; ε_{abc} — абсолютно антисимметричный тензор. Соотношение (5.6) определяет алгебраическую кривую (тор). Вычислим условие совместности системы (B.1) в случае (5.5) — (5.7):

$$(5.8) \quad \sum_{a=1}^3 \sigma_a w_a^{(1)} \left[\frac{\partial S_a}{\partial t} - \sum_{b, c=1}^3 \varepsilon_{abc} \left(S_b \frac{\partial^2 S_c}{\partial x^2} - 8 S_b A_c S_c \right) \right] + \\ + 2 \sum_{a=1}^3 \sigma_a w_a^{(2)} \left[(S^2 - 1) \frac{\partial S_a}{\partial x} - \frac{1}{2} S_a \frac{\partial S^2}{\partial x} \right] = \\ = \sum_{a=1}^3 \sigma_a \left[2 S_a \frac{\partial w_a^{(2)}}{\partial x} - S_a \frac{\partial w_a^{(1)}}{\partial t} + \sum_{b, c=1}^3 \varepsilon_{abc} S_b \frac{\partial S_c}{\partial x} \frac{\partial w_a^{(1)}}{\partial x} \right].$$

При вычислениях мы использовали соотношение

$$\sum_{a, b, c=1}^3 \varepsilon_{abc} \sigma_a w_b^{(1)} w_c^{(2)} S_b S_c = -2 \sum_{a, b, c=1}^3 \varepsilon_{abc} \sigma_a w_a^{(1)} S_b A_c S_c,$$

являющееся следствием определений (5.6), (5.7) для величин $w_a^{(1)}$ и $w_a^{(2)}$. В случае постоянных $w_a^{(1)}$, разлагая (5.8) по базису функций $w_a^{(1)}$ и $w_a^{(2)}$, получаем уравнение Ландау — Лифшица (5.4), где

$$\hat{J} = -8 \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix}.$$

Пусть теперь функции $w_a^{(1)}$ и A_a зависят от x и t . В общем случае эта зависимость должна задаваться уравнениями

$$(5.9) \quad \frac{\partial w_a^{(1)}}{\partial x} = f_a w_a^{(1)}, \quad \frac{\partial w_a^{(1)}}{\partial t} = g_a w_a^{(2)} + h_a w_a^{(1)}.$$

Оказывается, однако, что функциональный производ, возникающий в (5.9), является мнимым: опуская доказательство, приведем

Предложение 3. Требование совместности уравнений системы (5.9) между собой и с определением (5.6), (5.7), а также выполнение условия $S^2=1$ оставляют возможным вариант

$$(5.10) \quad \frac{\partial w_a^{(1)}}{\partial x} = \frac{1}{x} w_a^{(1)}, \quad \frac{\partial w_a^{(1)}}{\partial t} = \frac{4}{x} w_a^{(2)}.$$

Подставляя (5.10) в (5.8), получаем деформацию уравнения Ландау — Лифшица:

$$(5.11) \quad S_t = S \times \left(S_{xx} + \frac{1}{x} S_x + x^2 \hat{J}_0 S \right), \quad S^2 = 1,$$

где

$$A_a(x) = x^2 A_a^0, \quad \hat{J}_0 = -8 \begin{bmatrix} A_1^0 & & \\ & A_2^0 & \\ & & A_3^0 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что в цилиндрическом уравнении Ландау — Лифшица в отличие от деформации (5.11) отсутствует коэффициент x^2 перед слагаемым $S \times (J_0 S)$. Осталось проинтегрировать систему (5.10). Ищем решение в виде

$$w_a^{(1)}(z, x, t) = x \hat{w}_a(\lambda = z - 4\rho t), \quad \rho = {}^{1/2} \sqrt{J_3^0 - J_1^0}$$

(комплексная константа интегрирования z является скрытым спектральным параметром), автоматически удовлетворяющем первому уравнению системы (5.10). Подставляя во второе уравнение, получим

$$\frac{d\hat{w}_a}{d\lambda} = -\rho^{-1} \hat{w}_b \hat{w}_c.$$

Решение последнего уравнения выражается через эллиптические функции

Якоби [15]:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_1 &= \frac{\rho}{\operatorname{sn}(\lambda, k)}, \quad \tilde{w}_2 = \frac{\rho \operatorname{dn}(\lambda, k)}{\operatorname{sn}(\lambda, k)}, \quad \tilde{w}_3 = \frac{\rho \operatorname{cn}(\lambda, k)}{\operatorname{sn}(\lambda, k)}, \\ k &= \sqrt{\frac{J_2^0 - J_1^0}{J_3^0 - J_1^0}}, \quad J_1^0 \leq J_2^0 \leq J_3^0, \end{aligned}$$

заданные в прямоугольнике $R = \{\lambda : |\operatorname{Re} \lambda| \leq 2k, |\operatorname{Im} \lambda| \leq 2k'\}$.

Отметим, что уравнение (5.11) можно получить, усредняя по группе редукции $L_{1,2}$ -операторы: $L_1 = -\partial_x + U$; $L_2 = -\partial_t + V$ для цилиндрического уравнения Гайзенберга (B.12) [16].

Авторы статьи благодарят Габитова И. Р. за плодотворное обсуждение работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем, опуская вычисления, список найденных нами деформаций (и соответствующих линейных систем полиномиального типа) различных известных уравнений.

1. Деформации уравнения Кортевега – де Фриза:

$$(П.1) \quad u_t = \frac{1}{2} v_{xxx} + 2v_x u + v u_x, \quad v = -\frac{1}{\gamma x} \int \gamma x \left(2u_x + \frac{4u}{x} \right) dx.$$

Для получения (П.1) мы использовали «скалярную» линейную систему

$$(П.2) \quad \Phi_{xx} + U\Phi = 0, \quad \Phi_t = A\Phi_x + B\Phi,$$

$$(П.3) \quad U = \lambda + u, \quad A = 4\lambda + v, \quad B = -\frac{1}{2} A_x,$$

где $\lambda_x = \lambda/x$, $\lambda_t = (12/x)\lambda^2$, $\lambda = -x/12(t+z)$. Заменаи $u(x, t) = -5/16x^2 + \hat{u}(\hat{x}, \hat{t})$, $\hat{x} = x^{3/2}$, $\hat{t} = (27/8)t$ система (П.1) приводится к виду (ниже шляпки опускаем)

$$(П.4) \quad u_t + (xu)_{xxx} + u_{xx} = \left[-3xu^2 - 2u \int_x u dx \right]_x - 3u^2.$$

Деформация (П.1) является нетривиальной. Для получения уравнения (B.14) в (П.3) необходимо выбрать $v = -2u$; $\lambda_x = -1/12t$; $\lambda_t = -\lambda/t$.

2. Деформация модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза:

$$(П.5) \quad u_t + (xu)_{xxx} = \pm 2 \left[\left(x \int_x u^2 dx \right) u \right]_x.$$

Для построения (П.5) необходимо применять линейную систему (B.1):

$$(П.6) \quad \Phi_x = U\Phi, \quad \Phi_t = V\Phi,$$

$$\text{где } U = i\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & u \\ \pm u & 0 \end{bmatrix},$$

$$V = 4i\lambda^3 x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + 4\lambda^2 x \begin{bmatrix} 0 & u \\ \pm u & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ 2i\lambda \begin{bmatrix} \pm \left(x \int_x u^2 dx \right)_x & -(xu)_x \\ \pm (xu)_x & \mp \left(x \int_x u^2 dx \right)_x \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & -(xu)_{xx} \pm 2u \left(x \int u^2 dx \right)_x \\ \mp (xu)_{xx} + 2u \left(x \int u^2 dx \right)_x & 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_x = 0, \quad \lambda_t = 4\lambda^3, \quad \lambda(z, t) = \frac{1}{\sqrt{-8(t+z)}}.$$

3. Деформации системы Каупа [17]:

$$(П.7) \quad u_t + \frac{1}{2} (xu^2)_x + (x\eta)_x = -\eta,$$

$$\eta_t + (x\eta u)_x + (xu)_{xxx} = -\eta u.$$

Для системы (П.7) соответствующая линейная система имеет вид (П.2), где

$$U = \lambda^2 + \frac{i\lambda u}{2} + \frac{\eta}{4} - \frac{u^2}{16}, \quad A = -2ix\lambda - \frac{1}{2}xu, \quad B = -\frac{1}{2}A_x,$$

$$\lambda_x = 0, \quad \lambda_t = -2i\lambda^2, \quad \lambda(z, t) = \frac{1}{2i(t+z)}.$$

Деформация (П.7) является нетривиальной. Приведем также тривиальную деформацию системы Каупа, интересную с точки зрения приложения в гидродинамике:

$$(П.8) \quad u_t + uu_x + \eta_x = 0,$$

$$\eta_t + [(1 - \alpha x + \eta)u]_x + u_{xxx} = 0, \quad \alpha - \text{постоянная}.$$

Для системы (П.8) функции U , A и B имеют вид

$$U = \lambda^2 + \frac{i\lambda u}{2} + \frac{1}{4}(\eta + 1 - \alpha x) - \frac{u^2}{16}, \quad A = -2i\lambda - \frac{u}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}A_x,$$

где $\lambda_x = 0$, $\lambda_t = \frac{i}{4}\alpha$, $\lambda(z, t) = z + \frac{i}{4}\alpha t$. Отметим, что заменой:

$$(П.9) \quad \eta(x, t) = \alpha x + \hat{\eta}(\hat{x}, \hat{t}), \quad \hat{x} = x + \frac{\alpha}{2}t^2,$$

$$u(x, t) = -\alpha t + \hat{u}(\hat{x}, \hat{t}), \quad \hat{t} = t,$$

система (П.8) приводится к исходной недеформированной системе Каупа [17] (шляпки опускаем):

$$u_t + uu_x + \eta_x = 0, \quad \eta_t + [(1 + \eta)u]_x + u_{xxx} = 0.$$

4. Деформации нелинейного уравнения Шредингера (НУШ):

$$(П.10^\pm) \quad i\psi_t + \psi_{xx} + \frac{1}{x}\psi_x \pm 2|\psi|^2\psi = \frac{\psi}{x^2} \mp 4\psi \int \frac{|\psi|^2}{x} dx.$$

Здесь и ниже линейные системы имеют вид (П.6), поэтому мы будем приводить только соответствующие матричные функции U и V . В случае (П.10 $^\pm$) имеем

$$U = i\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 & \psi \\ \pm \bar{\psi} & 0 \end{bmatrix},$$

$$V = -2i\lambda^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - 2i\lambda \begin{bmatrix} 0 & \psi \\ \pm \bar{\psi} & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \pm i |\psi|^2 \pm 2i \int \frac{|\psi|^2}{x} dx & -\psi_x - \frac{1}{x} \psi \\ \pm \bar{\psi}_x \pm \frac{1}{x} \bar{\psi} & \mp i |\psi|^2 \mp 2i \int \frac{|\psi|^2}{x} dx \end{bmatrix},$$

$$\lambda_x = \frac{\lambda}{x}, \quad \lambda_t = -\frac{1}{x} \lambda^2, \quad \lambda(z, x, t) = \frac{x}{4(z+t)}.$$

Уравнение (П.10⁺), являющееся нетривиальной деформацией НУШ, замечательно в том отношении, что оно калибровочно-эквивалентно цилиндрическому уравнению Гайзенберга (В.12). Заменами

$$\psi(x, t) = \frac{x}{2} \hat{\psi}(\hat{x}, \hat{t}), \quad \hat{x} = \frac{1}{4} x^2, \quad \hat{t} = t$$

уравнения (П.10[±]) приводятся к виду (ниже шляпки опускаем)

$$(П.11^\pm) \quad i\psi_t + (x\psi)_{xx} \pm 2\psi \left[x \int |\psi|^2 dx \right]_x = 0.$$

После завершения нашей работы нам стало известно, что уравнения (П.4), (П.5) и (П.11[±]) были проинтегрированы ранее в работе [6]:

$$(П.12) \quad i \left(\psi_t + \frac{\psi}{2t} \right) + \psi_{xx} \pm 2|\psi|^2 \psi = 0,$$

$$U = i\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 & \psi \\ \pm \bar{\psi} & 0 \end{bmatrix},$$

$$V = -2i\lambda^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - 2i\lambda \begin{bmatrix} 0 & \psi \\ \pm \bar{\psi} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \pm i |\psi|^2 & -\psi_x \\ \pm \bar{\psi}_x & \mp i |\psi|^2 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_x = \frac{1}{4t}, \quad \lambda_t = -\frac{\lambda}{t}, \quad \lambda(z, x, t) = \frac{z+x/4}{t}.$$

Уравнение (П.12), нам ранее неизвестное, описывает цилиндрически расходящиеся квазиплоские волны огибающих в нелинейной среде. Кроме того, это уравнение является тривиальной деформацией НУШ. Замена

$$(П.13) \quad \psi(x, t) = \frac{1}{t} \exp \left[\frac{ix^2}{4t} \right] \hat{\psi}(\hat{x}, \hat{t}), \quad \hat{x} = \frac{x}{t}, \quad \hat{t} = -\frac{1}{t}$$

в уравнении (П.12) приводит к НУШ (шляпки опускаем)

$$i\psi_t + \psi_{xx} \pm 2|\psi|^2 \psi = 0.$$

5. Деформация уравнения Шредингера с дифференцированной нелинейностью [18]:

$$(П.14) \quad i\psi_t + (x\psi)_{xx} \pm i(x|\psi|^2\psi)_x - \frac{1}{2} \psi_x = 0,$$

$$U = -i\lambda^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - i\lambda \begin{bmatrix} 0 & \psi \\ \pm \bar{\psi} & 0 \end{bmatrix},$$

$$V = -2i\lambda^4 x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - 2i\lambda^3 x \begin{bmatrix} 0 & \psi \\ \pm \bar{\psi} & 0 \end{bmatrix} + i\lambda^2 x \begin{bmatrix} \pm |\psi|^2 & 0 \\ 0 & \mp |\psi|^2 \end{bmatrix} +$$

$$+ \lambda x \begin{bmatrix} 0 & \psi_x + \frac{\psi}{2x} \pm i|\psi|^2 \psi \\ \mp \bar{\psi}_x \mp \frac{\bar{\psi}}{2x} + i|\psi|^2 \bar{\psi} \end{bmatrix},$$

$$\lambda_x=0, \quad \lambda_t=\lambda^3, \quad \lambda(z, t) = \frac{1}{\sqrt{-2(t+z)}}.$$

После замены $\psi(x, t) = x^{-1/4} \hat{\psi}(\hat{x}, \hat{t})$, $\hat{x} = 2x^{1/2}$, $\hat{t} = t$, система (П.14) принимает вид (ниже шляпки опускаем)

$$(П.15) \quad i\psi_t + \psi_{xx} + \frac{1}{x} \psi_x \pm i(|\psi|^2 \psi)_x = \frac{1}{4x^2} \psi \mp \frac{i}{2x} |\psi|^2 \psi.$$

Литература

- [1] Захаров В. Е., Шабат А. Б. // Функци. анализ и его прилож. 1979. Т. 13. В. 3. С. 13–22.
- [2] Захаров В. Е., Михайлов А. В. // ЖЭТФ. 1978. Т. 74. № 6. С. 1953–1973.
- [3] Белинский В. А., Захаров В. Е. // ЖЭТФ. 1978. Т. 75. № 6(12). С. 1953–1971. Белинский В. А., Захаров В. Е. // ЖЭТФ. 1979. Т. 77. № 1. С. 3.
- [4] Maison D. // Phys. Rev. Lett. 1978. V. 41. P. 521–522.
- [5] Mikhailov A. V., Yaremchuk A. I. // Nucl. Phys. 1982. V. B202. P. 508–522.
- [6] Calogero F., Degasperis A. // Commun. Math. Phys. 1978. V. 63. P. 155–176.
- [7] Алексеев Г. А. // Письма в ЖЭТФ. 1980. Т. 32. В. 4. С. 301–303.
- [8] Алексеев Г. А. // ДАН СССР. 1985. Т. 283. В. 3. С. 577–582.
- [9] Михайлов А. В., Яремчук А. И. // Письма в ЖЭТФ. 1982. Т. 30. В. 3. С. 78–81.
- [10] Луговцев Б. Б., Луговцев А. Б. // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР. 1989. В. 1. С. 195–206.
- [11] Будагов А. С., Тахтаджян Л. А. // ДАН СССР. 1977. Т. 235. В. 4. С. 805–808.
- [12] Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C. // J. Math. Phys. 1974. V. 15. P. 1852.
- [13] Захаров В. Е., Михайлов А. В. // Функци. анализ и его прилож. 1983. Т. 17. Вып. 4. С. 1–6.
- [14] Боровик А. Е. // Письма в ЖЭТФ. 1978. Т. 28. В. 10. С. 629–632.
- [15] Склянин Е. К. // Современные проблемы теории магнетизма. К.: Наукова думка, 1986.
- [16] Mikhailov A. V. // Phys. Lett. 1982. V. 92A. № 2. P. 51–55.
- [17] Kaup D. J. // Prog. Theor. Phys. 1975. V. 54. № 2. P. 396–408.
- [18] Kaup D. J., Newell A. C. // J. Math. Phys. 1978. V. 19. P. 898–901.

Институт теоретической физики
им. Л. Д. Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
6.II.1986 г.

INVERSE SCATTERING METHOD WITH VARIABLE SPECTRAL PARAMETER

Burtsev S. P., Zakharov V. E., Mikhailov A. V.

In the traditional scheme of the inverse scattering method the spectral parameter of the auxiliary linear problem is usually considered as a constant. The authors propose to consider it as a variable satisfying an over-determined system of differential equations which is determined by the auxiliary linear problem. Nonlinear equations arising in this approach include, as a rule, the explicit dependence on coordinates. Besides the known equations (equation of gravitation, Heisenberg equation in axial geometry etc.) the method makes it possible to construct a number of new integrable equations valuable for applications.