ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА И УРАВНЕНИЯ ФЕРРОМАГНЕТИКА ГЕЙЗЕНБЕРГА

В. Е. Захаров, Л. А. Тахтаджян

Для нелинейных уравнений, интегрируемых с помощью метода обратной задачи рассеяния, введено понятие калибровочной эквивалентности. Показана эквивалентность нелинейного уравнения Шредингера и непрерывной изотропной цепочки спинов Гейзенберга.

Уравнения, упомянутые в заглавии, имеют вид

$$(1) \quad i\psi_t + \psi_{xx} + 2|\psi|^2\psi = 0, \quad -\infty < x, \quad t < \infty,$$

— нелинейное уравнение Шредингера в случае притяжения и

$$(2) \quad S_t = S \times S_{xx}, \quad S(x, t) \in \mathbb{R}^3, \quad S^2 = 1,$$

— непрерывная цепочка спинов Гейзенберга в изотропном случае — изотропный ферромагнетик Гейзенберга. Уравнение (1) встречается в нелинейной оптике и в физике плазмы, а его квантовый вариант описывает многочастичную систему с δ -образным взаимодействием. В работе [1] к нелинейному уравнению Шредингера был применен метод обратной задачи рассеяния, в [2] была доказана полная интегрируемость, а в [3] было проведено квазиклассическое квантование уравнения (1). В работе [4] метод обратной задачи рассеяния был применен к ферромагнетизму Гейзенберга, а в работе [5] была установлена связь между решениями уравнений (1) и (2). Именно в [5] было показано, что плотности энергии и импульса для решения уравнения (2) являются соответственно квадратом модуля и производной от аргумента решения уравнения (1).

В настоящей работе мы, используя результаты [1] и [4], показываем калибровочную эквивалентность уравнений (1) и (2). В частности, результаты работы [5], о которой нам стало известно после завершения нашей статьи, являются простыми следствиями установленной эквивалентности.

Для того чтобы ввести понятие калибровочной эквивалентности нелинейных уравнений, интегрируемых с помощью метода обратной задачи рассеяния, напомним основные положения этого метода. Он применим к уравнениям, возникающим как условия совместности системы линейных дифференциальных уравнений,

$$(3) \quad \Phi_x = U(x, t, \lambda)\Phi, \quad \Phi_t = V(x, t, \lambda)\Phi,$$

где $\Phi \in GL(n, \mathbb{C})$, $U, V \in M(n, \mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Условия совместности имеют вид

$$(4) \quad U_t - V_x + [U, V] = 0$$

при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ и в предположении, что U и V являются мероморфными функциями λ , дают систему нелинейных уравнений в частных производных на коэффициенты разложений Лорана функций U и V . Эти уравнения интегрируются с помощью метода обратной задачи рассеяния посредством системы (3). С геометрической точки зрения функции U, V можно интерпретировать как коэффициенты связности в расслоении с базой $\mathbb{R}^2$ и слоем $GL(n, \mathbb{C})$; уравнение (4) означает, что кривизна этой связности равна нулю (т. е. связность плоская).

Две системы нелинейных уравнений, интегрируемые с помощью метода обратной задачи рассеяния, называются калибровочно-эквивалентными, если соответствующие плоские связности $U_j, V_j, j=1, 2$, определены в одном расслоении и получаются друг из друга калибровочным преобразованием, не зависящим от λ , т. е. если

$$U_1 = gU_2g^{-1} + g_xg^{-1}, \quad V_1 = gV_2g^{-1} + g_tg^{-1},$$

где $g(x, t) \in GL(n, \mathbb{C})$. Ясно, что при этом в соответствующих системах линейных дифференциальных уравнений $\Phi_1 = g\Phi_2$.

План настоящей работы следующий. В первом разделе мы приведем в удобной для нас форме необходимые сведения из работ [1] и [4]. Во втором разделе мы докажем калибровочную эквивалентность уравнений (1) и (2), а в третьем приведем выражения для первых законов сохранения уравнения (2) через данные рассеяния.

Авторы выражают благодарность П. П. Кулишу и Л. Д. Фаддееву за полезное обсуждение полученных результатов и Дж. Коронесу, указавшему нам на работу [5].

1. МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА И ФЕРРОМАГНЕТИКА ГЕЙЗЕНБЕРГА

Хорошо известно (см. [1], а также [6]), что уравнение (1) является условием совместности для следующей системы:

$$(5) \quad \Phi_{1x} = U_1(x, t, \lambda) \Phi_1, \quad \Phi_{1t} = V_1(x, t, \lambda) \Phi_1,$$

где

$$(6) \quad U_1 = A_0 + \lambda A_1, \quad V_1 = B_0 + \lambda B_1 + \lambda^2 B_2,$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\psi} \\ -\bar{\psi} & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = i\sigma_3, \quad B_0 = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} |\bar{\psi}|^2 & \bar{\psi}_x \\ \psi_x & -|\psi|^2 \end{pmatrix}, \\ B_1 = 2A_0, \quad B_2 = 2A_1.$$

Здесь $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — матрицы Паули,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

При условии, что функция $\psi(x)$ достаточно быстро убывает, когда $|x| \rightarrow \infty$, первое уравнение в (5) при вещественных λ имеет матричные решения Йоста $f_1(x, \lambda), g_1(x, \lambda)$, допускающие интегральные представления

$$f_1(x, \lambda) = e^{i\lambda x \sigma_3} + \int_x^\infty K_1(x, y) e^{i\lambda y \sigma_3} dy,$$

$$g_1(x, \lambda) = e^{i\lambda x \sigma_3} + \int_{-\infty}^x N_1(x, y) e^{i\lambda y \sigma_3} dy.$$

Эти решения связаны матрицей перехода $T_1(\lambda)$

$$(7) \quad f_1(x, \lambda) = g_1(x, \lambda) T_1(\lambda), \quad -\infty < \lambda < \infty,$$

которая имеет вид

$$T_1(\lambda) = \begin{pmatrix} a_1(\lambda) & -b_1(\lambda) \\ b_1(\lambda) & a_1(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода унимодулярна и коэффициент $a_1(\lambda)$ аналитически продолжается в полуплоскость $\text{Im } \lambda \geq 0$, где он имеет асимптотику $a_1(\lambda) = 1 + O(1/|\lambda|)$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$. Его нули в верхней полуплоскости ξ_{1j} , $j = 1, \dots, n_1$, являются собственными значениями дискретного спектра первого уравнения в (5). Введем коэффициент отражения $r_1(\lambda) = b_1(\lambda)/a_1(\lambda)$. Данными рассеяния для нашей задачи является набор $\{r_1(\lambda), -\infty < \lambda < \infty, \xi_{1j}, m_{1j}, \text{Im } \xi_{1j} > 0, j = 1, \dots, n_1\}$, а соответствующее уравнение Гельфанда – Левитана – Марченко имеет вид

$$(8) \quad K_1(x, y) + F_1(x+y) + \int_x^\infty K_1(x, z) F_1(z+y) dz = 0$$

при $x \leq y$, где

$$(9) \quad F_1(x) = i \text{Im } \varphi_1(x) \cdot \sigma_1 + i \text{Re } \varphi_1(x) \cdot \sigma_2,$$

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty r_1(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda + \sum_{j=1}^{n_1} m_{1j} e^{i\xi_{1j} x}.$$

Для полного описания решений уравнения (1) осталось указать, что матрица A_0 находится из соотношения $A_0(x) = \sigma_3 K_1(x, x) \sigma_3 - K_1(x, x)$, а зависимость данных рассеяния от t определяется вторым уравнением в (5) и дается следующими формулами:

$$(10) \quad \begin{aligned} z_1(\lambda, t) &= a_1(\lambda, 0), \quad b_1(\lambda, t) = e^{4i\lambda^2 t} b_1(\lambda, 0), \\ \xi_{1j}(t) &= \xi_{1j}(0), \quad m_{1j}(t) = e^{4i\xi_{1j}^2 t} m_{1j}(0), \quad j = 1, \dots, n_1. \end{aligned}$$

Обратимся теперь к уравнению (2). Используя матрицы Паули, запишем его в виде

$$(11) \quad S_t = \frac{1}{2i} [S, S_{xx}],$$

где $S = (S, \sigma)$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$,

$$(12) \quad S^2 = I, \quad S = S^+, \quad \text{tr } S = 0.$$

Нетрудно убедиться (см. [4]), что уравнение (11) – (12) является условием совместности следующей системы:

$$(13) \quad \Phi_{2x} = U_2(x, t, \lambda) \Phi_2, \quad \Phi_{2t} = V_2(x, t, \lambda) \Phi_2,$$

где

$$(14) \quad U_2 = i\lambda S, \quad V_2 = \lambda S S_x + 2i\lambda^2 S.$$

Отметим, хотя этот факт нам в дальнейшем не понадобится, что уравнение (11) является условием совместности для системы (13) – (14) в случае

матриц S произвольной (даже бесконечной) размерности с единственным условием $S^2=I$.

Для уравнения (2) естественными граничными условиями являются

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} S(x, t) = S_0, \quad S_0 = (0, 0, 1),$$

т. е.

$$(15) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} S(x, t) = \sigma_3.$$

При условии, что $S(x)$ достаточно быстро стремится к своему пределу в (15), решения Йоста $f_2(x, \lambda)$, $g_2(x, \lambda)$ первого уравнения в (13) имеют интегральные представления

$$f_2(x, \lambda) = e^{i\lambda x \sigma_3} + \lambda \int_x^{\infty} K_2(x, y) e^{i\lambda y \sigma_3} dy,$$

$$g_2(x, \lambda) = e^{i\lambda x \sigma_3} + \lambda \int_{-\infty}^x N_2(x, y) e^{i\lambda y \sigma_3} dy,$$

где, например, ядро $K_2(x, y)$ является решением задачи Гурса

$$(16) \quad K_{xx} \sigma_3 + S(x) K_{2y} = 0 \quad \text{при } x \leq y,$$

$$S(x) - \sigma_3 - iK_2(x, x) + iS(x)K_2(x, x)\sigma_3 = 0.$$

Эти решения связаны унимодулярной матрицей перехода $T_2(\lambda)$,

$$(17) \quad f_2(x, \lambda) = g_2(x, \lambda) T_2(\lambda),$$

которая имеет вид

$$T_2(\lambda) = \begin{pmatrix} a_2(\lambda) & -b_2(\lambda) \\ b_2(\lambda) & a_2(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Кроме того, $T_2(0) = I$ и коэффициент $a_2(\lambda)$ допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\text{Im } \lambda \geq 0$, где он имеет асимптотику $a_2(\lambda) = e^{i\alpha} + O(1/|\lambda|)$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}^1$. Данными рассеяния является набор $\{r_2(\lambda), -\infty < \lambda < \infty, \xi_{2j}, m_{2j}, \text{Im } \xi_{2j} > 0, j=1, \dots, n_2\}$, где $r_2(\lambda) = b_2(\lambda)/a_2(\lambda) =$ коэффициент прохождения, ξ_{2j} — нули $a_2(\lambda)$, а m_{2j} — нормирующие множители для собственных функций дискретного спектра. Уравнение Гельфанда — Левитана — Марченко в нашем случае имеет вид

$$(18) \quad K_2(x, y) + F_2(x+y) + \int_x^{\infty} K_2(x, z) F_2(z+y) dz = 0$$

при $x \leq y$, где

$$(19) \quad F_2(x) = i \text{Im } \varphi_2(x) \cdot \sigma_1 + i \text{Re } \varphi_2(x) \cdot \sigma_2,$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r_2(\lambda)}{\lambda} e^{i\lambda x} d\lambda + \sum_{j=1}^{n_2} \frac{m_{2j}}{\xi_{2j}} e^{i\xi_{2j} x}.$$

Матрица $S(x)$ имеет вид

$$S(x) = (iK_2(x, x) + \sigma_3) \sigma_3 (iK_2(x, x) + \sigma_3)^{-1},$$

а зависимость данных рассеяния от t определяется следующими форму-

лами:

$$a_2(\lambda, t) = a_2(\lambda, 0), \quad b_2(\lambda, t) = e^{i\lambda^2 t} b_2(\lambda, 0),$$

$$\xi_{2j}(t) = \xi_{2j}(0), \quad m_{2j}(t) = e^{i\lambda^2 t} m_{2j}(0), \quad j=1, \dots, n_2.$$

Перейдем теперь к основному утверждению работы — доказательству эквивалентности уравнений (1) и (2).

2. КАЛИБРОВОЧНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

В этом разделе мы покажем, что с помощью калибровочного преобразования, не зависящего от λ , любую плоскую связность вида (6) можно привести к форме (14). Для доказательства того, что на этом пути получаются все плоские связности вида (14), мы покажем, что любую плоскую связность вида (14) калибровочным преобразованием можно перевести в форму (6). Тем самым будет доказано, что каждому решению уравнения (1) соответствует решение (2) и наоборот. Точные формулировки этих утверждений с учетом граничных условий содержатся в предложениях 1 и 2.

Предложение 1. Пусть $\psi(x, t)$ — решение уравнения (1) с граничными условиями $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \psi(x, t) = 0$, а $g(x, t) = \Phi_1(x, t, 0)$, где $\Phi_1(x, t, \lambda)$ — решение системы (5). Тогда функция

$$S(x, t) = g^{-1}(x, t) \sigma_3 g(x, t)$$

является решением уравнения (11). Если $\Phi_1(x, t, 0) = f_1(x, t, 0)$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x, t) = \sigma_3$. Если же при этом $b_1(0) = 0$, то $S(x, t)$ удовлетворяет условию (15).

Доказательство. Совершим в системе (5) замену $\Phi_1 = g\Phi_2$. Поскольку $g_x = A_0 g$, то коэффициент связности U_1 перейдет в $U_2 = i\lambda S$, где $S = g^{-1} \sigma_3 g$. Далее, так как $g_t = B_0 g$, то V_1 под действием преобразования g перейдет в $V_2 = \lambda g^{-1} B_1 g + 2i\lambda^2 S$. Но поскольку $g^{-1} B_1 g = 2g^{-1} A_0 g = 2g^{-1} g_x$ и

$$\begin{aligned} SS_x &= -S_x S = g^{-1} g_x - g^{-1} \sigma_3 g_x g^{-1} \sigma_3 g = \\ &= g^{-1} g_x - g^{-1} \sigma_3 A_0 \sigma_3 g = 2g^{-1} g_x, \end{aligned}$$

так как $\sigma_3 A_0 \sigma_3 = -A_0$, то окончательно $V_2 = \lambda SS_x + 2i\lambda^2 S$.

Равенство нулю кривизны связности U_2, V_2 означает, что S является решением уравнения (11). Поскольку матрицы A_0 и B_0 антиэрмитовы, то g унитарна; таким образом, S — эрмитова матрица. И наконец, если $g(x, t) = f_1(x, t, 0)$ и $B_1(0) = 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x, t) = I, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x, t) = \begin{pmatrix} a_1(0) & 0 \\ 0 & a_1(0) \end{pmatrix},$$

откуда следует, что $S(x, t)$ удовлетворяет условиям (15). Предложение доказано.

Предложение 2. Пусть $S(x, t)$ — решение уравнения (11) с граничными условиями $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} S(x, t) = S_{\pm}$, где матрицы $S_{\pm}$ удовлетворяют соотношениям (12). Можно единственным образом с точностью до умножения справа на постоянную унитарную диагональную матрицу построить унитарную матрицу $g(x, t)$ такую, что $S = g\sigma_3 g^{-1}$ и диагональные элементы

$g^{-1}g_x$ равны нулю. Положим

$$g^{-1}g_x = \begin{pmatrix} 0 & -\bar{\psi} \\ \psi & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\psi(x, t)$ является решением уравнения (1) с граничными условиями

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \psi(x, t) = 0$$

и

$$g^{-1}g_t = i \begin{pmatrix} |\psi|^2 & \bar{\psi}_x \\ \psi_x & -|\psi|^2 \end{pmatrix}.$$

Более того, если $S_{\pm} = \sigma_3$, то $b_1(0) = 0$.

Доказательство. Пусть унитарная матрица g приводит S к диагональному виду, $S = g\sigma_3g^{-1}$. Матрица g определена с точностью до умножения справа на произвольную диагональную унитарную матрицу g_0 . Выбором матрицы g_0 можно добиться того, чтобы на диагонали у $g_0^{-1}g^{-1}(gg_0)_x$ стояли нули, т. е. выполнения условия

$$\sigma_3 g_0^{-1} g^{-1} (gg_0)_x + g_0^{-1} g^{-1} (gg_0)_x \sigma_3 = 0$$

или

$$(20) \quad 2\sigma_3 g_{0x} = -(\sigma_3 g^{-1} g_x + g^{-1} g_x \sigma_3) g_0.$$

Поскольку матрица $\sigma_3 g^{-1} g_x + g^{-1} g_x \sigma_3$ диагональна и антиэрмитова, то уравнение (20) определяет унитарную диагональную матрицу g_0 . Совершим теперь в системе (13) замену $\Phi_2 = g\Phi_1$. Коэффициент U_2 перейдет при этом в

$$U_1 = -g^{-1}g_x + i\lambda\sigma_3 = A_0 + \lambda A_1.$$

Коэффициент V_2 примет вид

$$V_1 = -g^{-1}g_t + \lambda g^{-1} S S_x g + 2i\lambda^2 \sigma_3.$$

Так как $S = g\sigma_3g^{-1}$, то

$$S S_x = 2g(g^{-1})_x = -2g_x g^{-1}$$

и $g^{-1} S S_x g = 2A_0$. Таким образом, V_1 приобретает вид

$$V_1 = \bar{B}_0 + \lambda B_1 + \lambda^2 B_2,$$

где $\bar{B}_0 = -g^{-1}g_t$. Теперь заметим, что связность U_1, V_1 является плоской связностью, поскольку таковой была U_2, V_2 . Таким образом выполняются уравнения

$$(21) \quad B_{1x} = [A_1, \bar{B}_0],$$

$$(22) \quad A_{0t} - \bar{B}_{0x} + [A_0, \bar{B}_0] = 0.$$

Из уравнения (21) следует, что

$$i[\sigma_3, B_0] = 2 \begin{pmatrix} 0 & \bar{\psi}_x \\ -\psi_x & 0 \end{pmatrix},$$

откуда получаем

$$\bar{B}_0 = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\psi}_x \\ \psi_x & 0 \end{pmatrix} + a\sigma_3.$$

Теперь уравнение (22) дает

$$-\psi_t + i\psi_{xx} - 2a\psi = 0, \quad a_x + i(\psi\bar{\psi}_x + \psi_x\bar{\psi}) = 0,$$

г.е. $a = -i|\psi|^2$, а ψ удовлетворяет уравнению (1). Для завершения доказательства осталось заметить, что если $S_+ = S_- = \sigma_3$, то можно выбрать матрицу g так, чтобы на $+\infty$ она стремилась к единичной матрице, а на $-\infty$ — к диагональной. Это и означает, что $b_1(0) = 0$.

Следствие 1. Пусть $S(x, t)$ — решение уравнения (2), а $\psi(x, t)$ — соответствующее решение (1). Тогда

$$(23) \quad S_x^2 = 4|\psi|^2.$$

Доказательство. Поскольку $SS_x = 2gA_0g^{-1}$, то

$$S_x^2 = \det S_x = 4 \det A_0 = 4|\psi|^2.$$

Столь же просто доказывается следующее утверждение.

Следствие 2. Пусть в предположениях следствия 1 $S(x, t)$ удовлетворяет условию (15). Тогда $b_1(0) = 0$ и

$$T_2(\lambda) = T_1^{-1}(0)T_1(\lambda), \quad n_1 = n_2 = n, \\ \xi_{1j} = \xi_{2j}, \quad m_{2j} = \overline{a_1(0)}m_{1j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Следствие 3. Пусть $\psi(x, t)$ — решение уравнения (1) с граничными условиями $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \psi(x, t) = 0$, а $S(x, t)$ — соответствующее решение уравнения (2). Тогда

$$(24) \quad S_x^2 \cdot (\arg \psi)_x = (S, S_x \times S_{xx}).$$

Доказательство. Из формул (6) получаем, что

$$\operatorname{tr} A_0 B_0 = i(\psi \bar{\psi}_x - \psi_x \bar{\psi})$$

и, поскольку $A_0 = g_x g^{-1}$, $B_0 = g_t g^{-1}$, $S = g^{-1} \sigma_3 g$, то

$$g^{-1} S_x g = [\sigma_3, A_0], \quad g^{-1} S_t g = [\sigma_3, B_0].$$

Далее, так как $\sigma_3 A_0 \sigma_3 = -A_0$, то

$$\operatorname{tr} (S_x S_t) = -4 \operatorname{tr} A_0 B_0.$$

Таким образом, получаем, используя уравнение (11), что

$$(S, S_x \times S_{xx}) = \frac{2}{i} (\psi_x \bar{\psi} - \psi \bar{\psi}_x) = 4|\psi|^2 (\arg \psi)_x.$$

Следствие доказано.

Заметим, что формулы (23) — (24) и составляют содержание работы [5].

3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Нелинейное уравнение Шредингера является гамильтоновой системой со скобками Пуассона

$$(25) \quad \{\psi(x, t), \bar{\psi}(y, t)\} = i\delta(x-y)$$

и гамильтонианом

$$(26) \quad H_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (|\psi_x|^2 - |\psi|^4) dx.$$

В работе [2] была доказана полная интегрируемость уравнения (1) и приведены канонические переменные типа действие — угол. Бесконечная

серия законов сохранения для нелинейного уравнения Шредингера была получена в [1]. Приведем первые из них, которые выглядят следующим образом:

$$(27) \quad N_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx,$$

$$(28) \quad P_1 = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} (\psi_x \bar{\psi} - \psi \bar{\psi}_x) dx$$

и имеют смысл числа частиц и импульса. С помощью законов сохранения N , P_1 и H_1 , выраженных через данные рассеяния, в [3] было проведено квазиклассическое квантование уравнения (1).

Уравнение (2) также может быть записано в гамильтоновом виде. Канонические скобки Пуассона на двумерной сфере в $\mathbb{R}^3$

$$(29) \quad \{S_j(x, t), S_k(y, t)\} = \varepsilon_{jkl} S_l(x) \delta(x-y),$$

где ε_{jkl} — полностью антисимметрический тензор, и гамильтониан

$$(30) \quad H_2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_x^2 dx$$

порождают уравнение (2) по правилам гамильтоновой механики. В работе [4] было указано, что ферромагнетик Гейзенберга имеет бесконечное число законов сохранения. Первые из них суть

$$(31) \quad P_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_1 S_{2x} - S_{1x} S_2}{1 + S_3} dx,$$

$$(32) \quad M = \int_{-\infty}^{\infty} (S - S_0) dx$$

и имеют смысл соответственно импульса и намагниченности. Нетрудно убедиться, что величина $\frac{1}{S_x^2} (S, S_x \times S_{xx})$, введенная в следствии 3, просто связана с плотностью импульса P_2 .

Для получения бесконечного числа законов сохранения используется стандартная техника метода обратной задачи рассеяния, основанная на тождествах следов. Раскладывая $\ln a_2(\lambda)$ в асимптотический ряд по обратным степеням λ при $|\lambda| \rightarrow \infty$, мы получаем первую серию локальных законов сохранения, которая начинается с P_2 , $P_2 = 2 \arg a_2(\infty)$, затем идет H_2 , и вообще имеет место рекуррентная формула для плотностей c_n этих законов сохранения

$$(33) \quad I_n = \int_{-\infty}^{\infty} c_n dx, \quad n=1, 2, \dots,$$

$$(34) \quad c_1 = \frac{1}{4} S_x^2, \quad c_n = \psi \left(\frac{c_{n-1}}{\psi} \right)_x + \sum_{j+k=n-1} c_j c_k.$$

Здесь при выражении коэффициентов c_n через функцию S нужно использовать формулы (23) и (24). В частности, получаем следующие выраже-

ния для P_2 и H_2 через данные рассеяния:

$$(35) \quad P_2 = -\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |a_2(\lambda)|}{\lambda} d\lambda + 4 \sum_{j=1}^n \arg \zeta_j,$$

$$(36) \quad H_2 = -\frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln |a_2(\lambda)| d\lambda + 8 \sum_{j=1}^n \operatorname{Im} \zeta_j.$$

Вторую серию законов сохранения (вообще говоря, не локальных) можно получить, раскладывая $\ln a_2(\lambda)$ в асимптотический ряд по положительным степеням λ в окрестности нуля. Первым на таком пути получается закон сохранения M_3 , для следующих плотностей имеем простые рекуррентные соотношения, которые мы здесь не приводим вследствие того, что возникающие законы сохранения не имеют наглядной физической интерпретации. В то же время на этом пути нельзя получить величины M_1 и M_2 , поскольку они не находятся в инволюции с M_3 . Приведем регулярный способ, существенно опирающийся на предложения 1 и 2, позволяющий выразить вектор намагниченности M через данные рассеяния.

Пусть S — решение уравнения (11) с граничными условиями (15). Из предложений 1 и 2 следует, что $S = g^{-1} \sigma_3 g$, где $g(x, t) = f_1(x, t, 0)$,

$$(37) \quad f_{1x} = (A_0 + i\lambda \sigma_3) f_1,$$

и $f_1(x, t, \lambda) = e^{i\lambda x \sigma_3} + o(1)$ при $x \rightarrow +\infty$.

Продифференцируем уравнение (37) по λ и положим $\lambda=0$, $\dot{g}(x, t) = \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, t, \lambda)|_{\lambda=0}$. Мы получим, что $\dot{g}_x = A_0 \dot{g} + i\sigma_3 g$. Представляя $\dot{g}$ в виде $\dot{g}(x, t) = g(x, t) C_1(x, t)$, получим $C_{1x} = i g^{-1} \sigma_3 g$ и, поскольку $C_1 \sim i x \sigma_3$ при $x \rightarrow +\infty$, то

$$C_1 = i x \sigma_3 - i \int_x^{\infty} (S - \sigma_3) dx'.$$

С другой стороны, $S = T_1^{-1}(0) \tilde{g}^{-1} \sigma_3 \tilde{g} T_1(0)$, где $\tilde{g}(x, t) = g_1(x, t, 0)$. Аналогичным образом получаем, что $\dot{\tilde{g}} = \tilde{g} C_2$, где $C_{2x} = i T_1(0) S T_1^{-1}(0)$ и $C_2 \sim i x \sigma_3$ при $x \rightarrow -\infty$. Вспоминая, что $b_1(0) = 0$, получаем

$$T_1^{-1}(0) C_2 T_1(0) = i x \sigma_3 + i \int_{-\infty}^x (S - \sigma_3) dx'.$$

Теперь дифференцируя уравнение (7) по λ и полагая $\lambda=0$, найдем, что $\dot{g} = \dot{\tilde{g}} T_1(0) + \tilde{g} \dot{T}_1(0)$ или $g C_1 = \tilde{g} C_2 T_1(0) + \tilde{g} \dot{T}_1(0)$, т. е. $T_1(0) C_1 - C_2 T_1(0) = -\dot{T}_1(0)$. Таким образом, получаем

$$(38) \quad \int_{-\infty}^{\infty} (S - \sigma_3) dx = i T_1^{-1}(0) \dot{T}_1(0).$$

Из формулы (38) получаем, что

$$(39) \quad M_3 = i \dot{a}_1(0) / a_1(0) = i \dot{a}_2(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |a_2(\lambda)|}{\lambda^2} d\lambda - 2 \sum_{j=1}^n \frac{\operatorname{Im} \zeta_j}{|\zeta_j|^2},$$

$$(40) \quad M = M_1 - i M_2 = \frac{1}{i} \frac{\dot{b}_1(0)}{a_1(0)} = \frac{1}{i} \dot{b}_2(0).$$

Остановимся в заключение на доказательстве полной интегрируемости уравнения (2). Нетрудно непосредственно убедиться, вычисляя вариационные производные от S по данным рассеяния или используя уже известные канонические переменные для уравнения [1], приведенные в [2], и предложения 1 и 2, что ферромагнетик Гейзенберга является вполне интегрируемой гамильтоновой системой, и указать соответствующие переменные типа действие — угол. С помощью формул (35), (36) и (39) легко провести квазиклассическое квантование уравнения (2) аналогично работе [3]. Мы не приводим здесь этих простых рассуждений, так как скоро они должны появиться в работе П. П. Кулиша и С. Й. Пачевой. Лишь отметим, что, как обычно в случае вполне интегрируемых систем, квантовый спектр совпадает с квазиклассическим. Укажем также, что как для нелинейного уравнения Шредингера солитоны являлись связанными состояниями частиц основного поля, так и в случае ферромагнетика Гейзенберга кванты основного поля — магныоны могут образовывать связанные состояния с произвольным числом магныонов.

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау
Академии наук СССР
Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
6 февраля 1978 г.

Литература

- [1] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат. ЖЭТФ, 61, 118, 1971.
- [2] В. Е. Захаров, С. В. Манаков. ТМФ, 19, 3, 1974.
- [3] П. П. Кулиш, С. В. Манаков, Л. Д. Фаддеев. ТМФ, 28, 38, 1976.
- [4] L. A. Takhtajan. Phys. Lett., 64A, 235, 1977.
- [5] M. Lakshmanan. Phys. Lett., 61A, 53, 1977.
- [6] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат. Функциональный анализ и его приложения, 1979 (в печати).

EQUIVALENCE OF NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION AND HEISENBERG FERROMAGNET

V. E. Zakharov, L. A. Takhtajan

Notion of the gauge equivalence is introduced for nonlinear equations integrable by means of the inverse scattering method. The equivalence between nonlinear Schrödinger equation and continuous isotropic Heisenberg spin chain is shown.