Лекция 2.
17 февраля 2004 г.

Вернемся к системе n частиц в 3х-мерном пространстве. Вектором **импульса** k-ой частицы назовем вектор

$$\vec{p}_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_k^1} \\ \frac{\partial L}{\partial x_k^2} \\ \frac{\partial L}{\partial x_k^3} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Согласно теореме Нётер, суммарный импульс системы частиц, инвариантной относительно сдвигов $\vec{x}_k \to \vec{x}_k + \vec{v}_0$ (все частицы одновременно сдвигаем на одно и то же расстояние), является законом сохранения. Мы имеем сохраняющийся вектор, или, что то же самое, 3 сохраняющихся функции.

Очевидно, что для системы, лагранжиан которой – разность кинетической и потенциальной энергии,

$$\vec{p}_k = m_k \vec{v}_k, \tag{2}$$

т.е. наше определении согласовано со стандартным.

Определение 1 *Пусть имеется лагранжева система в N-мерном пространстве с лагранжианом $L(x, \dot{x}, t)$. Величины*

$$p_k = \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}^k} \tag{3}$$

называются **импульсами** *системы.*

Далее для простоты ограничимся системами, явно не зависящими от времени. По определению импульсы – функции координат и скоростей. Предположим что система **невырождена** в следующем смысле: по крайней мере локально скорости можно выразить через координаты и импульсы.

В конце прошлой лекции мы ввели интеграл энергии

$$H(x, \dot{x}) = \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^k} \dot{x}^k - L(x, \dot{x}) = p_k \dot{x}^k - L(x, \dot{x}) \tag{4}$$

Если система невырождена, то можно подставить в H выражение для скоростей $\dot{x}^k$ через переменные x^k, p^k. Получающаяся в результате этой подстановки функция $H = H(x^1, \ldots, x^N, p_1, \ldots, p_N)$ называется **гамильтонианом**.

Перепишем уравнение Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^k} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^k}\right] = 0 \tag{5}$$

в переменных x^k, p^k. Мы имееем:

$$\frac{dp_k}{dt} = \left.\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^k}\right|_{\dot{x}=const}. \tag{6}$$

Вычислим следующие производные:

$$\left.\frac{\partial H(x,p)}{\partial x^k}\right|_{p=const}, \qquad \left.\frac{\partial H(x,p)}{\partial p_k}\right|_{x=const}. \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial H(x,p)}{\partial x^k}\right|_{p=const} = \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_{p=const}\left[p_k\dot{x}^k - L(x,\dot{x})\right] = \tag{8}$$

$$= p_l\left.\frac{\partial \dot{x}^l}{\partial x^k}\right|_{p=const} - \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^k} - \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^l}\left.\frac{\partial \dot{x}^l}{\partial x^k}\right|_{p=const} = \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^k}$$

(здесь мы использовали определение импульса (3)). Тем самым уравнение Эйлера-Лагранжа эквиваленнтно соотношению:

$$\frac{dp_k}{dt} = -\left.\frac{\partial H(x,p)}{\partial x^k}\right|_{p=const}. \tag{9}$$

Далее имеем:

$$\left.\frac{\partial H(x,p)}{\partial p_k}\right|_{x=const} = \left.\frac{\partial}{\partial p_k}\right|_{x=const}\left[p_k\dot{x}^k - L(x,\dot{x})\right] = \tag{10}$$

$$\dot{x}^k + p_l\left.\frac{\partial \dot{x}^l}{\partial p_k}\right|_{x=const} - \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^k}\left.\frac{\partial \dot{x}^l}{\partial p_k}\right|_{x=const} = \dot{x}^k.$$

Мы доказали:

Теорема 1 *Уравнения Эйлера-Лагранжа для системы с невырожденным лагранжианом $L(x, \dot{x})$ после перехода к переменным x, p приобретают следующий вид:*

$$\begin{cases} \frac{dx^k}{dt} = \frac{\partial H(x,p)}{\partial p_k} \\ \\ \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H(x,p)}{\partial x^k} \end{cases} \tag{11}$$

Определение 2 *Система (11) называется* **уравнениями Гамильтона**.

Мы доказали, что классическая механика с потенциальным взаимодействием может быть переписана в лагранжевом формализме (через принцип наименьшего действия) и в гамильтоновой форме (в виде системы (11)).

Систему (11) удобно переписать, используя следующий формализм: для любой пары функций $f(x, p)$, $g(x, p)$ определим **скобку Пуассона** формулой:

$$\{f, g\} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial x^k} - \frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial x^k}. \tag{12}$$

Очевидно, что скобка Пуассона кососимметрична:

$$\{f, g\} = -\{g, f\}. \tag{13}$$

Упражнение 1 *Операция скобки Пуассона превращает алгебру функций в алгебру Ли, или, что то же самое, для скобки Пуассона выполнено тождество Якоби: для любой тройки функций $f(x, p)$, $g(x, p)$, $h(x, p)$*

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} \equiv 0. \tag{14}$$

Теорема 2 *В терминах скобки Пуассона система (11) записывается в следующей форме:*

$$\begin{cases} \frac{dx^k}{dt} = \{H, x^k\} \\ \\ \frac{dp_k}{dt} = \{H, p_k\} \end{cases} \tag{15}$$

Более того, для произвольной функции $f(x, p)$ имеет место соотношение

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\}. \tag{16}$$

Доказательство:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial H(x,p)}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial x^k} - \frac{\partial H(x,p)}{\partial x^k}\frac{\partial f}{\partial p_k}. \tag{17}$$

Формула (16) сопоставляет каждой функции $H(x,p)$ некоторое векторное поле. Это векторное поле специального вида (в частности его дивергенция равна 0). Более того, на следующей лекции мы покажем, что это поле сохраняет следующую 2-форму:

$$\Omega = dx^k \wedge dp_k \tag{18}$$

Форма объема записывается в следующем виде $\underbrace{\Omega \wedge \ldots \wedge \Omega}_{N \text{ раз}}$, следовательно фазовый объём в пространстве сохраняется в силу любого потока, порождаемого формулой (16). Такие потоки называются **Гамильтоновыми векторными полями** или **Гамильтоновыми потоками**.

Убедимся, что задаваемое формулой (16) отображение в действительности есть гомоморфизм алгебры Ли функций в алгебру Ли векторных полей. Для этого нужно проверить, что скобка Пуассона переходит в коммутатор. Проверим это. Пусть задана пара функций $H_1(x,p)$, $H_2(x,p)$, соответствующие им гамильттоновы векторные поля обозначим v_1, v_2. Пусть $f(x,p)$ – некоторая пробная функция. Согласно определению коммутатора векторных полей

$$\nabla_{[v_1,v_2]}f = \nabla_{v_1}\nabla_{v_2}f - \nabla_{v_2}\nabla_{v_1}f = \tag{19}$$

$$= \{H_1, \{H_2, f\}\} - \{H_2, \{H_1, f\}\} = \{H_1, \{H_2, f\}\} + \{H_2, \{f, H_1\}\}$$

Используя тождество Якоби, получаем:

$$\nabla_{[v_1,v_2]}f == -\{f, \{H_1, H_2\}\} = \{\{H_1, H_2\}, f\}. \tag{20}$$

Теорема 3 *Пусть $H(x,p)$ – произвольная функция переменных x^k, p_k. Рассмотрим гамильтонов поток, порождаемый ей. Тогда для него $H(x,p)$ – интеграл движения. Другими словами, гамильтониан системы сохраняется в силу неё (напомним, что мы рассматриваем лишь системы, не зависящие явно от времени).*

Доказательство.

$$\frac{dH}{dt} = \{H, H\} = 0. \tag{21}$$

Заметим, что гамильтоновость фундаментальных систем играет критическую роль в статистической физике. Основной постулат статистической физики **(микроканоническое распределение)** можно сформулировать следующим образом: все состояния с одинаковой энергией в замкнутой системе, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, равновероятны. Естественный вопрос: а какую меру на фазовом пространстве нужно использовать? Ответ – тот самый фазовый объем, который сохраняется в силу гамильтоновости. Ещё одно тонкое место. Если мы имеем некоторую меру на пространстве, то не существует её естественного ограничения на подмногообразия. Как же определить меру на пространстве всех состояний с энергией E_0. Оказывется, что это не просто подмногообразие, но подмногообразие, заданное уравнением $H(x,p) = E_0$, что меняет дело. Действительно, для подмножества V поверхности уровня $H(x,p) = E_0$ его объем определяется формулой

$$\mathrm{vol}V = \lim_{\epsilon\to 0+} \frac{V_\epsilon}{2\epsilon}, \tag{22}$$

где V_ϵ – объём трубчатой окрестности множества V, определяемой условием

$$E_0 - \epsilon \leq H(x,p) \leq E_0 + \epsilon. \tag{23}$$

Нам также будет полезно следующее обобщение понятие гамильтоновой системы:

Определение 3 *Пусть M – конечномерное гладкое многообразие M, на котором задана дополнительная структура – кососимметричное тензорное поле $h^{ij}(x) = -h^{ji}(x)$ с двумя верхними индексами (бивекторное поле). Тогда на пространстве функций на M определена следующая кососимметричная скобка:*

$$\{f,g\} = \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} h^{ij}(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x^j}. \tag{24}$$

Легко видеть, что

$$h^{ij}(x) = \{x^i, x^j\}. \tag{25}$$

Определение 4 *Многообразие M с заданным на нем кососимметрическим бивекторным полем называется* **пуассоновым многообразием**, *а скобка (24) –* **скобкой Пуассона**, *если для любой тройки функций*

$f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ на M тождественно по x выполнено следующее тождество Якоби

$$\{\{f,g\},h\}+\{\{g,h\},f\}+\{\{h,f\},g\}\equiv 0. \qquad (26)$$

Легко убедиться, что тождество Якоби (26) имеет место для произвольных функций если и только если оно выполено для всех координатных функций. Расписывая тождество Якоби для координатных функций x^i, x^j, x^k мы получаем

$$\frac{\partial h^{ij}(x)}{\partial x^l}h^{lk}(x)+\frac{\partial h^{jk}(x)}{\partial x^l}h^{li}(x)+\frac{\partial h^{ki}(x)}{\partial x^l}h^{lj}(x)=0. \qquad (27)$$

Тензор третьего ранга, стоящий в правой части формулы (27) называется скобкой Схоутена.

Пример 1 *Для любых функций $m(x^1,x^2,x^3)$, $K(x^1,x^2,x^3)$ рассмотрим кососимметрическое бивекторное поле h_K, заданное формулами*

$$h_K^{1,2}=m\frac{\partial K}{\partial x^3},\qquad h_K^{1,3}=-m\frac{\partial K}{\partial x^2},\qquad h_K^{2,3}=m\frac{\partial K}{\partial x^1}. \qquad (28)$$

Проверить, что (24) задает скобку Пуассона.

Определение 5 *Пусть M – некоторое пуассоново многообразие, H – произвольная гладкая функция на M. Порождаемое H* **Гамильтоново векторное поле** *задается формулой*

$$\frac{dx^i}{dt}=\{H,x^i\}, \qquad (29)$$

где x^i – локальные координаты на M.

Функция H называется **Гамильтонианом** *потока (29).*

Упражнение 2 . *Для производной произвольной функции $f(\vec{x})$ вдоль поля (29) имеет место соотношение*

$$\frac{df(\vec{x})}{dt}=\{H,f\}, \qquad (30)$$

откуда, в частности, следует корректность последнего определения.

Пример 2 *Пусть у нас имеется произвольная система уравнений*

$$\frac{dx^i}{dt} = F_i(\vec{x}), \qquad i = 1,2,3$$

с первыми интегралами $H(\vec{x})$ *и* $K(\vec{x})$. *Поскольку вектор правых частей ортогонален градиентам* $\operatorname{grad} H$ *и* $\operatorname{grad} K$, *система может быть переписана в виде*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = m(\vec{x}) \operatorname{grad} H \times \operatorname{grad} K$$

для некоторой функции m. *Показать, что последняя система гамильтонова с гамильтонианом* H *и скобкой Пуассона* h_K *вида (28). Показать, что она также гамильтонова с гамильтонианом* $-K$ *и скобкой Пуассона* h_H. *Очевидно, что скобки Пуассона* h_K *и* h_H *согласованы (т.е. любая их линейная комбинация с постоянными коэффициентами является скобкой Пуассона). Поскольку всякая система с тремя неизвестными (локально) имеет два первых интеграла, мы показали, что любая такая система би-гамильтонова !*

Пример 3 *Пусть* M *– симплектическое многообразие, т.е.* M *– четномерное многообразие, на котором задана невырожденная замкнутая 2-форма* $\Omega = \omega_{ij}(x)dx^i \wedge dx^j$, $d\Omega = 0$. *Тогда тензорное поле* $h^{ij}(x)$, *где* $h^{ij}(x)$ *матрица, обратная к* $\omega_{ij}(x)$ *задает пуассонову структуру на* M. *Тем самым, любое симплектическое многообразие автоматически является пуассоновым.*

Лет 20 назад понятие гамильтоновой системы обычно определялось в терминах симплектической структуры (смотри например книгу Арнольда “Математические методы классической механики”). Преимущество такого подхода в том, что тождество Якоби эквивалентно **линейному** условию замкнутости на форму $\Omega = \omega_{ij}(x)dx^i \wedge dx^j$. В то же время в терминах тензора $h^{ij}(x)$ с верхними индексами тождество Якоби уже нелинейно. Однако во многих важных примерах тензор $h^{ij}(x)$ оказывается везде вырожденным и обратить его, чтобы получить симплектическую структуру нельзя.

Определение 6 *Функция* K *на Пуассоновом многообразии называется* **аннулятором скобки Пуассона** *или* **функцией Казимира**, *если ее скобка Пуассона со всеми функциями на* M *тождественно равна 0.*

$$\forall f \in C^{(\infty)}(M) \qquad \{f, H\} \equiv 0. \tag{31}$$

Упражнение 3 *Проверить, что K является функцией Казимира скобки Пуассона h_K вида (28).*

Пример 4 *Пусть M – двойственное пространство к алгебре Ли g с базисом e^1, ..., e^n и коммутатором*

$$[e^i, e^j] = c_k^{ij} e^k \tag{32}$$

(c_k^{ij} называются структурными константами алгебры), $M = g^*$. Тогда элементы алгебры e^j естественно интерпретировать как линейные функции на M (обозначим эти функции x^j соответственно.) Тем самам на линейных функциях на M задана скобка Пуассона

$$[x^i, x^j] = c_k^{ij} x^k, \qquad h^{ij}(x) = c_k^{ij} x^k, \tag{33}$$

естественно продолжающаяся на все гладкие функции на M, и мы получаем пуассоново многообразие с линейно зависящей от координат скобкой. Она называется скобкой Ли-Костанта-Кириллова-Березина (или скобкой Ли-Пуассона). Как правило, эта скобка вырождена и имеет нетривиальные функции Казамира.

Рассмотрим простейший пример скобки Ли-Пуассона (являющийся частным случаем Примера 1).

Пример 5 *Пусть g – алгебра Ли $so(3)$ с базисом e^1, e^2, e^3 и коммутатором*

$$[e^1, e^2] = -[e^2, e^1] = e^3, [e^2, e^3] = -[e^3, e^2] = e^1, [e^3, e^1] = -[e^1, e^3] = e^2. \tag{34}$$

Соответствующая скобка Пуассона имеет вид

$$h^{12}(x) = -h^{21}(x) = x^3, h^{23}(x) = -h^{32}(x) = x^1, h^{31}(x) = -h^{13}(x) = x^2. \tag{35}$$

Простейшая функция Казимира этой скобки имеет вид $K = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$, общий Казимир записывается в виде $f(K)$, где $f(y)$ – произвольная функция одной переменной. Симплектические листы этой скобки – сферы $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = \mathrm{const}$,

Упражнение 4 . *Ограничение описанной скобки на линии уровня $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = \mathrm{const}$ невырождено при $\mathrm{const} > 0$.*

Список литературы

[1] В.И.Арнольд. "Математические методы классической механики". М. Наука, 1974.

[2] Л.Д,Ландау, Е.М.Лифшиц. "Теоретическая физика, том I. Механика". М.: Наука, 1973.

[3] Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко. "Современная геометрия". М.: Наука. 1986.

[4] Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, "Гидродинамика слабо деформированных солитонных решеток. Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория " УМН, **44**, 6, 30-98 (1989)