Лекция 3.

20 сентября 1999 г.

Мы хотим проинтегрировать уравнение KdV. Для этого нам понадобится спектральная теория одномерного стационарного оператора Шредингера

$$L = -\partial_x^2 + u(x). \tag{1}$$

К счастью этот оператор хорошо исследован в квантовой механике.

Напомним несколько базисных фактов из квантовой механики. Частица без спина в потенциальном поле описывается уравнением Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{x},t) = \hat{H}\Psi(\vec{x},t), \quad \hat{H} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\vec{x})\right], \quad \vec{x} \in R^3 \tag{2}$$

с вещественным потенциалом $U(x)$.

Если потенциал не зависит от t, то общее решение уравнения Шредингера удобно раскладывать по стационарным состояниям – решениям вида

$$\Psi_n(\vec{x},t) = e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}\Psi_n(\vec{x},0). \tag{3}$$

где $\Psi_n(\vec{x},0)$ – решения стационарного уравнения Шредингера

$$\hat{H}\Psi_n(\vec{x},0) = E_n\Psi_n(\vec{x},0). \tag{4}$$

Если дана локализованная потенциальная яма, то в классической механике мы имеем два типа движений – финитные движения и инфинитные. В задаче Кеплера финитное движение – движение по эллиптической орбите, инфинитное движение – движение по параболе или гиперболе. Аналоги финитных траекторий в квантовой задаче – состояния, отвечающие дискретному спектру, аналоги инфинитных траекторий – точки непрерывного спектра.

Мы будем предполагать, что потенциал $U(\vec{x})$ неособый и достаточно быстро убывает на бесконечности. Тогда оператор $\hat{H}$ – неограниченный самосопряженный оператор в $L^2(R^3)$.

Упражнение 1 . *Доказать, что оператор $\hat{H}$ неограничен в $L^2(R^3)$.*

Применяя к $\hat{H}$ спектральную теорему получаем:

Теорема 1 *Существует пространство M с мерой μ такое, что $\hat{H}$ унитарно эквивалентен оператору умножения на почти всюду конечную вещественнозначную функцию $f(m)$, действующему на пространстве $L^2(M, d\mu)$ (без доказательства).*

Определение 1 *Точка E принадлежит* **спектру** $\hat{H}$ *если оператор $(\hat{H} - E\hat{1})^{-1}$ неограничен , или, что эквивалентно, функция $(f(m) - E)^{-1}$ не является почти всюду ограниченной.*

Точка E принадлежит **дискретному спектру**, *если мера множества $f(m) = E$ отлична от 0, или, что эквивалентно, уравнение*

$$\hat{H}\Psi(\vec{x}) = E\Psi(\vec{x}) \tag{5}$$

имеет нетривиальные решения в пространстве $L^2(R^3)$.

Точка E принадлежит **непрерывному спектру**, *если после выбрасывания из пространства M всех множеств $f(m) = E_n$, где E_n – точки дискретного спектра функция $(f(m) - E)^{-1}$ не является почти всюду ограниченной на оставшемся множестве.*

Замечание 1 *Некоторые авторы определяют непрерывный спектр так, чтобы он не пересекался с дискретным. Для оператора Шредингера с вещественным неособым достаточно быстро убывающим на бесконечности потенциалом дискретный спектр в нашем понимании не пересекается с непрерывным, поэтому оба определения в данном случае совпадают.*

Согласно одной из теорем функционального анализа, точка E принадлежит спектру $\hat{H}$ тогда и только тогда, когда уравнение (5) имеет нетривиальное решение, не более чем полиномиально растущее на бесконечности (на самом деле непрерывный спектр $\hat{H}$ отвечает ограниченным решениям (5), не лежащим в $L^2(R^3)$.

Таким образом построение спектральной теории оператора Шредингера сводится к поиску ограниченных решений уравнения (3) и выделению среди них решений, лежащих в L^2.

Напомним, что потенциал $U(x)$ предполагается вещественным, неособым и достаточно быстро убывающим на бесконечности. Тогда имеет место

Теорема 2 1. *Спектр опрератора $\hat{H}$ вещественен.*

2. *Непрерывный спектр $\hat{H}$ совпадает с полуюсью неотрицательных энергий $E \geq 0$ и имеет кратность 2 для одномерного оператора и бесконечнократен в размерности больше 1*

3. *Дискретный спектр либо отсутствует либо лежит в области $E < 0$ и содержит конечное число собственных значений конечной кратности. Соответствующие собственные функции экспоненциально убывают на бесконечности.*

Для решения уравнения KdV нам нужен лишь одномерный оператор Шредингера. Начитная с этого места мы будем рассматривать лишь случай размерности 1. Кроме того, для упрощения обозначений будем считать, что $\hbar = 1$, $m = 2$. В этом случае $L = \hat{H}$. Напомним также, что оператор импульса по x имеет вид $p = -i\hbar\partial_x = -i\partial_x$.

Покажем, как в этом случае строится полная система ограниченных решений (волновых функций). Нашим основным инструментом для этой цели будут интегральные уравнения.

Определение 2 *Оператор A в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ называется* **ограниченным**, *если для любого вектора $f \in \mathcal{H}$ имеет место оценка*

$$< Af, Af > \leq C_A < f, f >, \tag{6}$$

где C_A – константа, не зависящая от f.

Определение 3 *Оператор A в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ называется* **компактным (фредгольмовым, вполне непрерывным)**, *если образ единичного шара – компактное множество.*

Поскольку любое компактное множество лежит в шаре конечного радиуса, любой компактный оператор автоматически ограничен. Поскольку единичный шар в гильбертовом пространстве некомпактен, ограниченность оператора не влечет за собой его компактности.

Приведем два важнейших примера компактных операторов (без доказательств).

Пример 1 *Пусть X – компактная область в R^n, $K(x, y)$ -непрерывная функция на $X \times X$. Тогда интегральный оператор в пространстве $C(X)$ непрерывных функций на X*

$$(\hat{K}f)(x) = \int\limits_X K(x, y)f(y)d^n y \tag{7}$$

компактен.

Отметим, что этот факт выводится из теоремы Асколи-Арцела о компактности равностепенно непрерывных ограниченных семейств непрерывных функций.

Пример 2 *Пусть X – подмножество R^n, $K(x,y)$ – функция из пространства $L^2(X \times X)$. Тогда интегральный оператор в пространстве $L^2(X)$*

$$(\hat{K}f)(x) = \int\limits_X K(x,y) f(y) d^n y \tag{8}$$

компактен.

Тем самым, интегральные операторы с не слишком сильно сингулярными ядрами компактны.

Перечислим без доказательства некоторые важные свойства компактных операторов.

Теорема 3 *Пусть $\hat{K}$ – компактный оператор. Тогда*

1. *Вне любой окрестности точки 0 спектр $\hat{K}$ содержит не более конечного числа точек конечной кратности.*

2. *Уравнение*

   $$(\hat{1} + \hat{K}) f = g \tag{9}$$

   имеет решение при любом g тогда и только тогда, когда однородное уравнение

   $$(\hat{1} + \hat{K}) f = 0 \tag{10}$$

   не имеет ненулевых решений. Если же (10) имеет ненулевые решения, то для разрешимости уравнения (9) необходимо и достаточно, чтобы его правая часть была ортогональна ядру сопряженного оператора

   $$\hat{1} + \hat{K}^*, \tag{11}$$

   т.е. имело место

   $$< g, f^* >= 0 \quad \text{для} \quad \text{любого} \quad f^* \ \text{такого, что} \quad (\hat{1} + \hat{K}^*) f^* = 0. \tag{12}$$

   Здесь $\hat{1}$ обозначает единичный оператор.

   Это свойство, называемое **Альтернативой Фредгольма**, *обобщает хорошо известное свойство квадратных конечномерных матриц.*

Замечание 2 *Для квадратной матрицы существование ненулевых решений однородного уравнения эквивалентно обращению в 0 ее определителя. Для операторов вида $\hat{1} + \hat{K}$, где $\hat{K}$ – достаточно хороший интегральный оператор, можно построить так называемый* **определитель Фредгольма**, *равенство нулю которого эквивалентно существованию однородных решений, однако мы не будем им пользоваться.*

Определение 4 *Уравнение в гильбертовом пространстве вида*

$$(\hat{1} + \hat{K})f = g \tag{13}$$

где $\hat{K}$ – компактный оператор, называется **уравнением Фредгольма второго рода**.

Определение 5 **Уравнение Фредгольма первого рода** – *уравнение в гильбертовом пространстве вида*

$$\hat{K}f = g \tag{14}$$

где $\hat{K}$ – компактный оператор.

Уравнения первого рода существенно сложнее, чем уравнения второго рода, поскольку они являются некорректными задачами. В нашем курсе нам будут нужны только уравнения второго рода.

Наболее просто вопрос о разрешимости линейного конечномерного уравнения с квадратной матрицей решается, если эта матрица треугольна. В этом случае разрешимость при любой правой части эквивалентна отсутствию нулей на диагонали. Для интегральных уравнений аналогами систем с треугольными матрицами служат уравнения Вольтерра.

Определение 6 *Пусть X – подмножество прямой R^1, $\hat{K}$ – компактный интегральный оператор в пространстве функций на X.*

$$(\hat{K}f)(x) = \int\limits_X K(x,y)f(y)d^n y. \tag{15}$$

$\hat{K}$ называется **оператором Вольтерра**, *если выполнено одно из свойств треугольности:*

1. *$K(x,y) = 0$ при всех $x < y$ (нижнетреугольный оператор).*

2. $K(x,y)=0$ при всех $x>y$ (верхнетреугольный оператор).

Определение 7 *Пусть $\hat{K}$ – оператор Вольтерра. Тогда уравнение*

$$(\hat{1}+\hat{K})f=g \tag{16}$$

уравнением Вольтерра второго рода, *а уравнение*

$$\hat{K}f=g \tag{17}$$

– **уравнением Вольтерра первого рода**.

Уравнение Вольтерра второго рода **всегда однозначно разрешимо**.

На этом мы покончим с абстрактым функциональным анализом и перейдем к исследованию одномерного оператора Шредингера.

$$L=-\partial_x^2+u(x). \tag{18}$$

Напомним, что потенциал $u(x)$ будем предполагать гладким, вещественным и убывающим на бесконечности не медленнее, чем $1/|x|^{2+\epsilon}$.

Наша ближайшая задача – исследование решений уравнения

$$(-\partial_x^2+u(x))\Psi=E\Psi. \tag{19}$$

Введем новый спектральный параметр k, $E=k^2$ (как мы увидим далее, k будет иметь смысл импульса падающей частицы). Каждому значению E будет отвечать 2 значения k.

$$(-\partial_x^2+u(x))\Psi(k,x)=k^2\Psi(k,x). \tag{20}$$

Перейдем от (20) к интегральному уравнению на функцию $\Psi(k,x)$. Для этого сначала перепишем (20) в следующем виде

$$(-\partial_x^2-k^2)\Psi(k,x)=-u(x)\Psi(k,x). \tag{21}$$

Попробуем построить обратный оператор к $(-\partial_x^2-k^2)$.

Определение 8 **Функцией Грина (фундаментальным решением)** *дифференциального оператора M, действующего на функциях в R^n называется решение уравнения*

$$MG(x,y)=\delta(x_1-y_1)\delta(x_2-y_2)\dots\delta(x_n-y_n). \tag{22}$$

Если M – оператор с постоянными коэффициентами, то функцию Грина можно выбрать зависящей от разности $x-y$. В этом случае уравнение (22) приобретает вид

$$MG(x) = \delta(x_1)\delta(x_2)\ldots\delta(x_n). \tag{23}$$

(Вопрос о существовании и единственности функции Грина не является тривиальным. Мы не будем доказывать никаких общих теорем на этот счет).

По определению, функция Грина оператора $(-\partial_x^2 - k^2)$ – решение уравнения

$$(-\partial_x^2 - k^2)G(k,x) = \delta(x), \tag{24}$$

т.е. она удовлетворяет

$$(-\partial_x^2 - k^2)G(k,x) = 0 \ \text{ при } \ x \neq 0, \tag{25}$$

в точке 0 она уже не гладкая и выполнено условие сшивки

$$\begin{cases} G(k,x+0) - G(k,x-0) = 0 \\ G'(k,x+0) - G'(k,x-0) = -1. \end{cases} \tag{26}$$

Здесь $G(k,x+0)$ и $G(k,x-0)$ обозначают пределы функции $G(k,x)$ при $x \to 0$ справа и слева соответственно.

Тем самым функция Грина имеет вид

$$G(k,x) = \begin{cases} \alpha_1 e^{ikx} + \alpha_2 e^{-ikx} & \text{при } \ x < 0 \\ \alpha_3 e^{ikx} + \alpha_4 e^{-ikx} & \text{при } \ x > 0 \end{cases} \tag{27}$$

где константы α_j нужно брать такими, чтобы имело место (26).

В частности, уравнению (26) удовлетворяют функции

$$G_1(k,x) = \begin{cases} 0 & \text{при } \ x < 0 \\ -\dfrac{\sin(kx)}{k} & \text{при } \ x > 0, \end{cases} \tag{28}$$

$$G_2(k,x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(kx)}{k} & \text{при } \ x < 0 \\ 0 & \text{при } \ x > 0. \end{cases} \tag{29}$$

Теорема 4 *Пусть $\Psi(k,x)$ – некоторое решение интегрального уравнения*

$$\Psi(k,x) = e^{ikx} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(k,x-y)u(y)\Psi(k,y)dy, \tag{30}$$

где $G(k,x)$ – какая-нибудь из функций Грина оператора $(-\partial_x^2 - k^2)$. Тогда $\Psi(k,x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (20).

Для доказательства достаточно применить оператор $(-\partial_x^2 - k^2)$ к обеим частям (30) и воспользоваться определением функции Грина (24).