ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 63, № 1
апрель, 1985

УРАВНЕНИЕ МАКСВЕЛЛА — БЛОХА И МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

Габитов И. Р., Захаров В. Е., Михайлов А. В.

При помощи метода обратной задачи рассеяния построены общие решения системы Максвелла – Блоха (МБ), определяемые заданием поляризации при $t\to-\infty$, произведена их классификация. Приближенно решена смешанная краевая задача для системы МБ, описывающая явление суперфлуоресценции (генерации импульса из начальных флуктуаций поляризации в лазере без зеркал).

ВВЕДЕНИЕ

Среди многочисленных известных в настоящее время нелинейных уравнений математической физики, к которым применим метод обратной задачи рассеяния (МОЗР), заметную роль играет система уравнений Максвелла – Блоха (МБ). Мы будем записывать эту систему в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathscr{E}=\langle\rho\rangle, \tag{B.1}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+2i\lambda\rho=N\mathscr{E}, \tag{B.2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t}=-\frac{1}{2}(\mathscr{E}^*\rho+\mathscr{E}\rho^*). \tag{B.3}$$

Здесь $\mathscr{E}=\mathscr{E}(t,x)$ — комплексная функция координаты x и времени t, $\rho=\rho(t,x,\lambda)$ и $N=N(t,x,\lambda)$ — комплексная и вещественная функции x, t и дополнительного параметра λ. Скобки $\langle\ \rangle$ означают усреднение по λ с заданной весовой функцией $g(\lambda)>0$,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(\lambda)\,d\lambda=1,\quad \langle\rho\rangle=\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(\lambda)\rho(t,x,\lambda)\,d\lambda. \tag{B.4}$$

Уравнения (B.1)–(B.3) возникают во многих физических задачах. Наиболее важным является применение этой системы к задаче о распространении электромагнитной волны в среде с распределенными двухуровневыми атомами, в частности к задаче о самоиндуцированной прозрачности (СИП), а также к задачам лазерного типа — о квантовом усилителе и о суперфлуоресценции. Во всех этих случаях $\mathscr{E}(t,x)$ имеет смысл комплексной огибающей электромагнитной волны фиксированной поляризации, N и ρ — элементы матрицы плотности атомной подсистемы, (В.5) $$\hat{\rho}=\begin{bmatrix} N & \rho \\ \rho^* & -N \end{bmatrix}.$$

Параметр λ имеет смысл отклонения частоты перехода атома от ее среднего значения, функция g описывает форму спектральной линии. Уравнения (В.2) – (В.3) могут быть записаны в матричном виде:

(В.6) $$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t}=i[-\mathrm{I}\lambda+H,\hat{\rho}],$$

(В.7) $$\mathrm{I}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\quad H=\frac{i}{2}\begin{bmatrix} 0 & \mathscr{E} \\ -\mathscr{E}^* & 0 \end{bmatrix}.$$

Система МБ (В.1) – (В.3) приобрела известность после работ Дж. Лэма [1, 2]. В последующие годы уравнениям МБ было посвящено некоторое количество работ, среди которых следует отметить работу Абловица, Каупа и Ньюелла [3]. В этой работе было, в частности, установлено, что к уравнениям МБ применим МОЗР, фактически уравнения МБ представляют собой один из первых примеров успешного применения метода, и также достаточно полно рассмотрены решения уравнений (В.1) – (В.3), описывающие физическое явление СИП. В работе [3], как и в большинстве других работ, рассматривается весьма частный класс решений системы МБ, для которого $\rho\to 0$ при $t\to-\infty$. Этих решений достаточно для описания распространения электромагнитной волны в устойчивой, поглощающей среде (случай СИП), но, вообще говоря, недостаточно для описания волн в неустойчивой среде, характерного для лазерных задач. Этим объясняется то обстоятельство, что до недавнего времени применение МОЗР к лазерным задачам не носило систематического характера (исключение составляет работа [4], в которой рассматривается асимптотика распространения импульса в длинном квантовом усилителе при отсутствии флуктуаций поляризации). Начало систематическому применению МОЗР к лазерным задачам было положено работой [5], в которой были введены понятия «спонтанных» и «причинных» решений системы (В.1) – (В.3). В настоящей статье мы предъявим общие решения системы МБ, определяемые, в частности, заданием $\rho(t, x, \lambda)$ при $t\to-\infty$, и произведем классификацию этих решений. Найденные нами решения описывают в принципе важное явление суперфлуоресценции – генерации в лазере без зеркал импульса из начальных флуктуаций поляризации, однако решение этой задачи приводит к смешанной краевой задаче для системы (В.1) – (В.3). Как правило, смешанные задачи не поддаются решению при помощи МОЗР. Нам удалось, по-видимому впервые, получить эффективное приближенное решение смешанной задачи, описывающей суперфлуоресценцию, для лазеров не слишком большой длины. Заметим, что для таких лазеров в случае бесконечно узкой линии приближенное решение задачи о суперфлуоресценции может быть получено элементарным способом, при этом конструкция, развитая в настоящей статье, позволяет более строго обосновать метод, предложенный в работах [6, 7]. Заметим еще, что развитие техники МОЗР для системы (В.1) – (В.3) включает в себя, кроме решения смешанной задачи, ряд нестандартных с точки зрения МОЗР моментов, представляющих самостоятельный интерес.

1. ОБЩАЯ СТРУКТУРА РЕШЕНИЯ

Рассмотрим переопределенную систему линейных уравнений на матричную функцию $\Psi(t, x, \lambda)$:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}=i(-\mathrm{I}\lambda+H)\Psi, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}+i\left(-\mathrm{I}\lambda+H+\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat\rho(t,x,\eta)g(\eta)}{\eta-\lambda}d\eta\right)\Psi=0, \tag{1.2}$$

и потребуем, чтобы уравнения (1.1), (1.2) имели совместное фундаментальное решение. Уравнения (1.1), (1.2) можно записать в виде

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}=U\Psi,\quad \frac{\partial\Psi}{\partial x}=V\Psi, \tag{1.3}$$

где

$$U=i(-\mathrm{I}\lambda+H),\quad V=i\left(\mathrm{I}\lambda-H-\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat\rho(t,x,\eta)g(\eta)}{\eta-\lambda}d\eta\right). \tag{1.4}$$

Условия совместности системы (1.3) имеют вид

$$\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial V}{\partial t}+[U,V]=0. \tag{1.5}$$

Прямым вычислением проверяется

Предложение 1. *Уравнение* (1.5), *в котором* U, V *задаются формулами* (1.4), *эквивалентно системе уравнений Максвелла — Блоха* (B.1) – (B.3).

Предложение 1 обеспечивает возможность применения к системе (B.1) – (B.3) метода обратной задачи. В обычном варианте МОЗР [8] предполагается, что U и V являются рациональными функциями спектрального параметра λ. В нашем случае рациональная зависимость имеет место, только если $g(\lambda)=\sum g_n\delta(\lambda-\lambda_n)$, т. е. форма линии состоит из дискретного набора бесконечно узких линий. Целесообразно, однако, следуя работе [3], рассматривать общий случай непрерывной функции $g(\lambda)$, когда функция V имеет разрез по вещественной оси λ.

Мы рассматриваем уравнение (1.1) в классе быстро убывающих по t коэффициентов $\mathscr{E}(t, x)$, подчиняющихся условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\mathscr{E}(t,x)|\,dt<\infty \tag{1.6}$$

(физически это отвечает рассмотрению импульсных процессов). Поставим для (1.1) задачу рассеяния, введя наборы функций Йоста — решений уравнения (1.1) $\chi^\pm$, определяемые асимптотиками

$$\chi^\pm\to\exp(-i\mathrm{I}\lambda t),\quad t\to\pm\infty, \tag{1.7}$$

и определив матрицу рассеяния S по формуле

$$\chi^-=\chi^+S,\quad S=S(x,\lambda). \tag{1.8}$$

Как известно (см. [10]), матрица S имеет вид

(1.9) $$S=\begin{bmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{bmatrix},$$

причем $|a|^2+|b|^2=1$. Функция $a(x, \lambda)$ аналитична в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda>0$ и имеет там при выполнении условия (1.6) конечное число J нулей λ_j, являющихся собственными значениями спектральной задачи (1.1). Соответствующие собственные функции можно определить асимптотиками

$$\Psi_j\to\begin{pmatrix} 0 \\ \exp(i\lambda_j t) \end{pmatrix}, \quad t\to\infty,$$

тогда

$$\Psi_j\to\begin{pmatrix} c_j\exp(-i\lambda_j t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t\to-\infty.$$

Функция $c(x, \lambda)=b^*(x, \lambda)/a(x, \lambda)$ и набор констант λ_j, c_j образуют для спектральной задачи (1.1) «данные рассеяния». Если функция $\mathscr{E}(t, x)$ удовлетворяет условию

(1.10) $$|\mathscr{E}(t, x)|<\alpha\exp(2\gamma t)$$

при $t\to-\infty$, причем $\gamma>\max\operatorname{Im}\lambda_j$, то матрица S может быть аналитически продолжена в полосу верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda<\gamma$. В этом случае $c_j=$ $=b^*|_{\lambda=\lambda_j}$. Обозначим $M_j=(c/a)|_{\lambda=\lambda_j}$ и построим функцию

(1.11) $$F(t,x)=\sum_{j=1}^{J}M_j\exp(-i\lambda_j t)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}c(x,\lambda)\exp(-i\lambda t)\,d\lambda.$$

При выполнении условия (1.10) функция $c(x, \lambda)$ мероморфна в полосе $\gamma>\operatorname{Im}\lambda>0$, и формула (1.11) может быть переписана в виде

(1.12) $$F(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\gamma}^{\infty+i\gamma}c(x,\lambda)\exp(-i\lambda t)\,d\lambda.$$

Построение по $\mathscr{E}(t, x)$ набора данных рассеяния $c(x, \lambda)$, λ_j, c_j (решение прямой задачи рассеяния) задает отображение $\mathscr{E}\to F$. Это отображение взаимно однозначно — для его обращения следует решить при всех t следующую систему интегральных уравнений (уравнений Марченко):

(1.13) $$K_1(t,\tau,x)=F(t+\tau,x)+\int_{-\infty}^{t}K_2(t,\xi,x)F(\tau+\xi,x)\,d\xi,$$

(1.14) $$K_2(t,\tau,x)=-\int_{-\infty}^{t}K_1(t,\xi,x)F^*(\tau+\xi,x)\,d\xi.$$

Тогда

(1.15) $$\mathscr{E}(t, x)=4K_1(t, t, x),$$

(1.16) $$\int_{-\infty}^{t}|\mathscr{E}(t,x)|^2\,dt=-4K_2(t,t,x).$$

Отображение $\mathscr{E}\rightleftarrows F$ замечательно тем, что функция F, как показано ниже, подчиняется **линейному** интегродифференциальному уравнению.

Из уравнений (В.2), (В.3) следует

$$\frac{\partial}{\partial t}(|\rho|^2+N^2)=0.$$

В дальнейшем будем полагать

$$(1.17)\qquad |\rho|^2+N^2=1.$$

Устремляя $t\to\pm\infty$, имеем

$$(1.18)\qquad \hat\rho\to\exp(-iI\lambda t)\hat\rho^\pm\exp(iI\lambda t).$$

Здесь $\rho^\pm(x,\lambda)$ — не зависящие от t матрицы

$$(1.19)\qquad \hat\rho^\pm=\begin{bmatrix} \nu^\pm(x,\lambda) & r^\pm(x,\lambda)\\ (r^\pm(x,\lambda))^* & -\nu^\pm(x,\lambda)\end{bmatrix}.$$

Из (В.2) имеем

$$(1.20)\qquad \rho(t,x,\lambda)=\exp(-2i\lambda t)\int_{-\infty}^{t}N(\tau,x,\lambda)\mathscr{E}(\tau,x)\exp(2i\lambda\tau)\,d\tau+ +r^-(x,\lambda)\exp(-2i\lambda t).$$

При $t\to-\infty$ можно в (1.20) заменить $N\to\nu^-(x,\lambda)$. Теперь поле $\mathscr{E}$ подчиняется линеаризованному уравнению

$$(1.21)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathscr{E}(t,x)=\int_{-\infty}^{t}d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\nu^-(x,\lambda)g(\lambda)\exp[2i\lambda(\tau-t)]\mathscr{E}(\tau,x)\,d\lambda+ +\int_{-\infty}^{\infty}r^-(x,\lambda)\exp(-2i\lambda t)g(\lambda)\,d\lambda.$$

Имеет место

Предложение 2. *Функция $\tilde F(t,x)={}^1/_4F(2t,x)$, где F — ядро уравнений Марченко, удовлетворяет линейному неоднородному уравнению* (1.21).

Для доказательства рассмотрим совместное решение уравнений (1.1) и (1.2) Ψ_0 (заметим, что функция Иоста $\chi^\pm$ не удовлетворяет уравнению (1.2)) и разложим его по функциям $\chi^\pm$:

$$(1.22)\qquad \Psi_0=\chi^+\Phi^+=\chi^-\Phi^-.$$

Функции $\Phi^\pm(x,\lambda)$ подчиняются при заданных $\hat\rho^\pm(x,\lambda)$ линейным уравнениям, которые можно получить, устремляя в (1.2) $t\to\pm\infty$. Обозначим

$$(1.23)\qquad \hat R^\pm(x,\lambda)= =\lim_{t\to\pm\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp[iI(\lambda-\eta)t]\hat\rho^\pm(x,\eta)\exp[-iI(\lambda-\eta)t]}{\eta-\lambda}g(\eta)\,d\eta.$$

Пользуясь известной формулой

$$\lim_{t\to\pm\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\eta)}{\eta-\lambda}\exp(i\eta t)\,d\eta=\pm\pi i f(\lambda),$$

имеем

$$(1.24)\qquad \hat{R}^{\pm}(x,\lambda)=\begin{bmatrix} N^{\pm}(x,\lambda) & \mp\pi i r^{\pm}(x,\lambda)g(\lambda) \\ \pm\pi i(r^{\pm}(x,\lambda))^{*}g(\lambda) & -N^{\pm}(x,\lambda)\end{bmatrix}$$

$$N^{\pm}(x,\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\nu^{\pm}(x,\eta)}{\eta-\lambda}g(\eta)\,d\eta.$$

Функция $\Phi^{\pm}(x,\lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$(1.25)\qquad \frac{\partial\Phi^{\pm}}{\partial x}-i\lambda\mathrm{I}\Phi^{\pm}+\frac{i}{4}\hat{R}^{\pm}\Phi^{\pm}=0.$$

Сравнивая (1.22) и (1.8), находим

$$(1.26)\qquad S=\Phi^{+}(\Phi^{-})^{-1}.$$

Из (1.25) и (1.26) имеем

$$(1.27)\qquad \frac{\partial S}{\partial x}-i\lambda[\mathrm{I}S]+\frac{i}{4}(R^{+}S-SR^{-})=0.$$

Подставляя в (1.27) матрицу S в виде (1.9), получим для a, b после простых вычислений

$$(1.28)\qquad \frac{\partial a}{\partial x}=\frac{ia}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\nu^{+}(x,\eta)-\nu^{-}(x,\eta)}{\eta-\lambda+i0}g(\eta)\,d\eta,$$

$$(1.29)\qquad \frac{\partial b}{\partial x}=-2i\lambda b^{*}+\frac{ib^{*}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\nu^{+}(x,\eta)-\nu^{-}(x,\eta)}{\eta-\lambda+i0}g(\eta)\,d\eta+\frac{\pi}{2}g(\lambda)ar^{-}.$$

Из (1.27) имеем для $c=b^{*}/a$

$$(1.30)\qquad \frac{\partial c}{\partial x}-i\varphi(x,\lambda)c=\frac{\pi}{2}g(\lambda)r^{-}(x,\lambda),$$

здесь

$$(1.31)\qquad \varphi(x,\lambda)=2\lambda-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\nu^{-}(x,\eta)g(\eta)}{\eta-\lambda+i0}d\eta$$

— функция, аналитическая в верхней полуплоскости λ.

Общее решение уравнения (1.30) имеет вид

$$(1.32)\qquad c(x,\lambda)=c_1(x,\lambda)+c_2(x,\lambda),$$

$$(1.33)\qquad c_1(x,\lambda)=c_0(\lambda)\exp[i\zeta(x,\lambda)],$$

$$(1.34)\qquad c_2(x,\lambda)=\frac{\pi}{2}g(\lambda)\int_{0}^{x}\exp[i(\zeta(x,\lambda)-\zeta(y,\lambda))]r^{-}(y,\lambda)\,dy.$$

Здесь $c_0(\lambda)=c(0,\lambda)\zeta(x,\lambda)=\int_0^x\varphi(y,\lambda)dy$ — аналитическая в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,\lambda>0$ функция. Формула (1.30) дает доказательство предложения 2 в случае, когда дискретный спектр в задаче (1.1) отсутствует; действительно, совершая в (1.30) преобразования Фурье, убеждаемся после простых выкладок, что $\hat{F}(t, x)=F(2t, x)$ подчиняется уравнению (1.21).

Если присутствует дискретный спектр, для доказательства применим следующий прием: построим наборы функций $c_j(x, \lambda)$, $f_j(x, \lambda)$, аналитических в полосе $0<\operatorname{Im}\lambda<\gamma$ и сходящихся на вещественной оси

$$c_j^0(\lambda)\to c_0(\lambda),$$

$$f_j(x, \lambda)\to g(\lambda)r^-(x, \lambda), \quad j\to\infty, \quad \operatorname{Im}\lambda=0.$$

Из формул (1.32)—(1.34) следует, что при всех j решения уравнения (1.30) являются аналитическими в полосе $0<\operatorname{Im}\lambda<\gamma$. Применяя к ним формулу (1.12), убеждаемся, что все $\hat{F}_j(t, x)$ удовлетворяют уравнению (1.21). Переходя к пределу $j\to\infty$, убеждаемся, что это верно для $\hat{F}(t, x)$, что и заканчивает доказательство предложения 2.

Из формул (1.28)—(1.29) можно получить законы изменения данных рассеяния по x. Из (1.28) немедленно следует, что нули не зависят от x:

$$\partial\lambda_j/\partial x=0. \tag{1.35}$$

Для величин $M_j=c_j/a_j$ имеем

$$M_j(x)=M_j^0\exp[i\zeta(x, \lambda_j)]. \tag{1.36}$$

Уравнения (1.28), (1.29) формально являются линейными, однако фактически они нелинейны, потому что функции $\nu^\pm(x, \lambda)$ не являются независимыми.

Представим матрицу $\hat{\rho}(t, x, \lambda)$ в виде

$$\hat{\rho}=\Psi_0\hat{\rho}_0\Psi_0^{-1}. \tag{1.37}$$

Подставляя (1.37) в (В.6) и принимая во внимание (1.1), убеждаемся, что матрица $\hat{\rho}_0$ не зависит от времени. Устремляя $t\to\pm\infty$ и пользуясь формулами (1.22), (1.7) и (1.18), получаем

$$\hat{\rho}^\pm=\Phi^\pm\hat{\rho}_0(\Phi^\pm)^{-1}.$$

Отсюда с учетом соотношения (1.26) имеем

$$\hat{\rho}^+=S\rho^-S^{-1}. \tag{1.38}$$

Из (1.38) находим

$$\nu^+=\nu^-(|a|^2-|b|^2)-a^*b^*(r^-)^*-abr^-, \tag{1.39}$$

$$r^+=2b^*a\nu^--(b^2r^-)^*+a^2r^-. \tag{1.40}$$

Подставляя (1.39), (1.40) в (1.28), (1.29), мы получим необходимые уравнения для $a(x, \lambda)$, $b^*(x, \lambda)$, выписывать которые нет необходимости. В частном случае $r^-=0$, $\nu^-=-1$ они совпадают с уравнениями, построенными Абловицем, Каупом, Ньюеллом в работе [3]. Заметим, что для построения общего решения уравнения МБ необходимо решить уравнение (1.30) на функцию $c(x, \lambda)$, которое, как и в [3], является линейным, но теперь уже неоднородным уравнением.

Формулы (1.32)—(1.34) дают после перехода к функции $F(t, x)$ и решения интегральных уравнений (1.13)—(1.14) общее решение системы уравнений МБ (В.1)—(В.3).

2. ПРИЧИННЫЕ И СПОНТАННЫЕ РЕШЕНИЯ

Перейдем к интерпретации полученного нами общего решения. Оно определяется данными рассеяния при $x=0$: $c_0(\lambda)$, λ_j, M_j^0, а также заданием функции $r^-(x, \lambda)$, кроме того, необходимо задавать знак величины

$$\nu^-(x, \lambda) = \pm\sqrt{1-|r^-(x, \lambda)|^2}. \tag{2.1}$$

Знак минус в формуле (2.1) описывает распространение волн в устойчивой среде, в которой нижний уровень атомной подсистемы более заселен, чем верхний. Напротив, знак плюс в (2.1) означает, что волны распространяются в неустойчивой, инверсно-заселенной среде. Мы будем предполагать, что эта среда занимает положительную полуось $0\leqslant x<\infty$, при $t\to-\infty$ в этой среде «приготовлено» некоторое состояние атомной подсистемы, характеризующееся флуктуационной поляризацией $r^-(x, \lambda)$ и заселенностью $\nu^-(x, \lambda)$. В дальнейшем эта поляризация, эволюционируя, является источником генерации электромагнитного поля $\mathscr{E}(t, x)$. Кроме того, на среду в точке $x=0$ падает извне импульс электромагнитного поля $\mathscr{E}_0(t)$, определяющий после решения прямой задачи рассеяния функцию $c_0(\lambda)$ и параметры λ_j, M_j^0.

Естественно выделить два класса частных решений уравнений МБ. Пусть $r^-(x, \lambda)=0$, тогда решение полностью определяется падающим импульсом $\mathscr{E}_0(t)$. Такие решения, которым в (1.32) отвечает слагаемое $c_1(x, \lambda)$, мы будем называть причинными. Мотивировку этого определения можно пояснить следующим образом. Пусть входящий в среду импульс удовлетворяет условию $\mathscr{E}_0(t)=0$ при $t<t_0$, тогда $c_0(\lambda)$ — аналитическая в верхней полуплоскости функция, имеющая полюса в точках $\lambda=\lambda_j$ с вычетами M_j. Можно проверить (мы не останавливаемся на доказательстве этого факта, выводимого из интегральных представлений для функций Иоста), что функция c_0 допускает при $\lambda\to\infty$, $\operatorname{Im}\lambda>0$ оценку

$$|c_0(\lambda)|<c_0^0 \exp(-2\operatorname{Im}\lambda t_0)/|\lambda|.$$

Из (1.31) видно, что при $\lambda\to\infty$

$$\varphi(x, \lambda)\to 2\lambda, \quad \zeta(x, \lambda)\simeq 2\lambda x.$$

Итак, подынтегральное выражение в (1.12) имеет при $\operatorname{Im}\lambda>0$ асимптотику $\exp[i\lambda(2t_0-t+2x)]$, так что $F(t, x)=0$ при $t<2(t_0+x)$. Из уравнений Марченко (1.13)—(1.14) теперь следует $\mathscr{E}(t, x)=0$ при $t<t_0+x$. Это означает, что причинное решение при финитном потенциале имеет фронт, распространяющийся в глубь среды со скоростью света в полном соответствии с представлениями о причинности.

Пусть теперь падающий импульс отсутствует: $\mathscr{E}_0(t)=0$. Тогда решение целиком определяется заданием флуктуаций поляризации $r^-(x, \lambda)$, и мы будем называть его спонтанным. При этом функция $c(x, \lambda)$ задается формулой (1.34). Для спонтанных решений $a(0,\lambda)=1$,

$$(2.2)\qquad a(x,\lambda)=\exp\left[\frac{i}{4}\int_0^x dy\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\nu^+(y,\eta)-\nu^-(y,\eta)}{\eta-\lambda+i0}g(\eta)d\eta\right]$$

и $a(x,\lambda)\neq 0$ при $\operatorname{Im}\lambda>0$. Таким образом, для спонтанных решений спектральная задача (1.1) не имеет дискретного спектра. Общее решение представляет собой линейную суперпозицию причинного и спонтанного решений.

Остановимся еще на одном специальном классе солитонных решений, для которых $r^-(x,\lambda)=c_0(\lambda)=0$, они целиком определяются дискретным спектром задачи (1.1). Формально солитонные решения можно отнести к причинным, но при $\nu^->0$ они носят сильно вырожденный характер, неустойчивы и поэтому не имеют физического смысла.

Перепишем выражение (1.31) для $\varphi(x,\lambda)$ в виде

$$(2.3)\qquad \varphi(x,\lambda)=2\lambda-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}d\eta\frac{\nu^-(x,\eta)}{\eta-\lambda}g(\eta)-\frac{\pi}{2}ig(\lambda)\nu^-(x,\lambda).$$

В устойчивой среде $\nu^-<0$ и экспонента в причинном решении (1.33) является при $x\to\infty$ убывающей, так что $c_1\to 0$ при $x\to\infty$. На достаточно больших расстояниях причинное решение переходит в чисто солитонное, на языке нелинейной оптики — в набор взаимодействующих 2π-импульсов. Это и составляет суть явления СИП.

В спонтанном решении в устойчивой среде интеграл в (1.34) определяется при $x\to\infty$ окрестностью точки x. Имеем

$$(2.4)\qquad c_2(x,\lambda)\to\frac{\pi i g(\lambda)}{2\varphi(x,\lambda)}r^-(x,\lambda).$$

При равномерно по x малом значении поляризации $r^-(x,\lambda)$ спонтанное решение остается равномерно малым. В инверсно-заселенной среде, когда $\nu^->0$, асимптотика общего решения при $x\to\infty$ имеет вид

$$(2.5)\qquad c(x,\lambda)=\exp[i\zeta(x,\lambda)]\Big[c_0(\lambda)+
+\frac{\pi}{2}g(\lambda)\int_0^{\infty}r^-(y,\lambda)\exp[-i\zeta(y,\lambda)]dy\Big].$$

В общем случае выражение в квадратных скобках в (2.5) не равно нулю. При этом $c(x,\lambda)$ экспоненциально нарастает при $x\to\infty$. Поскольку $c=b^*/a$, а коэффициенты a и b связаны соотношением $|a|^2+|b|^2=1$, то при $c\to\infty$, $a\to 0$, $|b|\to 1$, так что матрица S приобретает вид

$$(2.6)\qquad S=\begin{bmatrix}0 & \exp[i\alpha(x,\lambda)]\\ \exp[-i\alpha(x,\lambda)] & 0\end{bmatrix},\quad \operatorname{Im}\alpha(x,\lambda)=0.$$

Подставляя (2.6) в (1.39), убеждаемся, что теперь при $x\to\infty$ $\nu^+\to-\nu^-$. Это означает, что на достаточно больших длинах происходит обращение заселенной среды, и инверсная заселенность переходит в нормальную.

Если подобрать падающий импульс специальным образом, так что

$$(2.7) \qquad c_0(\lambda) = -\frac{\pi}{2} g(\lambda) \int_0^\infty r^-(y,\lambda) \exp[-i\zeta(y,\lambda)]dy,$$

$c(x, \lambda)$ остается ограниченным при всех x и полного обращения заселенности среды не произойдет. В частности, это верно для чисто солитонных решений, когда $r^-=0$, $c_0=0$. Однако все эти ситуации являются неустойчивыми — достаточно малого отклонения от выполнения условия (2.7), чтобы произошло полное обращение поляризации. Чисто солитонное решение является неустойчивым. Эта неустойчивость разъясняет известный парадокс о сверхсветовом распространении импульсов в инверсно-заселенной среде. Легко вычислить односолитонное решение (см., например, [9]), при этом

$$(2.8) \qquad \mathscr{E}(t,x) = 2\eta \operatorname{sech}\left\{\eta\left[t - t_0 - x\left(1 - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\nu)d\nu}{\eta^2+\nu^2}\right)\right]\right\}.$$

Здесь η, t_0 — независимые параметры. Хотя солитон (2.8) имеет сверхсветовую скорость, с его помощью нельзя передать никакой информации, т. к. форма солитона на всей оси $-\infty<t<\infty$ однозначно восстанавливается по ее поведению в сколь угодно малой окрестности любого момента времени. При малейшем отклонении от формы (2.8) возникает фронт опрокидывания заселенности среды, который будет распространяться со скоростью света. Именно поэтому все чисто солитонные решения неустойчивы.

3. СЛУЧАЙ БЕСКОНЕЧНО УЗКОЙ ЛИНИИ

С точки зрения физики большой интерес представляет случай, когда спектральная линия является бесконечно узкой, т. е.

$$(3.1) \qquad g(\lambda) = \delta(\lambda).$$

Этот случай осуществляется и при конечной ширине линии, если импульс электромагнитного поля $\mathscr{E}(t, x)$ является достаточно узким (как мы увидим ниже, это осуществляется при любой форме начального импульса на выходе длинного лазера). В случае (3.1) уравнения (В.1) — (В.3) приобретают вид

$$(3.2) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathscr{E}=\rho, \quad \frac{\partial\rho}{\partial t}=N\mathscr{E}, \quad \frac{\partial N}{\partial t}=-\frac{1}{2}(\mathscr{E}^*\rho+\mathscr{E}\rho^*).$$

При $\mathscr{E}\to 0$ уравнения (3.2) имеют только два решения $\rho=0$, $N=\pm 1$, соответствующие неустойчивой и устойчивой средам при полном отсутствии флуктуаций. Для построения общего решения системы (3.2) удобно рассматривать предельный переход из ситуации с конечной шириной линии.

Примем для упрощения рассмотрения, что форма линии $g(\lambda)$ описывается функцией Лоренца

$$(3.3) \qquad g(\lambda) = \frac{\varepsilon}{\pi(\lambda^2+\varepsilon^2)},$$

а начальные флуктуации $r^-(x, \lambda)$ малы, так что можно положить $\nu^-(x,$

$\lambda)=\pm 1$. Тогда

$$(3.4)\qquad \varphi(\lambda)=2\lambda+\frac{\nu^-}{2(\lambda+i\varepsilon)},$$

при $\varepsilon\to 0$ экспонента

$$\exp[i\zeta(x,\lambda)]=\exp\left[i\left(2\lambda+\frac{\nu^-}{2(\lambda+i\varepsilon)}\right)x\right]$$

приобретает существенную особенность в точке $\lambda=0$. Рассмотрим вначале случай нормально заселенной среды $\nu^-=-1$. Поскольку $g(\varepsilon)\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$, асимптотическая формула (2.4) в этом пределе выполняется при всех $x>0$. Подставляя (3.4) в (2.4), имеем

$$(3.5)\qquad c_2(x,\lambda)=\frac{i\varepsilon r^-(x,\lambda)}{(\lambda-i\varepsilon)[4\lambda(\lambda+i\varepsilon)-1]}.$$

После подстановки в (1.11) находим, что функция

$$F_{\text{сп}}(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}c_2(x,\lambda)\exp(-i\lambda t)\,d\lambda$$

при любом конечном t стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$. Поэтому спонтанные решения в нормально заселенной среде с бесконечно узкой линией не существуют.

Для причинных решений имеем

$$(3.6)\qquad F_{\text{пр}}(t,x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}c_0(\lambda)\exp\left[i\left(2\lambda x-\frac{x}{2(\lambda+i\varepsilon)}\right)-i\lambda t\right]d\lambda.$$

Таким образом, существенная особенность при интегрировании по λ обходится в верхней полуплоскости.

Из формулы (1.33) видно, что при $\varepsilon\to 0$ функция $c(x,\lambda)$ приобретает устранимую особенность $c(x,\lambda)=0$. Отсюда с учетом $c=b^*/a$, $|a|^2+|b|^2=1$ следует $b(x,0)=0$, $|a(x,0)|=1$. Из формулы (1.39) теперь имеем $\nu^+=\nu^-$. Далее, из уравнений (1.28), (1.29) находим

$$\frac{\partial a}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial b}{\partial x}=i\left(2\lambda-\frac{1}{2\lambda}\right),\quad b=\exp\left[ix\left(2\lambda-\frac{1}{2\lambda}\right)\right].$$

Качественно характер распространения причинного импульса в нормально заселенной среде с бесконечно узкой линией отличается от случая линии конечной ширины отсутствием затухания несолитонной части решения (поэтому этот случай можно назвать незатухающим). Тем не менее и в этом случае происходит выделение солитонной части решения за счет дисперсионного расплывания его несолитонной части.

Переходя к инверсно-заселенной среде $\nu^-=1$, найдем для причинного вклада в F формулу, аналогичную (3.6):

$$(3.7)\qquad F_{\text{пр}}(t,x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}c_0(\lambda)\exp\left[ix\left(2\lambda+\frac{1}{2(\lambda+i\varepsilon)}\right)-i\lambda t\right]d\lambda.$$

Качественно причинное решение в инверсно-заселенном случае с узкой линией не отличается от случая линии конечной ширины, в обоих случаях происходит обращение инверсной заселенности в нормальную. В инверсно-заселенной среде с узкой линией существуют спонтанные решения.

При $g(\lambda)=\delta(\lambda)$ в интеграл (1.34) при $\lambda\to 0$ основной вклад вносит окрестность точки $x=0$. Поэтому можно приближенно заменить $r^-(x,\lambda)=r^-(0,\lambda)=r(\lambda)$. С учетом этого для спонтанного вклада в ядро уравнения Марченко $F_{\text{сп}}$ имеем

$$F_{\text{сп}}(t,x)=-\frac{i\varepsilon}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r(\lambda)}{\lambda-i\varepsilon}\,\frac{1-\exp[i\varphi(\lambda)x]}{1+4\lambda(\lambda+i\varepsilon)}\exp(-i\lambda t)\,d\lambda. \tag{3.8}$$

Предположим, что r аналитична в некотором круге с центром в нуле и радиусом ε_0, и деформируем контур таким образом, чтобы он обходил снизу нуль по окружности радиуса ε_0. При $\varepsilon\to 0$ интеграл по новому контуру, не зависящему от ε, стремится к нулю. Однако мы при деформации контура прошли через особую точку $\lambda=-i\varepsilon$, вычет которой необходимо учитывать. При $\varepsilon\to 0$ имеем

$$F_{\text{сп}}(t,x)=\frac{1}{4\pi}\oint r(\lambda)\exp\left[i\left(2\lambda+\frac{\nu^-}{2\lambda}\right)x-i\lambda t\right]d\lambda \tag{3.9}$$

Интегрирование в (3.9) ведется по окружности малого радиуса с центром в нуле. Формула (3.9) дает описание спонтанных решений при $g(\lambda)\to\delta(\lambda)$; очевидно, что $F(t,x)=0$ при $x=0$.

В формуле (3.9) $r(\lambda)$ нужно понимать как росток аналитической в окрестности $\lambda=0$ функции. Как видно из уравнений (3.2), поляризация $\rho\to 0$ при $t\to-\infty$. Это же справедливо для полной поляризации $\langle\rho\rangle$ в уравнениях (В.1)—(В.3). Для простейшего из решений типа (3.9) $r(\lambda)=r_0=\text{const}$. В этом случае $F_{\text{сп}}(t,x)$ носит автомодельный характер:

$$F_{\text{сп}}(t,x)=\frac{r_0x}{2\sqrt{2x(t-2x)}}\,I_1\left(\sqrt{2x(t-2x)}\right) \tag{3.10}$$

Заметим еще, что при $\varepsilon\to 0$ длина области, внутри которой происходит переворот инверсной заселенности, стремится к нулю. Поэтому при всех x из (1.28) имеем $\nu^+=-\nu^-=-1$. Из (1.28), (1.29) имеем теперь

$$a(x,\lambda)=\exp(-ix/2\lambda),\qquad b(x,\lambda)=\exp(2i\lambda x). \tag{3.11}$$

Итак, $a(x,\lambda)$ имеет для спонтанных решений существенную особенность в точке $\lambda=0$. Хорошо известно [10], что при $\int_{-\infty}^{\infty}|\mathscr{E}(t,x)|\,dt<\infty$ коэффициент $a(x,\lambda)$ непрерывен вплоть до вещественной оси. Это означает, что в случае $g(\lambda)=\delta(\lambda)$ все спонтанные решения являются слабозатухающими

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\mathscr{E}(t,x)|\,dt=\infty.$$

Формулы (3.9) и (3.10) были приведены без доказательства в работе [5]. Формула (3.10) допускает любопытную интерпретацию. Поскольку $|a|=1$ на вещественной оси и имеет нуль бесконечного порядка в точке $\lambda=+i0$, спонтанное решение можно интерпретировать как предельный случай чисто солитонного решения — слияние бесконечного числа солитонов бесконечно малой амплитуды. Со спектральной задачей (1.1) связан бесконечный набор формул следов (см. [10]), имеющих для чисто солитонных решений вид

$$P_k=\sigma_k\sum_{j=1}^{J}(\lambda_j^k)^*-\lambda_j^k,\quad \sigma_k=\mathrm{const}(k),$$

здесь

$$P_1=\int_{-\infty}^{\infty}|\mathscr{E}(t,x)|^2dt,\quad P_2=\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(\mathscr{E}^*\mathscr{E}_t-\mathscr{E}\mathscr{E}_t^*)(t,x)dt,\ldots .$$

Поскольку для J одинаковых солитонов ($\lambda_j=i\lambda_0$) $P_k\sim J\lambda_0^k$, то при таком предельном переходе отличным от нуля может быть только инвариант P_1 (если положить $\lambda_0\sim 1/J$).

Действительно, из уравнений (3.1)–(3.3) следует

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty}|\mathscr{E}(t,x)|^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}g(\lambda)[\nu^-(x,\lambda)-\nu^+(x,\lambda)]d\lambda.$$

Отсюда для спонтанных решений $\mathscr{E}(t,0)=0$, $g(\lambda)=\delta(\lambda)$, $\nu^+=-\nu^-=-1$ имеем

$$P_1=\int_{-\infty}^{\infty}|\mathscr{E}(t,x)|^2dt=2x,\quad P_k=0,\quad k>1.$$

4. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА

Для системы уравнений МБ (В.1)–(В.3) естественно исходя из физических соображений поставить смешанную задачу, определяемую следующими начальными и краевыми условиями:

(4.1) $\mathscr{E}(t,0)=\mathscr{E}_1(t)$,

(4.2) $\mathscr{E}(0,x)=\mathscr{E}_2(x)$,

(4.3) $\rho(0,x,\lambda)=\rho_0(x,\lambda)$.

Для конечного образца размером L эта задача ставится в полуполосе $0\leqslant x\leqslant L$, $t\geqslant 0$, причем предполагается $\mathscr{E}_1(t)\to 0$, $t\to\infty$.

Метод обратной задачи рассеяния не приспособлен для решения проблемы (4.1)–(4.3). Мы можем решить только описанную выше асимптотическую смешанную задачу в полуплоскости $x\geqslant 0$, $-\infty<t<\infty$ с граничным условием $\mathscr{E}_0(t)$ и асимптотическим условием $\rho(t,x,\lambda)\to r^-(x,\lambda)\times\exp(-2i\lambda t)$ при $t\to-\infty$.

Можно, однако, попытаться свести смешанную задачу (4.1)–(4.3) к указанной асимптотической задаче, задав условие $\mathscr{E}_3(t)=\mathscr{E}(t,0)$, $t<0$ и $r^-(x,\lambda)$ таким образом, чтобы при $t=0$ воссоздались условия (4.2) и (4.3). Для этого необходимо решить смешанную задачу с условиями (4.2), (4.3) «назад во времени», наложив дополнительное условие $\mathscr{E}(t,x)\to 0$ при $t\to-\infty$.

При изменении знака времени меняется направление характеристик, поэтому при решении этой задачи задавать значение $\mathscr{E}_1(t)$ при $x=0$ некорректно. Граничное условие следует ставить при $x=L$:

$$(4.4) \qquad \mathscr{E}_4(t)=\mathscr{E}(t, L),$$

и выбирать его таким образом, чтобы $\mathscr{E}(t, x)\to 0$ при $t\to-\infty$. По решению этой задачи можно определить $\mathscr{E}_3(t)$ и $r^-(x, \lambda)$, сведя тем самым смешанную задачу (4.2)—(4.3) к асимптотической задаче.

В общем случае решить эту задачу ничем не проще, чем исходную (4.2)—(4.3). Однако, если начальные условия (4.2), (4.3) достаточно малы, задачу (4.2)—(4.4) можно решить «назад во времени», используя линейное приближение. Приведем результаты этого решения, полагая, как и прежде, $g(\lambda)=\varepsilon/\pi(\lambda^2+\varepsilon^2)$ и задавая

$$(4.5) \qquad \mathscr{E}_2(x)=0, \quad \rho_0(x, \lambda)=\rho_\xi \exp(i\xi x), \quad |\rho_\xi|\ll 1.$$

Из решения линейных уравнений найдем

$$(4.6) \qquad \mathscr{E}_3(t)=\frac{\rho_\xi}{p_1-p_2}[\exp(-p_2t)+\theta(-t-L)\exp(-p_1t)],$$

$$(4.7) \qquad \mathscr{E}_4(t)=\frac{\rho_\xi}{p_1-p_2}\Bigl\{\exp(i\xi L)[\exp(-p_2t)-\exp(-p_1t)(1-\theta(-t))]+$$

$$+\theta(t)\sqrt{\frac{L}{-t}}\,\frac{J_1(2\sqrt{-Lt})}{2\varepsilon+p_1}\exp(p_1L+2\varepsilon t)\Bigr\},$$

$$p_{1,2}=\frac{i\xi-2\varepsilon\pm\sqrt{(i\xi+2\varepsilon)^2+4}}{2},$$

$$\theta(t)=0 \ (t\leqslant 0), \qquad \theta(t)=1 \ (t>0).$$

Обратим внимание на поведение вспомогательного падающего на среду импульса $\mathscr{E}_3(t)$. При $-t<L$ этот импульс экспоненциально растет, причем показатель экспоненты равен инкременту неустойчивости $\gamma_\xi=\operatorname{Re} p_1$ с волновым вектором ξ (при $-t<L$ поле в точке $x=0$ «не знает» о существовании импульса $\mathscr{E}_4(t)$). Но при $-t>L$ компенсирующее действие импульса $\mathscr{E}_4(t)$ начинает сказываться, и поле во всем объеме образца начинает убывать. Итак, поле в точке $x=0$ достигает максимального значения $\mathscr{E}_{\max}=\mathscr{E}_3(-L+0)$. Условие применимости линейного приближения $\mathscr{E}_{\max}\ll 1$ дает по порядку величины критерий применимости линейного рассмотрения:

$$(4.8) \qquad |\rho_\xi|\exp(L\gamma_{\max})\ll 1, \qquad \gamma_{\max}=\max_\xi \gamma_\xi.$$

В работе [7] лазеры, подчиняющиеся условию (4.8), были названы лазерами «умеренной длины». Выражение для $r^-(x, \lambda)$ мы не приводим из-за его громоздкости.

Зная $\mathscr{E}_3(t)$, мы можем, решив прямую задачу рассеяния с потенциалом $\mathscr{E}_0(t)=\mathscr{E}_1(t)$, $t>0$, и $\mathscr{E}_0(t)=\mathscr{E}_3(t)$, $t<0$, найти $c_0(\lambda)$, а также элементы дискретного спектра λ_j, M_j^0. Далее, зная $r^-(x, \lambda)$ мы можем восстановить по формулам (1.31), (1.34) $c_2(x, \lambda)$ и вместе с этим $c(x, \lambda)$. Далее, по формулам (1.11) восстанавливается $F(t, x)$, а значение поля $\mathscr{E}(t, x)$ может быть получено после решения уравнения Марченко (1.13)—(1.15).

Описанная процедура позволяет приближенно решить смешанную задачу (4.1)—(4.3) для лазеров умеренной длины, удовлетворяющих условию (4.8). Ясно, что это решение сильно неоднозначно — вместо точки $x=L$ мы могли бы поставить граничное условие для падающего на среду импульса в любой точке $x>L$. Это привело бы, однако, к ухудшению условий применимости теории.

5. ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧЕ О СУПЕРФЛУОРЕСЦЕНЦИИ

Одной из важных с точки зрения физики задач, поставленных для уравнения МБ является задача о суперфлуоресценции. Она описывается смешанной задачей (4.1)—(4.3) при дополнительных упрощающих предположениях

$$(5.1)\qquad \mathscr{E}_1(t)=0,\quad \mathscr{E}_2(x)=0.$$

Функция $\rho_0(x, \lambda)$ определяется квантовыми флуктуациями в лазере. Как показано в [11, 12] ее можно считать случайной, распределенной по Гауссу, причем

$$(5.2)\qquad \overline{\rho_0(x,\lambda)\rho_0{}^*(y,\mu)}=\frac{4\delta(x-y)\,\delta(\lambda-\mu)}{N_0 g(\lambda)},$$

N_0 — полное число активных атомов в системе, которое является большим параметром (в типичной ситуации $N_0>10^8$).

Из (5.2) следует, что начальное условие $\rho_0\sim1/\sqrt{N_0}$ является малым параметром, поэтому при выполнении критерия

$$(5.3)\qquad L\gamma_{\max}\ll\frac{1}{2}\ln N_0,\qquad \gamma_{\max}=\max_{\xi}\gamma_\xi$$

можно воспользоваться схемой, изложенной в предыдущем разделе. На первом шаге схемы нам следует решить вспомогательную смешанную задачу в линейном приближении. Функция $\mathscr{E}_0(t)$, полученная в результате этого вычисления, будет мала на всей оси $-\infty<t<\infty$. Решая с этой же точностью (в первом борновском приближении) прямую задачу рассеяния, нетрудно вычислить $c(x, \lambda)$, причем дискретный спектр отсутствует, и далее вычислить $F(t, x)$.

В задаче о суперфлуоресценции можно учесть специфику граничных условий (5.1) и предложить другой, более простой способ вычисления ядра $F(t, x)$. Мы воспользуемся совпадением уравнений для $\hat{F}(t, x)$ и $\mathscr{E}(t, x)$ и покажем, что

$$(5.4)\qquad F(2t, 0)={}^1/_4\mathscr{E}_0(t).$$

Действительно, пользуясь малостью $\mathscr{E}_0(t)$, вычислим S-матрицу в первом борновском приближении. Для этого воспользуемся определением S-матрицы (1.8) и уравнением (1.1). Нетрудно проверить, что функция $\Psi^-=\Psi(t, 0, \lambda)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$(5.5)\qquad \Psi^-(t,\lambda)=\Psi_0{}^-(t,\lambda)+i\Psi_0{}^-(t,\lambda)\int_{-\infty}^{t}(\Psi_0{}^-(\tau,\lambda))^{-1}H\Psi^-(\tau,\lambda)\,d\tau,$$

где функцию $\Psi_0{}^-=\exp(-iI\lambda t)$ выберем в качестве нулевого приближения для $\Psi^-(t,\lambda)$:

$$(5.6)\qquad \Psi^-(t,\lambda)=\Psi_0^-(t,\lambda)+\Psi_1^-(t,\lambda)+\dots .$$

Подставляя (5.6) в (5.5), для первого борновского приближения получаем выражение

$$(5.7)\qquad \Psi_1^-(t,\lambda)=i\Psi_0^-(t,\lambda)\int_{-\infty}^{t}(\Psi_0^-(\tau,\lambda))^{-1}H\Psi_0^-(\tau,\lambda)\,d\tau.$$

Используя (1.8), а также учитывая (5.7) и конкретный вид матрицы H, получаем формулу для S-матрицы

$$(5.8)\qquad S=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{E}_0(\tau)\exp(2i\lambda\tau)\,d\tau \\ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{E}_0^*(\tau)\exp(-2i\lambda\tau)\,d\tau & 1\end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$(5.9)\qquad c_0(\lambda)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{E}_0(\tau)\exp(2i\lambda\tau)\,d\tau.$$

Из определения ядра уравнения Марченко (1.11) и формулы (5.9) следует выражение для $F(2t,0)$:

$$(5.10)\qquad F(2t,0)={}^1/_4\mathscr{E}_0(t).$$

Отсюда следует, что в области $0\leqslant x\leqslant L$, $-\infty<t<\infty$

$$(5.11)\qquad F(2t,x)={}^1/_4E(t,x),$$

где $E(t,x)$ является решением линеаризованных уравнений МБ с граничным условием $\mathscr{E}_0(t)$.

Выберем $g(\lambda)$ функцией Лоренца (3.3), в физической литературе принято обозначение $T_2^*=1/\varepsilon$ [13] — так называемое время неоднородного уширения. В этом случае выражение для ядра $F(t,x)$ при $t>x$ имеет вид

$$(5.12)\qquad F(2t,x)=\frac{\pi}{4T_2^*}\int_0^x dx'\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\frac{G(t,x-x',\lambda)\rho_0(x',\lambda)}{\lambda^2+(1/T_2^*)^2},$$

$$G(t,x,\lambda)=\theta(t-x)\Big[\mathrm{I}_0(2\sqrt{x(t-x)})+(i\lambda+1/T_2^*)\times$$
$$\times\int_0^{t-x}dt'\mathrm{I}_0(2\sqrt{xt'})\exp[(i\lambda+1/T_2^*)(t-t'-x)]\Big]\exp(-t/T_2^*).$$

Рассмотрим интересный с точки зрения приложений предел $\varepsilon\to0$. При этом ядро $F(t,x)$ переходит в

$$(5.13)\qquad F(2t,x)=\frac{1}{4}\int_0^x\rho_0(y)\mathrm{I}_0(2\sqrt{(x-y)(t-x+y)})\,dy.$$

Ядро (5.13) экспоненциально растет при $t \gg x$. В этой области зависимость F от x и t становится автомодельной:

$$F(2t, x) = x\mathcal{F}(2\sqrt{x(t-x)}), \tag{5.14}$$

где

$$\mathcal{F}(y) = \frac{\rho_0(0) I_1(y)}{2y}. \tag{5.15}$$

При $t \leqslant x$ ядро F мало по параметру $1/\sqrt{N_0}$, и поэтому им можно пренебречь при изучении энергосодержащей области решения уравнений МБ.

Условие (5.3) гарантирует применимость и равномерность автомодельного приближения (5.14) во всей области $0 \leqslant t < \infty$, $0 \leqslant x \leqslant L$. Поэтому решение уравнений МБ стремится к автомодельному, что дополнительно обосновывает результаты работ [6, 7] и согласуется с экспериментом (см., например, обзор [14]).

6. АНАЛИЗ АВТОМОДЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Уравнения МБ (B.1)—(B.3) в случае бесконечно узкой линии $g(\lambda) = \delta(\lambda)$ допускают автомодельную подстановку

$$\mathcal{E}(t, x) = x\mathcal{E}(z), \quad N(t, x) = n(z), \quad \rho(t, x) = \rho(z), \tag{6.1}$$

где $z = 2\sqrt{x(t-x)}$ — автомодельная перменная. Функции $\mathcal{E}(z)$, $n(z)$, $\rho(z)$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$z\mathcal{E}' + 2\mathcal{E} = 2\rho, \tag{6.2}$$

$$2\rho' = zn\mathcal{E}, \tag{6.3}$$

$$2n' = -z\rho\mathcal{E}. \tag{6.4}$$

Заметим, что автомодельная переменная может принимать как вещественные $t > x$, так и мнимые $t < x$ значения. Мнимым z отвечает непричинная область в x, t-координатах.

Система (6.2)—(6.4) имеет однопараметрическое семейство несингулярных в нуле решений, которые полностью определяются значением $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}(0)$ и знаком $n_0 = n(0)$. Действительно, из (6.3) и (6.4) следует, что

$$n^2 + \rho^2 = 1. \tag{6.5}$$

По заданному $\mathcal{E}_0$ из (6.2) определяем $\rho_0 = \mathcal{E}_0$ и из (6.5) находим $n_0 = \pm\sqrt{1-\rho_0}$. Отметим, что система (6.2)—(6.4) инвариантна относительно замены

$$\hat{z} = iz, \quad \hat{n}(\hat{z}) = -n(z), \quad \hat{\mathcal{E}}(\hat{z}) = \mathcal{E}(z), \; \hat{\rho}(\hat{z}) = \rho(z), \tag{6.6}$$

поэтому достаточно вычислить решения при положительном знаке n_0. Качественно поведение решений системы (6.4)—(6.2) зависит от $\mathcal{E}_0$. В частности, имеется несимметричное относительно замены (6.6) решение. Ему отвечает инвариантное относительно преобразования (6.6) начальное условие $\mathcal{E}_0 = 1$, $\rho_0 = 1$, $n_0 = 0$. При $\mathcal{E}_0 = 1$ решение становится несимметричным и имеет следующие асимптотики:

$$\mathcal{E}(z) \simeq \frac{\mathcal{E}^{\pm}}{|z|^{3/2}} \sin\left(|z|\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{128} (\mathcal{E}^{\pm})^2 \ln|z| + \beta^{\pm} \right),$$

$$1-|n(z)|\simeq\frac{\mathscr{E}^{\pm}}{16|z|}\cos^2\left(|z|\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{128}(\mathscr{E}^{\pm})^2\ln|z|+\beta^{\pm}\right),$$

где $\mathscr{E}^{\pm}$, $\beta^{\pm}$ — константы, значения которых зависят от $\mathscr{E}_0$, знак $+$ отвечает $z\to\infty$, знак $-$ отвечает $z\to i\infty$. Асимптотически малым $\mathscr{E}_0$ ($\ln\mathscr{E}_0\ll-1$) соответствуют сильно несимметричные решения. В этом случае точка z_0 — начало области больших изменений $\mathscr{E}$ (первый нуль $n(z_0)=0$) — находится логарифмически далеко от точки $z=0$, при этом $\mathscr{E}^{-}=2^{3/4}\mathscr{E}_0/\sqrt{\pi}$.

Значениям $\mathscr{E}_0>1$ отвечает двухпараметрическое семейство сингулярных решений системы (6.2)—(6.4), которое мы рассматривать не будем.

Отметим, что система (6.2)—(6.4) может быть редуцирована к одному уравнению второго порядка.

Полагая

(6.7) $$n=\cos\Phi,\quad \rho=\sin\Phi,\quad \mathscr{E}=\frac{2}{z}\Phi',\quad \Phi=\Phi(z),$$

получим

(6.8) $$\Phi''+\frac{1}{z}\Phi'=\sin\Phi.$$

Этому уравнению подчиняются автомодельные решения уравнения синус-Гордон, определяемые начальными условиями $\Phi_0=\Phi(0)$, $\Phi'(0)=0$, которые можно выразить через классические трансценденты Пенлеве [15].

В лабораторных координатах каждому значению автомодельной переменной z при фиксированном t отвечают два значения координаты

(6.9) $$x_{1,2}=\frac{t\pm\sqrt{t^2-z^2}}{2}.$$

Предположим, что в некоторой точке z_0 функция $n(z_0)$ впервые изменила знак. Это означает, что $N(t, x)$ впервые меняет знак в момент времени $t_0=2z_0$ в точке $x_0=z_0$. С ростом t в соответствии с формулой (6.9) от точки x_0 в разные стороны побегут две волны, на фронте которых $N=0$. Положение точки логарифмически зависит от автомодельного параметра Φ_0. Чем меньше значение Φ_0, тем больше x_0. При $t\to\infty$ фронт волны, бегущей влево, движется по закону

(6.10) $$x=z_0^2/t+O(z_0^4/t^3).$$

Фронт второй волны движется по закону

(6.11) $$x=t-O(z_0^2/t).$$

Первая ситуация реализуется в эффекте суперфлуоресценции, вторая — в случае квантового усилителя.

Спонтанные решения, как было установлено в разделе 3 (формула (3.9)), полностью характеризуются функцией $r(\lambda)$. Мы рассмотрим простейший случай $r(\lambda)=r_0=\text{const}$. При этом ядро $F(t, x)$ уравнения Марченко принимает вид (5.9). Спонтанные решения, соответствующие такому ядру, являются автомодельными. Чтобы убедиться в этом, подставим выражение (5.9) в уравнения (1.13)—(1.14) и сделаем следующую замену переменных:

(6.12) $$i\xi=\sqrt{2x(t-x)}.$$

В результате получим

$$(6.13)\qquad \mathscr{K}_1(\xi,\eta,x)=s_0\mathscr{F}(\sqrt{\xi^2+\eta^2})+s_0\int\limits_{\xi}^{\infty}\mathscr{K}_2(\xi,\eta,x)\mathscr{F}(\sqrt{\zeta^2+\eta^2})\zeta\,d\zeta,$$

$$\mathscr{K}_2(\xi,\eta,x)=-s_0^*\int\limits_{\xi}^{\infty}\mathscr{K}_1(\xi,\zeta,x)\mathscr{F}(\sqrt{\zeta^2+\eta^2})\zeta\,d\zeta,$$

$\mathscr{F}(y)=J_1(y)/y$, $s_0=r_0/2$, $K_i=x\mathscr{K}_i$. Свободный член и ядро $\mathscr{F}$ неоднородной системы уравнений (6.12) – (6.13) не зависят от x, поэтому и решение этой системы, которое существует и единственно, также не зависит от x.

Электромагнитное поле $\mathscr{E}$ может быть выражено через решения системы уравнений (6.12) – (6.13) следующим образом:

$$(6.14)\qquad \mathscr{E}(t,\ x)=4x\mathscr{K}_1(\xi,\ \xi),$$

$$(6.15)\qquad \int\limits_{-\infty}^{t}|\mathscr{E}(t,x)|^2dt=-4\mathscr{K}_2(\xi,\xi),\qquad \xi=\xi(t,x).$$

Решение (6.14) является автомодельным для системы Максвелла – Блоха, а переменная – $i\xi\sqrt{2}$ является автомодельной переменной.

Для того чтобы установить связь между ядром и решением системы (6.2) – (6.4), достаточно найти зависимость $\mathscr{E}_0$ от s_0. С этой целью преобразуем систему интегральных уравнений (6.12) – (6.13) к алгебраическому виду. Во-первых, мы воспользуемся формулой сложения Гегенбауэра для функций Бесселя [16]:

$$(6.16)\qquad \frac{J_k(\sqrt{\xi^2+\eta^2})}{(\xi^2+\eta^2)^{k/2}}=2^k(k-1)!\sum_{l=0}^{\infty}(k+l)\frac{J_{k+l}(r)}{\eta^l}\frac{J_{k+l}(\xi)}{\xi^l}C_l^k(0),$$

где $C_l^k(0)$ – значение полинома Гегенбауэра в нуле. В автомодельном случае ядро $\mathscr{F}$ уравнений (6.12) – (6.13) представляется в виде

$$(6.17)\qquad \mathscr{F}(\sqrt{\xi^2+\eta^2})=\frac{2}{\xi\eta}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}J_{2k-1}(\xi)J_{2k-1}(\eta).$$

Затем, предполагая регулярность решений $\mathscr{K}_i$ по ξ, η, разложим их в ряд Неймана [17]:

$$(6.18)\qquad \mathscr{K}_1(\xi,\eta)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(\xi)J_{2k-1}(\eta)\frac{2}{\xi\eta},$$

$$(6.19)\qquad \mathscr{K}_2(\xi,\eta)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(\xi)J_{2k-1}(\eta)\frac{2}{\xi\eta}.$$

Отметим, что в разложении (6.18) – (6.19) оставлены только функции Бесселя с нечетным индексом. Можно убедиться, что коэффициенты, соответствующие функциям Бесселя с четным индексом, тождественно равны нулю в силу интегральных уравнений (6.12) – (6.13). Подставим (6.17) – (6.19) в (6.12) – (6.13). Теперь система интегральных уравнений может быть сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, если воспользоваться свойством биортогональности функций Бесселя и

Неймана:

$$\oint_{\Gamma} J_m(z)\, O_k(z)\, dz = a_k \delta_{km}, \tag{6.20}$$

где $a_0=2\pi i$, $a_k=\pi i$ при $k>0$ и контур Г охватывает один раз начало координат в комплексной плоскости z. Умножая интегральное уравнение на $O_k(\eta)$ и интегрируя по η вдоль контура Г, получим

$$\psi_k(\xi)=s_0(2k-1)(-1)^{k-1}\left[J_{2k-1}(\xi)+2\sum_{l=0}^{\infty} Q_{kl}(\xi)\varphi_l(\xi)\right], \tag{6.21}$$

$$\varphi_k(\xi)=-s_0^*(2k-1)(-1)^{k-1}2\sum_{l=0}^{\infty} Q_{kl}(\xi)\psi_l(\xi),$$

где

$$Q_{kl}(\xi)=\int_{\xi}^{\infty} J_{2k-1}(\eta) J_{2l-1}(\eta)\frac{d\eta}{\eta}. \tag{6.22}$$

Этот интеграл вычисляется и равен

$$Q_{km}(\xi)=\frac{1-\delta_{km}}{4(m+k-1)}\left[\xi\frac{J_{2m-2}(\xi)J_{2k-1}(\xi)-J_{2m-1}(\xi)J_{2k-2}(\xi)}{k-m}+\right. \tag{6.23}$$

$$\left.+2J_{2m-1}(\xi)J_{2k-1}(\xi)\right]+\frac{\delta_{km}}{2(2m-1)}\left[J_0^2(\xi)+J_{2m-1}^2(\xi)+2\sum_{j=1}^{2m-2} J_j^2(\xi)\right]$$

Можно написать формальное решение уравнений (6.21), являющееся аналогом бесконечно солитонного решения:

$$\mathscr{K}_2(\xi,\xi)=\frac{1}{2\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\ln[\det(E+|s_0|^2B^2)], \tag{6.24}$$

где

$$B_{km}(\xi)=(2k-1)(-1)^{k-1}Q_{km}(\xi),\quad E_{km}=\delta_{km}. \tag{6.25}$$

Таким образом,

$$\int_{\xi}^{\infty}\eta|\mathscr{E}(\eta)|^2 d\eta=-\frac{16}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\ln[\det(E+|s_0|^2B^2)]. \tag{6.26}$$

Более того решение (6.24) позволяет определить $\mathscr{E}(\xi)$ с точностью до знака:

$$\mathscr{E}(\xi)=\frac{4s_0}{|s_0|}\sqrt{\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\ln[\det(E+|s_0|^2B^2)]}.$$

Вычислим $\mathscr{E}(0)$, с этой целью будем искать решение системы (6.21) в виде ряда по степеням ξ:

$$\varphi_k(\xi)=\sum_{m=1}^{\infty}\xi^m\varphi_{km},\quad \psi_k(\xi)=\sum_{m=1}^{\infty}\xi^m\psi_{km}, \tag{6.27}$$

$$Q_{mk}(\xi)=\frac{\delta_{mk}}{2(2m-1)}+\sum_{j=1}^{\infty} q_{mkj}\xi^j.$$

В первом порядке по ξ мы имеем

$$\psi_{m1}=s_0(2m-1)(-1)^{m-1}\left(\frac{1}{2^m}\frac{\delta_{m1}}{m!}+\frac{\delta_{mk}}{2m-1}\varphi_{k1}\right),$$

$$\varphi_{m1}=s_0^*(-1)^{m-1}\delta_{mk}\psi_{k1},$$

откуда

$$\psi_{m1}=\delta_{m1}\frac{s_0}{2(1+|s_0|^2)},\quad \varphi_{m1}=-\delta_{m1}\frac{|s_0|}{2(1+|s_0|^2)}. \tag{6.28}$$

Подставляя (6.28) в (6.27) и затем в (6.18)–(6.19), получим

$$\mathscr{E}(0)=\frac{2s_0}{1+|s_0|^2},\qquad \int\limits_0^\infty \xi|\mathscr{E}(\xi)|^2d\xi=\frac{8|s_0|^2}{1+|s_0|^2}.$$

Следовательно, $n(0)=\dfrac{|s_0|^2-1}{|s_0|^2+1}$.

Зависимость $\mathscr{E}_0$ от s_0 является неоднозначной. Каждому $\mathscr{E}_0$ отвечают два значения s_0 и $1/s_0^*$. Это связано с неоднозначностью выбора знака n_0. Таким образом, s_0 полностью параметризует решение, и преобразование $s_0=1/s_0^*$ эквивалентно преобразованию (6.6) для начальных данных.

Литература

[1] *Lamb G. L., Jr.*– Phys. Lett., 1967, *25A*, 181.
[2] *Lamb G. L., Jr.*– Rev. Mod. Phys., 1971, *43*, 99.
[3] *Ablowits M. J., Kaup D. J., Newell A. C.*– J. Math. Phys., 1974, *15*, 1852.
[4] *Манаков С. В.*– ЖЭТФ, 1982, *83*, 68.
[5] *Захаров В. Е.*– Письма в ЖЭТФ, 1980, *32*, 603.
[6] *Габитов И. Р., Захаров В. Е., Михайлов А. В.*– Письма в ЖЭТФ, 1983, *37*, в. 5, 234–237.
[7] *Габитов И. Р., Захаров В. Е., Михайлов А. В.*– ЖЭТФ, 1984, *86*, № 4, 1204–1216.
[8] *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов (метод обратной задачи). М.: Наука, 1980.
[9] *Басов Н. Г., Амбарцумян Р. В., Зуев В. С., Крюков П. Г., Летохов В. С.*– ЖЭТФ, 1969, *56*, 403.
[10] *Захаров В. Е., Шабат А. Б.*– ЖЭТФ, 1971, *61*, в. 1, 118–134.
[11] *Haake F., Haus J. W., King H., Schröder Gr., Glauber R.*– Phys. Rev., 1981, *A23*, 1322.
[12] *Polder D., Schuurmans M. F. H., Vrehen Q. H. F.*– Phys. Rev., 1979, *A19*, 1192.
[13] *Аллен Л., Эберли Дж.* Оптический резонанс и двухуровневые атомы. М.: Мир, 1973.
[14] *Vrehen O. H. F., Gibbs H. M.* Superfluorescence experiments. Preprint PRL. Netherlands: Eindoven, 1982.
[15] *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.– Л.: Гостехиздат, 1950.
[16] *Уиттекер Э. Т., Ватсон Д. Н.* Курс современного анализа, ч. 2. М.: Физматгиз, 1963.
[17] *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.

Институт теоретической физики
им. Л. Д. Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
1.III.1984 г.

MAXWELL — BLOCH EQUATION AND INVERSE SCATTERING METHOD

Gabitov I. R., Zakharov V. E., Mikhailov A. V.

General solutions of the Maxwell – Bloch (MB) model defined by the polarisation at $t\to\infty$ are constructed and classified by means of the inverse scattering method. Approximate solution of boundary problem for the MB model which describes the phenomenon of superfluorescence (pulse generation from initial fluctuations of polarisation in a mirrorless laser) is obtained.