Лекция от 2020.03.18

# 1 Расслоение пуассонового многообразия на симплектические листы

## 1.1 Пуассоновы и симплектические многообразия

Напомним, что у нас имеется два способа задания гамильтоновой системы.

1. Через пуассонову структуру.
2. Через симплектическую структуру.

### 1.1.1 Пуассоново многообразие

Пусть имеется многообразие $M^n$ (или, поскольку наши рассмотрения чисто локальны, мы без потери общности можем считать, что находимся в области пространства $\mathbb{R}^n$). Напомним, что пуассонова структура на $M^n$ задается бивекторным полем $h^{ij} = h^{ij}(x)$, $x \in M^n$ (тензорным полем с двумя верхними индексами) такми, что

1. Тензор $h^{ij}$ кососимметричен:
$$h^{ji} = -h^{ij}, \quad \text{при всех} \quad x; \tag{1}$$
2. Для всех координатных функций выполнено тождество Якоби:
$$\{x^i, \{x^j, x^k\}\} + \{x^j, \{x^k, x^i\}\} + \{x^k, \{x^i, x^j\}\} = 0, \quad \text{для всех} \quad i, j, k. \tag{2}$$
Условие 2 эквивалентно следующему уравнению на тензор $h^{ij}$:
$$h^{il} \frac{\partial h^{jk}}{\partial x^l} + h^{jl} \frac{\partial h^{ki}}{\partial x^l} + h^{kl} \frac{\partial h^{ij}}{\partial x^l} = 0, \quad \text{для всех} \quad i, j, k. \tag{3}$$
Скобка Пуассона пары функций $f$, $g$ на $M^n$ задается формулой:
$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} h^{ij}. \tag{4}$$

Уравнение 3 нелинейно. Это не всегда удобно, однако, как мы увидим позднее, в теории бигамильтоновых систем этот недостаток превращается в преимущество.

### 1.1.2 Симплектическое многообразие

Уравнение 3 нелинейно. Как было показано на прошлой лекции, для для обратимых в окрестности некоторой точки пуассоновых структур $h^{ij}$ оно сводится к линейному переходом к обратному тензору. Более точно:

Пусть многообразие $M^n$ четномерно, $n = 2\tilde{n}$ и в окрестности некоторой точки тензор $h^{ij}$ обратим (напомним, что в нечетномерном случае кососимметрические матрицы автоматически вырождены). Обозначим $\omega_{ij}$ поле матриц, получаемое поля матриц $h^{ik}$:

$$\omega_{ik} h^{kj} = \delta_i^j. \tag{5}$$

**Задача.** Проверьте, что при заменах переменных величина $\omega_{ij}$ преобразуется как тензор с двумя нижними индексами. Очевидно, что $\omega_{ij}$ также кососимметрична. Тем самым $\omega = \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$ – корректно определенная 2-форма.

Тогда имеет место утверждение, доказанное на прошлой лекции:

**Теорема 1** *При указанных предположениях уравнение 3 эквивалентно замкнутости формы $\omega$:*

$$d\omega = 0, \tag{6}$$

*или, что эквивалентно,*

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial \omega_{ki}}{\partial x^j} = 0. \tag{7}$$

**Определение:** Четномерное многообразие $M^n$, $n = 2\tilde{n}$ называется **симплектическим**, если на нем зафиксирована невырожденная замкнутая 2-форма $\omega = \omega_{ij}\omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$, $d\omega = 0$.

Несмотря на то, что в **невырожденном** случае пуассонова структура эквивалентна симплектической, на практике приходится использовать оба подхода в зависимости от конкретной задачи. Отметим следующие причины:

1. В реальных физических системах (особенно это важно для гамильтоновых уравнений в частных производных) переход между пуассоновым и симплектическим описанием гамильтонова формализма часто очень нетривиален (в частности, приходится обращать операторы на функциональных пространствах). В большинстве примеров одна из формулировок (чаще пуассонова, реже симплектическая) возникает достаточно естественно, тогда как переход ко

второй требует серьезной работы (и для ряда важных примеров до сих пор это – открытая задача).

2. Если симплектическая структура вырождена, то определить гамильтонову систему на таком многообразие достаточно сложно. В то же время если вырождена пуассонова структура, то определение гамильтоновой системы формально не меняется. При этом вырожденные пуассоновы структуры естественно возникают в реальных задачах

## 1.2 Симплектические листы

Если пуассонова структура вырождена, то она уже не эквивалентна симплектической. Тем не менее в точке общего положения имеет место следующая картина:

**Теорема 2** *Пусть $X_0$ – точка пуассонова многообразия $M^n$ общего положения, т.е. ранг матрицы $h^{ij}(x)$ постоянен вблизи неё и равен $2k < n$. Тогда локально $M^n$ представимо как объединение $n-2k$-мерного семейства $2k$-мерных подмногообразий, называемых* **симплектическими листами***, таких, что*

1. *Для любой функции, постоянной на этих подмногообразиях, её скобка Пуассона со всеми функциями тождественно равна 0. Другими словами, для любого гамильтонова потока с нашей скобкой Пуассона симплектические листы являются инвариантными подмногообразиями.*

2. *Ограничение скобки Пуассона на симплектические листы корректно определено и невырождено. Тем самым, на всех симплектических листах задана структура симплектического многообразия (отсюда и название).*

Эквивалентная формулировка:

**Теорема 3** *Пусть $X_0$ – точка пуассонова многообразия $M^n$ общего положения, т.е. ранг матрицы $h^{ij}(x)$ постоянен вблизи неё и равен $2k < N$. Тогда вблизи $X_0$ можно выбрать локальные координаты $y^1, \dots, y^{2k}$, $y^{2k+1}, \dots, y^n$ такие, что матрица $h^{ij}(x)$ в них приобретает вид*

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{h}^{ij}(y) & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \tag{8}$$

*где $2k \times 2k$ блок $\tilde{h}^{ij}(y)$ уже невырожден.*

**Замечание 1** *Вообще-то говоря операция ограничения пуассоновой структуры на подмногообразие не определена. Однако в нашем специальном случае она корректна.*

**Определение 1** *Функция $f(x)$, скобка Пуассона которой со всеми функциями тождественно равна 0: для всех $g(x)$ $f, g = 0$, называется* **аннулятором** *или* **функцией Казимира**.

Легко видеть, что функции Казимира (определенные локально) в точности есть функции, постоянные на симлектических листах, или, что эквивалентно, функции переменных $y^{2k+1}, \ldots, y^n$. Однако, легко понять, что это лишь локальная картина. Подобно тому, как иррациональные обмотки тора образуют слоение, на котором нет естественной глобальной параметризации слоёв, локальные Казимиры могут не продолжаться глобально.

**Доказательство теоремы 2.**

Для начала заметим, что в каждой точке пуассонова многообразия $M^n$ общего положения пуассонова структура $h^{ij}$ определяет $2k$-мерное подпространство касательного пространства по следующему правилу:

Пусть зафиксировны координаты $x^1, \ldots, x^n$. Тогда пуассонова структура $h^{ij}(x)$ порождает $N$ векторных полей $v_1(x)$, $\ldots$, $v_N(x)$, $v_i^j(x) = h^{ij}(x)$, причем линейная оболочка этой системы полей в каждой точке $2k$-мерна. Из тензорного закона преобразования

$$\tilde{h}^{ij} = h^{kl} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^l} \tag{9}$$

видно, что при заменах координат эти поля переходят в их линейные комбинации с переменными коэффициентами, и, следовательно, линейная оболочка во всех точках сохраняется. Тем самым, мы получили поле $2k$-плоскостей в $N$-мерном пространстве.

Напомним, что в курсе дифференциальных уравнений была теорема о выпрямлении векторного поля: если в окрестности некоторой точки поле нигде не обращается в нуль, то заменой переменных оно приводится в постоянному. Отсюда следует, что к регулярному полю прямых в касательном пространстве к многообразию всегда можно провести семейство кривых, касающихся данного поля во всех точках.

Если мы имеем не поле кривых, а поле подпространств размерности больше 1, то оно не обязательно является интегрируемым.

**Задача.** Рассмотрим поле плоскостей в 3-ч мерном пространстве, заданное уравнениями:

$$dz = xdy. \tag{10}$$

Докажите, что оно не является интегрируемым, т.е. нельзя построить семейство поверхностей в $\mathbb{R}^3$ такое, чтобы в каждой точке, через которую проходит некоторая поверхность, касательная плоскость к данной поверхности задавалась уравнением 10.

**Указание.** Зафиксируем точку $(x_0, y_0, z_0)$ в $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим замкнутый контур $\gamma$ в плоскости $z = 0$. Тогда он единственным образом поднимется до кривой $\tilde{\gamma}$ в $\mathbb{R}^3$ такой что:

1. Проекция $\tilde{\gamma}$ на плоскость $z = 0$ совпадает с $\gamma$.
2. $\tilde{\gamma}$ начинается в точке $(x_0, y_0, z_0)$.
3. Во всех точках $\tilde{\gamma}$ касательный вектор к кривой лежит в соответствующей плоскости семейства 10.

Если существует поверхность $\Gamma$, проходящая через точку $(x_0, y_0, z_0)$, то кривая $\tilde{\gamma}$ целиком лежит на ней и, следовательно, замкнута. Проверьте, что если в качестве контура $\gamma$ взять квадрат с вершинами $[0, 0]$, $[\epsilon, 0]$, $[\epsilon, \epsilon]$, $[0, \epsilon]$, то кривая $\tilde{\gamma}$ при любом $\epsilon > 0$ получается незамкнутой.

Тем самым построение семейства интегральных поверхностей к полю подпространств возможно только для если выполнены дополнительные условия интегрируемости. Эти условия приведены, например, в 7 главе книги:

Тамура И. Топология слоений, М: Мир, 1979,

и допускают две эквивалентные формулировки, одна из которых имеет следующий вид:

**Теорема 4** *Если поле подпространств задано как линейная оболочка набора векторных полей, то оно интегрируемо тогда и только тогда, когда коммутатор любой пары полей есть линейная комбинация этих полей (с переменными коэффициентами).*

Убедимся, что для поля подпространств, порожденных пуассоновой структурой, это условие всегда выполнено. Действительно, рассмотрим пару базисных полей

$$v_i = h^{il}\frac{\partial}{\partial x^l}, \quad v_j = h^{jl}\frac{\partial}{\partial x^l}. \tag{11}$$

Тогда:

$$[v_i, v_j]^k = v_i^l(x)\frac{\partial v_j^k(x)}{\partial x^l} = v_j^l(x)\frac{\partial v_i^k(x)}{\partial x^l} = h^{il}(x)\frac{\partial h^{jk}}{\partial x^l} - h^{jl}(x)\frac{\partial h^{ik}}{\partial x^l} = \tag{12}$$

$$= h^{il}(x)\frac{\partial h^{jk}}{\partial x^l} + h^{jl}(x)\frac{\partial h^{ki}}{\partial x^l} = -h^{kl}(x)\frac{\partial h^{ij}}{\partial x^l} = h^{lk}(x)\frac{\partial h^{ij}}{\partial x^l} = v_l^k(x)\frac{\partial h^{ij}}{\partial x^l},$$

т.е.

$$[v_i, v_j] = v_l(x)\frac{\partial h^{ij}}{\partial x^l}, \tag{13}$$

Тем самым мы видим, что наше пространство расслаивается на $2k$-мерные подпространства. что и завершает доказательство Теоремы 3.