Лекция 3.
24 февраля 2004 г.

На прошлой лекции мы сформулировали понятие Пуассонова многообразия.

Определение 1 *Кососимметричное бивекторное поле $h^{ij}(x) = -h^{ji}(x)$ на многообразии M задаёт* **пуассонову структуру**, *если оно тождественно по x удовлетворяет тождеству Якоби*

$$\frac{\partial h^{ij}(x)}{\partial x^l} h^{lk}(x) + \frac{\partial h^{jk}(x)}{\partial x^l} h^{li}(x) + \frac{\partial h^{ki}(x)}{\partial x^l} h^{lj}(x) = 0. \tag{1}$$

Пара, состоящая из многообразия и пуссоновой структуры не нём, называется **пуассоновым многообразием**.

Пусть многообразие M чётномерно, а матрица $h^{ij}(x)$ обратима во всех точках. Для матрицы, обратной к $h^{ij}(x)$, используем обозначение $\omega_{ij}(x)$:

$$\omega_{ki}(x) h^{ij}(x) = \delta_k^j. \tag{2}$$

Упражнение 1 *Матрица $\omega_{ij}(x)$ при заменах координат преобразуется как тензор с 2 нижними индексами. Тем самым форма $\Omega = \omega_{ij}(x) dx^i \wedge dx^j$ – корректно определенный объект.*

Оказывается, что в терминах формы Ω нелинейное условие (1) линеаризуется.

Теорема 1 *Пусть на чётномерном многообразии M задано невырожденное кососимметричное бивекторное поле $h^{ij}(x) = -h^{ji}(x)$, $\det h \neq 0$. Это поле задает пуассонову структуру на M тогда и только тогда, когда форма $\Omega = \omega_{ij}(x) dx^i \wedge dx^j$, где $\omega_{ij}(x)$ – матрица, обратная к $h^{ij}(x)$, замкнута:*

$$d\Omega = 0. \tag{3}$$

Доказательство. Умножим (1) на $\omega_{\alpha i}\omega_{\beta j}\omega_{\gamma k}$ и просуммируем по i, j, k.

$$\omega_{\alpha i}\omega_{\beta j}\omega_{\gamma k} \left[\frac{\partial h^{ij}(x)}{\partial x^l} h^{lk}(x) + \frac{\partial h^{jk}(x)}{\partial x^l} h^{li}(x) + \frac{\partial h^{ki}(x)}{\partial x^l} h^{lj}(x) \right] = 0. \tag{4}$$

Выполняя суммирование в первом члене по k, втором по i и третьем по j, получаем:

$$-\omega_{\alpha i}\omega_{\beta j}\frac{\partial h^{ij}(x)}{\partial x^l}\delta^l_\gamma - \omega_{\beta j}\omega_{\gamma k}\frac{\partial h^{jk}(x)}{\partial x^l}\delta^l_\alpha - \omega_{\alpha i}\omega_{\gamma k}\frac{\partial h^{ki}(x)}{\partial x^l}\delta^l_\beta = 0, \tag{5}$$

т.е.

$$-\omega_{\alpha i}\omega_{\beta j}\frac{\partial h^{ij}(x)}{\partial x^\gamma} - \omega_{\beta j}\omega_{\gamma k}\frac{\partial h^{jk}(x)}{\partial x^\alpha} - \omega_{\alpha i}\omega_{\gamma k}\frac{\partial h^{ki}(x)}{\partial x^\beta} = 0, \tag{6}$$

Дифференциируя (3) (с заменой индексов) по x^l получаем:

$$\frac{\partial \omega_{\alpha i}(x)}{\partial x^l}h^{ij}(x) + \omega_{\alpha i}(x)\frac{\partial h^{ij}(x)}{\partial x^l} = 0 \tag{7}$$

Умножая на $\omega_{\beta j}$, получаем:

$$\frac{\partial \omega_{\alpha\beta}(x)}{\partial x^l} = \omega_{\alpha i}(x)\omega_{\beta j}(x)\frac{\partial h^{ij}(x)}{\partial x^l}. \tag{8}$$

Используя (8) приводим (6) к виду

$$-\frac{\partial \omega_{\alpha\beta}(x)}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \omega_{\beta\gamma}(x)}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \omega_{\gamma\alpha}(x)}{\partial x^\beta} = 0, \tag{9}$$

которое в точности эквивалентно замкнутости Ω.

Определение 2 *Чётномерное многообразие M, на котором задана невырожденная замкнутая 2-форма $\Omega = \omega_{ij}(x)dx^i \wedge dx^j$, $d\Omega = 0$ называется* **симплектическим многообразием.**

Если пуассонова структура вырождена, то она уже не эквивалентна симплектической. Тем не менее в точке общего положения имеет место следующая картина:

Теорема 2 *Пусть X_0 – точка пуассонова многообразия M^N общего положения, т.е. ранг матрицы $h^{ij}(x)$ постоянен вблизи неё и равен $2k < N$. Тогда локально M^N представимо как объединение $N-2k$-мерного семейства $2k$-мерных подмногообразий, называемых* **симплектическими листами**, *таких, что*

1. *Для любой функции, постоянной на этих подмногообразиях, её скобка Пуассона со всеми функциями тождественно равна 0. Другими словами, для любого гамильтонова потока с нашей скобкой Пуассона симплектические листы являются инвариантными подмногообразиями.*

2. *Ограничение скобки Пуассона на симплектические листы корректно определено и невырождено. Тем самым, на всех симплектических листах задана структура симплектического многообразия (отсюда и название).*

Эквивалентная формулировка:

Теорема 3 *Пусть X_0 – точка пуассонова многообразия M^N общего положения, т.е. ранг матрицы $h^{ij}(x)$ постоянен вблизи неё и равен $2k < N$. Тогда вблизи X_0 можно выбрать локальные координаты $y^1, \ldots, y^{2k}$, $y^{2k+1}, \ldots, y^N$ такие, что матрица $h^{ij}(x)$ в них приобретает вид*

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{h}^{ij}(y) & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \tag{10}$$

где $2k \times 2k$ блок $\tilde{h}^{ij}(y)$ уже невырожден.

Замечание 1 *Вообще-то говоря операция ограничения пуассоновой структуры на подмногообразие не определена. Однако в нашем специальном случае она корректна.*

Определение 3 *Функция $f(x)$, скобка Пуассона которой со всеми функциями тождественно равна 0: для всех $g(x)$ $f, g = 0$, называется* **аннулятором** *или* **функцией Казимира**.

Легко видеть, что функции Казимира (определенные локально) в точности есть функции, постоянные на симлектических листах, или, что эквивалентно, функции переменных $y^{2k+1}, \ldots, y^N$. Однако, легко понять, что это лишь локальная картина. Подобно тому, как иррациональные обмотки тора образуют слоение, на котором нет естественной глобальной параметризации слоёв, локальные Казимиры могут не продолжаться глобально.

Доказательство теоремы 2. Определим симплектические листы следующим образом. Пусть зафиксировны координаты $x^1, \ldots, x^N$. Тогда пуассонова структура $h^{ij}(x)$ порождает N векторных полей $v_1(x), \ldots, v_N(x)$, $v_i^j(x) = h^{ij}(x)$, причем линейная оболочка этой системы полей в каждой точке $2k$-мерна. Из тензорного закона преобразования

$$\tilde{h}^{ij} = h^{kl} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^l} \tag{11}$$

видно, что при заменах координат эти поля переходят в их линейные комбинации с переменными коэффициентами, и, следовательно, линейная оболочка во всех точках сохраняется. Тем самым, мы получили поле $2k$-плоскостей в N-мерном пространстве. Если поле плоскостей задано набором векторных полей, то оно интегрируемо тогда и только тогда, когда коммутатор любой пары полей есть линейная комбинация этих полей (с переменными коэффициентами). Мы не будем доказывать эту теорему (см., например, главу 7 книги [4]). Проверим, что коммутатор пары полей v_i, v_j есть линейная комбинация этих полей. Действительно

$$[v_i, v_j]^k = v_i^l(x)\frac{\partial v_j^k(x)}{\partial x^l} - v_j^l(x)\frac{\partial v_i^k(x)}{\partial x^l} = h^{il}(x)\frac{\partial h^{jk}(x)}{\partial x^l} - h^{jl}(x)\frac{\partial h^{ik}(x)}{\partial x^l} = \tag{12}$$

$$= h^{il}(x)\frac{\partial h^{jk}(x)}{\partial x^l} + h^{jl}(x)\frac{\partial h^{ki}(x)}{\partial x^l} = -h^{kl}(x)\frac{\partial h^{ij}(x)}{\partial x^l} = h^{lk}(x)\frac{\partial h^{ij}(x)}{\partial x^l} = v_l^k(x)\frac{\partial h^{ij}(x)}{\partial x^l},$$

т.е.

$$[v_i, v_j] = v_l(x)\frac{\partial h^{ij}(x)}{\partial x^l}, \tag{13}$$

что и доказывает интегрируемость.

Пусть M^{2N} – некоторое симплектическое многообразие. Его топология и глобальная структура может быть очень нетривиальной. Однако по аналогии с плоской метрикой на римановом многообразии, локально все симплектические структуры эквивалентны. Это утверждение называется **теоремой Дарбу.**

Теорема 4 *Пусть M^{2N} – симплектическое многообразие, т.е. пуассоново многообразие с невырожденной пуассоновой структурой. Тогда в окрестности любой точки X_0 существует каноническая система координат $p_1,\dots,p_N$, $x^1,\dots,x^N$, такая, что*

$$\{p_i, p_j\} = 0, \quad \{x^i, x^j\} = 0, \quad \{p_i, x^j\} = \delta_i^j, \tag{14}$$

или, что эквивалентно, форма Ω имеет вид:

$$\Omega = dx^k \wedge dp_k \tag{15}$$

Схема доказательства. Будем действовать индукцией по N. В качестве x^1 выберем произвольную регулярную функцию, $X^1(X_0) = 0$. Пусть K^{2N-1} – произвольное подмногообразие размерности $2N-1$, трансверсальное к линиям уровня x^1 и гамильтонову потоку, порождённому гамильтонианом x^1. Предположим также, что K^{2N-1} содержит X_0 (все условия должны выполняться лишь вблизи точки X_0). В качестве p_1 для каждой точки возьмём время, необходимое, чтобы двигаясь вдоль траектории гамильтонова потока, порождённого гамильтонианом x^1, она достигла K^{2N-1}. (Время берётся со знаком). Тем самым

$$\{x^1, p_1\} = -1, \tag{16}$$

и потоки, порождаемые гамильтонианами x^1 и p_1 коммутируют. Тем самым, наше многообразие расслаивается на двумерные поверхности P_α, заметаемые всевозможными комбинациями этих потоков, и пересечение K^{2N-1} с линией уровня $x_1 = 0$ трансверсально семейству P_α. Пользуясь предположением индукции выберем на пересечении канонические координаты $p_2,\ldots,p_N$, $x^2,\ldots,x^N$, и распространим их на всю окрестность полагая постоянными на всех $P_\alpha = P(p_2,\ldots,p_N,x^2,\ldots,x^N)$. Постоянство функций $p_2,\ldots,p_N$, $x^2,\ldots,x^N$ на поверхностях P_α в точности означает, что они коммутируют с x^1, p_1. Тем самым, коммутационные соотношения x^1 и p_1 со всеми координатами такие, как надо. Убедимся, что коммутаторы функций $p_2,\ldots,p_N$, $x^2,\ldots,x^N$ канонические не только на пересечении K^{2N-1} с линией уровня $x_1 = 0$, но и везде. Для этого достаточно проверить, что они постоянны на всех P_α, или что эквивалентно

$$\begin{gathered}\{\{x^k, p_l\}, p_1\} = 0, \quad \{\{x^k, p_l\}, x^1\} = 0, \quad \{\{p_k, p_l\}, p_1\} = 0, \quad \{\{p_k, p_l\}, x^1\} = 0, \\ \{\{x^k, x^l\}, p_1\} = 0, \quad \{\{x^k, x^l\}, x^1\} = 0, \quad k, l \geq 2.\end{gathered} \tag{17}$$

Последнее сразу следует из тождества Якоби.

Список литературы

[1] В.И.Арнольд. “Математические методы классической механики”. М. Наука, 1974.

[2] Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко. “Современная геометрия”. М.: Наука. 1986.

[3] Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, “Гидродинамика слабо деформированных солитонных решеток. Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория ” УМН, **44**, 6, 30-98 (1989)

[4] И.Тамура. “Топология слоений”. М.Мир, 1979.