# Лекция 4.

27 сентября 1999 г.

Мы продолжаем изучение спектральной теории одномерного стационарного оператора Шредингера

$$L = -\partial_x^2 + u(x). \tag{1}$$

Напомним, что потенциал $u(x)$ мы предполагаем гладким, вещественным и убывающим на бесконечности не медленнее, чем $1/|x|^{2+\epsilon}$.

Мы будем изучать спектральную задачу для $L$ переходя к интегральному уравнению, введенному на прошлой лекции. Отметим, что этот метод с небольшими изменениями переносится и на многомерный случай. Однако, в одномерном случае можно получить некоторую информацию о спектре, используя подход, основанный на теореме Штурма о нулях. Напомним ее (без доказательств).

**Теорема 1** *Пусть $\psi_1(E_1,x)$ и $\psi_2(E_2,x)$ – два вещественных решения уравнения*

$$(-\partial_x^2 + u(x))\psi(k,x) = E\psi(k,x). \tag{2}$$

*с $E = E_1$ и $E = E_2$ соответственно (u(x) - вещественная гладкая функция). Тогда*

1. *Если $E_2 \geq E_1$, то между любыми двумя нулями $\psi_1(E_1,x)$ лежит хотя бы один ноль $\psi_2(E_2,x)$.*

2. *Пусть $E_2 > E_1$ и $x_0 \neq x_1$ – такая пара точек, что $\psi_1(E_1,x_0) = \psi_2(E_1,x_0) = \psi_1(E_1,x_1) = 0$. Тогда строго между $x_0$ и $x_1$ лежит хотя бы один ноль $\psi_2(E_2,x)$.*

Временно предположим для простоты, что $u(x)$ – финитный потенциал (т.е. $u(x) \equiv 0$ при $|x| > X_0$).

При любом $E$ множество решений (2), если не накладывать никаких ограничений на поведение на бесконечности, образует двумерное линейное пространство. При $E > 0$ все решения (2) ограничены и осциллируют на бесконечности, при $E = 0$ они линейны по $x$, поэтому при $E \geq 0$ мы имеем двукратный дискретный спектр и не имеем непрерывного. Пусть

$E < 0$. В двумерном пространстве решений при каждом $E$ выделено одномерное подпространство решений, экспоненциально убывающих при $x \to -\infty$. Общее убывающее при $x \to -\infty$ решение имеет вид

$$\Psi(E, x) = (E) e^{\sqrt{-E} x} \quad \text{при} \quad x < -X_0. \tag{3}$$

Полагая $c(E) = 1$ мы фиксируем единственное решение $\psi(E, x)$

$$\psi(E, x) = e^{\sqrt{-E} x} \quad \text{при} \quad x < -X_0. \tag{4}$$

При $x > X_0$ оно оказывается суммой убывающей и растущей экспонент

$$\psi(E, x) = a(E) e^{\sqrt{-E} x} + b(E) e^{-\sqrt{-E} x}, \tag{5}$$

где $a(E), b(E)$ – некоторые функции, точный вид которых зависит от конкретного потенциала $u(x)$. Решение $\psi(E, x)$ ограничено (и одновременно лежит в пространстве $L^2(R)$) тогда и только тогда, когда $a(E) = 0$. Тем самым, дискретный спектр определяется уравнением $a(E) = 0$ $(E < 0)$.

Можно считать, что решение является собственным значением дискретного спектра, если оно имеет нули на обеих бесконечностях. Если $E$ отрицательно и достаточно велико по величине, то $\psi(E, x)$ не имеет нулей при конечных $x$ и мы находимся ниже дискретного спектра. Если мы пересекли нижний уровень дискретного спектра, то у нас появляется один ноль, и так далее. Тем самым, если мы находимся вне дискретного спектра, то число нулей (конечных) функции $\psi(E, x)$ дает нам число точек дискретного спектра ниже $E$, а число конечных нулей собственной функции дискретного спектра равно ее номеру, отсчитываемому снизу минус 1.

Вернемся теперь к исследованию интегрального уравнения на волновую функцию. В конце прошлой лекции мы показали, что любое решение интегрального уравнения

$$\Psi(k, x) = e^{ikx} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(k, x - y) u(y) \Psi(k, y) dy, \tag{6}$$

где $G(k, x)$ – какая-нибудь функция Грина оператора $(-\partial_x^2 - k^2)$, является также решением уравнения Шредингера

$$(-\partial_x^2 + u(x)) \Psi(k, x) = k^2 \Psi(k, x). \tag{7}$$

(Мы ввели здесь новый спектральный параметр $k$, $E = k^2$).

В дальнейшем мы будем работать со следующей парой функций Грина:

$$G_1(k,x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \ \ x < 0 \\ -\dfrac{\sin(kx)}{k} & \text{при} \ \ x > 0, \end{cases} \tag{8}$$

$$G_2(k,x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(kx)}{k} & \text{при} \ \ x < 0 \\ 0 & \text{при} \ \ x > 0. \end{cases} \tag{9}$$

**Теорема 2** *1. Пусть $G(k,x)$ – любая из функций Грина $G_1(k,x)$, $G_2(k,x)$. Тогда при любом вещественном $k$ существует единственное решение уравнения (6) (свое для каждой из функций Грина). Эти решения мы будем обозначать $\Psi_1(k,x)$ и $\Psi_2(k,x)$ соответственно. Обе эти функции удовлетворяют уравнению Шредингера (7) .*

2. *Функции $\Psi_1(k,x)$ и $\Psi_2(k,x)$ при вещественном $k \neq 0$ имеют следующую асимптотику по $x$:*

$$\Psi_1(k,x) = \begin{cases} a(k)e^{ikx} + b(k)e^{-ikx} + o(1) & \textit{при} \ \ x \to -\infty \\ e^{ikx} + o(1) & \textit{при} \ \ x \to +\infty, \end{cases} \tag{10}$$

$$\Psi_2(k,x) = \begin{cases} e^{ikx} + o(1) & \textit{при} \ \ x \to -\infty \\ d(k)e^{ikx} + c(k)e^{-ikx} + o(1) & \textit{при} \ \ x \to +\infty, \end{cases} \tag{11}$$

*где $a(k)$, $b(k)$, $c(k)$, $d(k)$ – функции переменной $k$, свои для каждого конкретного потенциала $u(x)$. Эти функции служат* **данными рассеяния непрерывного спектра**.

3. *Функция $\Psi_1(k,x)$ аналитически продолжается по $k$ до голоморфной в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} k \geq 0$ функции, и при $|k| \to \infty$ $\Psi_1(k,x) = e^{ikx}(1 + o(1))$. Аналогично, функция $\Psi_2(k,x)$ голоморфно продолжается в нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} k \leq 0$, и при $|k| \to \infty$ $\Psi_2(k,x) = e^{ikx}(1 + o(1))$.*

Для доказательства используется свойство Вольтерровости интегрального оператора, входящего в уравнение (6).

Пусть теперь $\mathrm{Im}\, k > 0$. Тогда определена функция $\Psi_1(k, x)$, но в ее асимптотике при $x \to -\infty$ мы не можем увидеть убывающую экспоненту на фоне растущей. Это означает, что функция $a(k)$ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость по $k$, а $b(k)$ как правило - нет. В специальных случаях, когда $u(x)$ – финитная функция, такое продолжение возможно, однако мы не будем пользоваться этим.

Обсудим теперь спектральный смысл нулей $a(k)$. Если $a(k_j) = 0$, то из асимптотики $\Psi_1(k_j, x)$, видно, что в этом случае она убывает и при $x \to -\infty$, т.е. это точка дискретного спектра. Она может лежать лишь на мнимой оси (иначе бы $\mathrm{Re}\,\Psi_1(k_j, x)$ и $\mathrm{Im}\,\Psi_1(k_j, x)$ ) давали пару линейно независимых ограниченных решений, что невозможно). В этом случае

$$\Psi_1(k_j, x) = b_j e^{-ikx}(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad x \to -\infty, \tag{12}$$

и, тем самым, каждой точке дискретного спектра $E_j = -\kappa_j^2$ $k_j = I\kappa_j$, $\kappa_j \in \mathbf{R}$ мы сопоставили величину $b_j$, служащую аналогом данных рассеяния для дискретного спектра.

Суммируя вышесказанное, каждому гладкому вещественному убывающему на бесконечности не медленнее, чем $1/|x|^{2+\epsilon}$ потенциалу $u(x)$ мы сопоставили следующий набор данных:

1. 4 комлекснозначных функции $a(k)$, $b(k)$, $c(k)$, $d(k)$ – вещественной переменной $k$ – **данные рассеяния непрерывного спектра**.

2. Дискретный спектр - набор точек $E_j = -\kappa_j$, $j = 1, \ldots, N$. (Этот набор может быть и пустым $N = 0$.)

3. Набор вещественных констант $b_j$, $j = 1, \ldots, N$, соответствующих точкам дискретного спектра $E_j$.

Функция $\Psi_1(k, x)$ при вещественных $k > 0$ описывает рассеяние на потенциале движущейся слева направо частицы. Слева от препятствия мы имеем сумму падающей волны $a(k)e^{ikx}$ и отраженной волны $b(k)e^{-ikx}$, справа - прошедшую волну $e^{ikx}$. Тем самым коэффициент прохождения слева направо $s_{11}(k)$ равен

$$s_{11}(k) = \frac{1}{a(k)} \tag{13}$$

коэффициент отражения для идущей из $-\infty$ волны $s_{12}(k)$ равен

$$s_{12}(k) = \frac{b(k)}{a(k)}. \tag{14}$$

Аналогично, положим

$$s_{21}(k) = \frac{c(-k)}{d(-k)} \qquad s_{22}(k) = \frac{1}{d(-k)} \tag{15}$$

Матрица

$$\hat{S}(k) = \begin{pmatrix} s_{11}(k) & s_{12}(k) \\ s_{21}(k) & s_{22}(k) \end{pmatrix}. \tag{16}$$

называется матрицей рассеяния.

**Упражнение 1** *Используя вещественность $u(x)$ и независимость от $x$ вронскиана любой пары решений с одинаковыми $E$ доказать, что при всех вещественных $k$:*

1. *Матрица $\hat{S}(k)$ унитарна.*

2. $s_{11}(k) \equiv s_{22}(k)$.

Как мы уже отмечали, при вещественном $k$ решение (7) однозначно фиксируется асимптотикой при $x \to -\infty$. При чисто мнимом $k$ убывающее при $x \to -\infty$ решение однозначно фиксируется множителем при экспоненте. Тем самым, из сопоставления асимптотик легко выводится

**Теорема 3** 1. *При всех вещественных $k$ тождественно по $x$ выполнено соотношение*

$$\Psi_1(k, x) = a(k)\Psi_2(k, x) + b(k)\Psi_2(-k, x). \tag{17}$$

2. *Пусть $E_j = k_j^2 = -\kappa_j^2$, $\kappa_j \in \mathbf{R}$, $\kappa_j > 0$ – точка дискретного спектра. Тогда тождественно по $x$*

$$\Psi_1(k_j, x) = b_j\Psi_2(-k_j, x). \tag{18}$$

Теорема 3 вместе с аналитичностью $\Psi_1(k, x)$ и $\Psi_2(k, x)$ по $k$ в верхней и нижней полуплоскости соответственно будет играть ключевую роль при решении обратной задачи.