Программа курса
Прикладные проблемы геометрии

1. Интегрируемые и неинтегрируемые поля плоскостей в $\mathbb{R}^3$. Критерий Фробениуса. [1], [2].

2. Критерии интегрируемости поля k – плостkостей в n – мерном пространстве в терминах системы 1-форм, задающих эти плоскости, и в терминах системы векторных полей, порождающих эти плоскости. [1], [2].

3. Представление нулевой кривизны. Представление нулевой кривизны для уравнения КдФ. [3].

4. Базисные понятия теории гамильтоновых систем – пуассоново многообразие, симплектическое многообразие, симплектический лист, скобка Ли-Костанта-Кириллова-Березина, функция Казимира. [4], [5], [6], [10].

5. В типичной точке распределение k- плоскостей, порождаемых вырожденной скобкой, интегрируемо, и, тем самым, пуассоново многообразие локально расслаивается на симплектические листы. [10].

6. Теорема Дарбу. [5], [10].

7. Теорема о сохранении гамильтоновой структуры под действием гамильтоновых векторных полей. [5], [10].

8. Производная Ли. [4], [5].

9. Понятие интегрируемой по Лиувиллю системы. Переменные действие-угол. [5], [10].

10. Теорема о том, что угол ϕ между координатными линиями в асимптотической системе координат на поверхности постоянной отрицательной кривизны удовлетворяет уравнению Sine-Gordon (без доказательства). Теорема о невозможности регулярно вложить в прямоугольник площади больше 2π на плоскости Лобачевского в $\mathbb{R}^3$.

11. Определение полевых скобок Пуассона. Понятие локального функционала. Определение вариационной производной для общего и для

локального функционалов. Пуассонова структура на пространстве отображений $\mathbb{R} \to M$, где M – пуассоново многообразие:

$$\{u^i(x), u^j(y)\} = \{u^i, u^j\}_M(x)\delta(x-y).$$

[4], [8]

12. Гамильтоново представление для уравнений Sine-Gordon, NLS. [3], [7].

13. Скобка Гарднера-Захарова-Фаддеева. Гамильтоновость КдФ (первая структура). [3], [10].

14. Скобки Пуассона гидродинамического типа. Эквивалентность тождества Якоби в невырожденной ситуации условию нулевой кривизне метрики. [4].

15. Преобразование Хашимото.

$$\Psi(s) = k(s) \exp -i \int_{s_0}^{s} \kappa(\tilde{s}) d\tilde{s}$$

Сведение уравнения вихревых нитей

$$\frac{\partial \vec{\gamma}}{\partial t} = k\vec{b}$$

к нелинейному уравнению Шредингера

$$i\Psi_t = \Psi_{xx} + \frac{1}{2}\Psi^2\overline{\Psi}.$$

Здесь $\vec{\gamma}$ – кривая, описывающая сердцевину вихря, s – натуральный параметр на ней, k – кривизна, $\vec{b}$ – вектор бинормали. [9]

Параллельно с этим курсом я читал курс в Независимом. Заметная часть материала этих курсов пересекалась. Конспекты части лекций можно найти на моей странице: [10]

Список литературы

[1] Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко. “Современная геометрия”. М.: Наука. 1986.

[2] И.Тамура. “Топология слоений”. М.Мир, 1979.

[3] В.Е.Захаров, С.В.Манаков, С.П.Новиков, Л.П.Питаевский “Теория солитонов. Метод обратной задачи”. М. Наука, 1980.

[4] Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, “Гидродинамика слабо деформированных солитонных решеток. Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория ” УМН, **44**, 6, 30-98 (1989)

[5] В.И.Арнольд. “Математические методы классической механики”. М. Наука, 1974.

[6] F. Magri “Eight lectures on integrable systems.” Integrability of nonlinear systems (Pondicherry, 1996), 256–296, Lecture Notes in Phys., 495, Springer, Berlin, 1997.

[7] Л.А.Фаддеев, Л.Д.Тахтаджан. “Гамильтонов подход в теории солитонов”. М. Наука, 1986.

[8] М.Пескин, Д.Шредер. “Введение в квантовую теорию поля”. R&C Dynamics. Москва, Ижевкс, 2001.

[9] R. Hasimoto. “A soliton on vortex filament”, J. Fluid. Mechanics, **51** (1972), 477-485.

[10] Моя домашняя страница – www.itp.ac.ru/~pgg.