Лекция 1.

6 сентября 1999 г.

В предыдущем семестре мы в основном обсуждали конечномерные интегрируемые системы. Важнейший класс таких систем – гамильтоновы системы, интегрируемые по Лиувиллю. Напомним их определение.

Определение 1 *Пусть M – конечномерное гладкое многообразие M, на котором задана дополнительная структура – кососимметричное тензорное поле $\omega^{ij}(\vec{x}) = -\omega^{ji}(\vec{x})$ с двумя верхними индексами (бивекторное поле). Тогда на пространстве функций на M определена следуюшая кососимметричная скобка:*

$$\{f,g\} = \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^i}\omega^{ij}(\vec{x})\frac{\partial g(\vec{x})}{\partial x^j}. \tag{1}$$

Определение 2 *Многообразие M с заданным на нем кососимметрическим бивекторным полем полем называется* **пуассоновым многообразием***, а скобка (1) –* **скобкой Пуассона***, если для любой тройки функций $f(\vec{x})$, $g(\vec{x})$, $h(\vec{x})$ на M тождественно по $\vec{x}$ выполнено следующее тождество Якоби*

$$\{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} \equiv 0. \tag{2}$$

Определение 3 *Пусть M – некоторое пуассоново многообразие, H – произвольная гладкая функция на M. Порождаемое H* **Гамильтоново векторное поле** *задается формулой*

$$\frac{dx^i}{dt} = \{x^i, H\}, \tag{3}$$

где x^i – локальные координаты на M.

Функция H называется **Гамильтонианом** *потока (3).*

Упражнение 1 . *Для производной произвольной функции $f(\vec{x})$ вдоль поля (3) имеет место соотношение*

$$\frac{df(\vec{x})}{dt} = \{f, H\}, \tag{4}$$

откуда, в частности, следует корректность последнего определения.

Пример 1 *Пусть M – симплектическое многообразие, т.е. M – четномерное многообразие, на котором задана невырожденная замкнутая 2-форма $\Omega = \omega_{ij}(\vec{x})dx^i dx^j$, $d\Omega = 0$. Тогда тензорное поле $\omega^{ij}(\vec{x})$, где $\omega^{ij}(\vec{x})$ матрица, обратная к $\omega_{ij}(\vec{x})$ задает пуассонову структуру на M. Тем самым, любое симплектическое многообразие автоматически является пуассоновым.*

Лет 20 назад понятие гамильтоновой системы обычно определялось в терминах симплектической структуры (смотри например книгу Арнольда “Математические методы классической механики”). Приемущество такого подхода в том, что тождество Якоби эквивалентно **линейному** условию замкнутости на форму $\Omega = \omega_{ij}(\vec{x})dx^i dx^j$. В то же время в терминах тензора $\omega^{ij}(\vec{x})$ с верхними индексами тождество Якоби уже нелинейно. Однако во многих важных примерах тензор $\omega^{ij}(\vec{x})$ оказывается везде вырожденным и обратить его, чтобы получить симплектическую структуру нельзя. В этом случае перейти к симплектическому описанию гамильтовых систем можно следующим образом:

Определение 4 *Функция K на Пуассоновом многообразии называется* **аннулятором скобки Пуассона** *или* **функцией Казимира**, *если ее скобка Пуассона со всеми функциями на M тождественно равна 0.*

$$\forall f \in C^{(\infty)}(M) \qquad \{f, H\} \equiv 0. \tag{5}$$

Пусть K_1, …,K_k – полный набор функций Казимира на M. Тогда ограничение тензора $\omega^{ij}(\vec{x})$ на подмногообразие линий уровня функций Казимира (называемое симплектическим листом)

$$K_1 = c_1, \ldots K_k = c_k \tag{6}$$

корректно определено и невырождено в точках общего положения, поэтому на каждом симплектическом листе пуассонову структуру можно обернуть и получить симплектическую структуру (возможно с особенностями).

Отметим, что функции Казимира инвариантны относительно всех гамильтоновых потоков на M, поэтому их естественно рассматривать как законы сохранения, порождаемые геометрией скобки Пуассона. Поскольку все гамильтоновы потоки оставляют инвариантными симплектические листы, то естественно с самого начала ограничиться на один симплектический лист, который уже является одновременно как пуассоновым, так и симплектическим многообразием. Однако это не всегда удобно.

Пример 2 *Пусть M – двойственное пространство к алгебре Ли g с базисом e^1, ..., e^n и коммутатором*

$$[e^i, e^j] = c_k^{ij} e^k \tag{7}$$

(c_k^{ij} называются структурными константами алгебры), $M = g^*$. Тогда элементы алгебры e^j естественно интерпретировать как линейные функции на M (обозначим эти функции x^j соответственно.) Тем самам на линейных функциях на M задана скобка Пуассона

$$[x^i, x^j] = c_k^{ij} x^k, \qquad \omega^{ij}(\vec{x}) = c_k^{ij} x^k, \tag{8}$$

естественно продолжающаяся на все гладкие функции на M, и мы получаем пуассоново многообразие с линейно зависящей от координат скобкой. Она называется скобкой Ли-Костанта-Кириллова. Как правило, эта скобка вырождена и имеет нетривиальные функции Казамира.

Рассмотрим простейший пример.

Пример 3 *Пусть g – алгебра Ли $so(3)$ с базисом e^1, e^2, e^3 и коммутатором*

$$[e^1, e^2] = -[e^2, e^1] = e^3, [e^2, e^3] = -[e^3, e^2] = e^1, [e^3, e^1] = -[e^1, e^3] = e^2. \tag{9}$$

Соответствующая скобка Пуассона имеет вид

$$\omega^{12}(\vec{x}) = -\omega^{21}(\vec{x}) = x^3, \omega^{23}(\vec{x}) = -\omega^{32}(\vec{x}) = x^1, \omega^{31}(\vec{x}) = -\omega^{13}(\vec{x}) = x^2. \tag{10}$$

Простейшая функция Казимира этой скобки имеет вид $K = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$, общий Казимир записывается в виде $f(K)$, где $f(x)$ – произвольная функция одной переменной. Симплектические листы этой скобки – сферы $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = \mathrm{const}$,

Упражнение 2 . *Ограничение описанной скобки на линии уровня $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = \mathrm{const}$ невырождено при $\mathrm{const} > 0$.*

Гамильтонов подход очень удобен при исследовании законов сохранения (интегралов системы). Действительно, из формулы (3) видно, что функция f является интегралом потока с гамильтонианом H тогда, и только тогда, когда $\{f, H\} \equiv 0$. В частности благодаря косой симметрии скобки для любого H $\{f, H\} \equiv 0$, т.е. гамильтониан всегда является интегралом движения.

Из тождества Якоби следует, что скобка Пуассона двух интегралов движения – снова интеграл движения. Легко также убедиться, что потоки, порожденные гамильтонианами H_1 и H_2 коммутируют между собой, если и только если скобка Пуассона $\{H_1, H_2\}$ – функция Казимира. В частности, если $\{H_1, H_2\} \equiv 0$, то порождаемые ими потоки заведомо коммутируют.

Определение 5 *Функции H_1 и H_2 на пуассоновом многообразии находятся в инволюции, если*

$$\{H_1, H_2\} \equiv 0. \tag{11}$$

Определение 6 *Пусть M – пуассоново многообразие размерности $2n+k$ с k независимыми Казимирами $K_1, \ldots, K_k$ и на нем задана гамильтонова система с гамильтонианом H такая, что она допускает n независимых интегралов движения в инволюции $H_1 = H, H_2, \ldots, H_n$, $\{H_i, H_j\} \equiv 0$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$. Тогда эта система называется* **вполне интегрируемой по Лиувиллю**.

Как мы уже отмечали ранее, в случае общего положения можно ограничить нашу систему на $2n$-мерный симплектический лист

$$K_1 = c_1, \ldots K_k = c_k \tag{12}$$

поэтому без почти потери общности можно считать, что мы имеем n интегралов в инволюции на $2n$-мерном симплектическом многообразии. Рассмотрим n-мерное подмногообразие N_d – множество уровня законов сохранения

$$H_1 = d_1, \ldots H_n = d_n. \tag{13}$$

Оно инвариантно относительно n коммутирующих потоков, порождаемых гамильтонианами H_j. Зафиксируем на нем точку x_0. Любая точка подмногообразия N_d в окрестности x_0 получается из x_0 сдвигом на время t_1 вдоль потока с гамильтонианом H_1 плюс сдвиг на время t_2 вдоль потока с гамильтонианом H_2 плюс $\ldots$ плюс сдвиг на время t_n вдоль потока с гамильтонианом H_n. Тем самым мы получаем систему локальных координат на N_d в окрестности x_0.

Отметим следующие важные свойства интегрируемых по Лиувиллю систем.

1. Система называется интегрируемой в квадратурах, если ее решение через задающие ее функции при помощи следующих операций

   (a) Алгебраических операций над функциями, включая подстановку.

   (b) Операций дифференциирования и интегрирования.

   (c) Решения систем уравнений вида

   $$\begin{cases} F_1(y_1, \ldots, y_s) = 0 \\ \ldots \\ F_q(y_1, \ldots, y_s) = 0 \end{cases} \tag{14}$$

   где y_j – некоторые независимые переменные.

   Согласно **теореме Ливилля об интегрируемости** из интегрируемости по Лиувиллю следует интегрируемость в квадратурах.

2. Более того, с помощью квадратур можно построить такой набор локальных координат $H_1, \ldots H_n, \tau_1, \ldots, \tau_n$, что

   $$\{H_i, H_j\} = \{\tau_i, \tau_j\} = 0, \quad \{\tau_i, H_j\} = \delta_{ij}. \tag{15}$$

   В этих координатах система линеаризуется.

3. Пусть подмногообразие N_d для некоторой области значений констант d_j компактно, неособо и потоки на нем, порождаемые гамильтонианами H_j линейно независимы во всех точках. Тогда в этой области значений констант d_j N_d – n-мерные торы и потоки на них – движение по прямолинейным обмоткам.

4. В предположениях предыдущего пункта преобразованием в квадратурах вводятся переменные действие-угол, т.е. такой набор переменных $I_1,\ldots I_n$, $\phi_1,\ldots \phi_n$, что

   (a) $\phi_1,\ldots \phi_n$ – углы на торах N_d.

(b) Переменные действия I_j являются функциями гамимльтонианов H_j.

(c) Скобки Пуассона переменных действие-угол имеют канонический вид

$$\{I_i, I_j\} = \{\phi_i, \phi_j\} = 0, \quad \{\phi_i, I_j\} = \delta_{ij}. \tag{16}$$

Эти определения могут служить отправной точкой при переходе к бесконечномерным системам. В настоящее время пока нет единого определения интегрируемости для уравнений в частных производных, и различные подходы не всегда оказываются эквивалентными. Систему естественно считать интегрируемой, если она обладает хотя бы каким-либо из перечисленных ниже свойств.

1. Бесконечномерные гамильтоновы системы, интегрирумые по Лиувиллю. Это системы с бесконечным набором интегралов движения в инволюции таким, что после фиксации значений всех функций Казимира и всех интегралов движения действие порождаемых этими интегралами потоков локально транзитивно. Для некоторых (но далеко не всех) систем, которые считаются в настоящее время интегрируемыми, это удается доказать.

2. Системы, для которых можно построить переменные действие-угол.

3. Линейные уравнения, а также уравнения приводящиеся заменой переменных к линейному виду.

4. Уравнения, имеющие достаточно большой запас явных решений (в известных специальных функциях).

5. Уравнения, допускающие представление типа представления Лакса, или, что примерно то же самые, интегрирумые с помощью преобразования рассеяния (их изучение и является основной целью нашего курса). Поскольку в настоящее время развитие теории еще не завершено, то трудно дать общее определение и вместо этого мы обсудим ряд конкретных примеров.

Наибольшее внимание будет уделено исследованию уравнения Кортевега-де Фриза (KdV).

$$u_t - \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{2}uu_x = 0, \tag{17}$$

где $u = u(x,t)$ – функция 2 переменных. Это уравнение было исторически первым, проинтегрированным с помощью преобразования рассеяния

Гарднером, Грином, Крускалом и Миурой в 1967 году и на его примере можно продемонстрировать многие методы современной теории солитонов, избегая при этом ненужных технических трудностей.

Интегрирование KdV базирутся на использовании следующего представления, найденного Лаксом в 1968 году. Пусть L – вспомогательный одномерный оператор Шредингера

$$L = -\partial_x^2 + u(x,t) \tag{18}$$

зависящий от переменной t как от параметра,

$$A = \partial_x^3 - \frac{3}{2}u(x,t)\partial_x - \frac{3}{4}u(x,t)_x. \tag{19}$$

Прямое вычисление показывает, что уравнение (17) выполнено тогда и только тогда, когда имеет место следующее операторное равенство

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [A, L] \tag{20}$$

которое мы и будем эксплуатировать в дальнейшем. Равенство (20) понимается следующим образом. Прямое вычисление показывает, что коммутатор коэффициенты оператора A подобраны так, что в коммутаторе $[A, L] = AL - LA$ все члены порядка выше 0 сокращаются, и он оказывается оператором нулевого порядка, а именно оператором умножения на функцию $\frac{1}{4}u_{xxx} - \frac{3}{2}uu_x$. Оператор ∂_x^2 не зависит от t, поэтому $\frac{\partial L}{\partial t}$ – также обыкновенный дифференциальный оператор нулевого порядка, а именно оператор умножения на u_t.

Отметим, что для взятого наугад обыкновенного дифференциального оператора A соотношение (20) не задает потока на пространстве операторов Шредингера , поскольку в правой части получается порядок выше 0. О том, как можно подбирать специальные операторы A такие, чтобы получалась корректно заданная эволюция, мы поговорим позднее.