Лекция 2.

Определение 1 **Пуассоново многообразие** *– это гладкое n-мерное многообразие* M*, снабженное дополнительной структурой – полем тензоров* $\omega^{ij}(\vec{x})$ *с двумя верхними индексами (бивекторным полем) таким, что операция* $\{\ ,\ \}$ *на пространстве функций на* M*, задаваемая формулой*

$$\{f,g\} = \omega^{ij}(\vec{x})\ \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^i}\ \frac{\partial g(\vec{x})}{\partial x^j} \tag{1}$$

обладает следующими свойствами:

1) Она кососимметрична, т.е. для любой пары функций f, g *на* M

$$\{f,g\} = -\{g,f\}. \tag{2}$$

2) Выполнено **тождество Якоби***: для любой тройки функций* f, g, h *на* M

$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} \equiv 0. \tag{3}$$

Легко убедиться, что условия 1)-2) достаточно проверить на координатных функциях. Отсюда следует:

Лемма 1 *Тензор* $\omega^{ij}(\vec{x})$ *задает пуассонову структуру на* M *тогда и только тогда, когда он*

1) Кососимметричен

$$\omega^{ij}(\vec{x}) = -\omega^{ji}(\vec{x}). \tag{4}$$

2) Для всех i, j, k *выполнено следующее соотношение*

$$\omega^{il}(\vec{x})\frac{\partial \omega^{jk}(\vec{x})}{\partial x^l} + \omega^{jl}(\vec{x})\frac{\partial \omega^{ki}(\vec{x})}{\partial x^l} + \omega^{kl}(\vec{x})\frac{\partial \omega^{ij}(\vec{x})}{\partial x^l} \equiv 0. \tag{5}$$

Левая часть равенства (5) – в действительности тензор третьего ранга, называемый **скобкой Схоутена***.*

Определение 2 *Пусть* M *– пуассоново многообразие, т.е. на нем задан тензор* $\omega^{ij}(\vec{x})$*, удовлетворяющий условиям Леммы 1. Тогда операция* $\{\ ,\ \}$*, задаваемая формулой (1), называется* **скобкой Пуассона.**

Пример 1 Стандартная скобка. *Пусть M – пространство четной размерности $\mathbf{R}^{2n}$ с координатами $x^1,\ldots,x^n$, $p_1,\ldots,p_n$. Стандартная скобка имеет вид*

$$\{x^i,x^j\}=\{p_i,p_j\}=0,\{x^i,p_j\}=\delta^i_j. \tag{6}$$

Именно такая скобка возникает в классической механике.

Пример 2 Постоянная скобка. *Пусть наше многообразие M – область в $\mathbf{R}^n$, ω^{ij} – произвольный постоянный кососимметрический тензор. Тогда условие (5) автоматически выполнено и мы имеем пуассоново многообразие.*

Пример 3 *Рассмотрим алгебру Ли $g = so(3)$ с базисом e^1, e^2, e^3 и соотношениями*

$$[e^1,e^2]=e^3,\ [e^2,e^3]=e^1,\ [e^3,e^1]=e^2. \tag{7}$$

По определению, элементы алгебры Ли – линейные функции на двойственном пространстве g^*. Обозначим их x^1, x^2, x^3 соответственно. Эти функции – координаты на g^*. Положим скобку Пуассона координатных функций на $M = g^*$ равной коммутатору соответствующих элементов алгебры Ли. В нашем примере

$$\{x^1,x^2\}=x^3,\ \{x^2,x^3\}=x^1,\ \{x^3,x^1\}=x^2. \tag{8}$$

На произвольные гладкие функции на M скобка распространяется по следующему правилу

$$\{f,g\}=\{x^i,x^j\}\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^i}\ \frac{\partial g(\vec{x})}{\partial x^j} \tag{9}$$

Ясно, что эта конструкция без изменений переносится на любую алгебру Ли. Соответствующая скобка называется **скобкой Ли-Пуассона** (в литературе ее называют также скобкой Ли-Костанта-Кириллова-Березина):

Пример 4 *Пусть M – двойственное пространство к алгебре Ли g с базисом e^1, $\ldots$, e^n и коммутатором*

$$[e^i,e^j]=c^{ij}_k e^k \tag{10}$$

(c_k^{ij} называются структурными константами алгебры), $M = g^*$, x^j – соответствующие e^j координатпные функции на M. Тогда полагаем:

$$[x^i, x^j] = c_k^{ij} x^k, \qquad \omega^{ij}(\vec{x}) = c_k^{ij} x^k, \tag{11}$$

и получаем пуассоново многообразие с линейно зависящей от координат скобкой.

Обсудим построенную выше скобку для $so(3)$. Ее матрица имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0 & x^3 & -x^2 \\ -x^3 & 0 & x^1 \\ x^2 & -x^1 & 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Определитель кососимметрической матрицы нечетного порядка равен 0, поэтому она нигде не обратима. Это приводит к тому, что построенная скобка вырождена, т.е. существуют нетривиальные функции Q такие, что

$$\{f, Q\} = 0 \tag{13}$$

для всех f на M. Такие функции называются **аннуляторами** скобки или **функциями Казимира.**

Задача 1 *Q – функция Казимира скобки (8) тогда и только тогда, когда она записывается как*

$$Q(x^1, x^2, x^3) = \tilde{Q}((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2). \tag{14}$$

Тем самым данная скобка имеет одну базисную функцию Казимира

$$Q = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2. \tag{15}$$

Для доказательства можно воспользоваться тем, что Q является функцией Казимира тогда и только тогда, когда ее скобка Пуассона со всеми координатными функциями равна 0.

Определение 3 *Пусть M – пуассоново многообразие, $Q_1, \ldots, Q_l$ – базисный набор функций Казимира. Тогда подмногообразие, задаваемое системой уравнений*

$$\begin{cases} Q_1 = c_1 \\ \quad \ldots \\ Q_l = c_l, \end{cases} \tag{16}$$

где c_1, ..., c_l – некоторые константы, называется **симплектическим листом**.

Многообразие M оказывается расслоенным на симплектические листы. Ограничение тензора $\omega^{ij}(\vec{x})$ на симплектический лист в точках общего положения уже невырождено.

Если M – пуассоново многообразие, то каждой функции H на M ставится в соответствие обыкновенное дифференциальное уравнение (или, что то же самое, векторное поле или поток) по следующему правилу:

$$\frac{dx^k}{dt} = \{x^k, H\} = \omega^{k\alpha}(\vec{x})\frac{\partial H(\vec{x})}{\partial x^\alpha}. \tag{17}$$

Лемма 2 *Для проивольной функции f на M производная по потоку (17) имеет вид:*

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}. \tag{18}$$

Из Леммы 2 в частности следует, что определение (17) корректно, т.е. не зависит от выбора системы координат.

Определение 4 *Функция H на Пуассоновом многообразии M, задающая поток на M по правилу (17) называется его* **гамильтонианом**, *а сама система (17) –* **гамильтоновым потоком** *или* **гамильтоновым векторным полем,** *порождаемым H.*

Напомним, что бесконечно близкие к тождественному диффеоморфизмы многообразия M (для того, чтобы избежать проблем, связанных с уходом на бесконечность за конечное время, удобно считать M компактным) – это в точности векторные поля на M. В терминологии физиков векторные поля на M являются генераторами группы диффеоморфизмов M. При этом вариация тензорного поля t под действием векторного поля v на M в точности равна его производной Ли $L_v t$. В частности поле t инвариантно относительтно однопараметрической группы диффеоморфизмов, порождаемой v тогда и только тогда, когда $L_v t = 0$. В специальном случае, когда t – векторное поле, оно инвариантно относительно диффеоморфизмов, порождаемых v тогда и только тогда, когда коммутатор этих полей равен 0: $[t, v] = 0$.

Наша ближайшая задача – исследование действия на M гамильтоновых векторных полей.

Теорема 1 *Диффеоморфизмы, порождаемые гамильтоновыми векторными полями, сохраняют пуассонову структуру M.*

Доказательство. В связи с вышесказанным достаточно проверить, что если h – гамильтоново векторное поле, порождаемое гамильтонианом H по формуле (17), то

$$L_h \omega^{ij} = 0. \tag{19}$$

Убедимся, что это действительно так. По определению,

$$(L_h\omega)^{ij}(\vec{x}) =$$

$$= \omega^{\alpha\beta}(\vec{x})\frac{\partial H(\vec{x})}{\partial x^\beta}\frac{\partial \omega^{ij}(\vec{x})}{\partial x^\alpha} - \omega^{\alpha j}(\vec{x})\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\omega^{i\beta}(\vec{x})\frac{\partial H(\vec{x})}{\partial x^\beta}\right) - \omega^{i\alpha}(\vec{x})\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\omega^{j\beta}(\vec{x})\frac{\partial H(\vec{x})}{\partial x^\beta}\right) =$$

$$= \omega^{\alpha\beta}(\vec{x})\frac{\partial \omega^{ij}(\vec{x})}{\partial x^\alpha}\frac{\partial H(\vec{x})}{\partial x^\beta} - \omega^{\alpha j}(\vec{x})\frac{\partial \omega^{i\beta}(\vec{x})}{\partial x^\alpha}\frac{\partial H(\vec{x})}{\partial x^\beta} - \omega^{i\alpha}(\vec{x})\frac{\partial \omega^{j\beta}(\vec{x})}{\partial x^\alpha}\frac{\partial H(\vec{x})}{\partial x^\beta} -$$

$$-\omega^{\alpha j}(\vec{x})\omega^{i\beta}(\vec{x})\frac{\partial^2 H(\vec{x})}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \omega^{i\alpha}(\vec{x})\omega^{j\beta}(\vec{x})\frac{\partial^2 H(\vec{x})}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} =$$

$$= \left(\omega^{\alpha\beta}(\vec{x})\frac{\partial \omega^{ij}(\vec{x})}{\partial x^\alpha} + \omega^{\alpha j}(\vec{x})\frac{\partial \omega^{\beta i}(\vec{x})}{\partial x^\alpha} + \omega^{\alpha i}(\vec{x})\frac{\partial \omega^{j\beta}(\vec{x})}{\partial x^\alpha}\right)\frac{\partial H(\vec{x})}{\partial x^\beta} +$$

$$+ \left(\omega^{j\alpha}(\vec{x})\omega^{i\beta}(\vec{x}) - \omega^{i\alpha}(\vec{x})\omega^{j\beta}(\vec{x})\right)\frac{\partial^2 H(\vec{x})}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}.$$

Первая скобка равна 0 согласно тождеству Якоби (5), вторая скобка антисимметрична по α и β, поэтому будучи просуммирована по этим индексам с симметричной матрицей вторых производных дает 0.

Тем самым:

$$(L_h\omega)^{ij}(\vec{x}) = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 2 *Если на пуассоновом многообразии (M, ω) существуют нетривиальные функции Казимира, то они – первые интегралы всех гамильтоновых векторных полей на M.*

Доказательство получается сопоставлением (13) с (18).

Теорема 3 *Пусть H_1, H_2 – пара функций на пуассоновом многообразии M, h_1, h_2 – соответсвующие им гамильтоновы векторные поля. Тогда их коммутатор $h_3 = [h_1, h_2]$ – гамильтоново векторное поле с гамильтонианом $H_3 = -\{H_1, H_2\}$, где $\{\ ,\ \}$ – скобка Пуассона.*

Доказательство. Вычислим $[h_1, h_2] - h_3$. По определению

$$([h_1,h_2])^k(\vec{x}) =$$

$$= \omega^{\alpha\beta}(\vec{x})\frac{\partial H_1(\vec{x})}{\partial x^\beta}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\omega^{k\gamma}(\vec{x})\frac{\partial H_2(\vec{x})}{\partial x^\gamma}\right) - \omega^{\alpha\beta}(\vec{x})\frac{\partial H_2(\vec{x})}{\partial x^\beta}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\omega^{k\gamma}(\vec{x})\frac{\partial H_1(\vec{x})}{\partial x^\gamma}\right) =$$

$$= \omega^{\alpha\beta}(\vec{x})\omega^{k\gamma}(\vec{x})\frac{\partial H_1(\vec{x})}{\partial x^\beta}\frac{\partial^2 H_2(\vec{x})}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha} + \omega^{\alpha\beta}(\vec{x})\frac{\partial \omega^{k\gamma}(\vec{x})}{\partial x^\alpha}\frac{\partial H_1(\vec{x})}{\partial x^\beta}\frac{\partial H_2(\vec{x})}{\partial x^\gamma} -$$

$$-\omega^{\alpha\beta}(\vec{x})\omega^{k\gamma}(\vec{x})\frac{\partial H_2(\vec{x})}{\partial x^\beta}\frac{\partial^2 H_1(\vec{x})}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha} - \omega^{\alpha\beta}(\vec{x})\frac{\partial \omega^{k\gamma}(\vec{x})}{\partial x^\alpha}\frac{\partial H_2(\vec{x})}{\partial x^\beta}\frac{\partial H_1(\vec{x})}{\partial x^\gamma} =$$

$$= \omega^{\beta\gamma}(\vec{x})\omega^{k\alpha}(\vec{x})\frac{\partial H_1(\vec{x})}{\partial x^\gamma}\frac{\partial^2 H_2(\vec{x})}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \omega^{\gamma\alpha}(\vec{x})\frac{\partial \omega^{\beta k}(\vec{x})}{\partial x^\alpha}\frac{\partial H_2(\vec{x})}{\partial x^\beta}\frac{\partial H_1(\vec{x})}{\partial x^\gamma} +$$

$$+\omega^{\beta\gamma}(\vec{x})\omega^{k\alpha}(\vec{x})\frac{\partial H_2(\vec{x})}{\partial x^\beta}\frac{\partial^2 H_1(\vec{x})}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha} + \omega^{\beta\alpha}(\vec{x})\frac{\partial \omega^{k\gamma}(\vec{x})}{\partial x^\alpha}\frac{\partial H_2(\vec{x})}{\partial x^\beta}\frac{\partial H_1(\vec{x})}{\partial x^\gamma} =$$

(Последнее преобразование использует косую симметрию $\omega^{ij}(\vec{x})$ и возможность произвольного переименования немых индексов (индексов, по которым идет суммирование)). Тем самым

$$([h_1,h_2])^k(\vec{x}) = \omega^{\beta\gamma}(\vec{x})\omega^{k\alpha}(\vec{x})\left(\frac{\partial H_1(\vec{x})}{\partial x^\gamma}\frac{\partial^2 H_2(\vec{x})}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \frac{\partial H_2(\vec{x})}{\partial x^\beta}\frac{\partial^2 H_1(\vec{x})}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha}\right) +$$

$$\left(\omega^{\gamma\alpha}(\vec{x})\frac{\partial \omega^{\beta k}(\vec{x})}{\partial x^\alpha} + \omega^{\beta\alpha}(\vec{x})\frac{\partial \omega^{k\gamma}(\vec{x})}{\partial x^\alpha}\right)\frac{\partial H_2(\vec{x})}{\partial x^\beta}\frac{\partial H_1(\vec{x})}{\partial x^\gamma}.$$

Аналогично

$$(h_3(\vec{x}))^k = \omega^{k\alpha}(\vec{x})\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\omega^{\beta\gamma}(\vec{x})\frac{\partial H_2(\vec{x})}{\partial x^\beta}\frac{\partial H_1(\vec{x})}{\partial x^\gamma}\right) =$$

$$= \omega^{k\alpha}(\vec{x})\omega^{\beta\gamma}(\vec{x})\frac{\partial^2 H_2(\vec{x})}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}\frac{\partial H_1(\vec{x})}{\partial x^\gamma} + \omega^{k\alpha}(\vec{x})\omega^{\beta\gamma}(\vec{x})\frac{\partial H_2(\vec{x})}{\partial x^\beta}\frac{\partial^2 H_1(\vec{x})}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha} +$$

$$+\omega^{k\alpha}(\vec{x})\frac{\partial \omega^{\beta\gamma}(\vec{x})}{\partial x^\alpha}\frac{\partial H_2(\vec{x})}{\partial x^\beta}\frac{\partial H_1(\vec{x})}{\partial x^\gamma} =$$

$$= \omega^{\beta\gamma}(\vec{x})\omega^{k\alpha}(\vec{x}) \left(\frac{\partial^2 H_2(\vec{x})}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial H_1(\vec{x})}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial H_2(\vec{x})}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 H_1(\vec{x})}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha} \right) -$$

$$- \omega^{k\alpha}(\vec{x}) \frac{\partial \omega^{\gamma\beta}(\vec{x})}{\partial x^\alpha} \frac{\partial H_2(\vec{x})}{\partial x^\beta} \frac{\partial H_1(\vec{x})}{\partial x^\gamma}.$$

Тем самым

$$([h_1, h_2])^k(\vec{x}) - (h_3(\vec{x}))^k =$$

$$\left(\omega^{\gamma\alpha}(\vec{x}) \frac{\partial \omega^{\beta k}(\vec{x})}{\partial x^\alpha} + \omega^{\beta\alpha}(\vec{x}) \frac{\partial \omega^{k\gamma}(\vec{x})}{\partial x^\alpha} + \omega^{k\alpha}(\vec{x}) \frac{\partial \omega^{\gamma\beta}(\vec{x})}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial H_2(\vec{x})}{\partial x^\beta} \frac{\partial H_1(\vec{x})}{\partial x^\gamma}.$$

Равенство 0 выражения в скобках в точности эквивалентно тождеству Якоби для скобки $\omega^{ij}(\vec{x})$ (формула (5)). Отсюда следует, что

$$([h_1, h_2])^k(\vec{x}) = (h_3(\vec{x}))^k$$

Теорема доказана.