Задачи экзамена по курсу “Элементы теории интегрируемых систем”
весна 2009 г.

1. Вычислить функции Казимира для скобки Пуассона, порожденной алгеброй Ли $SO(4)$.

2. Вычислить оператор A_5 для следующего после KdV уравнения из иерархии KdV.

3. Вычислить следующее уравнение после KdV из иерархии KdV.

4. Вычислить коэффициент отражения в Борновском приближении.

5. Вычислить аналог односолитонного решения для $b_1 < 0$. Проанализировааать его.

6. Показать, что решение уравнения KdV с начальным условием $u(x, 0) = 6/x^2$ имеет вид:
$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{3} \frac{2}{(x - x_j(t))^2}.$$
Найти фазы $x_j(t)$.

7. Вычислить сдвиг фазы после столкновения пары солитонов.

8. Доказать гамильтоновость уравнения $u_t = u'u''' + (u'')^2$.

9. Доказать гамильтоновость уравнения Sine-Gordon $u_{tt} - u_{xx} = \sin(x)$.

10. Доказать гамильтоновость Нелинейного уравнения Шредингера в скобке

$$\{q(x), \bar{q}(y)\} = \delta(x-y), \quad \{q(x), q(y)\} = \{\bar{q}(x), \bar{q}(y)\} = 0.$$

11. Рассмотрим замену переменных

$$q(x) = r(x) \exp\left[i \int\limits_0^x \phi(x')dx' \right], \quad q(x) \in \mathbb{C}, \quad r(x), \phi(x) \in\in \mathbb{R}.$$

Вычислить скобку

$$\{q(x), \bar{q}(y)\} = \delta(x-y), \quad \{q(x), q(y)\} = \{\bar{q}(x), \bar{q}(y)\} = 0$$

в координатах $r(x)$, $\phi(x)$.