Лекция 11.
27 апреля 2004 г.

Нетривиальным моментом теории Гамильтона-Якоби является введение функции $S(\vec{q},t)$, такой, что $p_i = S_{q_i}$. Для того, чтобы этот анзац был совместим с динамикой в силу уравнения Гамильтона, нужно чтобы S удовлетворяло уравнению Гамильтона-Якоби. Оказывается, чтобы разобраться с преобразованиями в $2N$-пространстве с координатами p_i, q_i, сохраняющими структуру уравнений Гамильтона (так называемые канонические преобразования), удобно расширить пространство, добавив S в качестве дополнительной коррдинаты.

В курсе обыкновенных дифференциальных уравнений часто используются так называемые точечные преобразования вида

$$\bar{q} = \phi(q,S), \qquad \bar{S} = \psi(q,S)$$

"перемешивающие"независимую переменную q и неизвестную функцию $S(q)$. Изучим более общие (чтобы не писать лишних индексов, рассмотрим случай одной независимой переменной) преобразования вида

$$\bar{q} = \phi(q,S,p), \qquad \bar{S} = \psi(q,S,p), \qquad \bar{p} = \chi(q,S,p), \qquad p = \frac{dS}{dq}. \tag{1}$$

Для любой функции $S(q)$ множество

$$\Big(q, S(q), \frac{dS}{dq}(q)\Big), \qquad q \in \mathbb{R} \tag{2}$$

является кривой в $\mathbb{R}^3$. Касательный вектор к любой такой кривой зануляется 1-формой $\omega = dS - p\,dq$. Мы хотим, чтобы преобразование (1) переводило любую кривую (2) снова в кривую такого же вида. Более формально, накладывается требование $dS - p\,dq = 0 \Leftrightarrow d\bar{S} - \bar{p}\,d\bar{q} = 0$. Имеем

$$d\bar{S} - \bar{p}\,d\bar{q} = \psi_q\,dq + \psi_S\,dS + \psi_p\,dp - \chi(\phi_q\,dq + \phi_S\,dS + \phi_p\,dp).$$

Подставляя сюда $dS = p\,dq$ и приравнивая к нулю коэффициенты при dq и dp, получаем

$$\psi_p = \chi\,\phi_p \tag{3}$$

$$(\psi_q + p\,\psi_S) = \chi\,(\phi_q + p\,\phi_S). \tag{4}$$

Из (3) функция χ выражается через ϕ, ψ. Соотношение (4), переписанное в виде

$$\psi_p\,(\phi_q + p\,\phi_S) = \phi_p\,(\psi_q + p\,\psi_S) \tag{5}$$

связывет функции ϕ и ψ и называется условием контактности, а сами преобразования (1), (3), (5) - **контактным.** Очивидно, что контактные преобразования образуют группу. Отметим, что точечные преобразования являются частным случаем контактных.

Пример 1 *Пусть $\phi = p$ и $\psi = -S + p\ q$. Тогда условие (5) выполнено, а (3) дает $\chi = q$. Соотвествующее преобразование*

$$\bar{q} = p, \qquad \bar{S} = -S + p\,q, \qquad \bar{p} = q \tag{6}$$

называется преобразованием Лежандра.

Соотношения (3), (5) записываются значительно проще, если переписать ψ в виде

$$\psi(q, S, p) = F(q, S, \phi(q, S, p)).$$

Для этого нужно выразить p через q, S и $\phi(q, S, p)$, что, конечно, всегда (локально) можно сделать, если $\phi_p \neq 0$. Простое вычисление дает

$$\chi = F_\psi, \qquad F_q + p\,F_S = 0$$

вместо (3) и (5). Эти соотношения совместно с (1) обычно записывают как

$$\bar{S} = F(q, S, \bar{q}), \qquad \bar{p} = \frac{\partial F}{\partial \bar{q}}, \qquad p = -\frac{\partial F}{\partial q}\left(\frac{\partial F}{\partial S}\right)^{-1}. \tag{7}$$

Функция $F(q, S, \bar{q})$ называется **производящей функцией** контактного преобразования (1). Нетрудно проверить, что для любой функции $F(q, S, \bar{q})$ формулы (7) задают (в неявной форме) некоторое контактное преобразование.

Пусть у нас имеется однопараметрическое семейство контактных преобразований

$$\bar{q} = \phi(q, S, p, \tau), \qquad \bar{S} = \psi(q, S, p, \tau), \qquad \bar{p} = \chi(q, S, p, \tau), \tag{8}$$

где

$$\phi(q, S, p, 0) = q, \qquad \psi(q, S, p, 0) = S, \qquad \chi(q, S, p, 0) = p. \tag{9}$$

Рассмотрим соответствующее векторное поле

$$X = a\frac{\partial}{\partial q} + b\frac{\partial}{\partial S} + c\frac{\partial}{\partial p},$$

где

$$a = \left.\frac{\partial \phi}{\partial \tau}\right|_{\tau=0}, \qquad b = \left.\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\right|_{\tau=0}, \qquad c = \left.\frac{\partial \chi}{\partial \tau}\right|_{\tau=0}.$$

Дифференцируя соотношения (3), (4) по τ, полагая $\tau = 0$ и используя (9) получаем

$$b_p = p\,a_p, \qquad b_q + p\,b_S = c + p\,(a_q + p\,a_S).$$

В терминах функции $H = p\,a - b$ эти соотношения упрощаются:

$$a = H_p, \qquad b = -H + pH_p, \qquad c = -H_q - p\,H_S,$$

откуда

$$X = H_p\,\frac{\partial}{\partial q} + (-H + pH_p)\,\frac{\partial}{\partial S} - (H_q + p\,H_S)\,\frac{\partial}{\partial p}. \tag{10}$$

Векторное поле X называется **контактным векторным полем**, а функция H - **контактным гамильтонианом** X. Соответствующую динамическую систему

$$\dot{q} = H_p, \qquad \dot{S} = -H + pH_p, \qquad \dot{p} = -H_q - p\,H_S \tag{11}$$

естественно называть контактным уравнением Гамильтона (хотя этот термин не является общепринятым). В случае, когда гамильтониан H не зависит от S, (11) совпадает с стандартным уравнением Гамильтона. Отметим, что контактный гамильтониан не является интегралом системы (11): $\dot{H} = -H H_S$.

Вспоминая о том, что основной формулой была $p_i = S_{q_i}$, находим $\dot{S} = S_t + pH_p$. Сравнивая с (11), убеждаемся еще раз, что для того, чтобы концы сошлись с концами, необходимо чтобы S удовлетворяло уравнению Гамильтона-Якоби $S_t + H = 0$.

При произвольном контактном преобразовании (1) контактное векторное поле с гамильтонианом $\bar{H}(\bar{q}, \bar{S}, \bar{p})$ переходит в контактное же векторное поле с гамильтонианом

$$H(q, S, p) = \frac{\phi_p}{\phi_p\psi_S - \psi_p\phi_S}\bar{H}(\phi, \psi, \chi). \tag{12}$$

Задача 1 *Доказать, что всякий контактный гамильтониан может быть подходящим контактным преобразованием превращен в единицу.*

Из формулы (12) видно, что если мы хотим, чтобы контактное преобразование (1) переводило всякий гамильтониан, не зависящий от S снова в гамильтониан, не зависящий от S, функции ϕ и χ не должны зависеть от S. Такие контактные преобразования легко описать. Из формул (3), (5) следует, что функция ψ должна иметь вид $\psi = cS + \Psi(q,p)$.

Контактные преобразования вида

$$\bar{q} = \phi(q,p), \qquad \bar{S} = -S + \psi(q,p), \qquad \bar{p} = \chi(q,p) \tag{13}$$

называются **каноническими.** Пример канонического преобразования доставляет преобразование Лежандра.

Для преобразований (13) условия (3), (5) имеют вид

$$\psi_p = \chi\phi_p, \qquad \phi_p\,\psi_q - \psi_p\,\phi_q = p\,\phi_p.$$

Производящая функция вводится формулой $\psi(q,p) = F(q,\ \phi(q,p))$. Тогда преобразование записывается в виде

$$\bar{S} = -S + F(q,\bar{q}), \qquad \bar{p} = \frac{\partial F}{\partial \bar{q}}, \qquad p = \frac{\partial F}{\partial q}.$$

Список литературы

[1] В.И.Арнольд. “Математические методы классической механики”. М. Наука, 1974.

[2] Л.Д,Ландау, Е.М.Лифшиц. “Теоретическая физика, том I. Механика”. М.: Наука, 1973.

[3] Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко. “Современная геометрия”. М.: Наука. 1986.