Лекция 3.

Сосредоточимся на исследовании специального случая, когда форма $\omega^{ij}(\vec{x})$ почти всюду на M невырождена. Если исходная скобка имела нетривиальные аннуляторы, то будем считать, что M – ее симплектический лист.

Каждому невырожденному кососимметрическому 2-тензору $\omega^{ij}(\vec{x})$ на M естественно поставить в соответствие следующую 2-форму

$$\omega = \omega_{ij}(\vec{x}) dx^i \wedge dx^j, \tag{1}$$

где $\omega_{ij}(\vec{x})$ – матрица, обратная к $\omega^{ij}(\vec{x})$:

$$\omega_{i\alpha}(\vec{x})\omega^{\alpha j}(\vec{x}) = \delta_i^j. \tag{2}$$

Как мы отмечали в Лекции 2, тождество Якоби эквивалентно следующему набору квадратичных соотношений на тензор $\omega_{ij}(\vec{x})$:

$$\omega^{il}(\vec{x})\frac{\partial \omega^{jk}(\vec{x})}{\partial x^l} + \omega^{jl}(\vec{x})\frac{\partial \omega^{ki}(\vec{x})}{\partial x^l} + \omega^{kl}(\vec{x})\frac{\partial \omega^{ij}(\vec{x})}{\partial x^l} \equiv 0 \quad \text{для всех} \quad i, j, k. \tag{3}$$

Теорема 1 *В предположении, что в некоторой области U форма $\omega^{ij}(\vec{x})$ нигде не вырождена, условия (3) эквивалентны замкнутости формы ω: $d\omega = 0$. Напомним, что в координатном представлении условие $d\omega = 0$ записывается как следующий набор соотношений*

$$\frac{\partial \omega_{ij}(\vec{x})}{\partial x^k} + \frac{\partial \omega_{jk}(\vec{x})}{\partial x^i} + \frac{\partial \omega_{ki}(\vec{x})}{\partial x^j} = 0 \quad \textit{для всех} \quad i, j, k. \tag{4}$$

Доказательство. Дифференциируя (2) по x^k получаем:

$$\frac{\partial \omega_{i\alpha}(\vec{x})}{\partial x^k}\omega^{\alpha j}(\vec{x}) + \omega_{i\alpha}(\vec{x})\frac{\partial \omega^{\alpha j}(\vec{x})}{\partial x^k} = 0.$$

Умножая на $\omega^{\beta i}(\vec{x})$ получаем

$$\omega^{\beta i}(\vec{x})\frac{\partial \omega_{i\alpha}(\vec{x})}{\partial x^k}\omega^{\alpha j}(\vec{x}) + \omega^{\beta i}(\vec{x})\omega_{i\alpha}(\vec{x})\frac{\partial \omega^{\alpha j}(\vec{x})}{\partial x^k} = 0,$$

т.е.

$$\omega^{\beta i}(\vec{x})\frac{\partial \omega_{i\alpha}(\vec{x})}{\partial x^k}\omega^{\alpha j}(\vec{x}) + \frac{\partial \omega^{\beta j}(\vec{x})}{\partial x^k} = 0,$$

$$\frac{\partial\omega^{\beta j}(\vec{x})}{\partial x^k} = -\omega^{\beta i}(\vec{x})\frac{\partial\omega_{i\alpha}(\vec{x})}{\partial x^k}\omega^{\alpha j}(\vec{x}),$$
$$\frac{\partial\omega^{ij}(\vec{x})}{\partial x^k} = \omega^{i\alpha}(\vec{x})\omega^{j\beta}(\vec{x})\frac{\partial\omega_{\alpha\beta}(\vec{x})}{\partial x^k} \quad (5)$$

Подставляя (5) В (3) и заменяя l на γ получем

$$\omega^{i\gamma}(\vec{x})\omega^{j\alpha}(\vec{x})\omega^{k\beta}(\vec{x})\frac{\partial\omega_{\alpha\beta}(\vec{x})}{\partial x^\gamma} + \omega^{i\beta}(\vec{x})\omega^{j\gamma}(\vec{x})\omega^{k\alpha}(\vec{x})\frac{\partial\omega_{\alpha\beta}(\vec{x})}{\partial x^\gamma}+$$
$$+\omega^{i\alpha}(\vec{x})\omega^{j\beta}(\vec{x})\omega^{k\gamma}(\vec{x})\frac{\partial\omega_{\alpha\beta}(\vec{x})}{\partial x^\gamma} \equiv 0 \quad \text{для всех} \quad i, j, k.$$

Заменой немых индексов получаем

$$\omega^{i\gamma}(\vec{x})\omega^{j\alpha}(\vec{x})\omega^{k\beta}(\vec{x})\frac{\partial\omega_{\alpha\beta}(\vec{x})}{\partial x^\gamma} + \omega^{i\gamma}(\vec{x})\omega^{j\alpha}(\vec{x})\omega^{k\beta}(\vec{x})\frac{\partial\omega_{\beta\gamma}(\vec{x})}{\partial x^\alpha}+$$
$$+\omega^{i\gamma}(\vec{x})\omega^{j\alpha}(\vec{x})\omega^{k\beta}(\vec{x})\frac{\partial\omega_{\gamma\alpha}(\vec{x})}{\partial x^\beta} \equiv 0 \quad \text{для всех} \quad i, j, k,$$

т.е.

$$\omega^{\tilde{\gamma}\gamma}(\vec{x})\omega^{\tilde{\alpha}\alpha}(\vec{x})\omega^{\tilde{\beta}\beta}(\vec{x})\left(\frac{\partial\omega_{\alpha\beta}(\vec{x})}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial\omega_{\beta\gamma}(\vec{x})}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial\omega_{\gamma\alpha}(\vec{x})}{\partial x^\beta}\right) \equiv 0 \quad \text{для всех} \quad \tilde{\gamma}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta},$$

откуда следует (4). Теорема доказана.

Определение 1 *Многообразие M с заданной на нем замкнутой нигде не вырожденной 2-формой ω называется* **симплектическим многообразием,** *а сама ω –* **симплектической структурой.**

Из вышесказанного понятно, что каждое симплектическое многообразие автоматически пуассоново с пуассоновой структурой, задаваемой формулой (2).

Замечание 1 *В окрестности любой точки симлектического многообразия можно построить локальную систему координат $x^1,\dots,x^n$, $p_1,\dots,p_n$, в которой форма ω приводится к каноническому виду*

$$\omega = dp_1 \wedge dx^1 + dp_2 \wedge dx^2 + \ldots + dp_n \wedge dx^n, \quad (6)$$

или, что эквивалентно,

$$\{p_i, p_j\} = \{x^i, x^j\} = 0, \quad \{x^j, p_i\} = \delta^j_i. \quad (7)$$

Такие координаты называются **каноническими координатами.** *Доказательство этого утверждения, называемого* **Теоремой Дарбу,** *приведено, например, в книге Арнольда "Математические методы классической механики". Потому, в частности, в ряде учебников гамильтонов формализм строится сразу в канонических координатах. Однако приведение к каноническому виду во-первых, не всегда возможно глобально (топологические препятствия, мешающие этому, могут оказываться существенными характеристиками системы, важный пример – заряженная частица в поле монополя Дирака); во-вторых, нахождение канонических координат для конкретной системы может оказаться достаточно сложной задачей. Поэтому удобнее разрешать работу в произвольных координатах.*

На предыдущей лекции мы доказали теорему о сохранении пуассоновой структуры под действием гамильтоновых потоков. Если пуассонова структура не вырождена, то мы сохраняется и обратная к ней симплектическая структура. Отсюда вытекает:

Теорема 2 *Пусть M – $2n$-мерное симплектическое многобразие с симплектической структурой ω, H – некоторый гамильтониан на M, h – отвечающее H – гамильтоново векторное поле. Тогда порождаемые h преобразования M сохраняют симплектическую структуру ω и все ее внешние степени $\omega \wedge \omega$, $\omega \wedge \omega \wedge \omega$, $\ldots$. В частности эти преобразования сохраняют форму*

$$\Omega = \underbrace{\omega \wedge \omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{n \text{ раз}}, \tag{8}$$

называемую **формой фазового объема.** *(Легко проверяется, что все эти формы невырождены).*

Другими словами, пусть N – некоторое $2l$ – мерное компактное подмногообразие M (возможно, с краем), N_t – сдвиг N вдоль поля h за время t. Тогда

$$\frac{\partial I}{\partial t} = 0, \quad \text{где} \quad I = \int_{N_t} \underbrace{\omega \wedge \omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{l \text{ раз}}.$$

В частности, если выбрать компактную область в M, то ее объем, вычисленный по форме Ω, сохраняется при действии гамильтоновых потоков. Это утверждение называется **теоремой Лиувилля о сохранении фазового объема.**

Приведем для справки без доказательства следующую несложную теорему (доказательство имеется, напрмер, у Арнольда):

Теорема 3 *Пусть h – произвольное векторное поле на M сохраняющее симплектическую структуру M (т.е. такое, что $L_h\omega = 0$, где L_h – производная Ли). Тогда оно* **локально гамильтоново***, т.е. в окрестности каждой точки x_0 можно определить функцию $H_{x_0}(\vec{x})$ (вообще говоря разную для разных x_0) такую, что гамильтонов поток, порождаемый $H_{x_0}(\vec{x})$ там, где он определен, совпадает с h.*

Пример 1 *Пусть M – кольцевая область в $\mathbf{R}^2$: $R_1^2 < x^2 + p^2 < R_2^2$, $\omega = dp \wedge dx$. Введем полярные координаты: $x = r\cos(\phi)$, $p = r\sin(\phi)$. В них*

$$\omega = r d\phi dr, \quad \{r, r\} = \{\phi, \phi\} = 0, \quad \{r, \phi\} = \frac{1}{r}.$$

Рассмотрим следующее поле

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0.$$

Это поле сохраняет симплектическую структуру (проверить!), и локально гамильтоново с гамильтонианом $H(r, \phi) = \phi$. Однако в нашей области ϕ – многозначная функция, и определеных во всей M однозначных гамильтонанов для h не существует. Тем самым h локально гамильтоново, но не гамильтоново.

Если гамильтонова структура на пуассоновом многообразии M везде невырождена (или, что эквивалентно, M – симплектическое многообразие), то функция H порождает нулевой гамильтонов поток на M тогда и только тогда, когда H постоянно на каждой связной компоненте M. Далее будем считать M связным.

Потоки, порождаемые парой гамильтонианов H_1 и H_2 коммутируют тогда и только тогда, когда $\{H_1, H_2\} = \text{const}$. В частности, если $\{H_1, H_2\} = 0$, то соответствущие потоки коммутируют.

Определение 2 *Гамильтонианы H_1 и H_2* **находятся в инволюции***, если $\{H_1, H_2\} = 0$.*

Лемма 1 *Пусть M – связное симплектическое многообразие размерности $2n$. Тогда на нем существует не более n независимых функций в инволюции.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $H_1, \ldots, H_{n+1}$ – некоторые независимые функции в инволюции. Тогда в точке общего положения их можно дополнить некоторыми функциями $z^1, \ldots, z^{n-1}$ до локальной системы координат. В этих координатах пуассонова структура в блочном виде,

$$\omega^{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ * & \vdots & * \end{bmatrix},$$

причем нулевой блок имеет размер $n+1 \times n+1$. Отсюда сразу следует, что определитель этой матрицы равен 0, и мы пришли к противоречию, что и доказывает Лемму.

Пусть $2n$- мерная гамильтонова система обладает максимально возможным числом независимых интегралов в инволюции – n, т.е. мы имеем набор n коммутирующих гамильтоновых потоков. Это влечет за собой ряд следствий, составляющих содержание важнейшей **теоремы Лиувилля об интегригрируемости**:

Теорема 4 *Пусть M – $2n$ мерное симплектическое многообразие, H_1, $\ldots$, H_n – n независимых функций на M в инволюции, т.е.*

$$\{H_i, H_j\} \equiv 0 \text{ для всех } i, j.$$

Тогда набор гамильтоновых потоков $h_1, \ldots, h_n$ на M с гамильтонианами $H_1, \ldots, H_n$, называется **интегрируемой по Лиувиллю (или вполне интегрируемой) системой** *и обладает следующими замечательными свойствами:*

1. *Рассмотрим n-мерное подмногообразие $N_{\vec{H}}$ – множество уровня законов сохранения*

$$H_1 = c_1, \ldots H_n = c_n, \quad \vec{c} = (c_1, \ldots, c_n), \tag{9}$$

инвариантное относительно потоков $h_1,\ldots,h_n$. Предположим дополнительно, что вблизи точки $\vec{c} = \vec{c}_0$ выполнены следующие условия

   (a) *Гамильтонианы $H_1,\ldots,H_n$ независимы во всех точках $N_{\vec{H}}$ (а не только в точках общего положения), и, следовательно, многообразия $N_{\vec{H}}$ неособы. Напомним, что независимость* *функций $H_1,\dots,H_n$ в некотой точке означает линейную независимость их дифференциалов в этой точке.*

(b) *Многообразия $N_{\vec H}$ компактны.*

Тогда для $\vec H$ вблизи точки $\vec c_0$ многообразия $N_{\vec H}$ – n-мерные торы, а потоки h_k – движение по прямолинейным обмоткам этих торов:

$$\frac{\partial \psi^l}{\partial t^k} = \delta^l_k, \tag{10}$$

где ψ^1, …, ψ^n – координаты на торах, близких к $N_{\vec c_0}$, которые можно выбрать так, чтобы скобка Пуассона имела канонический вид

$$\{\psi^i, \psi^j\} = \{H_i, H_j\} = 0, \quad \{\psi^i, H_j\} = \delta^i_j. \tag{11}$$

Тем самым, в координатах ψ^i, H_j потоки $h_1,\dots,h_n$ одновременно линеаризуются.

Следует отметить, что сами торы $N_{\vec H}$ получаются факторизацией $\mathbf{R}^n$ по решетке $\vec v_1(\vec H)$, …, $\vec v_n(\vec H)$:

$$\vec\psi \sim \vec\psi + k_1 \vec v_1(\vec H) + \ldots + k_n \vec v_n(\vec H), \quad k_1, \ldots, k_n \ \text{– целые числа},$$

причем решетка, вообще говоря, своя для каждого тора. Как правило, движение (10) по прямолинейным обмоткам условно-периодическое.

2. *В предположениях предыдущего пункта в окрестности тора $N_{\vec c_0}$ можно выбрать координаты действие-угол $I_1,\dots,I_n,\phi^1,\dots,\phi^n$ такие, что:*

   (a) *Величины I_k являются фукциями от гамильтонианов $H_1,\dots,H_n$ $I_k = I_k(H_1,\ldots,H_n)$, и, тем самым, постоянны на каждом из торов $N_{\vec H}$. Они называются переменными действия.*

   (b) *В координатах $\phi^1,\dots,\phi^n$ все торы $N_{\vec I}$ приводятся к стандартному виду: $N_{\vec I}$ получается из $\mathbf{R}^n$ факторизацией по решетке*

   $$\vec v_k = (0, 0, \ldots, 2\pi, \ldots, 0), \ \text{где} \ 2\pi \ \text{стоит на} \ k - \text{ом месте},$$

   или, что то же самое, $N_{\vec c}$ получается из $\mathbf{R}^n$ отождествлением

   $$(\psi^1, \ldots, \psi^n) \sim (\psi^1 + 2\pi k_1, \ldots, \psi^n + 2\pi k_n), \ \ k_1, \ldots, k_n - \text{целые числа}.$$

   Другими словами, $\phi^1,\dots,\phi^n$ – углы на торах $N_{\vec c}$.

(c) *В координатах $I_1,\ldots,I_n,\phi^1,\ldots,\phi^n$ скобка Пуассона приводится к каноническому виду:*

$$\{\phi^i,\phi^j\}=\{I_i,I_j\}=0,\quad \{\phi^i,I_j\}=\delta^i_j. \tag{12}$$

3. *Приведение к переменным действие-угол осуществляется в квадратурах.*

4. *Пусть гамильтонианы $H_1,\ldots,H_n$ независимы в окрестности точки $\vec{x}_0\in M$ (в данном пункте мы не делаем никаких предположений о глобальной структуре $N_{\vec{H}}$). Тогда в окрестности этой точки можно ввести переменные $\psi^1,\ldots,\psi^n$ – такие что:*

$$\{\psi^i,\psi^j\}=\{H_i,H_j\}=0,\quad \{\psi^i,H_j\}=\delta^i_j, \tag{13}$$

и, тем самым, линеаризовать систему. При этом построение функций $\psi^1,\ldots,\psi^n$ осуществляется в квадратурах.

Напомним, что нахождение некоторой функции **осуществляется в квадратурах**, если для ее построения используются только следующие операции

1. Алгебраические операции над функциями, включая подстановку.
2. Дифференциирование.
3. Вычисление интегралов.
4. Решение систем уравнений вида

$$\begin{cases} F_1(y_1,\ldots,y_s)=0\\ \ldots\\ F_q(y_1,\ldots,y_s)=0,\end{cases} \tag{14}$$

при котором часть переменных y_k выражается через остальные.

Доказательство. Докажем сперва первую часть.

На $N_{\vec{H}}$ определены n векторных полей $h_1,\ldots,h_n$, причем во всех точках $N_{\vec{H}}$ они линейно независимы. Зафиксируем некоторую точку $\vec{x}_0$ на $N_{\vec{H}}$. Любая точка $N_{\vec{H}}$ в окрестности $\vec{x}_0$ получается из $\vec{x}_0$ сдвигом на время t^1 вдоль потока с гамильтонианом H_1 плюс сдвиг на время t^2 вдоль потока с гамильтонианом H_2 плюс $\dots$ плюс сдвиг на время t^n вдоль потока с гамильтонианом H_n. Тем самым мы получаем систему локальных координат на $N_{\vec{H}}$ в окрестности $\vec{x}_0$.

Поскольку все гамильтонианы H_i находятся в инволюции, сдвиги вдоль различных потоков h_i коммутируют между собой. Тем самым мы имеем действие группы $\mathbf{R}^n$ на M, причем элементы из достаточно малой окрестности 0 действуют на M без неподвижных точек. Тем самым M – фактор $\mathbf{R}^n$ по дискретной подгруппе. Как показано, например, в книге Арнольда, все такие подгруппы имеют вид

$$g = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \ldots + k_s\vec{v}_s, \quad \text{где} \quad k_1, k_2, \ldots, k_n \ \text{ – целые числа,}$$

где $\vec{v}_k$ – набор линейно независимых векторов в $\mathbf{R}^n$, $s \leq n$, причем фактор-группа компактна тогда и только тогда $s = n$. Отсюда следует, что $N_{\vec{H}}$ – это тор.

Построим функции $\psi^1,\ldots,\psi^n$. Непосредственно из конструкции t^k следует, что

$$\{t^i, H_j\} = \delta_{ij}. \tag{15}$$

Согласно условиям теоремы

$$\{H_i, H_j\} = 0.$$

Однако положить $\psi^k = t^k$ нельзя, поскольку скобки Пуассона t^i, t^j не обязаны быть нулевыми. Обозначим:

$$\{t^i, t^j\} = \alpha_{ij}(\vec{H}, \vec{t}).$$

Лемма 2 *Функции $\alpha_{ij}(\vec{H}, \vec{t})$ не зависят от $\vec{t}$: $\vec{H}$, $\alpha_{ij}(\vec{H}, \vec{t}) = \alpha_{ij}(\vec{H})$ т.е.*

$$\frac{\partial \alpha_{ij}(\vec{H}, \vec{t})}{\partial t^k} = 0 \quad \textit{для всех} \quad i, j, k.$$

Для доказательства Леммы 2 воспользуемся тождеством Якоби для тройки t^i, t^j, H_k:

$$\{\{t^i, t^j\}, H_k\} + \{\{t^j, H_k\}, t^i\} + \{\{H_k, t^i\}, t^j\} = 0.$$

Учитывая (15)

$$\{\{t^j, H_k\}, t^i\} = \{\delta_{jk}, t^i\} = 0, \quad \{\{H_k, t^i\}, t^j\} = \{-\delta_{ki}, t^j\} = 0,$$

$$\{\{t^i, t^j\}, H_k\} = \{\alpha_{ij}(\vec{H}, \vec{t}), H_k\} = \frac{\partial \alpha_{ij}(\vec{H}, \vec{t})}{\partial t^k},$$

получаем

$$\frac{\partial \alpha_{ij}(\vec{H}, \vec{t})}{\partial t^k} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Убедимся, что функции ψ^1,...,ψ^n можно задать формулой:

$$\psi^k = t^k + f^k(\vec{H}),$$

где $f^k(\vec{H})$ пока неизвестны. Условие $\{\psi^i, \psi^j\}$=0 дает нам

$$\alpha_{ij}(\vec{H}) - \frac{\partial f^i(\vec{H})}{\partial H_j} + \frac{\partial f^j(\vec{H})}{\partial H_i} = 0. \tag{16}$$

Лемма 3 *2-форма $\alpha = \alpha_{ij}(\vec{H}) dH_i \wedge dH_j$ замкнута: $d\alpha = 0$.*

Доказательство Леммы 3. Замкнутость α эквивалентна следующему набору соотношений на $\alpha_{ij}(\vec{H})$:

$$\frac{\partial \alpha_{ij}(\vec{H})}{\partial H_k} + \frac{\partial \alpha_{jk}(\vec{H})}{\partial H_i} + \frac{\partial \alpha_{ki}(\vec{H})}{\partial H_j} = 0. \tag{17}$$

Поскольку

$$\frac{\partial \alpha_{ij}(\vec{H})}{\partial H_k} = -\{\{t^i, t^j\}, t^k\},$$

условие (17) переписывается как тождество Якоби для тройки функций t^i, t^j, t^k

$$-\{\{t^i, t^j\}, t^k\} - \{\{t^j, t^k\}, t^i\} - \{\{t^k, t^i\}, t^j\} = 0,$$

что и доказывает Лемму.

С другой стороны, условие (16) в точности эквивалентно тому, что

$$\alpha = -d\left(f^1(\vec{H}) dH_1 + \ldots + f^n(\vec{H}) dH_n\right).$$

Каждая замкнутая n-форма может быть, по крайней мере локально, записана как дифференциал $n-1$-формы (Лемма Пуанкаре). Тем самым нужный нам набор функций $f^k(\vec{H})$ существует в некоторой области переменных $\vec{H}$ вблизи точки $\vec{c}_0$, что и завершает доказательство первой части теоремы.

Докажем вторую часть теоремы. Обозначим $b_1(\vec{H})$, ..., $b_n(\vec{H})$ базисные циклы на торах, близких к $N_{\vec{c}_0}$. Положим

$$I_k(\vec{H}) = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{b_k(\vec{H})} \tilde{\omega}, \quad \text{где} \quad \tilde{\omega} = H_1 d\psi^1 + H_2 d\psi^2 + \ldots + H_n d\psi^n. \tag{18}$$

Поскольку для симплектической структуры ω имеет место $\omega = d\tilde{\omega}$ и форма ω тождественно обращается в 0 на торах $N_{\vec{H}}$, то функции $I_k(\vec{H})$ корректно определены. Точно так же, как по функциям H_k строились углы ψ^k, мы можем построить по функциям I_k переменные ϕ^k. При этом мы можем использовать для нумерации торов как функции H_k, так и I_k, поэтому можно вместо $N_{\vec{H}}$ писать $N_{\vec{I}}$.

Остается проверить, что переменные ϕ^k – углы на торах $N_{\vec{I}}$. Сперва заметим, что вместо $\tilde{\omega}$ в формуле (18) можно было бы брать интеграл от любой формы $\tilde{\omega}_1$ такой, что

$$d\tilde{\omega}_1 = \omega.$$

Получающиеся при этом новые переменные действия отличались бы от старых лищь на константу, поскольку для любой пары торов $N_{\vec{c}'}$, $N_{\vec{c}''}$, близких к $N_{\vec{c}_0}$

$$\oint_{b_k(\vec{c}')} (\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_1) - \oint_{b_k(\vec{c}'')} (\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_1) = \int\!\!\int_F d(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_1) = 0,$$

где F – некоторая пленка, натянутая на контуры $b_k(\vec{c}')$, $b_k(\vec{c}'')$. При этом добавление произвольных констант к I_k никак не отоажантся на переменных ϕ^k. В частности, для того, чтобы вычислить в координатах ϕ^k периоды тора $N_{\vec{c}}$ положим

$$I'_k(\vec{H}) = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{b_k(\vec{H})} (H_1 - c_1) d\psi^1 + (H_2 - c_2) d\psi^2 + \ldots + (H_n - c_n) d\psi^n.$$

Поскольку $\omega = dI_1 \wedge d\phi^1 + \ldots + dI_n \wedge d\phi^n$, то можно положить $\tilde{\omega}_1 = I'_1 d\phi^1 + \ldots + I'_n d\phi^n$, и

$$I'_k(\vec{H}) = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{b_k(\vec{H})} I'_1 d\phi^1 + \ldots + I'_n d\phi^n + \beta_k,$$

где β_k – некоторые константы. Полагая $\vec{H} = \vec{c}$ получаем , что при всех k $\beta_k = 0$, и

$$I'_k(\vec{H}) = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{b_k(\vec{H})} I'_1 d\phi^1 + \ldots + I'_n d\phi^n,$$

В то же время, по определению,

$$\frac{1}{2\pi} \oint\limits_{b_k(\vec{H})} I'_1 d\phi^1 + \ldots + I'_n d\phi^n = v_k^j(\vec{c}) I'_j(\vec{H}),$$

$$I'_k(\vec{H}) = v_k^j(\vec{H}) I'_j(\vec{H}), \tag{19}$$

где $v_k^j(\vec{H})$ – j-ая координата вектора решетки, порождающего k-ый базисный цикл. Дифференциируя (19) по всем I'_k и полагая $\vec{H} = \vec{c}$ получаем, что

$$v_k^j(\vec{c}) = 2\pi\delta_k^j,$$

что и завершает доказательство части 2.

Убедимся, что построение функций ψ^k по заданному набору H_k осуществляется в квадратурах. Поскольку переменные действия I_k строятся как интегралы от формы $\tilde{\omega}$ по циклам, то отсюда будут следовать как пункт 3, так и пункт 4.

Сперва докажем, что переменные t^k, построенные при доказательстве пункта 1, вычисляются в квадратурах. Пусть $z^{n+1}, \ldots, z^{2n}$ – некоторые переменные, дополняющие $H_1, \ldots, H_n$ до локальной системы координат. (Несложно проверяется, что переход к новой системе координат осуществим в квадратурах.) В координатах $H_1, \ldots, H_n, z^{n+1}, \ldots, z^{2n}$ пуассонова структура приобретает блочный вид

$$\omega^{ij} = \begin{bmatrix} 0 & A \\ -A^t & B \end{bmatrix}, \tag{20}$$

а симплектическая структура записывается соответственно как

$$\omega_{ij} = \begin{bmatrix} (A^t)^{-1} B A^{-1} & A^{-1} \\ -(A^t)^{-1} & 0 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Уравнения

$$\{t^k, H_j\} = \delta_j^k,$$

где $t^k = t^k(H_1, \dots, H_n, z^{n+1}, \dots, z^{2n})$ в этих координатах записываются как

$$\frac{\partial t^k(\vec{H}, \vec{z})}{\partial z^\alpha} \omega^{\alpha j}(\vec{H}, \vec{z}) = \delta^{kj}, \quad k, j = 1, \dots, n,$$

α пробегает значения от $n+1$ до $2n$, откуда следует, что

$$\frac{\partial t^k(\vec{H}, \vec{z})}{\partial z^\alpha} = \omega_{k\alpha}(\vec{H}, \vec{z}),$$

т.е. мы знаем **все** частные производные $t^k(\vec{H}, \vec{z})$ по z^α и производные по H_j могут быть любыми. Отсюда

$$t^k(\vec{H}, \vec{z}) = \tau^k(\vec{H}) + \int\limits_0^{z^{n+1}} \omega_{k\alpha}(\vec{H}, \tilde{z}^{n+1}, 0, \dots, 0) d\tilde{z}^{n+1} + \tag{22}$$

$$+ \int\limits_0^{z^{n+2}} \omega_{k\alpha}(\vec{H}, z^{n+1}, \tilde{z}^{n+2}, \dots, 0) d\tilde{z}^{n+2} + \int\limits_0^{z^{2n}} \omega_{k\alpha}(\vec{H}, z^{n+1}, z^{n+2}, \dots, \tilde{z}^{2n}) d\tilde{z}^{2n},$$

где $\tau^k(\vec{H})$ – произвольные функции.

При написании формулы (22) мы предположили, что производные функций $t^k(\vec{H}, \vec{z})$ согласованы:

$$\frac{\partial^2 t^k(\vec{H}, \vec{z})}{\partial z^\alpha \partial z^\beta} = \frac{\partial^2 t^k(\vec{H}, \vec{z})}{\partial z^\beta \partial z^\alpha},$$

т.е.

$$\frac{\partial \omega_{k\alpha}(\vec{H}, \vec{z})}{\partial z^\beta} = \frac{\partial \omega_{k\beta}(\vec{H}, \vec{z})}{\partial z^\alpha}, \quad 1 \le k \le n, \quad n+1 \le \alpha, \beta \le 2n. \tag{23}$$

Проверим, что это действительно так. Симплектическая форма ω замкнута, поэтому

$$\frac{\partial \omega_{k\alpha}(\vec{H}, \vec{z})}{\partial z^\beta} + \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}(\vec{H}, \vec{z})}{\partial H_k} + \frac{\partial \omega_{\beta k}(\vec{H}, \vec{z})}{\partial z^\alpha} = 0.$$

Из блочного вида симплектической структуры (21) следует, что

$$\omega_{\alpha\beta}(\vec{H}, \vec{z}) \equiv 0, \quad n+1 \le \alpha, \beta \le 2n,$$

откуда и следует (23).

Для того, чтобы завершить доказательство теоремы, нам осталось проверить, что построение по замкнутой 2-форме α 1-формы f такой, что $df = -\alpha$ осуществимо в квадратурах (мы считаем, что форма α задана в некоторой выпуклой окрестности точки $\vec{H} = \vec{c}$, и, следовательно, f существует).

В принципе, это утверждение несложно извлечь из стандартного доказательства леммы Пуанкаре, однако для полноты картины докажем его. Нам нужно найти набор функций $f^1(\vec{H})$, ..., $f^n(\vec{H})$ таких, что

$$\frac{\partial f^i(\vec{H})}{\partial H_j} - \frac{\partial f^j(\vec{H})}{\partial H_i} = \alpha_{ij}(\vec{H}), \tag{24}$$

причем

$$\frac{\partial \alpha_{ij}(\vec{H})}{\partial H_k} + \frac{\partial \alpha_{jk}(\vec{H})}{\partial H_i} + \frac{\partial \alpha_{ki}(\vec{H})}{\partial H_j} = 0.$$

Будем строить форму f индукцией по размерности. Пусть

$$f^1(\vec{H}) \equiv 0,$$

$$f^k(\vec{H}) = \int\limits_{c_1}^{H_1} \alpha_{k1}(\tilde{H}_1, H_2, \ldots, H_n) d\tilde{H}_1 + \tilde{f}^k(H_2, \ldots, H_n), \quad k = 2, \ldots, n.$$

Тогда уравнения (24) эквивалентны следующей системе

$$\frac{\partial \tilde{f}^i(H_2, \ldots, H_n)}{\partial H_j} - \frac{\partial \tilde{f}^j(H_2, \ldots, H_n))}{\partial H_i} = \tilde{\alpha}_{ij}(\vec{H}), \quad i, j \geq 2, \tag{25}$$

где

$$\tilde{\alpha}_{ij}(\vec{H}) = \alpha_{ij}(\vec{H}) + \frac{\partial}{\partial H_j} \int\limits_{c_1}^{H_1} \alpha_{1i}(\tilde{H}_1, H_2, \ldots, H_n) d\tilde{H}_1 + \frac{\partial}{\partial H_i} \int\limits_{c_1}^{H_1} \alpha_{j1}(\tilde{H}_1, H_2, \ldots, H_n) d\tilde{H}_1. \tag{26}$$

Форма $\tilde{\alpha}$ получается из формы α добавлением дифференцала 1-формы, и, следовательно, она замкнута. Все ее коэффициенты $\tilde{\alpha}_{1k} = 0$. Убедимся, что все $\tilde{\alpha}_{ij}(\vec{H})$ не завясят от H_1. Дифференцируя (26) по H_1 получаем:

$$\frac{\partial \tilde{\alpha}_{ij}(\vec{H})}{\partial H_1} = \frac{\partial \alpha_{ij}(\vec{H})}{\partial H_1} + \frac{\partial \alpha_{1i}(\vec{H})}{\partial H_j} + \frac{\partial \alpha_{j1}(\vec{H})}{\partial H_i} = 0.$$

(мы воспользовались замкнутостью α). Тем самым мы получили набор уравнений (25) на $n-1$ функцию $n-1$ переменной, т.е сделали шаг индукции.

Теорема Лиувилля доказана.

Пример 2 Задача Кеплера. *Рассмотрим движение частицы в поле притягивающего центра, сила притяжения к которому обратно пропорциональна квадрату расстояния до него (задача о движении пары гравитационно взамодействующих шарообразных тел сводится к ней переходом в систему центра масс). Оно описывается гамильтонианом*

$$H = \frac{(p_1)^2 + (p_2)^3 + (p_3)^2)}{2m} + \frac{\alpha}{\sqrt{((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)}}, \quad \alpha < 0 \tag{27}$$

в канонической скобке

$$\{x^i, p_j\} = \delta^i_j, \quad \{x^i, x^j\} = \{p_i, p_j\} = 0.$$

У этой системы известно 7 интегралов движения – гамильтониан H, 3 компоненты вектора момента $\vec{M}$:

$$\vec{M} = \vec{x} \times \vec{p}$$

и 3 компоненты **вектора Лапласа** $\vec{W}$*:*

$$\vec{W} = \frac{\vec{p} \times \vec{M}}{m} + \frac{\alpha \vec{x}}{\sqrt{((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)}}.$$

Задача 1 1. *В задаче Кеплера 5 независимых интегралов. Тем самым линии уровня интегралов – одномерные кривые. Такого типа задачи иногда называются* **суперинтегрируемыми.**

2. *Интегралы задачи Кеплера имеют следующие скобки Пуассона*

$$\{H, M_j\} = \{H, W_j\} = 0,$$

$$\{M_1, M_2\} = M_3, \ \{M_2, M_3\} = M_1, \ \{M_3, M_1\} = M_2,$$

$$\{W_1, W_2\} = -\frac{2}{m} H M_3, \ \{W_2, W_3\} = -\frac{2}{m} H M_1, \ \{W_3, W_1\} = -\frac{2}{m} H M_2,$$

$$
\begin{gathered}
\{M_i, W_i\} = 0, \\
\{M_1, W_2\} = -\{M_2, W_1\} = W_3, \\
\{M_2, W_3\} = -\{M_3, W_2\} = W_1, \\
\{M_3, W_1\} = -\{M_1, W_3\} = W_2.
\end{gathered}
$$

3. *Зафиксируем $H = c$. Тогда компоненты векторов $\vec{M}$, $\vec{W}$ образуют замкнутую 6-мерную алгебру Ли, причем она изоморфна*

   - $so(4)$ *при* $c < 0$.
   - *Алгебре Ли группы эвклидовых движений пространства при* $c = 0$.
   - $so(3,1)$ *при* $c > 0$.