МНОГОМЕРНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ И МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ
ИХ РЕШЕНИЙ

Введение

В 1974 году одним из авторов настоящей статьи совместно с А. Б. Шабатом была предложена [1] схема построения многомерных нелинейных интегрируемых уравнений и их точных решений, получившая название "метода одевания". Интегрируемые уравнения, рассмотренные в [1], представляют собой условия совместности переопределенной системы уравнений

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = L_1 \Psi', \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} = L_2 \Psi', \quad (B.1)$$

и могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial L_2}{\partial x_1} - \frac{\partial L_1}{\partial x_2} + [L_2, L_1] = 0. \quad (B.2)$$

Здесь $L_{1,2}$ - дифференциальные по новой переменной x линейные операторы, вообще говоря с матричными коэффициентами. Эти коэффициенты - неизвестные функции в интегрируемых уравнениях - весьма несимметричным образом зависят от трех независимых переменных x_1 , x_2 , x .

Изложим основной результат работы [1] на самом простом примере. Рассмотрим интегральное уравнение

$$K(x, z) + F(x, z) + \int_x^\infty K(x, s) F(s, z) ds = 0. \quad (B.3)$$

Здесь матричные $N \times N$ функции F и K зависят еще от переменных x_1 , x_2 , причем функция F предполагается известной, а функция K - неизвестной. Пусть функция F подчиняется системе уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = I_i \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} I_i, \quad i = 1, 2. \quad (B.4)$$

Здесь I_i - постоянные коммутирующие между собой матрицы: $[I_1, I_2] = 0$.

Дифференцируя уравнение (B.3), убеждаемся, что функция K удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial K}{\partial x_i} = (I_i \frac{\partial}{\partial x} + [I_i, Q]) K + \frac{\partial K}{\partial z} I_i, \quad (B.5)$$

$$Q(x, x_1, x_2) = K(x, x, x_1, x_2).$$

Представив функцию K в виде

$$K(x, z, x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\lambda, x, x_1, x_2) e^{i[\lambda z + \lambda I_i x_i]} d\lambda, \quad (B.6)$$

убеждаемся, что Ψ удовлетворяет уравнениям (B.1), где

$$L_i = I_i \frac{\partial}{\partial x} + [I_i, Q]. \quad (B.7)$$

Уравнения (B.2) имеют вид

$$\begin{aligned} [I_2, \frac{\partial Q}{\partial x_1}] - [I_1, \frac{\partial Q}{\partial x_2}] + I_2 [I_1, \frac{\partial Q}{\partial x}] - I_1 [I_2, \frac{\partial Q}{\partial x}] + \\ + [[I_2, Q], [I_1, Q]] = 0. \end{aligned} \quad (B.8)$$

При подходящей редукции, например, при $I^+ = I$, $J^+ = J$, $Q^+ = Q$, уравнение (B.8) переходит в "систему N волн", представляющую значительный прикладной интерес. Эффективно решение системы (B.8) можно строить, полагая, например, $F = \sum_k F_k(x) G_k(z)$ (см. [2], также [3-4]). Операторы L_i естественно назвать "одеваниями" "затравочных" операторов $L_{oi} = I_i \frac{\partial}{\partial x}$.

Следующим шагом в развитии метода оценивания была работа [5], в которой снова рассматривались уравнения (B.1), (B.2), но $L_{1,2}$ полагались рациональными функциями комплексного параметра λ . При этом возникают уравнения относительно функций от двух независимых переменных x_1, x_2 ; одевание осуществляется при помощи решения задачи Римана на произвольном контуре Γ в комплексной плоскости λ , то есть фактически при помощи решения на этом контуре определенного сингулярного интегрального уравнения. Связь между обоими вариантами метода [6-7]* на первый взгляд элементарна. Пусть коэффициенты операторов L_1, L_2 в (B.1) не зависят от x , тогда после замены $\Psi \sim e^{i\lambda x}$ они становятся полиномами от λ . Так система (B.1)-(B.7) приобретает вид

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_k} = (i I_k \lambda + [I_k, Q]) \Psi, \quad (B.9)$$

а уравнение (B.8) - форму

$$[I_2, \frac{\partial Q}{\partial x_1}] - [I_1, \frac{\partial Q}{\partial x_2}] + [[I_2, Q], [I_1, Q]] = 0. \quad (B.10)$$

* в также доклад В.Е.Захарова на Международном математическом конгрессе, Варшава, 1983.

Согласно терминологии, используемой в [7] уравнение (В.8) является "первым многомерным обобщением" уравнения (В.10).

Чтобы получить решения, не зависящие от X , нужно положить функцию F зависящей только от разности $X - Z$. Уравнение (В.3) становится теперь уравнением Винера-Хопфа, решавшим после преобразования Фурье задачу Римана, причем контур Γ совпадает с вещественной осью.

Ясно, что метод, развитый в [5], позволяет, за счет произвольности контура Γ , найти для уравнения (В.10) гораздо больший запас решений чем позволяет метод [1]. Возникает задача как найти аналогичные решения у системы (В.8)? Кроме того, непонятно, как строить первое многомерное обобщение для систем типа [5], если L_1 и L_2 - не полиномы, а рациональные функции? Решению обеих этих проблем и посвящена настоящая статья.

Вторая из сформулированных проблем была до некоторой степени решена раньше путем прямого обобщения техники работы [1] (см. [7]). При этом вместо уравнений (В.1) рассматривалась линейная система

$$N_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} = L_i \Psi, \quad (\text{В.11})$$

где N_i , L_i - линейные дифференциальные по X операторы. Полное соотношение этих результатов с результатами настоящей статьи не будет входить в нашу задачу. Наша работа в существенной степени основана на предложении, высказанном ранее одним из авторов (С.В. Манаков), использовать в многомерном случае вместо локальной - нелокальную задачу Римана (см. [8]). Мы переведем на язык нелокальной задачи Римана схему [1] и покажем, что при помощи нелокальной задачи Римана можно строить многомерные интегрируемые уравнения и их решения с такой же эффективностью, как при помощи локальной задачи - двумерные уравнения и их решения.

Среди многомерных интегрируемых систем не менее чем (В.8) популярно уравнение Кадомцева-Петвиашвили (К.П.).

$$\frac{\partial}{\partial x} (u_t - 6 u u_x - u_{xxx}) = 3 u^2 u_y \quad (\text{В.12})$$

(см. [1, 9-13]). В работе [13] была развита техника построения решений этого уравнения, не сводящаяся к нелокальной задаче Римана, но использующая решение локальной $\bar{\partial}$ - проблемы специального вида. Можно показать (хоть это и не входит в предмет настоящей статьи), что при помощи некоторого предельного перехода из нелокальной задачи Римана можно получить более универсальную чем это сделано в [13] технику получения решений интегрируемых

многомерных уравнений, основанную на нелокальной $\bar{\partial}$ - проблеме. Соответствующие результаты будут опубликованы в другом месте.

§ I. Нелокальная задача Римана (разбор примера)

Представим функции F и K в (B.3) в виде

$$F(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int F(\lambda', \lambda) e^{i(\lambda'x - \lambda z)} d\lambda' d\lambda, \quad (I.1)$$

$$K(x, z) = -\frac{1}{2\pi} \int K(x, \lambda) e^{i\lambda(x-z)} d\lambda \quad (I.2)$$

и введем в рассмотрение функцию

$$T(\lambda', \lambda, x, x_i) = F(\lambda', \lambda) e^{i(\lambda' - \lambda)x} = T(\lambda', \lambda) \quad (I.3)$$

(ниже зависимость функции T от x, x_i будет в формулах опускаться).

После подстановки (I.1)-(I.3) в (B.3) получим

$$K(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} T(\lambda', \lambda) d\lambda' + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(\xi) T(\lambda', \lambda)}{\lambda' - \xi + i0} d\lambda' d\xi. \quad (I.4)$$

Рассмотрим аналитические в верхней и нижней полуплоскости функции $\chi_{1,2}(\lambda)$, определенные формулой

$$\chi_{1,2}(\lambda) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(\lambda')}{\lambda - \lambda' \pm i0} d\lambda'. \quad (I.5)$$

При этом

$$K(\lambda) = \chi_2(\lambda) - \chi_1(\lambda) \Big|_{\text{Im } \lambda = 0}. \quad (I.6)$$

Прямой проверкой легко убедиться, что уравнение (B.3) тождественно соотношению

$$\chi_2(\lambda) = \chi_1(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} \chi_1(\lambda') T(\lambda', \lambda) d\lambda', \quad (I.7)$$

которое удобно переписать в символическом виде

$$\chi_2 = \chi_1 + \chi_1 * T. \quad (I.8)$$

Соотношение (I.7)((I.8)) определяет на вещественной оси нелокальную задачу Римана о сопряжении при помощи интегрального

соотношения двух аналитических в верхней и нижней полуплоскости функций $\chi_{1,2}(\lambda)$, удовлетворяющих дополнительному условию

$$\chi_{1,2}(\lambda) \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

В дальнейшем будем предполагать, что эта (и все остальные) задачи Римана однозначно разрешимы. Это в частности, означает, что решение задачи Римана (I.7) - (I.8), удовлетворяющее условию

$$\chi_{1,2}(\lambda) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

тождественно равно нулю

$$\chi_{1,2}(\lambda) = 0. \quad (\text{I.9})$$

Утверждением (I.9) мы будем неоднократно пользоваться. Для решения задачи Римана с единичной асимптотикой при $\lambda \rightarrow \infty$ имеем асимптотическое разложение

$$\chi_{1,2} \rightarrow 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n}{\lambda^n}, \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (\text{I.10})$$

Здесь

$$\varphi_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{n-1} \kappa(\lambda) d\lambda. \quad (\text{I.11})$$

Подставляя (I.I) в (B.4), убедимся, что функция $T(\lambda', \lambda)$ удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial T}{\partial x_k} = i \{ I_k \lambda' T - T I_k \lambda \}. \quad (\text{I.12})$$

Кроме того, очевидно, выполняется соотношение

$$\frac{\partial T}{\partial x} = i(\lambda' - \lambda)T. \quad (\text{I.13})$$

Введем в рассмотрение дифференциальные операторы

$$\mathcal{D}_0 \chi = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\lambda \right) \chi, \quad \mathcal{D}_k \chi = \frac{\partial \chi}{\partial x_k} + i\chi I_k \lambda. \quad (\text{I.14})$$

Соотношения (I.12), (I.13) могут быть записаны символически

$$[\mathcal{D}_0, T] = 0, \quad [\mathcal{D}_i, T] = 0. \quad (\text{I.15})$$

Операторы (I.14) между собой коммутируют.

Применяя операторы $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_i$ к соотношению (I.8) и пользуясь равенствами (I.15), находим

$$\mathcal{D}_0 \chi_2 = \mathcal{D}_0 \chi_1 + \mathcal{D}_0 \chi_1 * T; \quad \mathcal{D}_i \chi_2 = \mathcal{D}_i \chi_1 + \mathcal{D}_i \chi_1 * T. \quad (I.16)$$

Более того, для любого дифференциального оператора M вида

$$M = \sum_K a_K \mathcal{D}^K \quad (I.17)$$

(здесь K - мультииндекс, $\mathcal{D}^K = (\mathcal{D}_0)^d (\mathcal{D}_1)^p (\mathcal{D}_2)^s$) справедлива формула

$$M \chi_2 = M \chi_1 + M \chi_1 * T. \quad (I.18)$$

Функции $M \chi_1, M \chi_2$ образуют решение задачи Римана, имеющее при $\lambda \rightarrow \infty$ полиномиальную по λ асимптотику. Операторы M образуют кольцо $\mathfrak{m}$. Рассмотрим в $\mathfrak{m}$ множество $\tilde{\mathfrak{m}}$ операторов $\tilde{M}$ таких, что

$$\tilde{M} \chi_1 \rightarrow 0, \quad \tilde{M} \chi_2 \rightarrow 0 \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty.$$

В силу утверждения (I.9)

$$\tilde{M} \chi_1 = 0, \quad \tilde{M} \chi_2 = 0. \quad (I.19)$$

Это же верно для любого оператора типа $M, \tilde{M}$. Итак, множество $\tilde{\mathfrak{m}}$ представляет собой левый идеал в кольце $\mathfrak{m}$. Будем искать элементы из $\tilde{\mathfrak{m}}$ в виде

$$\tilde{M}_K = \mathcal{D}_K - I_K \mathcal{D}_0 + u_K. \quad (I.20)$$

Подставляя в $M_K \chi$ асимптотику (I.10) и требуя убывания при $\lambda \rightarrow \infty$, найдем

$$u_K = i [I_K, \Psi_1]. \quad (I.21)$$

Удобно объединить $\chi_{1,2}$ в одну функцию χ , определенную на всей комплексной плоскости. Теперь имеем

$$\tilde{M}_K \chi = 0, \quad k = 1, 2. \quad (I.22)$$

Легко проверить, что операторы $\tilde{M}_k$ образуют базис в идеале $\tilde{\mathfrak{m}}$ - из $\tilde{M} \chi = 0$ следует $\tilde{M} = A_i \tilde{M}_i$ ($i=1,2$) где A_i - некоторые операторы. Введем функцию $\Psi = \chi e^{i\lambda(x + I_K x_K)}$. Она удовлетворяет уравнениям

$$\tilde{R} \Psi = 0,$$

где операторы $\tilde{R}$ получаются из операторов $\tilde{M}$ заменой "длинных производных" в (I.14) на обычные.

$$D_0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_k \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

В частности, уравнения (I.22) переходят в уравнения (B.9). При этом

$$Q = i\psi_1. \quad (I.23)$$

Формулу (I.23) легко получить непосредственно из определения функции χ .

Во всем предыдущем рассмотрении никакой роли не играл специальный выбор контура Γ (вещественная ось). Оно сохраняет силу и при произвольном контуре Γ . Это позволяет строить новые, неизвестные ранее, решения уравнения (B.8). Так, полагая

$T(\lambda' \lambda) = T_1(\lambda') T_2(\lambda)$ найдем из (I.12), (I.13)

$$T_1 = e^{i(I_k x_k + x)\lambda'} f_1(\lambda'), \quad (I.24)$$

$$T_2 = f_2(\lambda) e^{-i(I_k x_k + x)\lambda}.$$

Из уравнения (I.4) теперь имеем

$$Q(x, x_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} T_1(\lambda') d\lambda' \left[1 - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{T_2(\xi) T_1(\lambda')}{\lambda' - \xi + i0} d\xi d\lambda' \right]^{-1} \int_{\Gamma} T_2(\lambda) d\lambda. \quad (I.25)$$

В (I.24), (I.25) f_1, f_2 - произвольные матричные функции переменной λ , заданные на контуре Γ . Решение (I.25) обобщает решения системы (B.8) найденные в [2].

Мы неявно предполагали, что в рамках нашей новой схемы уравнения (B.8) получены как условия совместности системы (I.22), или эквивалентной ей системы

$$R_k \psi = 0, \quad k = 1, 2,$$

совпадающей с системой (B.1), то есть фактически при помощи формулы (B.2). Уравнение (B.8) можно получить и другим способом - рассматривая в уравнениях (I.22) члены, пропорциональные $\frac{1}{\lambda}$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Имеем из (I.10) (I.20) (I.22)

$$[\Phi_2, I_k] = \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} - I_k \frac{\partial Q}{\partial x} + u_k Q ; \quad (1.25)$$

из-за коммутативности матриц I_k

$$[[\Phi_2, I_1], I_2] = [[\Phi_2, I_2], I_1] .$$

Пользуясь этим тождеством, исключаем член, содержащий Φ_2 и приходим к уравнению (B.8).

§ 2. Нелокальная задача Римана - общий случай

Итак, мы перевели на язык нелокальной задачи Римана развитую в [I] технику решения уравнения (B.8) и приобрели при этом возможность значительно расширить класс решений за счет произвольного выбора контура.

Рассмотрим теперь общую схему применения нелокальной задачи Римана к многомерным интегрируемым системам, включающим в себя как частный случай все системы, описанные в [I].

Пусть на комплексной плоскости λ задан контур Γ и на нем определена нелокальная задача Римана (I.8), то есть задана аналитическая на всей плоскости функция χ , имеющая на контуре Γ граничные значения χ_1, χ_2 , связанные интегральным соотношением

$$\chi(\lambda) = \chi_1(\lambda) + \int_{\Gamma} \chi_1(\lambda') T(\lambda', \lambda) d\lambda' . \quad (2.1)$$

Для простоты будем считать задачу Римана нормированной при $\lambda \rightarrow \infty$ на единицу $\chi \rightarrow 1$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Тогда по разные стороны от контура справедливо представление,

$$\chi = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\kappa(\lambda')}{\lambda - \lambda' \pm i0} d\lambda' , \quad (2.2)$$

где

$$\kappa(\lambda) = \chi_2(\lambda) - \chi_1(\lambda) \Big|_{\lambda \in \Gamma} .$$

Функция $\kappa(\lambda)$ подчиняется сингулярному интегральному уравнению

$$\kappa(\lambda) = \int_{\Gamma} T(\lambda', \lambda) d\lambda' + \frac{1}{2\pi i} \iint_{\Gamma \Gamma} \frac{\kappa(\xi) T(\lambda', \lambda)}{\lambda - \xi + i0} d\lambda' d\xi . \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) (а вместе с ним и нормированную задачу Римана (2.1)) мы будем считать однозначно разрешимым.

Рассмотрим теперь набор коммутирующих рациональных матричных функций $I_k(\lambda)$

$$(k=1 \dots n) \quad [I_k, I_j] = 0$$

и построим при их помощи набор коммутирующих дифференциальных операторов первого порядка

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_k \chi &= \frac{\partial \chi}{\partial x_k} + \chi I_k(\lambda), \\ [\mathcal{D}_k, \mathcal{D}_j] &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial x_k}$ - дифференцирования по x_k вообще говоря комплексным независимым переменным.

Пусть функция сопряжения $T(\lambda', \lambda)$ удовлетворяет условиям

$$[\mathcal{D}_i, T] = 0,$$

то есть уравнениям

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = I_i(\lambda') T - T I_i(\lambda). \quad (2.5)$$

Тогда для любого дифференциального оператора M типа (1.17) произвольного полинома от операторов $\mathcal{D}_i$ с независимыми от λ переменными коэффициентами имеет место тождество (1.18).

Функция $M\chi$ не является решением задачи Римана, так как содержит особенности во всех полюсах функций $I_k(\lambda)$, а также, вообще говоря имеет при $\lambda \rightarrow \infty$ полиномиальное поведение.

Снова выделим в кольце $\mathfrak{m}$ операторов M подмножество $\tilde{\mathfrak{m}}$ операторов $\tilde{M}$ таких, что $\tilde{M}\chi$ не имеет особенностей во всей комплексной плоскости (кроме контура Γ), пусть, кроме того, $\tilde{M}\chi \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Теперь из разрешимости задачи Римана имеем

$$\tilde{M}\chi \equiv 0, \quad (2.6)$$

так что множество $\tilde{\mathfrak{m}}$ - идеал в кольце $\mathfrak{m}$. Идеал $\tilde{\mathfrak{m}}$ состоит из всех уравнений $\tilde{M}$, имеющих совместное решение χ . Уравнения $\tilde{M}$ явно содержат параметр λ . Переходя к функции Ψ по формуле

$$\Psi = \chi e^{\sum I_k(\lambda) x_k},$$

получаем совместную систему уравнений на функцию Ψ

$$\tilde{R}\Psi = 0; \quad (2.7)$$

операторы $\tilde{R}$ отличаются от M заменой (2.7) $\mathcal{D}_k \rightarrow \partial_k$ и не содержат параметра λ .

Следуя логике § I, мы должны были бы искать условия совместности уравнений (2.7). Однако, уравнения из $\tilde{m}$, вообще говоря, содержат много произвольных элементов, связанных с возможностью умножения слева на любые операторы типа M . Нужно поэтому построить в идеале $\tilde{m}$ базис.

Рассмотрим простые случаи, когда ее удается решить.

I. Пусть одна из переменных x_0 выделена тем, что $I_0(\lambda) = i\lambda$ а все остальные $I_i(\lambda)$ — полиномы. Тогда базис в идеале $\tilde{m}$ образуют операторы первого по $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ($i > 0$) порядка имеющие вид

$$\tilde{M}_i = \mathcal{D}_i - L_i(\mathcal{D}_0);$$

соответствующие операторы $\tilde{R}_i$ и имеют вид

$$R_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - L_i\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

здесь L_i — некоторые полиномы. При $i = 1, 2$ класс интегрируемых систем совпадает с описанным в [I] и задаваемым формулой (B.2).

Среди этого класса находится и уравнение КП (B.12). Чтобы получить его, нужно положить

$$\mathcal{D}_1 = \alpha \frac{\partial}{\partial y} - \lambda^2, \quad \mathcal{D}_2 = \frac{\partial}{\partial t} - 4\lambda^3. \quad (2.8)$$

Применение нелокальной задачи Римана на произвольном контуре позволяет найти для КП новые классы точных решений.

2. Пусть по-прежнему $I_0(\lambda) = i\lambda$, но $I_k(\lambda) = \frac{P_k(\lambda)}{Q_k(\lambda)}$ — произвольные рациональные функции. P_k и Q_k — полиномы (полином Q_k имеет скалярные коэффициенты). Теперь базис в идеале $\tilde{m}$ (этот факт мы приводим без доказательства) строится из операторов вида

$$\tilde{M}_i = N_i(\mathcal{D}_0) \frac{\partial}{\partial x_i} - L_i(\mathcal{D}_0). \quad (2.9)$$

Соответствующие уравнения для функции Ψ имеют вид (B.II).

И. условия совместности, дающие нелинейные уравнения, выписаны в работе [7].

Заметим, что нелинейные уравнения, описанные в пунктах 1, 2, возникают также, если положить $\mathcal{D}_0 = \frac{\partial}{\partial x_0} + i\lambda I_0$, где I_0 - произвольная постоянная невырожденная матрица.

В общем случае построение базиса в идеале $\tilde{m}$ - непростая задача. Существует однако, способ непосредственно вычислять нелинейные интегрируемые уравнения, минуя вычисление базиса в $\tilde{m}$. Этот способ был намечен в конце § I при вычислении уравнения (B.8). Продемонстрируем его на более общем примере.

Пусть $n=3$

$$\mathcal{D}_i \chi = \frac{\partial}{\partial x_i} \chi + \frac{\chi A_i}{\lambda - \lambda_i}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j; [A_i, A_j] = 0. \quad (2.10)$$

Обозначим $\chi|_{\lambda=\lambda_i} = \chi_i$ и будем искать оператор $\tilde{M}$ в виде

$$\tilde{M} = \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 + R_{12}^1 \mathcal{D}_1 + R_{12}^2 \mathcal{D}_2.$$

Функция $\tilde{M} \chi$ имеет особенности при $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$. Из требования их отсутствия имеем

$$R_{12}^1 = - \left(\partial_2 \chi_1 + \frac{\chi_1 A_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \chi_1^{-1}, \quad (2.11)$$

$$R_{12}^2 = - \left(\partial_1 \chi_2 - \frac{\chi_2 A_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \chi_2^{-1}.$$

По определению $\tilde{M} \chi = 0$. В частности, это верно при $\lambda = \lambda_3$. Отсюда имеем нелинейное уравнение

$$\begin{aligned} \partial_1 \partial_2 \chi_3 + \frac{\partial_2 \chi_3 A_1}{\lambda_3 - \lambda_1} + \frac{\partial_1 \chi_3 A_2}{\lambda_3 - \lambda_2} + R_{12}^2 \partial_2 \chi_3 + R_{12}^1 \partial_1 \chi_3 + \\ + \frac{\chi_3 A_1 A_2}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} + R_{12}^1 \frac{\chi_3 A_1}{\lambda_3 - \lambda_1} + R_{12}^2 \frac{\chi_3 A_2}{\lambda_3 - \lambda_2} = 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Остальные два уравнения, связывающие χ_1, χ_2, χ_3 получаются из формул (2.11), (2.12) путем циклической перестановки.

Уравнение (2.12), насколько нам известно, ранее не возник-

кало. Все переменные χ_1, χ_2, χ_3 входят в него весьма симметричным образом.

Из рассмотренного примера вытекает эмпирический прием построения уравнений интегрируемых при помощи нелокальной задачи Римана. Вначале следует, ограничиваясь полиномами возможно более низкого порядка, строить операторы из $\tilde{M}$, заставляющие функцию χ . Коэффициенты этих уравнений будут выражены через значения функции χ и ее первых производных по λ (элементов разложения Тейлора) в полюсах функций $I_k(\lambda)$ а также если это необходимо, элементов асимптотического разложения χ в окрестности $\lambda = \infty$. Далее следует рассматривать все полученные таким образом уравнения типа $\tilde{M}\chi = 0$ в окрестностях всех особенностей, включая $\lambda = \infty$. При этом естественным образом возникает замкнутая система нелинейных уравнений на элементы разложения Тейлора функции χ в особенностях $I_k(\lambda)$. Мы не имеем пока общей теоремы, позволяющей доказать универсальность этого приема, но его эффективность проверена на ряде примеров, слишком громоздких, чтобы их приводить в настоящей статье.

§ 3. Связь с локальной задачей Римана

Уравнения (2.5) допускают частное решение

$$T(\lambda', \lambda) = G(\lambda) \delta(\lambda - \lambda'). \quad (3.1)$$

Тогда

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} = [I_i(\lambda), G]. \quad (3.2)$$

Задача Римана (2.1) при этом кардинально упрощается и становится локальной

$$\chi_2(\lambda) = \chi_1(\lambda) + \chi_1(\lambda) G(\lambda). \quad (3.3)$$

Сильно упрощается и вычисление идеала $\tilde{M}$. Действительно, в число операторов типа M теперь входят операторы умножения слева на произвольную рациональную функцию от λ . Теперь можно выбирать операторы $\tilde{M}$ в виде

$$\tilde{M}_i \chi = \mathcal{D}\chi - u(\lambda)\chi = \frac{\partial \chi}{\partial x_i} + \chi I_i(\lambda) - u_i(\lambda)\chi = 0. \quad (3.4)$$

Здесь $u(\lambda)$ — рациональная функция, имеющая те же особенности что и $I(\lambda)$.

В формуле (3.4) легко узнать основное соотношение работы [5]. Элементы функции выражаются через значения функции χ в особенностях I_i при помощи известных "формул одеваания". Так, если

$$I_k(\lambda) = \sum \frac{I_k}{\lambda - \lambda_n}, \quad u_k = \sum \frac{u_n^k}{\lambda - \lambda_n},$$

$$\chi|_{\lambda=\lambda_n} = \chi_n, \quad \text{то}$$

$$u_n^k = \chi_n I_n^k \chi_n^{-1} \quad (\text{см. [5]}).$$

Операторы $\tilde{M}_i$, будучи операторами первого порядка, образуют, конечно, базис в идеале $\tilde{m}$. Нелинейные уравнения можно получить, либо коммутируя попарно операторы $\tilde{M}_i$, либо пользуясь описанным в § 2 приемом, то есть сужая уравнения (3.4) на окрестности полюсов функций $I_i(\lambda)$. При таком способе получения уравнений они принимают так называемую "спи-норную форму" (см. [14]). Замечательно, что для нелинейных уравнений, записанных в этой форме, удается в общем виде сформулировать вариационный принцип (см. [15]). Это позволяет надеяться получить в будущем вариационный принцип и для систем типа (2.12), связанных с нелокальной задачей Римана.

Коммутируя попарно уравнения типа (3.4) мы будем получать нелинейные интегрируемые системы относительно функций, зависящих от двух независимых переменных. Этот факт согласуется с тем что в случае локальной задачи Римана мы произвольно задаем функцию одной переменной $G(\lambda)$. По этим же соображениям естественное число независимых переменных для систем типа (2.12) - три. Это согласуется с тем фактом, что в данном случае задается произвольная функция двух переменных. Представляется, однако, привлекательной возможность строить при помощи нелокальной задачи Римана частные решения более многомерных уравнений, выделяемые неопределенными, но совместными системами многомерных условий. Представляется, кроме того, перспективным использовать нелокальные задачи Римана для поиска нетривиальных редукций в двумерных системах. Результаты этих редукций могут оказаться "стационарными точками" более многомерных интегрируемых систем.

Литература

1. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Схема интегрирования нелинейных эволюционных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I. - Функциональный анализ и его приложения, 1974, т.8, в.3, с.43-53.
2. Захаров В.Е. Точные решения задачи о параметрическом взаимодействии волновых пакетов. - Докл.АН СССР, 1976, т.228, № 6, с.1314-1316.
3. Каур D.J. A method for solving the separable initial value problem of the full three-dimensional three-wave interaction. - Stud. Appl.Math., 1980, v.62, p.75-83.
4. Каур D.J. The inverse scattering solution for the full three-dimensional three-wave resonant interaction. - Physica 3D, 1980, v.1, N 1, p.45-67.
5. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. - Функциональный анализ и его приложения, 1979, т.13, в.3, с.13-22.
6. Захаров В.Е. The inverse scattering method. - In.: Solitons, ed.Bullough R.K., Caudrey P.J., Springer, 1980, p. 243-286 (русский перевод: "Солитоны", под редакцией С.П.Новикова, Мир, 1983).
7. Захаров В.Е. Integrable systems in multidimensional spaces. - In.: Mathematical problems in theoretical physics, Lect.Notes in Phys., Springer, 1982, v.153, p.190-216.
8. Манакон С.В. Многомерные нелинейные эволюционные уравнения, интегрируемые методом обратной задачи. - Автореферат док.диссер.ИТФ им.Л.Д.Ландау, Черногловка, 1983 г.
9. Манакон S.V. The inverse scattering transform for the time-dependent Schrödinger equation and Kadomtsev-Petviashvili equation. - Physica 3D, 1981, v.3, N 1, 2; p.420-427.
10. Манакон S.V., Santini P., Takhtajan L.A. - Long-time behaviour of the solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation (two-dimensional KdV equation). - Phys. Lett., 1980, v.74A, p.451-454.
11. Манакон S.V., Захаров В.Е. Soliton theory. - In: Physics Review, v.1, ed.I.M.Khalatnikov, London, 1979.

p.133-190.

12. F o k a s A.S., A b l o w i t z M.J. On the inverse scattering and direct linearization transform for the KP equation. - Preprint INS, 1982, N 9.
13. A b l o w i t z M.J., v a n Y a a k o v D., F o k a s A.S. On the inverse scattering transform for the KP-II equation. - Preprint INS, 1982, N 21.
14. M i k h a i l o v A.V., Z a k h a r o v V.E. On the integrability of classical spinor models in two-dimensional space-time. - Comm.Math.Phys., 1980, v.74, p.21-40.
15. З а х а р о в В.Е., М и х а й л о в А.В. Вариационный принцип для уравнений, интегрируемых методом обратной задачи. Функ.анализ и его прилож., 1980, т.14, в.1, с.55-56.