Лекция 5.
9 марта 2004 г.

До данного момента мы рассматривали только Пуассоновы структуры на конечномерных многообразиях. Соответствующие гамильтоновы системы описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Обсудим теперь гамильтонов формализм уравнений в частных производных.

В бесконечномерном формализме основное многообразие M – это пространство функций. Для определенности будем считать, что M – пространство n-компонентных вектор-функций, определенных на области в $\mathbb{R}^N$, хотя практически все, что я планирую рассказать, естественно переносится на случай, когда M-пространство отображений из многообразия в многообразие.

Для начала предположим, что $N = n = 1$, .т.е. M – пространство вещественнозначных функций одной переменной. Введем на нем координаты. Что такое координаты в конечномерном формализме? Это набор базисных функций на M. В бесконечномерном формализме координаты – некий набор базисных функционалов, т.е. набор отображений $M \to \mathbb{R}$. (Кстати, вопрос о том, что такое базис, не вполне тривиален. Совсем наивно – это набор функционалов, которые независимы и полностью определяют точку M.)

Простейший набор координатных функционалов – это функционалы $u(x)$. Функционал $u(x)$ определен следующим образом: **он ставит в соответствие функции u её значение в точке x.** При этом x – непрерывный аналог индекса i в конечномерном формализме. Неудивительно, что при переходе к бесконечномерной теории вместо суммирования по i в формулах будет интегрирование по x.

В каком-то смысле эти обозначения не вполне удачны, поскольку $u(x)$ одновременно обозначает и элемент пространства функций, и функционал на нём. Но поскольку эти обозначения уже устоялись, ничего не поделаешь, придется к ним привыкать.

Что такое линейная функция (линейный функционал) на M? На конечномерном пространстве $\mathbb{R}^N$ с координатами $y^1, \ldots, y^N$ общий линейный функционал имеет вид:

$$\alpha(\vec{y}) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k y^k. \tag{1}$$

При переходе к пространству функций нужно:

1. Заменить дискретный индекс k на непрерывный x.
2. Заменить координатную функцию y^k на координатный функционал $u(x)$.
3. Заменить суммирование по k на интегрирование по x

Тем самым:

$$\alpha[u] = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)u(x)dx. \tag{2}$$

Другая интерпретация формулы (2): общий линейный функционал $\alpha[u]$ есть сумма базисных

$$u(x): \quad u \to \text{значение } u \text{ в точке } x,$$

взятых с коэффициентами $\alpha(x)$.

В формуле (2) $\alpha(x)$ может быть как обычной, так и обобщенной функцией.

Контрольный вопрос: какую функцию $\alpha(x)$ нужно взять, чтобы получить базисный функционал $u(y)$?

Ответ:

$$\alpha(x) = \delta(x - y).$$

Тем самым, в качестве базисных выбраны **сингулярные** функционалы $u(y)$. Не надо удивляться, если в будущем их скобки Пуассона окажутся **сингулярными.**

Аналогично, общий билинейный функционал записывается в виде двойного интеграла:

$$B[u, v] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} B(x, y)u(x)v(y)dxdy. \tag{3}$$

Функционал $F[u]$ естественно считать **дифференциируемым в точке** $u(x)$ (напомним, что точки многообразия M – это функции переменной x), если вблизи неё он допускает разложение

$$F[u + \delta u] = F[u] + \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)\delta u(x)dx + o(\delta u). \tag{4}$$

Здесь $\delta u(x)$ – произвольная функция переменной x, достаточно малая по норме (какую именно норму использовать, зависит от конкретного класса функционалов, этот вопрос может оказаться крайне нетривиальным), $o(\delta u)$ берется по отношению а этой норме.

Определение 1 *Функция $\alpha(x)$ в формуле (4), называется* **вариационной производной** $F[u]$ *и обозначается*

$$\alpha(x) = \frac{\delta F[u]}{\delta u(x)}. \tag{5}$$

Более строго было бы писать:

$$\alpha[u](x) = \left.\frac{\delta F[v]}{\delta v(x)}\right|_{v(y)=u(y)}, \tag{6}$$

чтобы подчеркнуть, что $\alpha(x)$ – функция переменной x, зависящая от функционального параметра $u(y)$ (я написал $u(y)$ чтобы подчеркнуть, что значение α **в точке** x зависит от значения u **во всех точках.** Понятно, что вариационная производная $\delta F[u]/\delta u(x)$ – естественный аналог частной прозводной $\partial F(\vec{y})/\partial y^k$.

Задача 1 *Что такое*

$$\frac{\delta F[u]}{\delta u(x)\delta u(y)}? \tag{7}$$

Если строить гамильтонов формализм для систем со скобками и функционалами общего вида, то соответствующие динамические системы будут описываится **дифференциальными уравнениями на пространстве функций.** В то же время в физике чаще всего возникают системы более специального вида – **уравнения в частных производных**, или же **интегродифференциальные уравнения.** Оказывается, что наиболее естественный гамильтонов формализм для таких систем получается, если брать **локальные скобки Пуассона** и **локальные функционалы.** (Иногда полезно рассматривать также так называемые **слабо нелокальные скобки Пуассона** и **слабо нелокальные функционалы**. Однако эти обобщения уже выходят за рамки нашего курса.) Сначала определим, что такое локальный функционал.

Определение 2 *Функционал $F[u]$ называеся* **локальным** *если существует функция конечного числа переменных $f(x, z^0, \dots, z^n)$ такая, что*

$$F[u] = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x, u(x), \frac{du(x)}{dx}, \dots, \frac{d^n u(x)}{dx^n}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, u, u_x, u_{xx}, \dots) dx. \tag{8}$$

Для того, чтобы интеграл в (8) сходился, естественно наложить следующие ограничения:

1. Функционал $F[u]$ определен только на подпространстве функций, достаточно быстро убывающих на бесконечности вместе со всеми производными.

2. $f(x, 0, 0, 0, \dots, 0) = 0$.

Вычислим теперь **вариационную производную** локального функционала (здесь и далее $\delta u(x)$ – бесконечно малая вариация, т.е. члены высших порядков опускаем). Ясно, что

$$\delta F[u] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial f}{\partial u}\delta u(x) + \frac{\partial f}{\partial u_x}\delta u_x(x) + \frac{\partial f}{\partial u_{xx}}\delta u_{xx}(x) + \dots\right] dx \tag{9}$$

Это выражение нужно привести в виду (4), т.е. у нас под интегралом должна стоять лишь $\delta u(x)$, но не $\delta u_x(x)$, $\delta u_{xx}(x)$. Проинтегрируем по частям, пользуясь при этом достаточно быстрым убыванием $u(x)$ на бесконечности вместе со всеми производными (нулевыми граничными условиями на бесконечности, используя достаточно распространенное жаргонное выражение). Мы получаем:

$$\delta F[u] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial u_x} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial u_{xx}} + \dots\right] \delta u_{xx}(x) dx. \tag{10}$$

Тем самым:

$$\frac{\delta F[u]}{\delta u(x)} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial u_x} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial u_{xx}} - \frac{d^3}{dx^3}\frac{\partial f}{\partial u_{xxx}} + \dots \tag{11}$$

Поскольку функция $f(x, u, u_x, \ldots)$, называемая **плотностью функционала** $F[u]$, зависит лишь от конечного числа производных $u(x)$, то всё определено. Иногда (например в работах Гельфанда и Дикого), используется обозначение

$$\frac{\delta}{\delta u} f(x, u, u_x, \ldots) = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial u_x} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial u_{xx}} - \frac{d^3}{dx^3}\frac{\partial f}{\partial u_{xxx}} + \ldots \tag{12}$$

При этом $\frac{\delta}{\delta u}$ становится оператором на пространстве плотностей.

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial u_x} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} - \frac{d^3}{dx^3}\frac{\partial}{\partial u_{xxx}} + \ldots \tag{13}$$

Задача 2 *Что такое* $\frac{\delta F[u]}{\delta u(x)}$, *если*

$$F[u] = \int\limits_a^b f\left(x, u(x), \frac{du(x)}{dx}, \ldots, \frac{d^n u(x)}{dx^n}\right) dx = \int\limits_a^b f(x, u, u_x, u_{xx}, \ldots) dx, \tag{14}$$

и никаких ограничений на граничные значения $u(x)$ *на концах отрезка не наложено?*

Какие же бывают скобки? Рассмотрим несколько важных примеров.

Пример 1 *Полевой аналог канонической скобки. Напомним, что каноническая скобка Пуассона определена на пространстве* $\mathbb{R}^{2N}$ *с координатами* $p_1, \ldots, p_N$, $q^1, \ldots, q^N$ *и имеет вид:*

$$\{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q^i, q^j\} = 0, \quad \{p_i, q^j\} = \delta_i^j. \tag{15}$$

Согласно общей идеологии нужно заменить пару векторов $\vec{p}$, $\vec{q}$ *на пару функций* $p(x)$, $q(x)$ *и написать (как и сделано во всех курсах физики):*

$$\{p(x), p(y)\} = 0, \quad \{q(x), q(y)\} = 0, \quad \{p(x), q(y)\} = \delta(x - y). \tag{16}$$

Наверное стоит ещё раз напомнить, что $p(x)$, $q(x)$ – в данном случае **не функции, а базисные функционалы на пространстве функций.**

Скобка (16) – это **постоянная скобка**. Она не зависит от точки пространства M. Напомним, что в конечномерном случае постоянная скобка

– это скобка вида $h^{ij}(x) = h^{ij}$, т.е. h не зависит от x, являясь при этом произвольной кососимметричной функцией индексных переменных.

Что же получилось? Скобка Пуассона функционалов $p(x)$, $q(y)$ равна константе – либо 0, либо ∞, т.е. получается бессмыслица. Проблема в том, что для сингулярных функционалов скобка Пуассона часто не определена. Однако для регулярных функционалов все хорошо. Пусть, например $H_1[p,q]$, $H_2[p,q]$ линейны:

$$H_1[p,q] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [a(x)p(x) + b(x)q(x)]\, dx,$$

$$H_2[p,q] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [c(x)p(x) + d(x)q(x)]\, dx.$$

Тогда

$$\{H_1, H_2\}[p,q] = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dxdy\, [a(x)c(y)\{p(x), p(y)\} + a(x)d(y)\{p(x), q(y)\} +$$

$$+b(x)c(y)\{q(x), p(y)\} + b(x)d(y)\{q(x), p(y)\}] =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dxdy[a(x)d(y) - b(x)c(y)]\delta(x-y) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} [a(x)d(x) - b(x)c(x)]dx.$$

Для общих локальных функционалов имеем:

$$\{H_1, H_2\}[p,q] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\delta H_1}{\delta p(x)}\frac{\delta H_2}{\delta q(x)} - \frac{\delta H_1}{\delta q(x)}\frac{\delta H_2}{\delta p(x)}\right] dx.$$

Пример 2 *Постоянная скобка на пространстве скалярных функций одной переменной:*

$$\{u(x), u(y)\} = h(x,y), \tag{17}$$

где $h(x,y)$ – любая кососимметричная функция $h(y,x) = -h(x,y)$.

Пример 3 *Пусть M_0 – некоторое конечномерное Пуассоново многообразие со скобкой $\{,\}_0$, M – пространство отображений из $\mathbb{R}$ в M_0. Если F – некоторая функция на M_0, то она определяет семейство функционалов $F(x)$ на M по следующему правилу:*

$$F(x)[u] = F(u(x)) \tag{18}$$

(Здесь $u(y)$ – точка M, т.е. функция вещественной переменной y со значениями в M_0.)

Скобка $\{,\}_0$ порождает следующую скобку на M:

$$\{F(x), G(y)\}[u] = \{F, G\}_0(u(x))\delta(x - y). \tag{19}$$

Задача 3 *Убедиться, что (19) – действительно скобка Пуассона, т.е. она кососимметрична и выполнено тождество Якоби.*

Список литературы

[1] М.Пескин, Д.Шредер, "Введение в квантовую теорию поля", М. И. "РХД", 2001 г.

[2] Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко. “Современная геометрия”. М.: Наука. 1986.

[3] Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, “Гидродинамика слабо деформированных солитонных решеток. Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория ” УМН, **44**, 6, 30-98 (1989)

[4] С.П.Новиков, “Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса” УМН, **37**, 5, 3-49 (1982)