11 февраля 2003 г.
Заметки к лекции 1.

Пусть у нас есть 2 векторных поля в области N-мерного пространства $v = (v^1(x), \dots, v^N(x))$, $w = (w^1(x), \dots, w^N(x))$. Проделаем следующую операцию:

1. Выберем стартовую точку X_0.

2. Сдвинемся вдоль поля v из стартовой точки за время t. Другими словами, решим обыкновенное дифференциальное уравнение
$$\frac{dx^k(s)}{ds} = v^k(x) \tag{1}$$
на интервале $[0, t]$, взяв в качестве начальной точки при $s = 0$ стартовую точку $x(0) = X_0$. Конечную точку обозначим $X_1 = x(t)$.

3. Сдвинемся вдоль поля w из конечной точки предудущего шага за время τ. Другими словами, решим обыкновенное дифференциальное уравнение
$$\frac{dx^k(s)}{ds} = w^k(x) \tag{2}$$
на интервале $[0, \tau]$, взяв в качестве начальной точки при $s = 0$ конечную точку предудущего шага $x(0) = X_1$. Конечную точку обозначим $X_1 = x(\tau)$

4. Сдвинемся в обратном направлении вдоль поля v из конечной точки предудущего шага за время t. Другими словами, решим обыкновенное дифференциальное уравнение
$$\frac{dx^k(s)}{ds} = -v^k(x) \tag{3}$$
на интервале $[0, t]$, взяв в качестве начальной точки при $s = 0$ конечную точку предудущего шага $x(0) = X_2$. Конечную точку обозначим $X_3 = x(t)$.

5. Сдвинемся в обратном напрвлении вдоль поля w из конечной точки предудущего шага за время τ. Другими словами, решим обыкновенное дифференциальное уравнение
$$\frac{dx^k(s)}{ds} = -w^k(x) \tag{4}$$

на интервале $[0,\tau]$, взяв в качестве начальной точки при $s = 0$ конечную точку предудущего шага $x(0) = X_3$. Конечную точку обозначим $X_4 = x(\tau)$.

6. Вычислим разность между конечной и исходной точкой $X_4 - X_0$.

Теорема 1 *Общий результат описанных выше сдвигов оказывается равным*

$$X_4 - X_0 = [v,w]t\tau + \text{\textit{члены порядка 2 и выше}}, \tag{5}$$

где $[v,w]$ *– стандартный коммутатор векторных полей*

$$[v,w]^k = v^j(x)\frac{\partial w^k(x)}{\partial x^j} - w^j(x)\frac{\partial v^k(x)}{\partial x^j} \tag{6}$$

вычисленный в точке X_0.

Доказательство: Решим уравнения (1)-(4) с точностью до членов 3-го порядка по t, τ. Поскольку во всех точках $x(s) - X_0 = O(|t| + |\tau|)$, достаточно знать правые части уравнений с точностью до $o(x(s) - X_0)$, т.е. можно заменить правые части линейной аппроксимацией:

$$v^k(x) = v^k(X_0) + (x^j - X_0^j)\left.\frac{\partial v^k(x)}{\partial x^j}\right|_{x=X_0} + \dots. \tag{7}$$

$$w^k(x) = w^k(X_0) + (x^j - X_0^j)\left.\frac{\partial w^k(x)}{\partial x^j}\right|_{x=X_0} + \dots. \tag{8}$$

Начнём с уравнения (1). Поскольку

$$x(s) = x(0) + v(X_0)s + O(s^2) \tag{9}$$

то

$$\frac{dx^k(s)}{ds} = v^k(X_0) + v^j(X_0)\left.\frac{\partial v^k(x)}{\partial x^j}\right|_{x=X_0} s + O(s^2), \tag{10}$$

и

$$X_1^k = x^k(t) = X_0^k + v^k(X_0)t + v^j(X_0)\left.\frac{\partial v^k(x)}{\partial x^j}\right|_{x=X_0}\frac{t^2}{2} + O(t^3). \tag{11}$$

Для уравнения (2) аналогичное вычисление дает

$$X_2^k = x^k(\tau) = X_1^k + w^k(X_1)\tau + w^j(X_1)\left.\frac{\partial w^k(x)}{\partial x^j}\right|_{x=X_1}\frac{\tau^2}{2} + O(\tau^3) = \tag{12}$$

$$= X_1^k + w^k(X_0)\tau + v^j(X_0)\left.\frac{\partial w^k(x)}{\partial x^j}\right|_{x=X_0} t\tau + w^j(X_0)\left.\frac{\partial w^k(x)}{\partial x^j}\right|_{x=X_0}\frac{\tau^2}{2} + o(t\tau) + o(\tau^2)$$

Заметим что для вычисления разности с точностью до членов второго порядка вместо сдвига вдоль v на t, вдоль w на τ, назад вдоль v на t и назад вдоль w на τ можно сделать следующее: сдвинуться из X_0 сначала вдоль v на t и затем вдоль w на τ в точку X_2; сдвинуться из X_0 сначала вдоль w на τ и затем вдоль v на t в точку $\tilde{X}_2$. Тогда

$$X_4 - X_0 = X_2 - \tilde{X}_2 + \text{члены порядка 3 и выше.} \tag{13}$$

Прямое вычисление дает:

$$\tilde{X}_2 = X_0^k + v^k(X_0)t + w^k(X_1)\tau + w^j(X_0)\left.\frac{\partial v^k(x)}{\partial x^j}\right|_{x=X_0} t\tau + \tag{14}$$

$$+ v^j(X_0)\left.\frac{\partial v^k(x)}{\partial x^j}\right|_{x=X_0}\frac{t^2}{2} + w^j(X_0)\left.\frac{\partial w^k(x)}{\partial x^j}\right|_{x=X_0}\frac{\tau^2}{2} + o(t^2) + o(t\tau) + o(\tau^2).$$

Тем самым

$$\begin{aligned} X_4 - X_0 = X_2 - \tilde{X}_2 + \ldots = \left.\left[v^j(x)\frac{\partial w^k(x)}{\partial x^j} - w^j(x)\frac{\partial v^k(x)}{\partial x^j}\right]\right|_{x=X_0} t\tau + \ldots = \\ = [v,w]^k(X_0)t\tau + \ldots, \end{aligned} \tag{15}$$

что и завершает вычисление.

Интегрируемые и неинтегрируемые распределения.

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений мы знаем, что если у нас есть поле направлений на N-мерном многообразии (для каждой точке в касательном пространстве к ней выбрана прямая $l(x)$, зависимость прямой от точки гладкая), то оно интегрируемо. Это означает, что через каждую точку проходит ровно одна интегральная кривая поля. Напомним, что $x(t)$ – интергальная кривая поля, если при всех t $\dot{x}(t) \in l(x(t))$.

Если брать не поля направлений, а поля подпространств большей размерности, например плоскостей, то ситуация резко меняется, и возникают нетривиальные условия интегрируемости.

Пусть у нас есть поле плоскостей в 3х-мерном пространстве, заданное 1-формой

$$\omega = dz - a(x,y,z)dx - b(x,y,z)dy \tag{16}$$

Выясним, когда оно интегрируемо.

С одной стороны, можно попытаться построить поверхность, проходящую через данную точку, следующим образом. Рассмотрим всевозможные кусочно-гладкие кривые $x(t), y(t)$ в плоскости (x, y). Если задана начальная точка кривой в $\mathbb{R}^3$ $x_0 = x(0), y_0 = y(0), z_0$, то кривая однозначно поднимается в пространство исходя из условия: в каждой точке касательный вектор к поднятой кривой лежит в плоскости из нашего поля:

$$\dot{z}(t) = a(x, y, z)\dot{x}(t) + b(x, y, z)\dot{y}(t). \tag{17}$$

Для того, чтобы данная процедура действительно порождала поверхность, необходимо и достаточно, чтобы для любой пары траекторий в плоскости (x, y) с одинаковыми начальными и конечными точками после подъема в плоскости (x, y) с одинаковым началом совпадали и концы (по крайней мере для достаточно коротких кривых). Это условие в точности эквивалентно следующему: подъем любой достаточно короткой замкнутой кривой в $\mathbb{R}^2$ является замкнутой кривой в $\mathbb{R}^3$. Далее, несложно понять, что достаточно ограничиться ломаными в плоскости (x, y) со сторонами, параллельными осям координат. После этого, разбивая область, ограниченную ломаной на малые квадраты, мы приходим к следующему критерию: поле плоскостей интегрируемо тогда и только тогда, когда при обносе по прямоугольнику со сторонами Δx, Δy разность между начальной и конечной точкой после подъема есть $o(\Delta x \Delta y)$. Тем самым мы пришли к ситуации, описанной в Теореме 1. Мы имеем два векторных поля

$$v(x, y, z) = (1, 0, a(x, y, z)), \quad w(x, y, z) = (0, 1, b(x, y, z)), \tag{18}$$

задающие базис в каждой из плоскостей распределения.

Теорема 2 *Пусть распределение плоскостей в $\mathbb{R}^3$ задано как множество нулей формы*

$$\omega = dz - a(x, y, z)dx - b(x, y, z)dy. \tag{19}$$

Тогда для его интегрируемости необходимо и достаточно, чтобы поля $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ задаваемые формулой (18), коммутировали, или, что эквивалентно, было выполнено соотношение,

$$\frac{\partial b(x, y, z)}{\partial x} + a(x, y, z)\frac{\partial b(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial a(x, y, z)}{\partial y} + b(x, y, z)\frac{\partial a(x, y, z)}{\partial z}. \tag{20}$$

Перепишем его в инвариантном виде. Вычислим следующую 3-форму $\omega \wedge d\omega$:

$$\omega \wedge d\omega = (adx + bdy - dz) \wedge ((b_x - a_y)dx \wedge dy - a_z dx \wedge dz - b_z dy \wedge dz) = \quad (21)$$

$$= (b_x - a_y - ab_z + ba_z)dx \wedge dy \wedge dz.$$

Мы получили следующую формулировку для критерия интегрируемости

Лемма 1 *Для поля плоскостей, заданного как множество нулей формы ω вида (19) необходимое и достаточное условие интегрируемости (20) в окрестности регулярной точки эквивалентно соотношению $\omega \wedge d\omega = 0$.*

До сих пор мы предполагали, что форма ω нормирована так, что коэффициент при dz тождественно равен 1. Очевидно, что если $f(x, y, z)$ – гладкая везде отличная от 0 функция, то пара форм ω и $f\omega$ задает одно и тоже распределение плоскостей. Легко проверить, что условия $\omega \wedge d\omega = 0$ и $f\omega \wedge d(f\omega) = 0$ эквивалентны. Суммируя вышесказанное, мы получаем **теорему Фробениуса:**

Теорема 3 *Поле плоскостей в области пространства $\mathbb{R}^3$, заданное как множество нулей неособой 1-формы ω интегрируемо (допускает по крайней мере локально семейство поверхностей, касающееся к полю плоскостей во всех точках) тогда и только тогда, когда во всей области выполнено соотношение*

$$\omega \wedge d\omega = 0. \quad (22)$$

Заметим, что локальная интегрируемость не обязательно влечет за собой хорошую глобальную структуру нашего слоения, особенно в случае, когда область топологически нетривиальна.

Пример 1 *Рассмотрим поле плоскостей, заданное соотношением*

$$dz = xdy. \quad (23)$$

Оно неинтегрируемо. Действительно, пройдём по квадрату $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ в плоскости (x, y) стартуя из точки $(0, 0, 0)$ d 3-х мерном пространстве. На сторонах $(0, 0) - (1, 0)$, $(1, 1) - (0, 1)$, $(0, 1) - (0, 0)$ $dz = 0$ и при обходе по этим сторонам координата z не меняется. На стороне $(0, 1) - (1, 1)$ $dz = dy$, т.е. при проходе вдоль этой стороны мы *увеличиваем координату z на 1. Тем самым, выйдя из точки* $(0,0,0)$ *мы приходим в точку* $(0,0,1)$. *Обход по меньшим квадратам порождает меньший сдвиг. Тем самым, образы всевозможных путей покрывают на поверхность, а целую область в* $\mathbb{R}^3$.