Листок 1.

Одномерный периодический оператор Шредингера.

В данной серии задач будем рассматривать одномерный периодический стационарный оператор Шредингера с гладким вещественным периодическим потенциалом.

$$L = -\partial_x^2 + u(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad u(x) \in \mathbb{R}, \quad u(x+\Pi) = u(x).$$

Обозначим $\Psi_1(E,x)$, $\Psi_2(E,x)$ произвольную пару линейно независимых решений уравнения

$$L\Psi(E,x) = E\Psi(E,x). \tag{1}$$

Поскольку оператор L второго порядка, то $\Psi_1(E,x)$ и $\Psi_2(E,x)$ образуют базис решений. Поскольку при сдвиге на Π оператор переходит в себя, сдвинутые решения $\Psi_1(E,x+\Pi)$ и $\Psi_2(E,x+\Pi)$ являются линейными комбинациями исходных

$$\begin{bmatrix} \Psi_1(E,x+\Pi) \\ \Psi_2(E,x+\Pi) \end{bmatrix} = \hat{T}(E) \begin{bmatrix} \Psi_1(E,x) \\ \Psi_2(E,x) \end{bmatrix}, \quad \hat{T}(E) = \begin{bmatrix} t_{11}(E) & t_{12}(E) \\ t_{21}(E) & t_{22}(E) \end{bmatrix}$$

Матрица $\hat{T}$ называется матрицей монодромии. Ее конкретный вид, конечно же, зависит от выбора базиса решений. Отметим, что в данном определении E может быть как вещественным, так и комплексным числом.

Наша ближайшая цель – исследование задачи о нахождении ограниченных на всей прямой решений уравнения (1).

1. Докажите, что $\det \hat{T}(E) \equiv 1$ для всех $E \in \mathbb{C}$.

2. Докажите, что уравнение 1 имеет ограниченные на всей прямой решения тогда и только тогда, когда $\mathrm{t}r\,\hat{T} = \pm 2$

3. Обозначим $H_\varkappa$ пространство комплекснозначных функций на вещественной прямой с условием периодичности

$$f(x+\Pi) = \varkappa f(x), \quad \varkappa \in \mathbb{C}, \quad \varkappa \neq 0. \tag{2}$$

   Пусть $|\varkappa| = 1$. Если функции $f_1(x), f_2(x) \in H_\varkappa$ достаточно хорошие (измеримые и на любом конечном отрезке $[a,b]$ $f_1(x), f_2(x) \in$

$L^2([a,b]))$, то естественно определить их скалярное произведение формулой:

$$< f_1, f_2 >= \int\limits_0^{\Pi} f_1(x)\overline{f_2}(x)dx. \tag{3}$$

Предположим, что $f_1(x), f_2(x) \in H_{\varkappa}$ и дважды непрерывно дифференцируемы. Проверьте свойство симметрии оператора L:

$$< Lf_1, f_2 >=< f_1, Lf_2 > .$$

4. Докажите, что если $\Psi(x) \in H_{\varkappa}$, $|\varkappa| = 1$ и $L\Psi(x) = E\Psi(x)$, то E – вещественное число.

5. Постройте контрпример к предыдущей задаче в предположении, что $u(x)$ – вещественная, периодическая, но **сингулярная** функция.

6. Докажите, что при всех $\varkappa$ таких, что $|\varkappa| = 1$ оператор L неограничен.