Лекция 6.

18 октября 1999 г.

Теперь мы уже готовы доказать один из главных результатов нашего курса – вычислить динамику данных рассеяния в силу KdV. Мы воспользуемся тем, что $u(x,t)$ – решение уравнения KdV тогда и только тогда, когда пара операторов L

$$L = -\partial_x^2 + u(x,t) \tag{1}$$

и $\partial_t - A$, где

$$A = \partial_x^3 - \frac{3}{2}u(x,t)\partial_x - \frac{3}{4}u(x,t)_x \tag{2}$$

коммутируют при всех t. Поскольку при каждом E уравнение

$$(-\partial_x^2 + u(x))\Psi(x) = E\Psi(x) \tag{3}$$

имеет двумерное пространство решений с базисом $(\Psi_1(k,x), \Psi_1(-k,x))$, $E = k^2$. то указанное пространство решений инвариантно относительно действия оператора $\partial_t - A$, т.е.

$$(\partial_t - A)\Psi_1(k,x) = \alpha_1(k)\Psi_1(k,x) + \alpha_2(k)\Psi_1(-k,x). \tag{4}$$

На прошлой лекции мы доказали, что

$$\alpha_1(k) = ik^3, \quad \alpha_2(k) = 0, \tag{5}$$

т.е.

$$(\partial_t - A)\Psi_1(k,x) = ik^3\Psi_1(k,x). \tag{6}$$

Теперь устремим $x \to -\infty$ и воспользуемся тем, что

$$\Psi_1(k,x) = a(k,t)e^{ikx} + b(k,t)e^{-kx} + o(1), \tag{7}$$

$$u(x,t) \to 0, \quad \partial_t - A \to \partial_t - \partial_x^3 \ \text{ при } \ x \to +\infty, \tag{8}$$

Применяя (7), (8) к (6) получаем

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial}{\partial t}a(k,t) + ik^3 a(k,t)\right)e^{ikx} + \left(\frac{\partial}{\partial t}b(k,t) - ik^3 b(k,t)\right)e^{-ikx} + o(1) = \\ ik^3 a(k,t)e^{ikx} + ik^3 b(k,t)e^{-ikx} + o(1).\end{gathered} \tag{9}$$

Приравнивая множители при одинаковых экспонентах, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}a(k,t))=0, \quad \frac{\partial}{\partial t}b(k,t)=2ik^3b(k,t). \tag{10}$$

Уравнения (10) элементарно интегрируются, и мы получаем следующий ответ:

Теорема 1 *Если убывающий при $x \to \pm\infty$ потенциал $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению KdV, то эволюция данных рассеяния непрерывного спектра имеет вид*

$$a(k,t))=a(k,0), \quad b(k,t)=e^{2ik^3t}b(k,0), \tag{11}$$

$$r(k,t)=e^{2ik^3t}r(k,0). \tag{12}$$

Совершенно аналогично доказывается:

Теорема 2 *Если убывающий при $x \to \pm\infty$ потенциал $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению KdV, то дискретный спектр оператора L не зависит от t, а "данные рассеяния дискретного спектра" эволюционируют по закону*

$$\tilde{b}_j(t)=e^{2\kappa_j^3t}\tilde{b}_j(0), \quad E_j=-\kappa_j^2, \quad \kappa_j>0. \tag{13}$$

Тем самым преобразование рассеяния преобразует KdV в тривиальную систему (10) плюс (13). Однако само преобразование крайне нетривиально.

Мы описали процедуру построения волновой функции по данным рассеяния. Мы предположили, что заданы следующие данные:

1. Комплекснозначная функция вещественного аргумента $r(k)$ такая, что
   (a) $|r(k)|\le 1$.
   (b) $r(-k)=\bar{r}(k)$.
   (c) $r(k)\to 0$ достаточно быстро при $|k|\to\infty$.
2. Набор положительных чисел $\kappa_1<\kappa_2<\ldots<\kappa_N$.
3. Набор чисто мнимых чисел $\tilde{b}_j$, $j=1,\ldots,N$ таких, что $\frac{\tilde{b}_j}{i}>0$.

Тогда по ним строится функция $\tilde{\Psi}(k,x)$ такая, что:

1. При любом фиксированном x $\tilde{\Psi}(k,x)$ – мероморфная при $\operatorname{Im} k \neq 0$ функция комплексной переменной k. В области $\operatorname{Im} k \neq 0$ она не имеет других особенностей кроме простых полюсов в точках $i\kappa_j$.

2. При $|k| \to \infty$ имеет место асимптотика $\tilde{\Psi}(k,x) = (1+o(1))e^{ikx}$.

3. На вещественной прямой $\operatorname{Im} k = 0$ функция $\tilde{\Psi}(k,x)$ имеет разрыв первого рода и ее граничные значения $\tilde{\Psi}_{\pm}(k,x) = \tilde{\Psi}(k \pm i0, x)$ тождественно по x связаны соотношением
$$\tilde{\Psi}_{+}(k,x) = \tilde{\Psi}_{-}(k,x) + r(k)\tilde{\Psi}_{-}(-k,x), \qquad (14)$$
где $r(k)$ – коэффициент отражения.

4. Если $i\kappa_j$ – полюс функции $\tilde{\Psi}(k,x)$, то имеет место соотношение
$$\operatorname{res} \tilde{\Psi}(k,x)\Big|_{k=i\kappa_j} = \tilde{b}_j \tilde{\Psi}(-i\kappa_j, x). \qquad (15)$$

Перечисленные выше свойства полностью определяют $\tilde{\Psi}(k,x)$. Она записывается как
$$\tilde{\Psi}(k,x) = e^{ikx}\chi(k,x), \qquad (16)$$
где
$$\chi(k,x) = 1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{\Gamma_j(x)}{k - i\kappa_j} + \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{R} \frac{\tilde{r}(l)e^{-2ilx}\chi(-l-i0,x)dl}{l-k}, \qquad (17)$$
функции $\chi(k-i0,x)$, $\Gamma_j(x)$ определяются как решения системы уравнений
$$\chi(k-i0,x) = 1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{\Gamma_j(x)}{k - i\kappa_j} + \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{R} \frac{\tilde{r}(l)e^{-2ilx}\chi(-l-i0,x)dl}{l-k+i0}, \quad k \in R. \qquad (18)$$
$$\Gamma_j(x) = e^{2\kappa_j x}\tilde{b}_j \left[1 + \sum_{m=1}^{N} \frac{\Gamma_m(x)}{-i\kappa_j - i\kappa_m} + \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{R} \frac{\tilde{r}(l)e^{-2ilx}\chi(-l-i0,x)dl}{l+i\kappa_j}\right]. \qquad (19)$$

Убедимся, что $\tilde{\Psi}(k,x)$ является собственной функцией одномерного стационарного оператора Шредингера с некоторым потенциалом $u(x)$. Действительно, пусть
$$u(x) = 2i\partial_x \chi_1(x), \qquad (20)$$

где $\chi_1(x)$ – коэффициент при $1/k$ асимптотического разложения $\chi(k,x)$ при $|k| \to \infty$

$$\chi(k,x) = 1 + \frac{\chi_1(x)}{k} + \frac{\chi_2(x)}{k^2} + \dots . \tag{21}$$

Пусть

$$F(k,x) = (L - k^2)\tilde{\Psi}(k,x). \tag{22}$$

Из (20) следует, что

$$F(k,x) = (o(1))e^{ikx} \quad \text{при} \quad |k| \to \infty. \tag{23}$$

Соотношения (14), (15) линейны, выполняются тождественно по x и связывают функции в точках k и $-k$, поэтому применяя к функции, удовлетворяющей им операций дифференциирования, умножения на произвольную функцию x, не зависящую от k и умножения на четную функцию k мы снова получаем функцию, удовлетворяющую (14), (15). В частности, если $\tilde{\Psi}(k,x)$ удовлетворяет (14), (15), то $\tilde{\Psi}(k,x) + F(k,x)$ также удовлетворяет им. С учетом (22) видим, что для функции $\tilde{\Psi}(k,x) + F(k,x)$ выполнены все условия, которыми мы определяли $\tilde{\Psi}(k,x)$. По теореме единственности получаем, что $\tilde{\Psi}(k,x) + F(k,x) = \tilde{\Psi}(k,x)$, т.е. $F(k,x) \equiv 0$. Тем самым

$$(L - k^2)\tilde{\Psi}(k,x) = 0, \tag{24}$$

т.е. $\tilde{\Psi}(k,x)$ – волновая функция оператора Шредингера с потенциалом (20), что и требовалось доказать.

Отметим, что приведенное выше рассуждение с небольшими модификациями часто используется в теории солитонов.

Для данных рассеяния общего вида интегральные уравнения обратной задачи теории рассеяния явно не решаются. Рассмотрим специальный случай потенциалов с нулевым рассеянием назад при всех энергиях $r(k) \equiv 0$ (**безотражательных потенциалов**) с нетривиальным дискретным спектром. Кстати, задача о таких потенциалах достаточно интересна и с точки зрения физики. В этом случае уравнения обратной задачи (18), (19) сводятся к системе алгебраических уравнений на функции $\Gamma_j(x)$

$$\Gamma_j(x) = e^{2\kappa_j x}\tilde{b}_j \left[1 + i\sum_{m=1}^{N} \frac{\Gamma_m(x)}{\kappa_j + \kappa_m}\right], \tag{25}$$

а из (17), (20) следует, что

$$\chi_1(x) = \sum_{j=1}^{N} \Gamma_j(x), \tag{26}$$

$$u(x) = 2i\partial_x \sum_{j=1}^{N} \Gamma_j(x). \tag{27}$$

(Здесь и далее $i = \sqrt{-1}$.)

Учитывая, что $\operatorname{Re}\tilde{b}_j = 0$ и $\operatorname{Im}\tilde{b}_j > 0$ введем обозначение

$$\tilde{b}_j = ie^{2\theta_j}. \tag{28}$$

Тогда система (25) приобретает вид

$$e^{-2\kappa_j x - 2\theta_j}\Gamma_j(x) = i - \sum_{m=1}^{N} \frac{\Gamma_m(x)}{\kappa_j + \kappa_m}, \tag{29}$$

т.е.

$$e^{-2\kappa_j x - 2\theta_j}\Gamma_j(x) + \sum_{m=1}^{N} \frac{\Gamma_m(x)}{\kappa_j + \kappa_m} = i. \tag{30}$$

$$\sum_{j=1}^{N} a_{mj}(x)\Gamma_j(x) = i, \tag{31}$$

где

$$a_{jj}(x) = e^{-2\kappa_j x - 2\theta_j} + \frac{1}{2\kappa_j}, \quad a_{jm} = \frac{1}{\kappa_j + \kappa_m} \quad \text{при} \quad j \neq m. \tag{32}$$

Для нахождения $\Gamma_j(x)$ воспользуемся правилом Крамера

$$\Gamma_j(x) = i\frac{\det(a_{km}^{(j)}(x))}{\det(a_{km}(x))}, \tag{33}$$

где матрица $(a_{km}^{(j)}(x))$ получается из матрицы $(a_{km}(x))$ заменой каждого из элементов j-го столбца на 1.

$$a_{km}^{(j)}(x) = a_{km}(x) \quad \text{при} \quad m \neq j \quad a_{kj}^{(j)}(x) = 1. \tag{34}$$

Зададим новые матрицы $(\tilde{a}_{km}(x))$, $(\tilde{a}_{km}^{(j)}(x))$ формулой

$$\tilde{a}_{km}(x) = e^{(\kappa_k+\kappa_m)x+\theta_k+\theta_m}a_{km}(x), \quad \tilde{a}_{km}^{(j)}(x) = e^{(\kappa_k+\kappa_m)x+\theta_k+\theta_m}a_{km}^{(j)}(x), \tag{35}$$

т.е.

$$\tilde{a}_{kk}(x) = 1 + \frac{e^{2\kappa_k x + 2\theta_k}}{2\kappa_k}, \quad \tilde{a}_{km} = \frac{e^{(\kappa_k+\kappa_m)x+\theta_k+\theta_m}}{\kappa_j + \kappa_m} \ \text{ при } \ j \neq m. \tag{36}$$

Легко видеть, что

$$\Gamma_j(x) = i\frac{\det(\tilde{a}_{km}^{(j)}(x))}{\det(\tilde{a}_{km}(x))}, \quad \sum_{j=1}^{N}\Gamma_j(x) = i\sum_{j=1}^{N}\frac{\det(\tilde{a}_{km}^{(j)}(x))}{\det(\tilde{a}_{km}(x))}. \tag{37}$$

В то же время матрица $(\tilde{a}_{km}^{(j)}(x))$ получается из $(\tilde{a}_{km}(x))$ дифференцированием по x j-ого столбца. Вычислим производную $\partial_x \det(\tilde{a}_{km}(x))$. По правилу Лейбница, пользуясь тем, что детерминант - линейная функция по каждому из столбцов, получаем

$$\partial_x \det(\tilde{a}_{km}(x)) = \sum_{j=1}^{N}\det(\tilde{a}_{km}^{(j)}(x)), \tag{38}$$

т.е.

$$\sum_{j=1}^{N}\Gamma_j(x) = i\frac{\partial_x \det(\tilde{a}_{km}(x))}{\det(\tilde{a}_{km}(x))} = i\partial_x \ln\det(\tilde{a}_{km}(x)), \tag{39}$$

$$u(x) = -2\partial_x^2 \ln\det(\tilde{a}_{km}(x)). \tag{40}$$

Учитывая, что t-динамика данных $\tilde{b}_j$ дается формулой (13), получаем следующую формулу для явных решений KdV

$$u(x,t) = -2\partial_x^2 \ln\det(\tilde{a}_{km}(x,t)), \tag{41}$$

где

$$\tilde{a}_{kk}(x) = 1 + \frac{e^{2\kappa_k x + 2\kappa_k^3 t + 2\theta_k}}{2\kappa_k}, \quad \tilde{a}_{km} = \frac{e^{(\kappa_k+\kappa_m)x+(\kappa_k^3+\kappa_m^3)t+\theta_k+\theta_m}}{\kappa_j + \kappa_m} \ \text{ при } \ j \neq m. \tag{42}$$

Эти решения называются N-солитонными решениями.

На этом мы закончим исследование уравнения KdV в классе убывающих на бесконечности потенциалов. На следующей лекции мы рассмотрим периодическую по x задачу.