Лекция 3.

18 декабря 2002 г.

Выведем компактную формулу для n-солитонных решений.

Для нахождения $\Gamma_j(x)$ воспользуемся правилом Крамера

$$\Gamma_j(x) = i\frac{\det(a_{km}^{(j)}(x))}{\det(a_{km}(x))}, \tag{1}$$

где матрица $(a_{km}^{(j)}(x))$ получается из матрицы $(a_{km}(x))$ заменой каждого из элементов j-го столбца на 1.

$$a_{km}^{(j)}(x) = a_{km}(x) \quad \text{при} \quad m \neq j \quad a_{kj}^{(j)}(x) = 1. \tag{2}$$

Зададим новые матрицы $(\tilde{a}_{km}(x))$, $(\tilde{a}_{km}^{(j)}(x))$ формулой

$$\tilde{a}_{km}(x) = e^{(\kappa_k+\kappa_m)x+\theta_k+\theta_m} a_{km}(x), \quad \tilde{a}_{km}^{(j)}(x) = e^{(\kappa_k+\kappa_m)x+\theta_k+\theta_m} a_{km}^{(j)}(x), \tag{3}$$

т.е.

$$\tilde{a}_{kk}(x) = 1 + \frac{e^{2\kappa_k x + 2\theta_k}}{2\kappa_k}, \quad \tilde{a}_{km} = \frac{e^{(\kappa_k+\kappa_m)x+\theta_k+\theta_m}}{\kappa_j + \kappa_m} \quad \text{при} \quad j \neq m. \tag{4}$$

Легко видеть, что

$$\Gamma_j(x) = i\frac{\det(\tilde{a}_{km}^{(j)}(x))}{\det(\tilde{a}_{km}(x))}, \quad \sum_{j=1}^{N} \Gamma_j(x) = i\sum_{j=1}^{N} \frac{\det(\tilde{a}_{km}^{(j)}(x))}{\det(\tilde{a}_{km}(x))}. \tag{5}$$

В то же время матрица $(\tilde{a}_{km}^{(j)}(x))$ получается из $(\tilde{a}_{km}(x))$ дифференцированием по x j-ого столбца. Вычислим производную $\partial_x \det(\tilde{a}_{km}(x))$. По правилу Лейбница, пользуясь тем, что детерминант - линейная функция по каждому из столбцов, получаем

$$\partial_x \det(\tilde{a}_{km}(x)) = \sum_{j=1}^{N} \det(\tilde{a}_{km}^{(j)}(x)), \tag{6}$$

т.е.

$$\sum_{j=1}^{N} \Gamma_j(x) = i\frac{\partial_x \det(\tilde{a}_{km}(x))}{\det(\tilde{a}_{km}(x))} = i\partial_x \ln \det(\tilde{a}_{km}(x)), \tag{7}$$

$$u(x) = -2\partial_x^2 \ln \det(\tilde{a}_{km}(x)). \qquad (8)$$

Учитывая, что t-динамика данных $\tilde{b}_j$ дается формулой

$$b_j(t) = e^{2\kappa_j^3 t} b_j(0), \qquad (9)$$

получаем следующую формулу для явных решений KdV

$$u(x,t) = -2\partial_x^2 \ln \det(\tilde{a}_{km}(x,t)), \qquad (10)$$

где

$$\tilde{a}_{kk}(x) = 1 + \frac{e^{2\kappa_k x + 2\kappa_k^3 t + 2\theta_k}}{2\kappa_k}, \quad \tilde{a}_{km} = \frac{e^{(\kappa_k+\kappa_m)x + (\kappa_k^3+\kappa_m^3)t + \theta_k + \theta_m}}{\kappa_j + \kappa_m} \quad \text{при} \quad j \neq m. \qquad (11)$$

Эти решения называются N-солитонными решениями.

Перейдем теперь к выводу уравнений обратной задачи теории рассеяния.

На предыдущей лекции мы доказали, что одномерное стационарное уравнение Шредингера

$$(-\partial_x^2 + u(x))\Psi(k,x) = k^2\Psi(k,x) \qquad (12)$$

с вещественным гладким убывающим на бесконечности потенциалом $u(x)$ таким, что

$$|u(x)| < \frac{c}{(1+|x|)^{2+\epsilon}}, \quad \epsilon > 0 \qquad (13)$$

имеет определенное при всех $k \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Im} k \neq 0$ решение $\Psi(k,x)$ со следующим набором свойств:

1. При любом фиксированном x $\Psi(k,x)$ – голоморфная при $\operatorname{Im} k \neq 0$ функция комплексной переменной k.

2. При $|k| \to \infty$ имеет место асимптотика $\Psi(k,x) = (1+o(1))e^{ikx}$.

3. На вещественной прямой $\operatorname{Im} k = 0$ функция $\Psi(k,x)$ имеет разрыв первого рода, и ее граничные значения $\Psi_1(k,x) = \Psi(k+i0,x)$, $\Psi_2(k,x) = \Psi(k-i0,x)$ тождественно по x связаны соотношением

$$\Psi_1(k,x) = a(k)\Psi_2(k,x) + b(k)\Psi_2(-k,x), \qquad (14)$$

где $a(k)$ и $b(k)$ – определенные на прошлой лекции данные рассеяния непрерывного спектра. Существенно то, что $a(k)$ и $b(k)$ не зависят от x. Напомним, что функция $t(k) = 1/a(k)$ – называется коэффициентом прохождения, функция $r(k) = b(k)/a(k)$ – коэффициентом отражения.

4. Функции $a(k)$, $b(k)$, $t(k)$, $r(k)$ обладают следующими свойствами:

   - $a(-k) = \bar{a}(k)$, $b(-k) = \bar{b}(k)$, $t(-k) = \bar{t}(k)$, $r(-k) = \bar{r}(k)$.
   - $|a(k)|^2 - |b(k)|^2 \equiv 1$, или, что эквивалентно, $|t(k)|^2 + |r(k)|^2 \equiv 1$.
   - При всех $k \quad |r(k)| \leq 1$.

5. Функция $a(k)$ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость переменной k, причем $a(k) \to 1$ при $|k| \to \infty$.

6. Все нули функции $a(k)$ простые, лежат на прямой $\operatorname{Re} k = 0$ и $a(i\kappa_j) = 0$ тогда и только тогда, когда $E_j = -\kappa_j^2$ – точка дискретного спектра. (Если дискретный спектр отсутствует, то $a(k)$ вообще не имеет нулей.)

7. Если $i\kappa_j$, $\kappa_j > 0$ – нуль функции $a(k)$, то имеет место соотношение

$$\Psi(i\kappa_j, x) = b_j \Psi(-i\kappa_j, x) \tag{15}$$

   где b_j – "данные рассеяния дискретного спектра".

Оказывается, что перечисленные выше свойства волновой функции достаточны для решения обратной задачи.

Зададим новую волновую функцию формулой

$$\tilde{\Psi}(k, x) = \begin{cases} \dfrac{\Psi(k, x)}{a(k)} & \text{при} \quad \operatorname{Im} k > 0 \\ \\ \Psi(k, x) & \text{при} \quad \operatorname{Im} k < 0. \end{cases} \tag{16}$$

Она обладает следующими свойствами

1. При любом фиксированном x $\tilde{\Psi}(k, x)$ – мероморфная при $\operatorname{Im} k \neq 0$ функция комплексной переменной k. В области $\operatorname{Im} k \neq 0$ она не имеет других особенностей кроме простых полюсов в точках $i\kappa_j = i\sqrt{-E_j}$, где E_j – точки дискретного спектра.

2. При $|k| \to \infty$ имеет место асимптотика $\tilde{\Psi}(k,x) = (1+o(1))e^{ikx}$.

3. На вещественной прямой $\operatorname{Im} k = 0$ функция $\tilde{\Psi}(k,x)$ имеет разрыв первого рода и ее граничные значения $\tilde{\Psi}_\pm(k,x) = \tilde{\Psi}(k \pm i0, x)$ тождественно по x связаны соотношением

$$\tilde{\Psi}_+(k,x) = \tilde{\Psi}_-(k,x) + r(k)\tilde{\Psi}_-(-k,x), \tag{17}$$

где $r(k)$ – коэффициент отражения.

4. Если $i\kappa_j$ – полюс функции $\tilde{\Psi}(k,x)$, то имеет место соотношение

$$\operatorname{res} \tilde{\Psi}(k,x)\Big|_{k=i\kappa_j} = \tilde{b}_j \tilde{\Psi}(-i\kappa_j, x) \tag{18}$$

где

$$\tilde{b}_j = \frac{b_j}{a'(i\kappa_j)}. \tag{19}$$

Мы решаем следующую задачу. Пусть заданы следующие данные рассеяния

1. Комплекснозначная функция вещественного аргумента $r(k)$ такая, что
   (a) $|r(k)| \le 1$.
   (b) $r(-k) = \bar{r}(k)$.
   (c) $r(k) \to 0$ достаточно быстро при $|k| \to \infty$.

2. Набор положительных чисел $\kappa_1 < \kappa_2 < \ldots < \kappa_N$.

3. Набор чисто мнимых чисел $\tilde{b}_j$, $j = 1, \ldots, N$ таких, что $\frac{\tilde{b}_j}{i} > 0$.

Тогда по этим данным нужно построить функцию $\tilde{\Psi}(k,x)$, обладающую перечисленными выше свойствами, и доказать, что она является собственной функцией одномерного стационарного оператора Шредингера с некоторым потенциалом $u(x)$.

Оказывается, что перечисленные выше свойства полностью определяют $\tilde{\Psi}(k,x)$. Построение $\tilde{\Psi}(k,x)$ сводится к решению некоторого сингулярного интегрального уравнения. Выведем его.

Напомним постановку задачи Римана о факторизации. Пусть Γ – некоторый несамопересекающийся замкнутый контур на комплексной плоскости, $\phi(z)$ – некоторая непрерывная функция на Γ. (Мы будем считать как контур, так и функцию достаточно хорошими, чтобы не вдаваться в технические детали). Задача Римана состоит в нахождении пары функций $\Psi_+(z)$ и $\Psi_-(z)$ таких, что $\Psi_+(z)$ голоморфна внутри области, ограниченной Γ, $\Psi_-(z)$ голоморфна вне этой области и на Γ граничные значения связаны соотношением

$$\phi(z) = \Psi_+(z) - \Psi_-(z). \tag{20}$$

По теореме Лиувилля об ограниченной голоморфной функции решение задачи Римана о факторизации единственно с точностью до прибавления к обеим функциям произвольной константы. Его можно отнормировать полагая решение равным 0 в точке ∞.

Теорема 1 *Решение задачи Римана о факторизации дается формулой Коши*

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{\phi(w)dw}{w - z}. \tag{21}$$

Мы не будем доказывать ее здесь. Фактически, это одна из формулировок известной теоремы Племеля-Сохоцкого. Нам понадобится частный случай этой теоремы, когда Γ – вещественная прямая (в этом случае чтобы гарантировать сходимость интегралов мы будем требовать, чтобы выполнялось $\phi(z) = O(1/|z|^{1+\epsilon})$.

Замечание 1 *В случае, когда Γ – вещественная прямая, формула (21) эквивалентна следующему соотношению*

$$\frac{1}{w - z - i0} - \frac{1}{w - z + i0} = 2\pi i \delta(z - w). \tag{22}$$

Другой способ решения задачи Римана о факторизации на вещественной прямой, (который нам также понадобится в дальнейшем), состоит в следующем. Представим $\phi(z)$, $z \in R$ в виде интеграла Фурье

$$\phi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(k) e^{ikz} dz. \tag{23}$$

Пусть

$$\Phi_+(z) = \int_0^\infty \tilde{\phi}(k) e^{ikz} dz, \quad \Phi_-(z) = -\int_{-\infty}^{0} \tilde{\phi}(k) e^{ikz} dz. \tag{24}$$

Очевидно, что
$$\phi(z) = \Psi_+(z) - \Psi_-(z), \tag{25}$$
и функции $\Psi_+(z)$, $\Psi_-(z)$ аналитически продолжаются в верхнюю и нижнюю полуплоскость соответственно. Из сказанного выше следует, что операторы $\phi(x) \to \Psi_+(x)$, $\phi(x) \to \Psi_-(x)$ являются ортогональными проекторами в $L^2(R)$. Тем самым, их норма в $L^2(R)$ равна 1.

Пусть
$$\tilde{\Psi}(k,x) = e^{ikx}\chi(k,x), \quad \hat{r}(k,x) = e^{-2ikx}r(k), \quad \hat{b}_j(x) = e^{2\kappa_j x}\tilde{b}_j. \tag{26}$$

Соотношения (17), (18) в терминах $\chi(k,x)$ приобретают следующий вид:
$$\chi(k+i0,x) = \chi(k-i0,x) + \hat{r}(k,x)\chi(-k-i0,x), \quad k \in R \tag{27}$$
$$\operatorname{res}\chi(k,x)|_{k=i\kappa_j} = \hat{b}_j(x)\chi(-i\kappa_j,x) \tag{28}$$

Применяя обсуждавшуюся выше формулу Коши, учитывая, что $\chi(k,x)$ не имеет других особенностей по k, кроме простых полюсов в точках $i\kappa_j$ и разрыва на вещественной оси, а также, пользуясь тем, что
$$\chi(k,x) \to 1 \quad \text{при} \quad k \to \infty, \tag{29}$$
получаем:
$$\chi(k,x) = 1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{\Gamma_j(x)}{k - i\kappa_j} + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_R \frac{\hat{r}(l,x)\chi(-l-i0,x)dl}{l-k}, \tag{30}$$
где $\Gamma_j(x)$ – пока что неизвестные функции.

Из (30) следует, что
$$\chi(k-i0,x) = 1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{\Gamma_j(x)}{k - i\kappa_j} + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_R \frac{\hat{r}(l,x)\chi(-l-i0,x)dl}{l-k+i0}, \quad k \in R. \tag{31}$$

Из (28) следует, что
$$\Gamma_j(x) = \hat{b}_j(x)\left[1 + \sum_{m=1}^{N} \frac{\Gamma_m(x)}{-i\kappa_j - i\kappa_m} + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_R \frac{\hat{r}(l,x)\chi(-l-i0,x)dl}{l+i\kappa_j}\right]. \tag{32}$$

Уравнения (31), (32) - это и есть уравнения обратной задачи рассеяния. Если дискретный спектр отсутствует, то однозначная разрешимость

(31) вытекает из того, что норма интегрального оператора в правой части меньше 1.

Убедимся, что $\tilde{\Psi}(k,x)$ является собственной функцией одномерного стационарного оператора Шредингера с некоторым потенциалом $u(x)$. Действительно, пусть

$$u(x) = 2i\partial_x \chi_1(x), \tag{33}$$

где $\chi_1(x)$ – коэффициент при $1/k$ асимптотического разложения $\chi(k,x)$ при $|k| \to \infty$

$$\chi(k,x) = 1 + \frac{\chi_1(x)}{k} + \frac{\chi_2(x)}{k^2} + \dots . \tag{34}$$

Пусть

$$F(k,x) = (L - k^2)\tilde{\Psi}(k,x). \tag{35}$$

Из (33) следует, что

$$F(k,x) = (o(1))e^{ikx} \quad \text{при} \quad |k| \to \infty. \tag{36}$$

Соотношения (14), (15) линейны, выполняются тождественно по x и связывают функции в точках k и $-k$, поэтому применяя к функции, удовлетворяющей им операций дифференциирования, умножения на произвольную функцию x, не зависящую от k и умножения на четную функцию k мы снова получаем функцию, удовлетворяющую (14), (15). В частности, если $\tilde{\Psi}(k,x)$ удовлетворяет (14), (15), то $\tilde{\Psi}(k,x) + F(k,x)$ также удовлетворяет им. С учетом (35) видим, что для функции $\tilde{\Psi}(k,x) + F(k,x)$ выполнены все условия, которыми мы определяли $\tilde{\Psi}(k,x)$. По теореме единственности получаем, что $\tilde{\Psi}(k,x) + F(k,x) = \tilde{\Psi}(k,x)$, т.е. $F(k,x) \equiv 0$. Тем самым

$$(L - k^2)\tilde{\Psi}(k,x) = 0, \tag{37}$$

т.е. $\tilde{\Psi}(k,x)$ – волновая функция оператора Шредингера с потенциалом (33), что и требовалось доказать.

Отметим, что приведенное выше рассуждение с небольшими модификациями часто используется в теории солитонов.

Список литературы

[1] В.Е.Захаров, С.В.Манаков, С.П.Новиков, Л.П.Питаевский “Теория солитонов. Метод обратной задачи”. М. Наука, 1980.

[2] Ф.Калоджеро, А.Дегасперис. “Спектральное преобразование и солитоны”. М.Мир, 1985.

[3] М.Абловиц, Х.Сигур. “Солитоны и метод обратной задачи”. М. Мир, 1987.

[4] Б.В.Шабат. “Введение в комплексный анализ”. М:Наука, 1976.