ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 19, № 3
июнь, 1974

О ПОЛНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

В. Е. Захаров, С. В. Манаков

Показано, что нелинейное уравнение Шредингера, рассматриваемое как гамильтоновская система, полностью интегрируемо. Переход к переменным угол-действие осуществляется с помощью матрицы рассеяния одномерного оператора Дирака.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время теория классических нелинейных полей привлекает все большее внимание исследователей, в основном в связи с необычайным многообразием физических приложений. При этом особое внимание уделяется проблеме статистического описания волновых полей. Поля при этом рассматриваются как консервативные гамильтоновские системы с бесконечным числом степеней свободы, и их статистическое описание основывается на гипотезе об эргодичности этой системы.

С другой стороны, в последние годы был достигнут значительный прогресс в исследовании некоторых классов одномерных нелинейных полей. Этот прогресс связан с применением «квантово-механических» методов для изучения нелинейных систем. Суть нового подхода, получившего название «метод обратной задачи рассеяния», состоит в следующем. С рассматриваемым классическим полем ассоциируется некоторый дифференциальный оператор с коэффициентами из этого поля, спектральные характеристики которого (матрица рассеяния, спектр) известным образом меняются во времени. Задача Коши для нелинейных уравнений поля сводится, таким образом, к изучению прямой и обратной спектральных задач для линейного оператора (прямая и обратная задачи рассеяния).

Впервые метод обратной задачи рассеяния был применен М. Крускалом и др. [1] к уравнению Кортевега-де-Вриза

$$u_t+6uu_x+u_{xxx}=0, \tag{1}$$

возникшему еще в прошлом веке в связи с задачей о волнах на поверхности жидкости. С уравнением (1) ассоциируется одномерный оператор Шредингера.

Впоследствии этот подход был применен А. Б. Шабатом и одним из авторов настоящей статьи (В. З.) к нелинейному уравнению Шредингера [2, 3]

$$i\psi_t+\psi_{xx}+\varkappa|\psi|^2\psi=0. \tag{2}$$

Уравнение (2) возникало при рассмотрении различных физических задач; к нему приводит, например, теория слабонеидального бозе-газа при $T=0$ [4, 5]. Это же уравнение описывает двумерную самофокусировку интенсивного светового пучка в нелинейной среде и другие эффекты [6, 7]. Нелинейное уравнение (2) можно исследовать с помощью одномерного оператора Дирака, который мы будем записывать в виде

$$L=i\begin{pmatrix}1+p & 0\\ 0 & 1-p\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}+\begin{pmatrix}0 & \psi^*\\ \psi & 0\end{pmatrix},\quad \varkappa=\frac{2}{1-p^2}. \tag{3}$$

Системы, описываемые уравнениями (1), (2), являются гамильтоновскими. При этом они обладают исключительным свойством, они полностью интегрируемы, т. е. существуют канонические переменные, являющиеся однозначными «функциями» полевых переменных (переменные действие-угол), в которых уравнения движения (1), (2) имеют вид

$$\dot{S}_k=0,\quad \dot{\Phi}_k=\frac{\delta H}{\delta S_k};\quad H=H\{S_k\}. \tag{4}$$

Для уравнения (1) этот факт был установлен В. Захаровым и Л. Фаддеевым [8]. Переменные S и Φ просто связаны с матрицей рассеяния ассоциированного оператора. Доказательство полной интегриуемости нелинейного уравнения Шредингера (2) составляет основное содержание настоящей работы.

Применительно к проблеме статистического описания полная интегрируемость рассматриваемых систем означает отсутствие стохастизации в них; нелинейное взаимодействие не приводит к перераспределению энергии между разными «модами». Время «фазового размешивания» некоторой системы определяется, таким образом, не величиной нелинейности, а «отклонением» от «ближайшей» полностью интегрируемой системы.

Большой интерес представляет также вопрос об описании всего класса полей, для изучения которых может быть применен метод обратной задачи рассеяния. Для уравнений, интегрируемых с помощью оператора Шредингера, эта задача была решена в [8], где было показано, что полностью интегрируемыми являются все системы, гамильтонианы которых представляют собой следы полиномов от ассоциированного оператора с коэффициентами, зависящими от времени. Для вычисления этих гамильтонианов существуют простые рекуррентные формулы. Аналогичный результат получен ниже для оператора (3).

В связи с тем, что используемый нами подход отличается от рассмотренного в [8], мы приводим схему нового доказательства полной интегрируемости уравнения Кортевега-де-Вриза. Заметим еще, что для одного частного случая рассматриваемой нами задачи ($\psi\to 0$, $\varkappa<0$ при $|x|\to\infty$) теорема о полной интегрируемости уравнения (2) была доказана Тахтаджяном [9].

1. ПЕРЕМЕННЫЕ УГОЛ-ДЕЙСТВИЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ($\varkappa>0$)

Рассмотрим уравнение (2) на бесконечном интервале $-\infty<x<\infty$ при $\varkappa>0$. Физически разумная постановка задачи в этом случае требует обращения поля в нуль на бесконечности.

Запишем уравнение (2) в гамильтоновском виде

$$(5)\qquad i\psi_t=\frac{\delta H}{\delta\psi^*};\quad i\psi_t^*=-\frac{\delta H}{\delta\psi},$$

где гамильтониан H есть

$$(6)\qquad H=\int_{-\infty}^{\infty}\left(|\psi_x|^2-\frac{\varkappa}{2}|\psi|^4\right)dx.$$

Естественным образом определенные скобки Пуассона двух функционалов α, β будем обозначать через $\{\alpha, \beta\}$:

$$(7)\qquad \{\alpha,\beta\}=i\int_{-\infty}^{\infty}dx\left\{\frac{\delta\alpha}{\delta\psi}\frac{\delta\beta}{\delta\psi^*}-\frac{\delta\alpha}{\delta\psi^*}\frac{\delta\beta}{\delta\psi}\right\}.$$

Рассмотрим, далее, задачу на собственные значения для оператора $\hat{L}$ (3)

$$(8)\qquad \hat{L}\varphi=\lambda\varphi,\quad \varphi=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}$$

и совершим замену

$$\varphi_1=\sqrt{1-p}\exp\left(-i\frac{\lambda}{1-p^2}x\right)u_2,\quad \varphi_2=\sqrt{1+p}\exp\left(-i\frac{\lambda}{1-p^2}x\right)u_1.$$

Уравнение (8) примет вид

$$(9)\qquad \frac{\partial u_1}{\partial x}+i\xi u_1=q(x)u_2,\quad \frac{\partial u_2}{\partial x}-i\xi u_2=-q^*(x)u_1,$$

где $\xi=\lambda p(1-p^2)^{-1}$, $q(x)=i(1-p^2)^{-1/2}\psi(x)$. Если $q(x)$ достаточно быстро убывает на бесконечности, то каждое решение системы (9) при вещественных ξ однозначно определяется одной из своих асимптотик при $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$. Задача рассеяния для оператора $\hat{L}$ заключается в определении одной из этих асимптотик по заданной другой. Под обратной задачей рассеяния мы будем понимать задачу о восстановлении $q(x)$ по данным задачи рассеяния (т. е. по матрице рассеяния). Прямая и обратная задачи были подробно рассмотрены в [2], поэтому мы не будем останавливаться на обосновании следующих ниже утверждений.

Функции Йоста $\varphi(x,\xi)$, $\psi(x,\xi)$, определенные как решения (9) с асимптотиками

$$\varphi(x,\xi)\to\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-i\xi x}\quad\text{при}\quad x\to+\infty,$$

$$\psi(x,\xi)\to\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{i\xi x}\quad\text{при}\quad x\to-\infty,$$

допускают аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость ξ при каждом x.

Если $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$ — решение (9) при вещественном ξ, то $\tilde{\mathbf{u}}^{\text{опр}}=\begin{pmatrix}u_2^*\\-u_1^*\end{pmatrix}$ — также решение системы (9). Функции $\psi(x,\xi)$, $\tilde{\psi}(x,\xi)$

образуют полный набор для системы (9), поэтому

(10) $$\varphi(x, \xi)=a(\xi)\tilde{\psi}(x, \xi)+b(\xi)\psi(x, \xi).$$

Элементы матрицы рассеяния $a(\xi)$, $b(\xi)$ следующим образом выражаются через функции Йоста:

(11) $$a(\xi)=(\varphi_1\psi_2-\varphi_2\psi_1)(x, \xi), \quad b(\xi)=(\tilde{\psi}_1\varphi_2-\tilde{\psi}_2\varphi_1)(x, \xi),$$

$a(\xi)$ аналитична в верхней полуплоскости ξ; $a(\xi)\to 1$ при $\xi\to\infty$, $\operatorname{Im}\xi\geqslant 0$. Соотношение унитарности для матрицы рассеяния в рассматриваемом случае имеет вид

(12) $$|a(\xi)|^2+|b(\xi)|^2=1.$$

Нули $a(\xi)$ в верхней полуплоскости соответствуют собственным значениям задачи (9); при этом

(13) $$\varphi(x, \xi)=c\psi(x, \xi) \quad (a(\xi)=0).$$

«Потенциал» $q(x)$ восстанавливается по матрице рассеяния $a(\xi)$, $b(\xi)$ и набору величин c в каждом нуле $a(\xi)$, $\operatorname{Im}\xi\geqslant 0$. Необходимым и достаточным условием разрешимости обратной задачи является соотношение (12) и аналитичность $a(\xi)$ при $\operatorname{Im}\xi\geqslant 0$.

Вычислим скобки Пуассона между элементами матрицы рассеяния. Для определения вариационных производных $\delta a(\xi)/\delta q(x)$, $\delta a/\delta q^*$, $\delta b/\delta q$, $\delta b/\delta q^*$ воспользуемся представлением (11):

$$\frac{\delta a(\xi)}{\delta q(x)}=\frac{\delta}{\delta q(x)}[\varphi_1(y, \xi)\psi_2(y, \xi)-\varphi_2(y, \xi)\psi_1(y, \xi)].$$

Выражение в скобках не зависит от y. Можно поэтому положить $y=x+0$. Так как $\psi(x, \xi)$ определяется асимптотикой при $x\to+\infty$, то $\delta\psi(y, \xi)/\delta q(x)=0$, если $y>x$. Выражения для $\lim\limits_{y\to x+0}\delta\varphi_{1,2}(y, \xi)/\delta q(x)$ легко находятся из (9):

$$\lim_{y\to x+0}\frac{\delta\varphi_1}{\delta q}=\varphi_2(x, \xi), \quad \lim_{y\to x+0}\frac{\delta\varphi_2}{\delta q}=0,$$

таким образом,

(14а) $$\frac{\delta a(\xi)}{\delta q(x)}=\varphi_2(x, \xi)\psi_2(x, \xi).$$

Совершенно аналогично вычисляются все остальные вариационные производные:

(14б) $$\frac{\delta a(\xi)}{\delta q^*(x)}=\varphi_1(x, \xi)\psi_1(x, \xi),$$

$$\frac{\delta b(\xi)}{\delta q(x)}=-\tilde{\psi}_2(x, \xi)\varphi_2(x, \xi), \quad \frac{\delta b(\xi)}{\delta q^*(x)}=-\tilde{\psi}_1(x, \xi)\varphi_1(x, \xi).$$

Для вычисления интегралов, определяющих скобки Пуассона, заметим, что если $\mathbf{u}^{(1)}$, $\mathbf{u}^{(2)}$ — два произвольных решения системы (9) при $\xi=\xi_1$, а

$\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}$ — решения при $\xi=\xi_2$, то

$$(15)\qquad \{u_1^{(1)}u_1^{(2)}v_2^{(1)}v_2^{(2)}-u_2^{(1)}u_2^{(2)}v_1^{(1)}v_1^{(2)}\}=$$
$$=\frac{i}{2(\xi_1-\xi_2)}\frac{d}{dx}[(u_1^{(1)}v_2^{(1)}-u_2^{(1)}v_1^{(1)})(u_1^{(2)}v_2^{(2)}-u_2^{(2)}v_1^{(2)})].$$

Соотношение (15) непосредственно следует из (9). Используя (15), нетрудно убедиться, что все возникающие подынтегральные выражения представляют собой полные производные. Вычисляя, например, $\{a(\xi), b(\xi')\}$, мы находим, что

$$\{a(\xi), b(\xi')\}=-\frac{\varkappa}{4(\xi-\xi')}a(\xi)b(\xi')+$$
$$+\frac{\varkappa}{4}\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2i(\xi-\xi')x}}{\xi'-\xi}a(\xi')b(\xi).$$

Воспользовавшись известным соотношением

$$P\left(\lim_{x\to\infty}\frac{e^{i\xi x}}{\xi}\right)=\pi i\delta(\xi),\quad \text{получаем}$$

$$\{a(\xi), b(\xi')\}=-\frac{\varkappa}{4(\xi-\xi')}a(\xi)b(\xi')-$$
$$-\frac{\varkappa}{4}\pi i a(\xi)b(\xi)\delta(\xi-\xi').$$

Поступая аналогичным образом, можно найти скобки Пуассона между всевозможными парами элементов матрицы рассеяния, после чего нетрудно убедиться, что величины

$$(16)\qquad P_\xi=\sqrt{\frac{2}{\varkappa}}\ln\frac{1}{|a(\xi)|^2},\quad Q_\xi=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\varkappa}}\arg b(\xi)$$

обладают каноническими «коммутационными соотношениями»

$$\{P_\xi, P_{\xi'}\}=\{Q_\xi, Q_{\xi'}\}=0,\qquad \{P_\xi, Q_{\xi'}\}=\delta(\xi-\xi').$$

Если $a(\xi)$ не имеет нулей в верхней полуплоскости ξ, то набор P_ξ, Q_ξ $(-\infty<\xi<\infty)$ полный, т. е. $q(x)$ однозначно восстанавливается по данному набору P, Q, поскольку он полностью определяет матрицу рассеяния.

В случае, когда $a(\xi)$ имеет N нулей в верхней полуплоскости, которые мы будем считать простыми, переменные P_ξ, Q_ξ должны быть дополнены дискретным набором канонических переменных, связанных с нулями $a(\xi)$. Пусть $a(\zeta_n)=0$, $\operatorname{Im}\zeta_n>0$, $n=1, 2, \ldots, N$. В точке $\xi=\zeta_n$ $\varphi(x, \zeta_n)=$ $=c_n\psi(x, \zeta_n)$. Для финитного потенциала $q(x)$ $a(\xi)$, $b(\xi)$ аналитичны во всей комплексной плоскости, и вариационные производные $\delta c_n/\delta q(x)$, $\delta c_n/\delta q^*$ можно получить аналитическим продолжением $\delta b/\delta q$, $\delta b/\delta q^*$, что дает

$$\frac{\delta c_n}{\delta q(x)}=-\tilde{\psi}_2(x, \zeta_n)\varphi_2(x, \zeta_n),\qquad \frac{\delta c_n}{\delta q^*}=-\tilde{\psi}_1(x, \zeta_n)\varphi_1(x, \zeta_n).$$

Найдем также $\delta\varphi_n/\delta q(x)$, воспользовавшись стандартной теорией возмущений для системы (9):

$$\frac{\partial\psi_1'}{\partial x}+i(\zeta+\delta\zeta)\psi_1'=q(x)\psi_2'+\delta q\delta(x-z)\psi_2',$$
$$\frac{\partial\psi_2'}{\partial x}-i(\zeta+\delta\zeta)\psi_2'=-q^*(x)\psi_1',\quad \psi_{1,2}'(\pm\infty)=0.$$

Решение этих уравнений имеет вид

$$\psi'=\begin{cases} c_1\psi(x,\zeta+\delta\zeta), & x>z,\\ c_2\varphi(x,\zeta+\delta\zeta), & x<z.\end{cases}$$

Сшивка решений в точке $x=z$ дает

$$c_1\psi_1-c_2\varphi_1=\delta q c_1\psi_2,\quad c_1\psi_2-c_2\varphi_2=0.$$

Нетривиальное решение этой системы существует, если

$$\det\begin{vmatrix}\psi_1-\delta q\psi_2, & -\varphi_1\\ \psi_2, & -\varphi_2\end{vmatrix}=0,$$

но

$$\det\begin{vmatrix}\psi_1, & -\varphi_1\\ \psi_2, & -\varphi_2\end{vmatrix}=-a(\zeta+\delta\zeta)=-a'(\xi)\delta\zeta,$$

откуда находим

$$\delta\zeta_n/\delta q(x)=-(a'(\zeta_n))^{-1}\psi_1(x,\zeta_n)\varphi_1(x,\zeta).$$

Точно так же найдем

$$\delta\zeta_n/\delta q^*(x)=-(a'(\zeta_n))^{-1}\psi_2(x,\zeta_n)\varphi_2(x,\zeta_n).$$

Теперь нетрудно убедиться, что

$$\{\zeta_n,P_\xi\}=\{\zeta_n,Q_\xi\}=\{c_n,P_\xi\}=\{c_n,Q_\xi\}=0,$$
$$\{\zeta_n,\zeta_{n'}\}=\{c_n,c_{n'}\}=0.$$

Кроме того, $\{\zeta_n,c_{n'}\}=0$, где $n\neq n'$.

Вычислим $\{\zeta_n,\ln c_n\}$:

$$\{\zeta_n,\ln c_n\}=\frac{\varkappa}{2}\frac{i}{a_n'c_n}\int(\varphi_1\varphi_2+\varphi_2\varphi_1)\,dx. \tag{17}$$

Вообще,

$$\varphi_1(x,\zeta)\varphi_2(x,\zeta')+\varphi_2(x,\zeta)\varphi_1(x,\zeta')=i(\zeta-\zeta')^{-1}\times$$
$$\times\frac{d}{dx}(\varphi_1(x,\zeta)\varphi_2(x,\zeta')-\varphi_2(x,\zeta)\varphi_1(x,\zeta'));$$

при $\zeta'\to\zeta$

$$2\varphi_1(x,\zeta)\varphi_2(x,\zeta)=i\frac{\partial}{\partial(\zeta-\zeta')}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_1(\zeta)\varphi_2(\zeta')-\varphi_2(\zeta)\varphi_1(\zeta')\right]_{\zeta=\zeta'}.$$

Теперь интегрируем (17) в конечных пределах, дифференцируем по $\zeta-\zeta'$, совершаем предельный переход $\zeta'\to\zeta$, после чего устремляем пределы интегрирования к бесконечности, учитывая, что $a(\zeta)=0$. В результате получим $\{\zeta_n,\ln c_n\}=\varkappa/4$. Таким образом, дискретный набор канонических переменных имеет вид

$$P_n=\sqrt{\frac{2}{\varkappa}}\zeta_n,\qquad Q_n=\sqrt{\frac{2}{\varkappa}}\ln\frac{1}{c_n^2},\qquad n=1,2,\ldots,n. \tag{18}$$

Отметим, что переменные (18) комплексны.

Совокупность переменных (16), (18) является полной. Действительно, пусть $\zeta_1,\ldots,\zeta_N$, $\operatorname{Im}\zeta_n>0$ — нули $a(\xi)$. Тогда аналитическая в верхней полуплоскости функция $a_1(\xi)=a(\xi)\prod\limits_{n=1}^{N}(\xi-\zeta_n^*)/(\xi-\zeta_n)$ не обращается в нуль в области $\operatorname{Im}\xi\geqslant0$, следовательно, $\ln a_1(\xi)$ аналитичен в этой области. На вещественной оси $\ln a_1(\xi)=\ln|a(\xi)|+i\arg a_1(\xi)$, и аналитичность $\ln a_1(\xi)$ дает

$$\arg a_1(\xi)=-\frac{1}{\pi}P\int\frac{\ln|a(\xi')|\,d\xi'}{\xi'-\xi},$$

но

$$\arg a_1(\xi)=\arg a(\xi)+\frac{1}{i}\sum_{n=1}^{N}\ln\frac{\xi-\zeta_n^*}{\xi-\zeta_n}.$$

Таким образом, $a(\xi)$ полностью восстанавливается по набору P_ξ $(-\infty<\xi<\infty)$ и P_n, $n=1,2,\ldots,N$. Величина $b(\xi)$ тривиально определяется из соотношения унитарности и Q_ξ:

$$b(\xi)=(1-|a(\xi)|^2)^{1/2}\exp\left(i\pi(\varkappa/2)^{1/2}Q_\xi\right).$$

Остается найти выражение для гамильтониана H через новые канонические переменные. Для этого представим u_1 из (9) в виде $u_1=\exp(-i\xi x+\Phi(x))$ и, исключая u_2 (полагая при этом $u_2(-\infty)=0$), получим уравнение для $\Phi(x)$

$$2i\xi\Phi'=|q|^2+\Phi'^2+q\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{q}\Phi'\right), \tag{19}$$

которое позволяет регулярным образом вычислять коэффициенты асимптотического разложения $\Phi(x,\xi)$ по степеням $1/\xi$: $\Phi'(x,\xi)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)/(2i\xi)^n$.

Для определения $f_n(x)$ мы имеем следующие из (19) рекуррентные соотношения

$$f_{n+1}=q(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{q}f_n\right)+\sum_{j+k=n}f_jf_k. \tag{20}$$

Функция $\ln a(\xi)$ также допускает асимптотическое разложение по степеням $1/\xi$ при $\xi\to\infty$, $\operatorname{Im}\xi\geqslant0$:

$$\ln a(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k/\xi^k.$$

Очевидно, что $C_k=(2i)^{-k}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_k(x)\,dx$. С другой стороны, величины C_k нетрудно выразить через P_ξ (16) и P_n (18):

$$(21)\qquad C_k=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\varkappa}{2}\right)^{1/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}P_\xi\xi^{k-1}\,d\xi-\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\varkappa}{2}\right)^{k}\frac{P_n^k-P_n^{*k}}{k}.$$

В силу рекуррентной формулы (20) C_k представляют собой полиномы по ψ, ψ^* и их производным по x. Приведем первые четыре C_k:

$$C_1=\frac{1}{2i}\frac{\varkappa}{2}\int|\psi|^2\,dx,$$

$$C_2=-\frac{1}{(2i)^2}\frac{\varkappa}{4}\int(\psi^*\psi_x-\psi\psi_x^*)\,dx,$$

$$C_3=-\frac{1}{(2i)^3}\frac{\varkappa}{2}\int\left(|\psi_x|^2-\frac{\varkappa}{2}|\psi|^4\right)dx,$$

$$C_4=\frac{1}{(2i)^4}\frac{\varkappa}{2}\int\left(\psi\psi^*_{xxx}+\frac{3}{2}\varkappa\psi\psi_x^*|\psi|^2\right)dx.$$

Заметим, что C_3 представляет собой с точностью до множителя гамильтониан (6) для уравнения (2).

Так как все C_k (в их числе и C_3) выражаются только через P_ξ, P_n, а преобразование от ψ, ψ^* к переменным P, Q (16), (18), очевидно, каноническое, то нелинейное уравнение (2) записывается в переменных P, Q в виде (4), т. е. эти переменные есть переменные действие-угол для рассматриваемой системы.

Вместе с уравнением (2) полностью интегрируемыми оказываются все нелинейные поля, гамильтонианы которых можно представить в виде линейных комбинаций C_k с коэффициентами, вообще говоря, зависящими от времени. Например, уравнение, порождаемое гамильтонианом C_4, представляет собой уравнение Кортевега-де-Вриза с кубической нелинейностью.

В заключение настоящего параграфа отметим, что, полагая нули $a(\xi)$ простыми, мы нимало не ограничили общности рассмотрения: как нетрудно убедиться, потенциалы $q(x)$, приводящие к кратным нулям $a(\xi)$, могут быть сколь угодно точно аппроксимированы потенциалами с близкими, но простыми нулями $a(\xi)$.

2. ПЕРЕМЕННЫЕ УГОЛ-ДЕЙСТВИЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ($\varkappa<0$)

Случай $\varkappa<0$ требует особого рассмотрения, поскольку физически интересные решения уравнения (2) с $\varkappa<0$ принадлежат к классу $|\psi|\to\mathrm{const}$ при $|x|\to\infty$. Формализм прямой и обратной задач рассеяния для таких потенциалов, развитый в [3], существенно отличается от описанного в предыдущем параграфе.

Рассмотрим задачу на собственные значения для оператора $\hat{L}$ (3): $\hat{L}\varphi=E\varphi$, и совершим замену $v_1=(p-1)^{-1/2}\exp(-iEx/(p^2-1))\varphi_1$, $v_2=(p+1)^{-1/2}\exp(-iEx/(p^2-1))\varphi_2$. Система $\hat{L}\varphi=E\varphi$ приводится ею к виду

$$(22)\qquad i\frac{\partial v_1}{\partial x}+q^*v_2=\lambda v_1,\quad \lambda=\frac{pE}{p^2-1},\quad -i\frac{\partial v_2}{\partial x}+qv_1=\lambda v_2,\quad q=\psi(p^2-1)^{-1/2}.$$

Будем предполагать, что $|q|\to 1$ при $x\to\pm\infty$. Без ограничения общности можно также считать, что $q\to 1$ при $x\to+\infty$; при этом, вообще говоря, $q(-\infty)=e^{i\alpha}$.

Роль функций Йоста для системы (22) играют решения (22) с асимптотиками

$$\text{(23)}\qquad \varphi\to e^{-i\zeta x}\begin{pmatrix}1\\ e^{i\alpha}(\zeta-\lambda)\end{pmatrix},\quad x\to-\infty,$$

$$\psi\to e^{-i\zeta x}\begin{pmatrix}1\\ \zeta-\lambda\end{pmatrix},\quad x\to+\infty.$$

где $\zeta(\lambda)=\sqrt{\lambda^2-1}$ — двузначная функция λ. Отметим, что если $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}$ — решение (22), то $\tilde{\mathbf{v}}\overset{\text{опр}}{=}\begin{pmatrix}v_2^*\\ v_1^*\end{pmatrix}$ — также решение этой системы. Функции ψ, $\tilde{\psi}$ представляют собой полный набор решений (22), поэтому $\varphi(x,\lambda)=$ $=a(\lambda,\zeta)\psi(x,\lambda)+b(\lambda,\zeta)\tilde{\psi}(x,\lambda)$. При этом, как непосредственно следует из системы (22),

$$\text{(24)}\qquad a(\lambda)=\frac{W\{\varphi,\tilde{\psi}\}}{2\zeta(\lambda-\zeta)},\qquad b(\lambda)=-\frac{W\{\varphi,\psi\}}{2\zeta(\lambda-\zeta)},$$

где через $W\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$ обозначен вронскиан двух решений (22): $W(\mathbf{u},\mathbf{v})=$ $=u_1v_2-u_2v_1$, который, очевидно, не зависит от x.

Функция $\zeta(\lambda)$ определена на двулистной римановой поверхности с разрезами $(-\infty,-1)$, $(1,+\infty)$; на верхнем листе $\operatorname{Im}\zeta>0$. Как показано в [3], функции Йоста φ, $\tilde{\psi}$ аналитичны на верхнем листе римановой поверхности; (24) гарантирует при этом аналитичность $a(\lambda)$ на этом листе. Нули $a(\lambda)$ соответствуют собственным значениям системы (22). Из самосопряженности ее следует, что они расположены на вещественной оси $-1<\lambda<1$ и являются простыми. Если $a(\lambda_n)=0$, то

$$\text{(25)}\qquad \varphi(x,\lambda_n)=b_n\tilde{\psi}(x,\lambda_n).$$

Заметим еще, что $a(\lambda,-\zeta)=a^*(\lambda,\zeta)e^{i\alpha}$, $b(\lambda,-\zeta)=b^*(\lambda,\zeta)e^{i\alpha}$ для вещественных λ, ζ. Здесь α есть фаза $q(x)$ при $x\to-\infty$, которая, как оказывается (см. [3]), полностью определяется нулями $a(\lambda)$:

$$e^{i\alpha}=\prod_{j=1}^{N}\frac{\lambda_j+i\sqrt{1-\lambda_j^2}}{\lambda_j-i\sqrt{1-\lambda_j^2}}\qquad(a(\lambda_j)=0).$$

Рассмотрение обратной задачи рассеяния для системы (22) показывает, что $q(x)$ однозначно восстанавливается по наборам $a(\lambda,\zeta)$, $b(\lambda,\zeta)$, собственным значениям λ системы (22) и соответствующим величинам b_n (см. (25)).

Введение канонических переменных, связанных с матрицей рассеяния системы (22), осуществляется совершенно аналогично тому, как это было сделано в предыдущем параграфе. Вычисление вариационных производных от элементов матрицы рассеяния производится на основе представления (24). Детали вычислений практически не отличаются от приведенных выше; поэтому мы их опускаем.

Оказывается, что скобки Пуассона (7) величин

$$
(26)\qquad P_\lambda=\frac{1}{\varkappa}\ln|a(\lambda,\zeta)|^2,\qquad Q_\lambda=-\frac{2}{\pi}\arg b_\lambda,
$$

$$
P_n=\lambda_n,\qquad Q_n=\frac{1}{\varkappa}\ln\frac{1}{b_n}
$$

есть $\{P_\lambda, P_{\lambda'}\}=\{Q_\lambda Q_{\lambda'}\}=0$, $\{P_\lambda, Q_{\lambda'}\}=\delta_{\lambda-\lambda'}$. Здесь $\delta_{\lambda-\lambda'}$ есть $\delta(\lambda-\lambda')$ для непрерывного спектра и символ Кронеккера для дискретного. Значения $a(\lambda, \zeta)$ и $b(\lambda, \zeta)$ в (26) берутся на тех границах разреза в λ-плоскости, на которых знак $\zeta(\lambda)$ совпадает со знаком λ. Вся матрица рассеяния очевидным образом восстанавливается по набору P, Q.

Интегралы движения системы (2) получаются, как и в случае $\psi\to 0$ при $|x|\to\infty$, разложением $\ln a(\lambda)$ по степеням $1/\lambda$, $\operatorname{Im}\lambda\geqslant 0$. Они имеют вид $I_n=\int\limits_{-\infty}^{\infty}[f_n(x)-f_n(\infty)]\,dx$, где f_n определяются из рекуррентных соотношений (20).

3. ПОЛНАЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ-ВРИЗА

Применим развитый выше подход к уравнению (1). Это уравнение может быть представлено в виде

$$
u_t=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H}{\delta u(x)},
$$

где $H=\int(u_x^2/2-u^3)\,dx$. Скобки Пуассона имеют поэтому вид

$$
\{\alpha,\beta\}=-\frac{1}{2}\int\left[\frac{\delta\alpha}{\delta u}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta\beta}{\delta u}-\frac{\delta\beta}{\delta u}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta\alpha}{\delta u}\right]dx.
$$

Рассмотрим далее задачу рассеяния для одномерного оператора Шредингера

$$
(27)\qquad \frac{d^2\psi}{dx^2}+u(x)\psi+k^2\psi=0.
$$

Все упоминаемые ниже факты относительно прямой и обратной спектральных задач для оператора (27) можно найти в [10]. Решения (27) с асимптотиками

$$
\varphi\simeq e^{-ikx}\quad\text{при } x\to-\infty,
$$

$$
\psi\simeq e^{ikx}\quad\text{при } x\to+\infty
$$

(функции Йоста) аналитичны в верхней полуплоскости комплексной переменной k. На вещественной оси

$$
(28)\qquad \psi=a_k\varphi^*+b_k\varphi,
$$

$$
a_k=\frac{\varphi\psi_x-\psi\varphi_x}{2ik},\qquad b_k=\frac{\varphi^*\psi_x-\psi\varphi_x^*}{2ik},
$$

откуда видно, что $a(k)$ аналитична в верхней полуплоскости k. Соотношение унитарности для матрицы рассеяния дает $|a_k|^2-|b_k|^2=1$. Нули $a(k)$ расположены на мнимой оси, им соответствуют собственные значения задачи (27). В них $\psi(x, i\varkappa_n)=b_n\varphi(x, i\varkappa_n)$. Роль соотношения (15) играет в рассматриваемом случае тождество

$$(u_1v_1)\frac{\partial}{\partial x}(u_2v_2)-(u_2v_2)\frac{\partial}{\partial x}(u_1v_1)=$$

$$=\frac{1}{k_1^2-k_2^2}\frac{\partial}{\partial x}\{(u_1u_{2x}-u_{1x}u_2)(v_1v_{2x}-v_2v_{1x})\},$$

где u_1, v_1; u_2, v_2 — произвольные пары решений (27) с $k^2=k_1^2$ и k_2^2, соответственно.

Вариационные производные от a_k, b_k вычисляются исходя из представления (28) аналогично тому, как это было сделано в первом параграфе. При этом интегралы, определяющие скобки Пуассона, оказываются, как и выше, интегралами от полных производных, что позволяет легко найти скобки между всеми элементами матрицы рассеяния. Непосредственным вычислением можно далее убедиться, что величины

$$(29)\qquad P_k=\frac{k}{\pi}\ln|a_k|^2,\qquad Q_k=\arg b_k,$$

$$P_n=\varkappa_n^2,\quad Q_n=ib_n\frac{\partial}{\partial k}a(k)\,|_{k=i\varkappa_n},\qquad n=1, 2, \ldots, N,$$

удовлетворяют каноническим перестановочным соотношениям.

Асимптотическое разложение $\ln a_k$ по степеням $1/k$ имеет своими коэффициентами интегралы от некоторых полиномов по $u(x)$ и ее производным, которые находятся непосредственно из (27). С другой стороны, эти коэффициенты очевидным образом выражаются только через P_k, P_n, т. е. возникает ситуация, совершенно аналогичная рассмотренной в первом параграфе. Один из этих полиномов совпадает с гамильтонианом для уравнения (1), в чем и выражается полная интегрируемость последнего. Поскольку рассуждения настоящего абзаца ничем не отличаются от приведенных в [8], то мы опускаем соответствующие выкладки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенные выше результаты дают решение проблемы интегрируемости уравнений (1), (2), рассматриваемых на бесконечном интервале $-\infty<x<+\infty$, однако они не применимы на конечных интервалах с какими-либо граничными условиями. В этом случае вопрос об интегрируемости систем (1), (2) остается открытым. Можно, тем не менее, привести некоторые соображения в пользу интегрируемости рассматриваемых полей на конечных интервалах.

Рассмотрим, например, нелинейное уравнение Шредингера на интервале $[0, l]$ с периодическими граничными условиями. Нетрудно убедиться (см. [2]), что это уравнение тождественно следующему операторному соотношению:

$$(30)\qquad \frac{\partial\hat{L}}{\partial t}=i[\hat{L},\hat{A}],$$

где $\hat{L}$ — одномерный оператор Дирака (3), а оператор $\hat{A}$ имеет вид

$$\hat{A}=-p\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\begin{pmatrix} |\psi|^2/(1+p), & i\psi_x^* \\ -i\psi_x, & -|\psi|^2/(1-p) \end{pmatrix}.$$

Соотношение (30) и эрмитовость оператора $\hat{L}$ (3) гарантируют при этом сохранение во времени собственных чисел задачи на собственные значения для оператора $\hat{L}$:

(31) $$\hat{L}\varphi_n=\lambda_n\varphi_n,\quad \varphi_n(0)=\varphi_n(l),\quad n=1, 2,\ldots$$

Таким образом, мы имеем счетный набор интегралов движения системы (2). Покажем, что все λ_n «коммутируют» между собой. Выражения для $\delta\lambda_n/\delta\psi$, $\delta\lambda_n/\delta\psi^*$ найдем непосредственно из (31):

$$\delta\lambda_n=\int_0^l\{(\varphi_n)_1^*\delta\psi^*(\varphi_n)_2+(\varphi_n)_2^*\delta\psi(\varphi_n)_1\}dx$$

(предполагается, что $\|\varphi\|=\left(\int_0^l\varphi^+\varphi dx\right)^{1/2}=1$; сохранения во времени такой нормировки легко добиться). Таким образом, $\delta\lambda_n/\delta\psi=(\varphi_n)_2^*(\varphi_n)_1$, $\delta\lambda_n/\delta\psi^*=$ $=(\varphi_n)_1^*(\varphi_n)_2$. Вычисляя теперь скобки Пуассона (7) величин λ_n, λ_m и используя аналог соотношения (15), убеждаемся, что для периодической задачи (31) $\{\lambda_n, \lambda_m\}=0$.

Для динамической системы с конечным числом степеней свободы существование коммутирующих между собой интегралов движения в количестве, равном числу степеней свободы, равносильно полной интегрируемости этой системы (теорема Лиувилля). В рассматриваемом случае число степеней свободы счетно; существование счетного набора законов сохранения является, по крайней мере, необходимым условием интегрируемости.

Совершенно аналогичные утверждения можно обосновать и для уравнения Кортевега-де-Вриза (1).

Институт ядерной физики
Сибирского отделения
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
16 апреля 1973 г.

Литература

[1] C. Gardner, G. Green, M. Kruskal, R. Miura. Phys. Rev. Lett., **19**, 1095, 1967.
[2] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат. ЖЭТФ, **61**, 118, 1971.
[3] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат. ЖЭТФ (в печати).
[4] E. P. Gross. Phys. Rev., **106**, 161, 1957.
[5] Л. П. Питаевский. ЖЭТФ, **40**, 646, 1961.
[6] P. L. Kelley. Phys. Rev. Lett., **15**, 1005, 1965.
[7] В. И. Карпман. Письма ЖЭТФ, **6**, 329, 1967.
[8] В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев. Функциональный анализ, **5**, вып. 4, 18, 1971.
[9] Л. А. Тахтаджян. Дипломная работа, ЛГУ, 1972.
[10] В. А. Марченко. Спектральная теория операторов Штурма – Лиувилля, «Наукова думка», Киев, 1972.

ON COMPLETE INTEGRABILITY OF THE NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION

V. E. Zakharov, S. V. Manakov

The nonlinear Schrödinger equation considered as a Hamilton system is shown to be completely integrable. Transition to the angle and action variables is performed with the aid of the scattering matrix corresponding to the one-dimensional Dirac operator.
