Письма в ЖЭТФ, том 18, вып. 7, стр. 413 – 417　　　　*5 октября 1973 г.*

О РЕЗОНАНСНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

В. Е. Захаров, С. В. Манаков

1. В различных физических ситуациях встречается задача о резонансном взаимодействии трех волновых пакетов с частотами ω_1, ω_2, ω_3 и волновыми векторами $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_3$. При этом возможны два типа вза-

имодействия – распадное и взрывное. При распадном взаимодействии частоты и волновые векторы пакетов удовлетворяют соотношениям

$$\omega_1 = \omega_2 + \omega_3, \quad \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 \tag{1}$$

а комплексные огибающие u_1, u_2, u_3 пакетов в одномерной среде без диссипации подчиняются системе уравнений (см., например, [1])

$$\begin{aligned} u_{1t} + v_1 u_{1x} &= iqu_2 u_3, \\ u_{2t} + v_2 u_{2x} &= iqu_1 u_3^*, \\ u_{3t} + v_3 u_{3x} &= iqu_1 u_2^*. \end{aligned} \tag{2}$$

"Взрывные" взаимодействия волновых пакетов (см., например, [2]) осуществляются в среде, в которой могут существовать волны с отрицательной энергией. Волновые векторы и частоты волн удовлетворяют при этом соотношениям

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0, \quad \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = 0, \tag{3}$$

а комплексные огибающие подчиняются уравнениям

$$\begin{aligned} u_{1t} + v_1 u_{1x} &= iu_2^* u_3^*, \\ u_{2t} + v_2 u_{2x} &= iu_1^* u_3^*, \\ u_{3t} + v_3 u_{3x} &= iu_1^* u_2^*. \end{aligned} \tag{4}$$

Уравнения (2), (4) изучены для случая взаимодействия монохроматических волн, когда $u_i(x,t) = u_i(t)$. Более интересна, однако, задача о взаимодействии ограниченных по длине волновых пакетов, прямо отвечающая экспериментальной ситуации в нелинейной оптике и физике плазмы.

В последние годы в связи с задачами физики волн в нелинейных средах был открыт метод обратной задачи рассеяния, позволяющий интегрировать некоторые нелинейные уравнения в частных производных без предположения о малости нелинейности. Этот метод применим в том случае, когда можно построить пару нелинейных операторов $\hat{L}$ и $\hat{A}$ такую, что исследуемое уравнение тождественно операторному соотношению

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial t} = i[\hat{L}, \hat{A}]. \tag{5}$$

Интегрирование исходного уравнения сводится при этом к решению прямой и обратной спектральных задач для оператора $\hat{L}$. Метод обратной задачи рассеяния использовался для уравнения Кортевега – де Вриза [3 – 6], для "параболического" уравнения двумерной самофокусировки [7, 8], для уравнения нелинейной струны [9].

Метод обратной задачи применим и к системам (2), (4). С ними связаны дифференциальные матричные операторы

$$\hat{L} = ia_i\,\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial x} + K_{ij}(x)\,, \qquad \hat{A} = ib_i\,\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{b_i - b_j}{a_i - a_j}K_{ij}\,, \tag{6}$$

$$i, j = 1,2,3; \; a_1 > a_2 > a_3, \quad K_{ii} = 0.$$

Подставляя $\hat{L}$ и $\hat{A}$ в (5), получим

$$(a_i - a_j)\left(\frac{\partial K_{ij}}{\partial t} + v_{ij}\frac{\partial K_{ij}}{\partial x}\right) = i q_0 \sum_k e_{ikj} K_{ik} K_{kj}\,. \tag{7}$$

Здесь $v_{ij} = \dfrac{a_i b_j - a_j b_i}{a_i - a_j}$, $q_0 = (a_1 - a_2)v_{12} + (a_2 - a_3)v_{23} + (a_3 - a_1)v_{31}$, e_{ikj} – полностью антисимметричный тензор третьего ранга. Если положить $K_{ij} = K^*_{ji}$, $K_{12} = (q/q_0)\sqrt{(a_2 - a_3)(a_1 - a_3)}u_2$, $K_{13} = (q/q_0)\sqrt{(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)}u_1$, $K_{23} = (q/q_0)\sqrt{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}u_3$; $v_{13} = v_1$, $v_{23} = v_3$, $v_{12} = v_2$, то система (7) переходит в систему (2); при аналогичной подстановке, но если $K_{12} = -K^*_{21}$, $K_{31} = K^*_{13}$, $K_{23} = -K^*_{32}$, система (7) переходит в систему (4).

2. Для монохроматических волн система (4) имеет решения, обращающиеся в бесконечность за конечное время (например $u_1 = u_2 = u_3 = \dfrac{1}{q}\dfrac{e^{i(\pi/6)}}{t_0 - t}$). При этом обращение в бесконечность происходит одновременно на всей прямой $-\infty < x < \infty$. Метод обратной задачи позволяет найти счетный набор семейств точных решений системы (4), описывающих развитие взрывной неустойчивости в ограниченных пакетах. Простейшее из таких решений имеет вид (a_1, $a_2 > 0$, $a_3 < 0$)

$$K_{12} = -\frac{2\eta}{\sqrt{a_1|a_2|}}\,\frac{e^{\beta_1\eta(x - v_2 t - x_2)}}{\Delta}; \quad K_{13} = -\frac{2\eta}{\sqrt{a_1|a_3|}}\,\frac{e^{\beta_2\eta(x - v_3 t - x_3)}}{\Delta}, \tag{8}$$

$$\Delta = 1 - e^{2\beta_1\eta(x - v_2 t - x_2)} - e^{2\beta_2\eta(x - v_3 t - x_3)}; \quad K_{23} = \frac{a_1}{2\eta}K_{12}K_{13}\Delta\,;$$

$\eta > 0$; x_2, x_3 – произвольные константы, $\beta_1 = \dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_2}$, $\beta_2 = \dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_3}$.

Если $v_2 > v_3$ то решение (8) обращается в бесконечность в некоторой точке в конечный момент времени. Этим же свойством обладают и другие точные решения (с формальной точки зрения они аналогичны N-солитонным решениям уравнения Кортевега – де Вриза [5, 6]). Анализ этих решений приводит к выводу о том, что результатом развития взрывной неустойчивости в среде является образование "коллапсов" – локальных особенностей волнового поля. Если волновые пакеты являются протяженными (характерная длина $L >> {}^{1}/_{qu}$, где u – характерная амплитуда), то число таких коллапсов велико и они расположены беспорядочным образом. При некоторых специальных начальных условиях возможно "слипание" точек коллапса и даже образование целых протяженных отрезков коллапса.

Важно отметить, что включение нелинейных сдвигов частоты не ограничивает взрывной неустойчивости, а лишь смещает точки коллапса. Ограничение амплитуды может происходить за счет нелинейных диссипативных эффектов.

3. Для "распадной" системы (2) метод обратной задачи позволяет эффективно решать задачу о столкновении волновых пакетов, т. е. о связи их асимптотических при $t \to \pm\infty$ состояний. При этом оказалось, что физическая картина рассеяния пакетов существенно зависит от соотношения их скоростей. Если скорость волны 1 (которую мы будем называть накачкой) не является экстремальной – такая ситуация осуществляется, например, при распаде капиллярной волны на поверхности жидкости на капиллярную и гравитационную – то существенного перераспределения энергии между разными волнами не происходит. Этот эффект особенно сильно проявляется для больших и плавных пакетов ($Lu >> 1/q$) – для них с экспоненциальной точностью имеет место сохранение величин $I_i = \int_{-\infty}^{\infty} |u_i|^2 dx$. Столкновение пакетов приводит, однако, к полному изменению их формы и, в частности, к уширению их спектров до величины порядка qu. При этом форма образующихся пакетов неустойчива по отношению к малым изменениям форм сталкивающихся волн. Следует отметить, что метод обратной задачи и в этом случае позволяет множество точных решений системы (2), асимптотически распадающихся при $t \to \pm\infty$ на невзаимодействующие пакеты, для интегральных интенсивностей которых выполняется *строгое* равенство $I_i(-\infty) = I_i(+\infty)$.

Если же скорость накачки экстремальна (что осуществляется в большинстве экспериментальных ситуаций, в частности при вынужденном рассеянии Мандельштам – Бриллюэна электромагнитных волн в плазме), то картина рассеяния пакетов совершенно иная. Если, например, $v_2 < v_3 < v_1$, то при столкновении "больших" пакетов волн 1 и 3 возможен полный (с точностью до экспоненциально малых членов) распад накачки, что и имеет место при выполнении условия

$$\frac{max|u_3|^2}{max|u_1|^2} > \frac{v_1 - v_2}{v_3 - v_2} . \tag{9}$$

При этом рождающийся пакет волн 2 имеет спектральную ширину $\Delta k \sim q[(v_1 - v_3)/(v_1 - v_2)]^{1/2}[(max|u_1|)/(v_3 - v_2)]$ Подчеркнем, что условие (9) (которое, однако, справедливо лишь для достаточно гладких пакетов) не содержит характерных размеров пакетов и "константы взаимодействия" q. Отметим также, что перекачка энергии происходит (при столкновении "больших" пакетов) только в указанной ситуации, т. е. когда во "входном канале" имеются волна накачки и вторичная волна, скорость которой не экстремальна (в приведенном примере это волна 3). При столкновении же "больших" пакетов 1 и 2 или 2 и 3 перераспределения энергии не происходит.

В заключение заметим, что, как и другие системы, интегрируемые методом обратной задачи, система (2) имеет бесконечный набор интегралов движения, которые просто связаны с матрицей рассеяния оператора $\hat{L}$ (6).

Институт ядерной физики
Академии наук СССР
Сибирское отделение

Поступила в редакцию
3 августа 1973 г.

Литература

[1] Н.Бломберген. Нелинейная оптика. М., изд. Мир, 1966.

[2] M.Rosenbluth, B.Coppi, R.Sudan. Proc. 3 rd Intern. Conf. Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. Novosibirsk, 1968.

[3] M.Kruskal, R.Miura, C.Gardner, N.Zabusky. Phys. Rev. Lett., 19, 1095, 1967.

[4] P.D.Lax. Comm. on Pure and Appl. Math., 21, 467, 1968.

[5] В.Е.Захаров. ЖЭТФ, 60, 993, 1971.

[6] M.Wadati, M.Toda. J. of Phys. Soc of Japan, 32, 1403, 1972.

[7] В.Е.Захаров, А.Б.Шабат. ЖЭТФ, 61, 119, 1971.

[8] В.Е.Захаров, А.Б.Шабат. ЖЭТФ, 64, 1627, 1973.

[9] В.Е.Захаров. ЖЭТФ, 65, вып. 7, 1973.