Краткий конспект лекций 9-10.
14, 20 апреля 2004 г.

Рассмотрим следующее уравнение в частных производных

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n},\, q_1, \dots, q_n,\, t\right) = 0 \tag{1}$$

относительно неизвестной функции $S(q_1, \dots, q_n,\, t)$. Оно называется **уравнением Гамильтона-Якоби** для гамильтониана

$$H(p_1, \dots, p_n,\, q_1, \dots, q_n,\, t).$$

Лемма 1 *Пусть $S(q_1, \dots, q_n,\, t)$ - решение уравнения (1). Положим*

$$p_i(q_1, \dots, q_n,\, t) = \frac{\partial S}{\partial q_i}. \tag{2}$$

Тогда если функции $q_i(t)$ удовлетворяет системе

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q_1, \dots, q_n,\, t). \tag{3}$$

Тогда функции $q_i(t), p_i(t)$ удовлетворяют уравнениям Гамильтона

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{4}$$

Лемма 2 *Пусть $S(q_1, \dots, q_n,\, t, \tau)$ - решение уравнения (1), зависящее от параметра τ. Тогда функция*

$$I = \frac{\partial S}{\partial \tau} \tag{5}$$

является первым интегралом системы (3).

Для того, чтобы связь между уравнением в частных производных (1) и динамической системой (4) не казалась трюком, заметим, что (4) - это ни что иное, как система для характеристик уравнения первого порядка (1). На примере общего уравнения

$$S_t + H(t, q, S, S_q) = 0 \tag{6}$$

с двумя (чтобы избежать обилия индексов) независимыми переменными напомним, как выписывается уравнение для характеристик. Очевидно, что дифференцирование по независимой переменной q функций, зависящих от конечного числа переменных

$$t, \quad q, \quad S, \quad S_1 = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad \dots, \quad S_i = \frac{\partial^i S}{\partial q^i}, \quad \dots$$

задается векторным полем

$$D_q = \frac{\partial}{\partial q} + \sum_{i=0}^{\infty} S_{i+1} \frac{\partial}{\partial S_i}. \tag{7}$$

Нетрудно проверить, что дифференцирование по переменной t таких же функций (при условии, что все частные производные по t заменяются в силу уравнения (6)) задается векторным полем

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=0}^{\infty} D_q^i(H) \frac{\partial}{\partial S_i} = \frac{\partial}{\partial t} - H \frac{\partial}{\partial S} - \Big(H_q + S_1 H_S + S_2 H_{S_1}\Big) \frac{\partial}{\partial S_1} + \dots \tag{8}$$

Для каждого из векторных полей коэффициент при $\frac{\partial}{\partial S_i}$ зависит от переменной S_{i+1}. Однако, с точностью до множителя существует единственная линейная комбинация этих векторных полей, такая что ее коэффициенты при $\frac{\partial}{\partial S_i}$ при $i > 0$ зависят только от переменных $t, q, S, \dots, S_i$. Эта линейная комбинация и является характеристическим векторным полем

$$X = D_t + H_{S_1} D_q = \frac{\partial}{\partial t} + H_{S_1} \frac{\partial}{\partial q} - (H - S_1 H_{S_1}) \frac{\partial}{\partial S} - \Big(H_q + S_1 H_S\Big) \frac{\partial}{\partial S_1} + \dots$$

Ограничивая это векторное поле на переменные t, q, S, S_1, приходим к динамический системе для характеристик

$$\frac{dq}{dt} = H_{S_1}, \qquad \frac{dS}{dt} = -H + S_1 H_{S_1}, \qquad \frac{dS_1}{dt} = -H_q - S_1 H_S.$$

В случае, когда H не зависит явно от S, первое и третье уравнения системы представляют собой уравнения Гамильтона, где $p = S_1$. Второе же уравнение

$$\frac{dS}{dt} = -H + p\,\frac{dq}{dt} = \mathcal{L}$$

является в механике определением функции действия S.

Если гамильтониан H не зависит явно от t, то разумно рассматривать решения уравнения (1) вида $S = -ct + \bar{S}(q_1, \ldots, q_n)$, т.к. в этом случае система (3) становится автономной. В этом случае уравнение (1) редуцируется к

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, q_1, \ldots, q_n\right) = c \tag{9}$$

относительно $S = \bar{S}(q_1, \ldots, q_n)$.

Предположим, что гамильтониан H имеет следующий специальный вид

$$H = \frac{f_1(p_1, q_1) + \ldots + f_n(p_n, q_n)}{g_1(p_1, q_1) + \ldots + g_n(p_n, q_n)}. \tag{10}$$

Тогда уравнение (9) переписывается в виде

$$\sum_i f_i(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i) - c\, g_i(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i) = 0.$$

Будем искать его решения в виде

$$S = S_1(q_1) + \ldots + S_n(q_n).$$

Тогда переменные разделяются и в качестве S_i можно взять решения уравнений

$$f_i\Big(S'(q_i), q_i\Big) - c\, g_i\Big(S'(q_i), q_i\Big) = \tau_i, \tag{11}$$

где τ_i - произвольные параметры такие, что $\sum \tau_i = 0$. Разрешая (11) относительно производной, получаем уравнения вида

$$S'(q_i) = \phi_i(q_i, \tau_i)$$

Интегрируя эти тривиальные обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, находим $(n-1)$ - параметрическое решение уравнения (9). Это позволяет в квадратурах решить систему (3).

Понятно, что немногие гамильтонианы, возникшие из приложений, имеют вид (10). Однако после удачной замены переменных они могут стать таковыми. Рассмотрим в качестве примера одну из жемчужин техники разделения переменных - задачу о геодезических на эллипсоиде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a > b > c, \tag{12}$$

решенную Якоби.

Изучим соотношение

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1 \tag{13}$$

как уравнение относительно λ. Освобождаясь от знаменателей, получаем

$$\begin{gathered} P(\lambda)=\lambda^3+(x^2+y^2+z^2-a^2-b^2-c^2)\,\lambda^2+ \\ \Big(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2-(b^2+c^2)x^2-(a^2+c^2)y^2-(a^2+b^2)z^2\Big)\,\lambda+ \\ b^2c^2x^2+a^2c^2y^2+a^2b^2z^2-a^2b^2c^2=0. \end{gathered} \tag{14}$$

Легко видеть, что

$$P(a^2)=(a^2-b^2)(a^2-c^2)\,x^2>0,$$

$$P(b^2)=(b^2-a^2)(b^2-c^2)\,y^2<0,$$

$$P(c^2)=(c^2-a^2)(c^2-b^2)\,z^2>0.$$

Поэтому уравнение $P(\lambda)=0$ имеет три вещественных корня:

$$\lambda_3<c^2, \qquad c^2<\lambda_2<b^2, \qquad b^2<\lambda_1<a^2.$$

Нетрудно проверить, что

$$x^2=\frac{(a^2-\lambda_1)(a^2-\lambda_2)(a^2-\lambda_3)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},$$

$$y^2=\frac{(b^2-\lambda_1)(b^2-\lambda_2)(b^2-\lambda_3)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)},$$

$$z^2=\frac{(c^2-\lambda_1)(c^2-\lambda_2)(c^2-\lambda_3)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.$$

Таким образом, мы имеем замену координат $(x,y,z)\leftrightarrow(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$. При этом эллипс (12) является линией уровня $\lambda_3=0$.

Напомним, что если у нас имеется многообразие с метрикой

$$(ds)^2=\sum g_{ij}(\mathbf{x})dx_idx_j,$$

то геодезические - это экстремали лагранжиана

$$\mathcal{L} = \sum g_{ij}(\mathbf{x})\dot{x}_i\dot{x}_j. \tag{15}$$

Нетрудно проверить, что метрика $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$ в координатах λ_i имеет вид:

$$(ds)^2 = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}{4g(\lambda_1)}(d\lambda_1)^2 + \frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{4g(\lambda_2)}(d\lambda_2)^2 +$$

$$\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}{4g(\lambda_3)}(d\lambda_3)^2,$$

где $g(\lambda) = (a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)$. Из этой формулы мы видим, что $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ - ортогональная система координат.

На поверхности эллипсоида $\lambda_3 = 0$ имеем, согласно (15),

$$\mathcal{L} = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)\lambda_1}{4g(\lambda_1)}\dot{\lambda}_1^2 + \frac{(\lambda_2-\lambda_1)\lambda_2}{4g(\lambda_2)}\dot{\lambda}_2^2.$$

Из общих формул для обобщенных импульсов следует, что

$$p_1 = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)\lambda_1\dot{\lambda}_1}{2g(\lambda_1)}, \qquad p_2 = \frac{(\lambda_2-\lambda_1)\lambda_2\dot{\lambda}_2}{2g(\lambda_2)}, \tag{16}$$

откуда

$$H = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\Big(\frac{g(\lambda_1)}{\lambda_1}p_1^2 - \frac{g(\lambda_2)}{\lambda_2}p_2^2\Big).$$

Уравнение (9) имеет вид

$$\frac{g(\lambda_1)}{\lambda_1}\Big(\frac{\partial S}{\partial\lambda_1}\Big)^2 - \frac{g(\lambda_2)}{\lambda_2}\Big(\frac{\partial S}{\partial\lambda_2}\Big)^2 = c(\lambda_1-\lambda_2).$$

Разделяя переменные, находим

$$\frac{g(\lambda_i)}{\lambda_i}\Big(\frac{dS_i}{d\lambda_i}\Big)^2 - c\lambda_i = \tau,$$

где $S = S_1(\lambda_1)+S_2(\lambda_2)$. Приравняем выражения (2) и (16) для импульсов и окончательно получим

$$\frac{d\lambda_1}{\sqrt{R(\lambda_1)}} = \frac{2dt}{\lambda_1-\lambda_2}, \qquad \frac{d\lambda_2}{\sqrt{R(\lambda_2)}} = \frac{2dt}{\lambda_2-\lambda_1},$$

где

$$R(x) = \frac{g(x)\,(cx+\tau)}{x}.$$

Обычно эти соотношения записывают в виде

$$\frac{d\lambda_1}{\sqrt{R(\lambda_1)}} + \frac{d\lambda_2}{\sqrt{R(\lambda_2)}} = 0, \qquad \frac{\lambda_1\,d\lambda_1}{\sqrt{R(\lambda_1)}} + \frac{\lambda_2\,d\lambda_2}{\sqrt{R(\lambda_2)}} = 2\,dt.$$

Эти уравнения могут быть линеаризованы на якобиане соответствующей гиперэллиптической кривой с помощью преобразования Абеля. Ответ записывается в тэта-функциях на этой кривой.

Список литературы

[1] А.В. Борисов, И.С. Мамаев “Динамика твердого тела”. НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001.