Лекция 7.
23 марта 2004 г.

На прошлой лекции мы доказали, что пара гамильтоновых структур на пространстве функций одной переменной:

$$\{u(x), u(y)\}_1 = \delta'(x-y), \quad \{u(x), u(y)\}_2 = -\frac{1}{4}\delta'''(x-y) + \frac{1}{2}(u(x)+u(y))\delta'(x-y) \tag{1}$$

согласованы, т.е. для всех λ скобка

$$\{u(x), u(y)\}_\lambda = \{u(x), u(y)\}_2 - \lambda\{u(x), u(y)\}_1 \tag{2}$$

удовлетворяет тождеству Якоби. Убедимся, что это свойство позволяет построить бесконечный набор попарно коммутирующих гамильтонианов. Данная схема носит достаточно общий характер, однако на мой взгляд лучше детально разобрать один пример.

Предположим, что можно построить функцию Казимира скобки $\{,\}_\lambda$ в виде формального рядя

$$J(\lambda) = J_0 + J_1/\lambda + J_2/\lambda^2 + \dots. \tag{3}$$

Для любого функционала F согласно определению функции Казимира мы имеем:

$$\{F, J(\lambda)\}_\lambda = 0, \tag{4}$$

т.е.

$$\{F, J_0 + J_1/\lambda + J_2/\lambda^2 + \dots\}_2 - \lambda\{F, J_0 + J_1/\lambda + J_2/\lambda^2 + \dots\}_1 = 0. \tag{5}$$

Приравнивая в (5) коэффициенты при одинаковых степенях λ мы получаем:

$$\begin{aligned}
\{F, J_0\}_1 &= 0 \\
\{F, J_0\}_2 &= \{F, J_1\}_1 \\
\{F, J_1\}_2 &= \{F, J_2\}_1 \\
\{F, J_2\}_2 &= \{F, J_3\}_1 \\
&\dots
\end{aligned}$$

Поскольку эти соотношения имеют место тождественно по F, мы получаем:

Лемма 1 *Если скобка (2) допускает оператор Казимира вида (3), то:*

1. *Функционал J_0 является Казимиром скобки $\{,\}_1$.*

2. *Для всех $k \geq 0$ гамильтонов поток, порождаемый функционалом J_k в скобке $\{,\}_2$ совпадает с гамильтоновым потоком, порождаемый функционалом J_{k+1} в скобке $\{,\}_1$.*

Ключевую роль в данной конструкции играет следующее утверждение (см. [2]):

Лемма 2 *Пусть J_k – те же функционалы, что и в предыдущей лемме. Тогда для всех k, l*

$$\{J_k, J_l\}_1 = \{J_k, J_l\}_2 \equiv 0. \tag{6}$$

Доказательство.

$$\{J_k, J_l\}_1 = \{J_{k-1}, J_l\}_2 = \{J_{k-1}, J_{l+1}\}_1 = \ldots = \{J_0, J_{l+k}\}_1 = 0. \tag{7}$$

Второе утверждение проверяется совершенно аналогично.

Нам осталось проверить, что оператор Казимира вида (3) существует, и, более того, все коэффициенты J_k – локальные функционалы вида

$$J_k = \int \rho_k(u, u', u'', \ldots, u^{(N_k)})dx. \tag{8}$$

Распишем условие того, что $J(\lambda)$ – функция Казимира скобки $\{,\}_\lambda$

$$\begin{aligned} \{J(\lambda), u(x)\}_\lambda = 0 = \int \frac{\delta J(\lambda)}{\delta u(y)} \left(-\frac{1}{4}\delta'''(y-x) + \frac{1}{2}(u(x)+u(y)-2\lambda)\delta'(y-x)\right) dy = \\ = \frac{1}{4}\left(\partial_x^3 - 4(u(x)-\lambda)\partial_x^3 - 2u'(x)\right)\frac{\delta J(\lambda)}{\delta u(x)} \end{aligned} \tag{9}$$

Поскольку $J(\lambda)$ имееет нулевую скобку со всеми $u(x)$ мы получаем следующее уравнение:

$$\mathcal{M}\frac{\delta J(\lambda)}{\delta u(x)} = 0, \quad \text{где} \;\; \mathcal{M} = \partial_x^3 - 4(u(x)-\lambda)\partial_x^3 - 2u'(x). \tag{10}$$

Его решение разобъём на два этапа:

1. Построим решение уравнения
$$\mathcal{M}\Phi(\lambda,x)=0 \tag{11}$$
в виде формального ряда по $1/\lambda$.

2. Убедимся, что функция $\Phi(\lambda,x)$ является вариационной производной достаточно хорошего фукнционала.

Далее можно было бы ограничиться формальным вычислением, как это сделано в [2]. Однако представляется более интересным расказать, что лежит за этими вычислениями. Поэтому мы выберем изложение с несколько большим объёмом анализа.

Шаг 1 основан на следующей Лемме:

Лемма 3 *Пусть $\Psi_1=\Psi_1(\lambda,x)$, $\Psi_2=\Psi_2(\lambda,x)$ – пара решений уравнения Шредингера*
$$(-\partial_x^2+u(x))\Psi=\lambda\Psi \tag{12}$$
Тогда их произведение $\Psi_1\Psi_2$ удовлетворяет уравнению 3-го порядка
$$(\Psi_1\Psi_2)'''-4(u(x)-\lambda)(\Psi_1\Psi_2)'-2u'(x)(\Psi_1\Psi_2)=0 \tag{13}$$

Доказательство. Из (12) следует, что
$$\Psi''_{1,2}=(u(x)-\lambda)\Psi_{1,2},\quad \Psi'''_{1,2}=(u(x)-\lambda)\Psi'_{1,2}+u'(x)\Psi_{1,2}. \tag{14}$$

По формуле Лейбница
$$(\Psi_1\Psi_2)'''=\Psi_1'''\Psi_2+3\Psi_1''\Psi_2'+3\Psi_1'\Psi_2''+\Psi_1\Psi_2'''=4(u(x)-\lambda)(\Psi_1'\Psi_2+\Psi_1\Psi_2')+2u'(x)\Psi_1\Psi_2 \tag{15}$$

Наши гамильтонианы естественно определены для потенциалов $u(x)$, достаточно быстро убывающих на бесконечности. Пусть $\lambda=k^2$, $\operatorname{Im}k>0$. Обозначим $\Psi_1(k,x)$ решение с асимптотикой
$$\Psi_1(k,x)=(1+o(1))e^{-ikx}\ \text{ при }\ x\to-\infty \tag{16}$$
(оно существует и единственно, см. например, [1]). Обозначим $a(k)$ коэффициент при e^{-ikx} на $+\infty$:
$$\Psi_1(k,x)=(a(k)+o(1))e^{-ikx}\ \text{ при }\ x\to+\infty. \tag{17}$$

Если $|k|$ достаточно велик, то $a(k) \neq 0$. Кроме того, $\Psi_1(k,x)$ допускает асимптотическое представление при $|k| \to \infty$

$$\Psi_1(k,x) = e^{-ikx + \int\limits_{-\infty}^{x} \chi(k,\tilde{x})d\tilde{x}}, \tag{18}$$

где

$$\chi(k,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n(x)}{(2ik)^n}. \tag{19}$$

Обозначим $\Psi_2(k,x)$ решение с асимптотикой

$$\Psi_2(k,x) = (1/a(k) + o(1))e^{ikx} \quad \text{при} \quad x \to \infty. \tag{20}$$

Из (17), (20) следует, что

$$W(\Psi_1, \Psi_2) = \Psi_1 \Psi_2' - \Psi_1' \Psi_2 = 2ik. \tag{21}$$

Убедимся, что

$$\frac{\delta \ln a(k)}{\delta u(x)} = \frac{-1}{2ik} \Psi_1(k,x)\Psi_2(k,x). \tag{22}$$

Действительно, пусть мы проварииировали потенциал

$$u(y) \to u(y) + \epsilon\delta(y-x), \quad \epsilon \ll 1. \tag{23}$$

Тогда для вариации $\Psi_1(k,x)$ имеем:

$$-(\delta\Psi_1(k,y))'' + (u(y) - k^2)\delta\Psi_1(k,y) = -\delta(y-x)\Psi_1(k,x) \tag{24}$$

Тем самым, справа и слева от точки x функция $\delta\Psi_1$ удовлетворяют уравнению Шредингера (12), а в точке x она непрерывна и её производная имеет скачок, равный $\delta(y-x)\Psi_1(k,x)$. Кроме того, $\delta\Psi_1(k,y) = o(e^{-ikx})$ при $x \to -\infty$, поэтому

$$\delta\Psi_1(k,y) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad y < x \\ \alpha\Psi_1(k,y) + \beta\Psi_2(k,y) \quad \text{при} \quad y > x, \end{cases} \tag{25}$$

причем

$$\begin{cases} \alpha\Psi_1(k,x) + \beta\Psi_2(k,x) = 0 \\ \alpha\Psi_1'(k,x) + \beta\Psi_2'(k,x) = \Psi_1(k,x). \end{cases} \tag{26}$$

Решая (26) получаем:

$$\alpha = -\frac{\Psi_1(k,x)\Psi_2(k,x)}{2ik} \tag{27}$$

При $y \to +\infty$ член $\beta\Psi_2(k,y)$ экспоненциально убывает, поэтому он не вности вклад в вариацию $\ln a(k)$. Поэтому

$$\delta a(k) = \alpha a(k), \tag{28}$$

что эквивалентно (22). Обозначим $J(k)[u]$ асимптотический ряд для $2ik\ln a(k)$: $J(k)[u] = 2ik\ln a(k)$. Мы имеем:

$$J(k)[u] = 2ik\int\limits_{-\infty}^{\infty}\chi(k,x)dx \tag{29}$$

Нам осталось проверить, что каждый из коэффициентов $\chi_n(x)$ – полином от $u(x)$ и конечного числа её производных. Подставляя выражение для $\chi(k,x)$ через $\Psi_1(k,x)$

$$\chi(k,x) = \frac{\Psi_1'(k,x)}{\Psi_1(k,x)} + ik, \tag{30}$$

в уравнение Шредингера, получаем **уравнение Рикатти**:

$$\chi'(k,x) + \chi^2(k,x) - u(x) = 2ik\chi(k,x). \tag{31}$$

Подставляя в него ряд (19) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях k, получаем:

$$\begin{aligned} &\chi_1(x) = -u(x) \\ &\chi_{n_1}(x) = \tfrac{d}{dx}\chi_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{n-1}\chi_j(x)\chi_{n_j}(x). \end{aligned} \tag{32}$$

Тем самым все $\chi_n(x)$ находятся по индукции и локальны. В частности

$$J_0[u] = \int\chi_1(x)dx = -\int u(x)dx$$

– действительно Казимир скобки $\{,\}_1$.

Мы получили ряд по $1/k$. Однако первоначально мы хотели получить ряд по $1/\lambda = 1/k^2$, т.е. мы хотели, чтобы все коэффициенты при нечётных степенях $1/k$ были нулевыми функционалами. Убедимся что это действительно так т.е. в классе убывающих потенциалов для всех челых n

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi_{2n}(k,x)dx = 0. \tag{33}$$

Введем следующие обозначения:

$$\chi_I(k,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{2n-1}(x)}{(2ik)^{2n-1}}, \quad \chi_R(k,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{2n}(x)}{(2ik)^{2n}} \tag{34}$$

Подставляя (34) в уравнение Рикатти (31) и собирая коэффициенты при нечётных степенях $1/k$ получаем:

$$\frac{d\chi_I(k,x)}{dx} + 2\chi_I(k,x)\chi_R(k,x) - 2k\chi_R(k,x) = 0, \tag{35}$$

т.е.

$$\chi_R(k,x) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\ln(\chi_I(k,x) - k). \tag{36}$$

Тем самым, все коэффициенты при чётных степенях $1/k$ оказываются полными производными полиномов от $u(x)$ и конечного числа её производных. Это и завершает доказательство.

Список литературы

[1] В.Е.Захаров, С.В.Манаков, С.П.Новиков, Л.П.Питаевский “Теория солитонов. Метод обратной задачи”. М. Наука, 1980.

[2] F. Magri “Eight lectures on integrable systems.” Integrability of nonlinear systems (Pondicherry, 1996), 256–296, Lecture Notes in Phys., 495, Springer, Berlin, 1997.

[3] Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, “Гидродинамика слабо деформированных солитонных решеток. Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория ” УМН, **44**, 6, 30-98 (1989).