Лекция 1.
10 февраля 2004 г.

В классической механике используются три основных подхода (три формализма):

1. Ньютонов формализм.

2. Лагранжев формализм.

3. Гамильтонов формализм.

Пусть имеется система n материальных точек (частиц) с массами m_1, ..., m_n и координатами $\vec{x}_1$,...,$\vec{x}_n$. В **подходе Ньютона** уравнения движения (2 закон Ньютона) записываются в следующей форме:

$$\frac{d^2\vec{x}_k(t)}{dt^2} = \frac{1}{m_k}F_k(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \frac{d\vec{x}_1}{dt}, \dots, \frac{d\vec{x}_n}{dt}, t), \tag{1}$$

где $F_k(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \frac{d\vec{x}_1}{dt}, \dots, \frac{d\vec{x}_n}{dt}, t)$ - сила, действующая на k-ую частицу.

Положение каждой из частиц описывается вектором в 3-х мерном пространстве. Для упрощения обозначений удобно объединить n 3-х мерных вектора в один $3n$-мерный. Начиная с этого момента мы будем описывать состояния нашей системы точками N-мерного пространства ($N = 3n$) называемого **конфигурационным пространством**, вектор координат обозначать x (для упрощения обозначений мы будем опускать над x знак вектора), а вектор масс также будет $3n$-компонентным (масса k-ой частицы в нем стоит 3 раза подряд на позициях $3k-2$, $3k-1$, $3k$). Тогда уравнение (1) приобретает вид

$$\frac{d^2x^k(t)}{dt^2} = \frac{1}{m_k}F_k(x, \frac{dx}{dt}, t), \quad k = 1, \dots, N. \tag{2}$$

(В соответствие с правилами тензорного анализа мы будем писать индексы векторов сверху. При изучении скобок Пуассона правильные тензорные обозначения упрощает жизнь.)

Подход Ньютона наиболее универсален. Для него не существенно, являются ли силы фундаментальными (типа гравитационного или электромагнитного взаимодействия), или нет. Важный пример – сила трения не является фундаментальной. В действительности трение – сложный процесс, в котором конкурируют сразу несколько механизмов – неравномерность движения за счет неровностей поверхности, разрушение микровыступов, межмолекулярное притяжение. При этом энергия движения тел переходит в энергию тепловых колебаний атомов, не учитываемую в механических моделях. Тем самым, несохранение энергии в системах с трением оказывается следствием используемого приближения.

Другие два подхода, о которых мы собираемся говорить (Лагранжев и Гамильтонов), годятся лишь для систем, в которых механическая энергия сохраняется (и, в частности, нет трения). Для фундаментальных взаимодействий эти подходы хорошо работают и имеют ряд приемуществ.

Лагранжев формализм основан на **принципе наименьшего действия.**

Рассмотрим простейший пример. Пусть сила взаимодействия в нашей системе зависит только от координат, но не скоростей и является потенциальной, т.е. существует функция $U(x,t)$ такая, что

$$F_k(x,t) = -\frac{\partial U(x,t)}{\partial x^k}. \tag{3}$$

Замечание 1 *Условие (3) означает что 1-форма*

$$F = F_k(x,t)dx^k \tag{4}$$

является **точной**. *В односвязных областях точность эквивалентна* **замкнутости** $dF = 0$. *Если область неодносвязна, то кроме локального условия замкнутости нужно наложить нелокальное условие – потребовать равенство 0 интегралов по всем циклам.*

Определим **лагранжиан** (функцию Лагранжа) $L = T - U$ как разность кинетической и потнциальной энергии:

$$L(x,\dot{x},t) = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k(\dot{x}^k)^2}{2} - U(x,t), \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt}. \tag{5}$$

Каждой траектории $x(t)$, $x \in \mathbb{R}^N$, $t \in [t_1, t_2]$ сопоставим функционал **действия**:

$$S[x(t)] = \int\limits_{t_1}^{t_2} L(x,\dot{x},t)dt. \tag{6}$$

(Мы используем квадратные скобки, чтобы подчеркнуть, что $S[x(t)]$ - функция, аргумент которой – **вся траектория**, а не положение частицы при каком-то t. Здесь мы считаем, что траектория – это произвольное гладкое отображение отрезка $[t_1, t_2]$ в $\mathbb{R}^N$, для которого уравнения движения Ньютона (2) не обязаны выполняться.

Оказывется, что движение системы с потенциальным взаимодействием допускает следущее описание:

Зафиксируем начало траектории (t_1, x_1) и её конец (t_2, x_2). Рассмотрим все возможные траектории $x(t)$, начинающиеся в момент времени t_1 в точке x_1 и заканчивающиеся в момент времени t_2 в точке x_2. Тогда **истинным движениям системы (таким, что выполнены уравнения движения (2)) отвечают экстремали функционала $S[x(t)]$ на нашем множестве траекторий**. Достаточно часто условие экстремумы оказываются минимумами, что и оправдывет название **принцип наименьшего действия.**

Ниже мы докажем это. Однако хотелось бы сделать небольшое замечание общего характера. Приведенная формулировка выглядит очень странной. Неужели на каждой частице установлен компьютер, просчитывающий все возможные траектории и отбирающий экстремальные? Конечно вычисление показывает, что экстремали и решения уравнений Ньютона – одно и тоже, однако удивление остается. Ответ на этот вопрос дан в книге Фейнмана [4] в главе "Принцип наименьшего действия".

Обсудим сначала ситуацию в оптике. Как известно, распространение света в системе зеркал и линз можно описывать двумя способами.

1. Локальные законы:
   - В среде с постоянным показателем преломления траектории лучей прямолинейны.
   - Угол падения равен углу отражения.
   - Закон Снеллиуса: на границе двух сред выполнено соотношение: $k_1 \sin\theta_1 = k_2 \sin\theta_2$, где k_1, k_2 – показатели преломления сред θ_1, θ_2 - углы луча с нормалью к поверхности раздела. При этом падающий луч, прошедший луч и нормаль лежат в одной плоскости.
2. Принцип наименьшего действия Ферма: из всех возможных траекторий, соединяющих пару точек A, B свет выбирает путь, время

движения по которому минимально (экстремально, если быть более строгим). Напомним, что скорость света в среде $\tilde{c} = c/k$, где c - скорость света в вакууме, k - показатель преломления.

В случае света прицип наименьшего действия не выглядит столь удивительным, поскольку распространение волн в среде происходит следующим образом: Когда волна доходит до точки, то она возбуждет колебание в ней, после чего эта точка сама становится вторичным источником излучения(принцип Гюйгенса). Тем самым, волны распространяются по всем возможным путям, однако вблизи неэкстемальных траекторий происходит взаимное сокращение вкладов соседних траекторий из-за разницы фаз. В то же время в окрестности экстремальной траектории фазы оказываются синхронизированы, что и порождает ненулевой вклад.

Оказывается, что механический принцип наименьшего действия имеет похожеее объяснение, поскольку наш мир - квантовый, и все частицы - одновременно и волны де Бройля. Принцип наименьшего действия оказывется классическим пределом подхода, использующего фейнмановские интегралы по траекториям. Однако Лагранж жил в конце 18 - начале 19 века, а квантовая механика была создана лишь в 20-м. Удивительное наблюдение получило объяснение лишь веком позже.

Теорема 1 *Предположим, что мы зафиксировали два момента времени t_1, t_2 и две точки конфигурационного пространства x_1, x_2. Рассмотрим пространство всех кривых с закрепленными концами, т.е. отображений $x(t) : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^N$ таких, что*

$$x(t_1) = x_1, x(t_2) = x_2. \tag{7}$$

Пусть $L(x, \dot{x}, t)$ - некоторая произвольная функция от $N + N + 1$ - переменной, действие $S[x(t)]$ задано формулой

$$S[x(t)] = \int\limits_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t)dt. \tag{8}$$

Тогда экстремали функционала $S[x(t)]$ на пространстве кривых с закрепленными концами описываются уравнениями Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial x^k} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}^k}\right] = 0. \tag{9}$$

Доказательство. Рассмотрим малую вариацию траектории $x(t) \to x(t)+\delta x(t)$. При этом как $\delta x(t)$ так и $\delta \dot{x}(t)$ будем считать малыми. Разлагая $L(x(t)+\delta x(t), \dot{x}(t)+\delta \dot{x}(t), t)$ в ряд Тейлора и сохраняя лишь линейную часть, получаем:

$$S[x(t)+\delta x(t)]-S[x(t)] = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L(x,\dot{x},t)}{\partial x^k}\delta x(t) + \frac{\partial L(x,\dot{x},t)}{\partial \dot{x}^k}\delta \dot{x}(t)\right] dt+O((\delta x(t))^2), \tag{10}$$

т.е.

$$\delta S[x(t)] = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L(x,\dot{x},t)}{\partial x^k}\delta x^k(t) + \frac{\partial L(x,\dot{x},t)}{\partial \dot{x}^k}\delta \dot{x}^k(t)\right] dt. \tag{11}$$

(здесь мы используем правило Эйнштейна – если некоторый индекс встречается один раз сверху и один раз снизу, то по нему осуществляется суммирование. При этом знак суммы не пишется).

Формула (11) не является удовлетворительной, поскольку вариции $\delta x(t)$ и $\delta \dot{x}(t)$ не являются независимыми (первая из них полностью определяет вторую). Чтобы избавиться от $\delta \dot{x}(t)$, проинтегрируем второе слагаемое в (11) по частям:

$$\delta S[x(t)] = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L(x,\dot{x},t)}{\partial x^k} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L(x,\dot{x},t)}{\partial \dot{x}^k}\right]\right] \delta x^k(t) dt + \frac{\partial L(x,\dot{x},t)}{\partial \dot{x}^k}\delta x^k(t)\Big|_{t_1}^{t_2}. \tag{12}$$

Напомним, что мы рассматриваем задачу с закрепленными концами, т.е.

$$\delta x^k(t)\big|_{t=t_1} = \delta x^k(t)\big|_{t=t_2} = 0, \tag{13}$$

и граничный член в (12) равен 0. Тем самым

$$\delta S[x(t)] = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L(x,\dot{x},t)}{\partial x^k} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L(x,\dot{x},t)}{\partial \dot{x}^k}\right]\right] \delta x^k(t) dt. \tag{14}$$

Интеграл (14) равен 0 для всех функций $\delta x(t)$ (единственное ограничение на $\delta x(t)$ – обращение в 0 на концах отрезка). Отсюда несложно увидеть, что

$$\frac{\partial L(x,\dot{x},t)}{\partial x^k} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L(x,\dot{x},t)}{\partial \dot{x}^k}\right] = 0, \tag{15}$$

при всех k и при всех x, что и завершает доказательство.

Задача 1 *Расписать более подробно уравнение (9).*

Ответ.

$$\frac{\partial L(x,\dot{x},t)}{\partial x^k}-\frac{dx^l}{dt}\frac{\partial^2 L(x,\dot{x},t)}{\partial x^l\partial \dot{x}^k}-\frac{d^2x^l}{dt^2}\frac{\partial^2 L(x,\dot{x},t)}{\partial \dot{x}^l\partial \dot{x}^k}-\frac{\partial^2 L(x,\dot{x},t)}{\partial t\partial \dot{x}^k}=0. \qquad (16)$$

Теорема 2 *Если в качестве лагранжина системы взять разность кинетической и потенциальной энергии*

$$L(x,\dot{x},t)=\sum_{k=1}^{N}\frac{m_k(\dot{x}^k)^2}{2}-U(x,t), \quad \dot{x}=\frac{dx}{dt}, \qquad (17)$$

то получаются обычные уравнения Ньютона.

Доказательство получается прямой подстановкой (17) в (15).

Замечание 2 *Вариационное исчисление – достаточно нетривиальная область математики, в которой, в частности задача доказательства существования решений и обоснования формальных вычислений может оказаться крайне сложной. Мы не будем обсуждать этих тонких вопросов, а ограничимся лишь уровнем формул.*

Замечание 3 *Мы рассматриваем Лагранжины, зависящие лишь от функции и ее первой прозводной. Существует также вариационное исчисление систем с высшими производными, однако мы его в ближайшее время обсужудать не будем.*

Чем же хорош Лагранжев формализм? Оказывается, что он значительно более удобен при изучении симметрий и законов сохранения. Например если движение в теория отностительности описывать дифференциальными уравнениями по времени t, то релятивистскую инвариантность специально проверять, а принцип наименьшего действия можно с самого начала записывать в релятивистски-инвариантной форме. Что это значит?

Совсем коротко основной постулат специальной теории относительности можно сформулировать следующим образом: Введем на 4-х мерном пространстве-времени $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ следующее псевдоэвклидово склярное произведение:

$$ds^2=c^2t^2-x^2-y^2-z^2. \qquad (18)$$

Величина ds/c имеет физический смысл приращения времени по часам частицы при движении по данной траектории.

Тогда уравнения физики должны быть инвариантными относительно **группы Пуанкаре** – группы преобразовний вида

$$\begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \tag{19}$$

где U - 4×4 матрицы, сохраняющие скалярное произведение (17), или, что эквивалентно, удовлетворяющие соотношению

$$U^t \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Группа таких матриц, равно как и соотвествующая группа преобразований назывются группой Лоренца. Видно, что в отличие от классической механике, время при преобразованиях "перемешивается" с координатами, поэтому дифференциальные уравнений по t не удается записать в инвариантном виде. В то же время действие обычно оказывается инвариантным отностительно преобразований Пуанкаре.

Пример 1 *Р.Фейнман предложил одному из ассистентов Эйнштейна следующую задачу: Рассмотрим частицу в гравитационном поле. Как выбрать её траекторию (начальный и конечный момент времени равно как и начальная и конечная точка траектории предполагаются заданными) чтобы врема прошедшее по часам частицы было наибольшим? С одной стороны чем дальше от притягивающего тела, тем время течет быстрее, и желательно, чтобы траектория как проходила как можно дальше от него. С другой стороны, чтобы удальться от притягивающего тела достаточно далеко за конечное время, придется развить большую скорость, а время при этом замедляется. Как же выбрать оптимальный баланс? К удивлению Фейнмана собеседник не смог сразу ответить. Ответ очень прост: решение дается свободным движением в поле тяжести. На самом деле принцип наменьшего действвия для движения в поле тяжести в общей теории относительности так и формулируется. Уравнения Эйлера-Лагранжа для этой задачи столь же просто не сформулируешь.*

Одно из важнейших свойств лагранжевой механики – **каждой симметрии системы отвечает закон сохранения.** Почему это важно? Первый яркий пример симметрийного анализа – доказательство неразрешимости алгебраических уравнений 5-ой степени в радикалах. Если в физике мы имеем сложную систему, детальное строение которой неизвестно, то нет надежды получить полную систему уравнений, описывающих ее. В то же время, законы сохранения энергии, импульса, заряда позволяют наложить ограничения на возможное поведение системы, которые и оказываются “устойчивыми”. Так например, наша материя не распадается на фотоны благодаря сохранению барионного заряда.

Пусть наша система является **консервативной**, т.е. ее лагранжиан L не зависит явно от времени: $L(x, \dot{x}, t) = L(x, \dot{x})$. Убедимся, что любая консервативная лагранжева система обладает интегралом движения. Пусть $x(t)$ – некоторая траектория, $\tilde{x}(t) = x(t + \delta t)$ – её сдвиг по времени на δt,

$$S[x(t)] = \int\limits_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}) dt, \quad S[\tilde{x}(t)] = \int\limits_{t_1+\delta t}^{t_2 \delta t} L(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) dt. \tag{21}$$

Из консервативности следует, что $S[\tilde{x}(t)] - S[x(t)] = 0$. Вычислим этот 0 “по науке”, учитывая, что $\tilde{x}(t) - x(t) = -\dot{x}(t)\delta t + O((\delta t)^2)$.

$$S[\tilde{x}(t)] - S[x(t)] = \int\limits_{t_2}^{t_2+\delta t} L(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) dt - \int\limits_{t_1}^{t_1+\delta t} L(x, \tilde{x}) dt + \int\limits_{t_1+\delta t}^{t_2} L(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) - L(x, \tilde{x}) dt =$$

$$= L(x(t_2), \dot{x}(t_2)) - L(x(t_1), \dot{x}(t_1)) - \tag{22}$$

$$- \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^k} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^k} \right] \right] \dot{x}(t) dt - \left. \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^k} \dot{x}^k(t) \right|_{t_1}^{t_2} + O(t^2) =$$

$$= \left. \left[L(x, \dot{x}) - \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^k} \dot{x}^k(t) \right] \right|_{t_1}^{t_2} - \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^k} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^k} \right] \right] \dot{x}(t) dt + O(t^2).$$

Если $x(t)$ – физическая траетория движения (удовлетворяющая уравнениям Эйлера-Лагранжа), то второй член обращается в 0 и мы имеем:

$$0 = \delta S[x(t)] = \left. \left[L(x, \dot{x}) - \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^k} \dot{x}^k \right] \right|_{t_1}^{t_2}, \tag{23}$$

т.е. величина

$$H(x,\dot{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^k}\dot{x}^k - L(x,\dot{x}) \tag{24}$$

постоянна вдоль физических траекторий и, тем самым, задает закон сохранения для нашей системы. Мы доказали

Теорема 3 *Любая консервативная Лагранжева система (система, лагранжиан которой не зависит явно от времени) обладает законом сохранения $H(x,\dot{x})$, задаваемым формулой (24).*

Несложно проверить, что если $L = T - U$ – лагранжиан классической механики (17), т.е. разность кинетической и потенциальной энергии, то $H = L + U$ – полная энергия. На самом деле это правильно считать определением:

Определение 1 *Если L – лагранжиан некоторой консервативной системы, то закон сохранения H, порождаемый инвариантностью относительно сдвигов по времени, называется* **энергией**.

Именно это определение и используется в современной физике.

Убедимся, что любое непрерывное однопараметрической семейство симметрий лагранжевой системы порождает закон сохранения.

Теорема 4 (Теорема Нётер) *Пусть M^N - некая область в N-мерном пространстве (или N-мерное многообразие), $L(x,\dot{x})$ - функция на парах $(x,\dot{x})$, где x - точка M^N, $\dot{x}$ - вектор, касательный к точке x (в случае, когда M^N - многообразие, L - функция на касательном пространстве). Предположим , что наш лагранжиан инвариантен относительно однопараметрического семейства диффеоморфизмов*

$$h(\tau) : M^N \to M^N, \tag{25}$$

или, в локальных координатах

$$h(\tau) : (x^1,\dots,x^N) \to (h^1(\tau,x),\dots,h^N(\tau,x)), \tag{26}$$

и, кроме того, $h(0)$ - тождественное отображение.

Тогда величина

$$I(x,\dot{x}) = \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^k}\,\frac{\partial h^k(\tau,x)}{\partial \tau}\bigg|_{\tau=0} \tag{27}$$

является интегралом движения системы с лагранжианом $L(x,\dot{x})$.

Отметим, что

$$v^k(x) = \left.\frac{\partial h^k(\tau, x)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} \tag{28}$$

- векторное поле, получающееся разложением семейства диффеоморфизмов $h(\tau)$ по τ при $\tau = 0$. Если $h(\tau)$ – не просто семейство диффеоморфизмов, а однопарметрическая группа ($h(\tau_1+\tau_2) = h(\tau_1) \circ h(\tau_2)$), то поле v – элемент её алгебры Ли (генератор этой группы).

Доказательство: При преобразовниях $x(t) \to h(\tau, x(t))$ действие системы остается неизменным. При $\tau \to 0$ имеем:

$$0 = \delta S[x(t)] = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L(x,\dot{x},t)}{\partial x^k} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L(x,\dot{x},t)}{\partial \dot{x}^k}\right]\right] \delta x^k(t)dt + \left.\frac{\partial L(x,\dot{x},t)}{\partial \dot{x}^k}\delta x^k(t)\right|_{t_1}^{t_2}, \tag{29}$$

а на физических траекториях (опять используем уравнения Эйлера-Лагранжа)

$$0 = \delta S[x(t)] = \left.\frac{\partial L(x,\dot{x},t)}{\partial \dot{x}^k}\delta x^k(t)\right|_{t_1}^{t_2}. \tag{30}$$

Поскольку

$$\delta x^k(t) = \left.\frac{\partial h^k(\tau, x)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} \delta\tau + O((\delta\tau)^2), \tag{31}$$

имеем:

$$\left.\left.\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^k}\;\frac{\partial h^k(\tau, x)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0}\right|_{t_1}^{t_2} = 0, \tag{32}$$

т.е. величина $I(x,\dot{x})$ постоянна на физических траекториях.

Лекция 11.
27 апреля 2004 г.

В моделях типа общей теории относительности, где основные преобразования "перемешивают"временную и пространственые координаты полезна следующая более общая версия теоремы Нётер:

Теорема 5 (Обобщенная теорема Нётер) *Предположим, что лагранжиан $L(t, x, \dot{x})$ инвариантен относительно однопараметрического семейства диффеоморфизмов*

$$h(\tau) : \mathbb{R}^1 \times M^N \to \mathbb{R}^1 \times M^N, \tag{33}$$

или, в локальных координатах

$$h(\tau) : (t, x^1, \dots, x^N) \to (g(\tau, t, x),\, h^1(\tau, t, x), \dots, h^N(\tau, t, x)), \tag{34}$$

и, кроме того, $h(0)$ - тождественное отображение.

Тогда величина

$$I(t, x, \dot{x}) = \frac{\partial L(t, x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^k} \Phi_i + \left(L - \frac{\partial L(t, x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^k}\, \dot{x}^k \right) \Psi, \tag{35}$$

где

$$\Phi_i = \left. \frac{\partial h^k(\tau, t, x)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0}, \qquad \Psi = \left. \frac{\partial g(\tau, t, x)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0},$$

является интегралом движения системы с лагранжианом $L(t, x, \dot{x})$.

Задача. Доказать Теорему 5.

Выведем из теоремы Нетер основные законы сохранения в задаче о движении системы из N материальных точек с лагранжианом L. Обозначим координаты точки с номером i через $\vec{x}_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3})$. Импульсом точки называется вектор

$$\vec{p}_i = \left(\frac{\partial L(t, x, \dot{x})}{\partial \dot{x}_{i,1}}, \frac{\partial L(t, x, \dot{x})}{\partial \dot{x}_{i,2}}, \frac{\partial L(t, x, \dot{x})}{\partial \dot{x}_{i,3}} \right).$$

Основными физическими постулатами в задаче являются

1. Однородность времени или, что тоже самое, инвариантность лагранжиана относительно группы

$$t \to t + \tau, \qquad x_{i,j} \to x_{i,j};$$

2. Однородность пространства, задаваемая тремя однопараметрическими группами симметрий лагранжиана

$$x_{i,j} \to x_{i,j} + \tau_j, \qquad j = 1, 2, 3;$$

3. Изотропность пространства, соответствующая инвариантности относительно трех однопараметрических групп вращений вокруг осей OX, OY и OZ.

В случае 1 имеем $\Phi_i = 0, \Psi = 1$ и Теорема 5 дает закон сохранения энергии (ср. с Теоремой 3).

Для группы

$$x_{i,1} \to x_{i,1} + \tau, \qquad x_{i,2} \to x_{i,2}, \qquad x_{i,3} \to x_{i,3}$$

теорема Нетер дает закон сохранения первой компоненты импульса системы

$$P_1 = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L(t, x, \dot{x})}{\partial \dot{x}_{i,1}}.$$

Аналогично, сохраняются вторая и третья компонентны P_2 и P_3. Вектор

$$\vec{P} = (P_1, P_2, P_3) = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$$

называется импульсом системы.

Рассмотрим случай 3. Вращение системы вокруг оси OZ задается формулой

$$x_{i,1} \to x_{i,1}cos(\tau) + x_{i,2}sin(\tau), \quad x_{i,2} \to -x_{i,1}sin(\tau) + x_{i,2}cos(\tau), \quad x_{i,3} \to x_{i,3}.$$

Следовательно, сохраняется величина

$$M_3 = \sum_{i=1}^{N} \left(x_{i,1} \frac{\partial L(t, x, \dot{x})}{\partial \dot{x}_{i,2}} - x_{i,2} \frac{\partial L(t, x, \dot{x})}{\partial \dot{x}_{i,1}} \right).$$

Аналогично, сохраняются и две другие компоненты вектора

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \vec{x}_i \times \vec{p}_i,$$

который называется моментом системы.

Список литературы

[1] В.И.Арнольд. “Математические методы классической механики”. М. Наука, 1974.

[2] Л.Д,Ландау, Е.М.Лифшиц. “Теоретическая физика, том I. Механика”. М.: Наука, 1973.

[3] Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко. “Современная геометрия”. М.: Наука. 1986.

[4] Р.Фенман, Р.Лейтон, М.Сэндс. “Фейнмановские лекции по физике. т.6. Электродинамика”. М: Мир. 1966.

[5] Р.Фенман, Р.Лейтон, М.Сэндс. “Фейнмановские лекции по физике. т.3. Излучение, волны, кванты”. М: Мир. 1965.

[6] Л.Д,Ландау, Е.М.Лифшиц. “Теоретическая физика, том II. Теория поля”. М.: Наука, 1973.

[7] Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков “Квантовые поля”. М.: Наука, 1980.