Лекция 2.

11 декабря 2002 г.

Мы хотим доказать, существование решений, отвечающих процессу рассеяния, а также изучить их аналитическое поведение в области комплексных импульсов. Для этого мы с помощью функций Грина сведем дифференциальное уравнение к интегральному. Напомним, что именно так существование и единственность решений дифференциального уравнения с гладкой правой частью и заданными начальными условиями доказывается в стандартном курсе.

Напомним несколько стандартных фактов из курса функционального анализа.

Определение 1 *Оператор A в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ называется* **ограниченным**, *если для любого вектора $f \in \mathcal{H}$ имеет место оценка*

$$< Af, Af > \leq C_A < f, f >, \tag{1}$$

где C_A – константа, не зависящая от f.

Определение 2 *Оператор A в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ называется* **компактным (фредгольмовым, вполне непрерывным)**, *если образ единичного шара – компактное множество.*

Поскольку любое компактное множество лежит в шаре конечного радиуса, любой компактный оператор автоматически ограничен. Поскольку единичный шар в гильбертовом пространстве некомпактен, ограниченность оператора не влечет за собой его компактности.

Приведем два важнейших примера компактных операторов (без доказательств).

Пример 1 *Пусть X – компактная область в R^n, $K(x, y)$ -непрерывная функция на $X \times X$. Тогда интегральный оператор в пространстве $C(X)$ непрерывных функций на X*

$$(\hat{K} f)(x) = \int\limits_X K(x, y) f(y) d^n y \tag{2}$$

компактен.

Отметим, что этот факт выводится из теоремы Асколи-Арцела о компактности равностепенно непрерывных ограниченных семейств непрерывных функций.

Пример 2 *Пусть X – подмножество R^n, $K(x,y)$ – функция из пространства $L^2(X \times X)$. Тогда интегральный оператор в пространстве $L^2(X)$*

$$(\hat{K}f)(x) = \int\limits_X K(x,y)f(y)d^n y \tag{3}$$

компактен.

Тем самым, интегральные операторы с не слишком сильно сингулярными ядрами компактны.

Перечислим без доказательства некоторые важные свойства компактных операторов.

Теорема 1 *Пусть $\hat{K}$ – компактный оператор. Тогда*

1. *Вне любой окрестности точки 0 спектр $\hat{K}$ содержит не более конечного числа точек конечной кратности.*

2. *Уравнение*

$$(\hat{1} + \hat{K})f = g \tag{4}$$

имеет решение при любом g тогда и только тогда, когда однородное уравнение

$$(\hat{1} + \hat{K})f = 0 \tag{5}$$

не имеет ненулевых решений. Если же (5) имеет ненулевые решения, то для разрешимости уравнения (4) необходимо и достаточно, чтобы его правая часть была ортогональна ядру сопряженного оператора

$$\hat{1} + \hat{K}^*, \tag{6}$$

т.е. имело место

$$< g, f^* >= 0 \quad \textit{для любого} \quad f^* \textit{ такого, что } \quad (\hat{1} + \hat{K}^*)f^* = 0. \tag{7}$$

Здесь $\hat{1}$ обозначает единичный оператор.

Это свойство, называемое **Альтернативой Фредгольма**, *обобщает хорошо известное свойство квадратных конечномерных матриц.*

Замечание 1 *Для квадратной матрицы существование ненулевых решений однородного уравнения эквивалентно обращению в 0 ее определителя. Для операторов вида* $\hat{1} + \hat{K}$*, где* $\hat{K}$ *– достаточно хороший интегральный оператор, можно построить так называемый* **определитель Фредгольма**, *равенство нулю которого эквивалентно существованию однородных решений, однако мы не будем им пользоваться.*

Определение 3 *Уравнение в гильбертовом пространстве вида*

$$(\hat{1} + \hat{K})f = g \tag{8}$$

где $\hat{K}$ *– компактный оператор, называется* **уравнением Фредгольма второго рода**.

Определение 4 **Уравнение Фредгольма первого рода** *– уравнение в гильбертовом пространстве вида*

$$\hat{K}f = g \tag{9}$$

где $\hat{K}$ *– компактный оператор.*

Уравнения первого рода существенно сложнее, чем уравнения второго рода, поскольку они являются некорректными задачами. В нашем курсе нам будут нужны только уравнения второго рода.

Наболее просто вопрос о разрешимости линейного конечномерного уравнения с квадратной матрицей решается, если эта матрица треугольна. В этом случае разрешимость при любой правой части эквивалентна отсутствию нулей на диагонали. Для интегральных уравнений аналогами систем с треугольными матрицами служат уравнения Вольтерра.

Определение 5 *Пусть* X *– подмножество прямой* R^1*,* $\hat{K}$ *– компактный интегральный оператор в пространстве функций на* X*.*

$$(\hat{K}f)(x) = \int\limits_X K(x,y)f(y)d^n y. \tag{10}$$

$\hat{K}$ *называется* **оператором Вольтерра**, *если выполнено одно из свойств треугольности:*

1. $K(x,y) = 0$ *при всех* $x < y$ *(нижнетреугольный оператор).*

2. $K(x,y) = 0$ при всех $x > y$ (верхнетреугольный оператор).

Определение 6 *Пусть $\hat{K}$ – оператор Вольтерра. Тогда уравнение*

$$(\hat{1} + \hat{K})f = g \tag{11}$$

уравнением Вольтерра второго рода, *а уравнение*

$$\hat{K}f = g \tag{12}$$

– **уравнением Вольтерра первого рода**.

Уравнение Вольтерра второго рода **всегда однозначно разрешимо**.

На этом мы покончим с абстрактым функциональным анализом и перейдем к исследованию одномерного оператора Шредингера.

$$L = -\partial_x^2 + u(x). \tag{13}$$

Напомним, что потенциал $u(x)$ будем предполагать гладким, вещественным и убывающим на бесконечности не медленнее, чем $1/|x|^{2+\epsilon}$.

Наша ближайшая задача – исследование решений уравнения

$$(-\partial_x^2 + u(x))\Psi = E\Psi. \tag{14}$$

Введем новый спектральный параметр k, $E = k^2$ (как мы увидим далее, k будет иметь смысл импульса падающей частицы). Каждому значению E будет отвечать 2 значения k.

$$(-\partial_x^2 + u(x))\Psi(k,x) = k^2\Psi(k,x). \tag{15}$$

Перейдем от (15) к интегральному уравнению на функцию $\Psi(k,x)$. Для этого сначала перепишем (15) в следующем виде

$$(-\partial_x^2 - k^2)\Psi(k,x) = -u(x)\Psi(k,x). \tag{16}$$

Попробуем построить обратный оператор к $(-\partial_x^2 - k^2)$.

Определение 7 Функцией Грина (фундаментальным решением) *дифференциального оператора M, действующего на функциях в R^n называется решение уравнения*

$$MG(x,y) = \delta(x_1 - y_1)\delta(x_2 - y_2)\ldots\delta(x_n - y_n). \tag{17}$$

Если M – оператор с постоянными коэффициентами, то функцию Грина можно выбрать зависящей от разности $x-y$. В этом случае уравнение (17) приобретает вид

$$MG(x) = \delta(x_1)\delta(x_2)\dots\delta(x_n). \tag{18}$$

(Вопрос о существовании и единственности функции Грина не является тривиальным. Мы не будем доказывать никаких общих теорем на этот счет).

По определению, функция Грина оператора $(-\partial_x^2 - k^2)$ – решение уравнения

$$(-\partial_x^2 - k^2)G(k,x) = \delta(x), \tag{19}$$

т.е. она удовлетворяет

$$(-\partial_x^2 - k^2)G(k,x) = 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0, \tag{20}$$

в точке 0 она уже не гладкая и выполнено условие сшивки

$$\begin{cases} G(k,x+0) - G(k,x-0) = 0 \\ G'(k,x+0) - G'(k,x-0) = -1. \end{cases} \tag{21}$$

Здесь $G(k,x+0)$ и $G(k,x-0)$ обозначают пределы функции $G(k,x)$ при $x \to 0$ справа и слева соответственно.

Тем самым функция Грина имеет вид

$$G(k,x) = \begin{cases} \alpha_1 e^{ikx} + \alpha_2 e^{-ikx} & \text{при} \quad x < 0 \\ \alpha_3 e^{ikx} + \alpha_4 e^{-ikx} & \text{при} \quad x > 0 \end{cases} \tag{22}$$

где константы α_j нужно брать такими, чтобы имело место (21).

В частности, уравнению (21) удовлетворяют функции

$$G_1(k,x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(kx)}{k} & \text{при} \quad x < 0 \\ 0 & \text{при} \quad x > 0. \end{cases} \tag{23}$$

$$G_2(k,x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0 \\ -\dfrac{\sin(kx)}{k} & \text{при} \quad x > 0, \end{cases} \tag{24}$$

Теорема 2 *Пусть $\Psi(k,x)$ – некоторое решение интегрального уравнения*

$$\Psi(k,x) = e^{ikx} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(k,x-y)u(y)\Psi(k,y)dy, \tag{25}$$

где $G(k,x)$ – какая-нибудь из функций Грина оператора $(-\partial_x^2 - k^2)$. Тогда $\Psi(k,x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (15).

Для доказательства достаточно применить оператор $(-\partial_x^2 - k^2)$ к обеим частям (25) и воспользоваться определением функции Грина (19).

Теорема 3 *1. Пусть $G(k,x)$ – любая из функций Грина $G_1(k,x)$, $G_2(k,x)$. Тогда при любом вещественном k существует единственное решение уравнения (17) (свое для каждой из функций Грина). Эти решения мы будем обозначать $\Psi_1(k,x)$ и $\Psi_2(k,x)$ соответственно. Обе эти функции удовлетворяют уравнению Шредингера (14)*
.

2. *Функции $\Psi_1(k,x)$ и $\Psi_2(k,x)$ при вещественном $k \neq 0$ имеют следующую асимптотику по x:*

$$\Psi_1(k,x) = \begin{cases} a(k)e^{ikx} + b(k)e^{-ikx} + o(1) & при \quad x \to -\infty \\ e^{ikx} + o(1) & при \quad x \to +\infty, \end{cases} \tag{26}$$

$$\Psi_2(k,x) = \begin{cases} e^{ikx} + o(1) & при \quad x \to -\infty \\ d(k)e^{ikx} + c(k)e^{-ikx} + o(1) & при \quad x \to +\infty, \end{cases} \tag{27}$$

где $a(k)$, $b(k)$, $c(k)$, $d(k)$ – функции переменной k, свои для каждого конкретного потенциала $u(x)$. Эти функции служат **данными рассеяния непрерывного спектра**.

3. *Функция $\Psi_1(k,x)$ аналитически продолжается по k до голоморфной в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} k \geq 0$ функции, и при $|k| \to \infty$ $\Psi_1(k,x) = e^{ikx}(1+o(1))$. Аналогично, функция $\Psi_2(k,x)$ голоморфно продолжается в нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} k \leq 0$, и при $|k| \to \infty$ $\Psi_2(k,x) = e^{ikx}(1+o(1))$.*

Для доказательства используется свойство Вольтерровости интегрального оператора, входящего в уравнение (17).

Пусть теперь $\operatorname{Im} k > 0$. Тогда определена функция $\Psi_1(k,x)$, но в ее асимптотике при $x \to -\infty$ мы не можем увидеть убывающую экспоненту на фоне растущей. Это означает, что функция $a(k)$ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость по k, а $b(k)$ как правило - нет. В специальных случаях, когда $u(x)$ – финитная функция, такое продолжение возможно, однако мы не будем пользоваться этим.

Обсудим теперь спектральный смысл нулей $a(k)$. Если $a(k_j) = 0$, то из асимптотики $\Psi_1(k_j, x)$, видно, что в этом случае она убывает и при $x \to -\infty$, т.е. это точка дискретного спектра. Она может лежать лишь на мнимой оси (иначе бы $\operatorname{Re} \Psi_1(k_j, x)$ и $\operatorname{Im} \Psi_1(k_j, x)$ давали пару линейно независимых ограниченных решений, что невозможно). В этом случае

$$\Psi_1(k_j, x) = b_j e^{-ikx}(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad x \to -\infty, \tag{28}$$

и, тем самым, каждой точке дискретного спектра $E_j = -\kappa_j^2$ $k_j = i\kappa_j$, $\kappa_j \in \mathbf{R}$ мы сопоставили величину b_j, служащую аналогом данных рассеяния для дискретного спектра.

Вычислим теперь эволюцию данных рассеяния в силу уравнения KdV. Напомним, что уравнение KdV эквивалентно операторному равенству

$$[L, \partial_t - A] = 0, \tag{29}$$

где

$$L = -\partial_x^2 + u(x,t) \tag{30}$$

зависящий от переменной t как от параметра,

$$A = \partial_x^3 - \frac{3}{2}u(x,t)\partial_x - \frac{3}{4}u(x,t)_x. \tag{31}$$

Напомним сперва несложную алгебраическую лемму

Упражнение 1 *Пусть A, B – пара коммутирующих матриц $AB = BA$, A – диагональная матрица, причем на диагонали стоит n_1 раз число λ_1, затем стоит n_2 раза число λ_2 и так далее, и все λ_j предпо-*

лагаются попарно различными.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{32}$$

Тогда B имеет блочно-диагональный вид

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & B_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & B_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{33}$$

где блоки B_1, B_2, ... имеют размер $n_1 \times n_1$, $n_2 \times n_2$, ... соответственно.

При каждом E общее решение уравнения

$$(-\partial_x^2 + u(x,t))\Psi(x,t) = E\Psi(x,t) \tag{34}$$

записывается в следующем виде:

$$\Psi(x,t) = \alpha_1(t)\Psi_1(k,x,t) + \alpha_2(t)\Psi_1(-k,x,t), \tag{35}$$

где $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ – произвольные функции переменной t. Поскольку операторы L и $\partial_t - A$ коммутируют, то указанное пространство решений инвариантно относительно действия оператора $\partial_t - A$, т.е.

$$(\partial_t - A)\Psi_1(k,x,t) = \tilde{\alpha}_1(k,t)\Psi_1(k,x,t) + \tilde{\alpha}_2(k,t)\Psi_1(-k,x,t). \tag{36}$$

Найдем константы $\tilde{\alpha}_1(k,t)$, $\tilde{\alpha}_2(k,t)$. Для этого устремим $x \to +\infty$, и, пользуясь тем, что

$$\Psi_1(k,x,t) = e^{ikx} + o(1), \quad u(x,t) \to 0, \quad A \to \partial_x^3 \ \text{ при } \ x \to +\infty, \tag{37}$$

получаем

$$\tilde{\alpha}_1(k,t) = ik^3, \quad \tilde{\alpha}_2(k,t) = 0, \tag{38}$$

т.е.

$$(\partial_t - A)\Psi_1(k,x,t) = ik^3\Psi_1(k,x,t). \tag{39}$$

Теперь устремим $x \to -\infty$ и воспользуемся тем, что

$$\Psi_1(k,x,t) = a(k,t)e^{ikx} + b(k,t)e^{-ikx} + o(1), \tag{40}$$

$$u(x,t) \to 0, \quad \partial_t - A \to \partial_t - \partial_x^3 \quad \text{при} \quad x \to +\infty, \tag{41}$$

Применяя (40), (41) к (38) получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}a(k,t) + ik^3a(k,t)\right)e^{ikx} + \left(\frac{\partial}{\partial t}b(k,t) - ik^3b(k,t)\right)e^{-ikx} + o(1) =$$

$$ik^3a(k,t)e^{ikx} + ik^3b(k,t)e^{-ikx} + o(1). \tag{42}$$

Приравнивая множители при одинаковых экспонентах, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}a(k,t)) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}b(k,t) = 2ik^3b(k,t). \tag{43}$$

Уравнения (43) элементарно интегрируются, и мы получаем следующий ответ:

Теорема 4 *Если убывающий при $x \to \pm\infty$ потенциал $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению KdV, то эволюция данных рассеяния непрерывного спектра имеет вид*

$$a(k,t)) = a(k,0), \quad b(k,t) = e^{2ik^3t}b(k,0), \tag{44}$$

$$r(k,t) = e^{2ik^3t}r(k,0). \tag{45}$$

Совершенно аналогично доказывается:

Теорема 5 *Если убывающий при $x \to \pm\infty$ потенциал $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению KdV, то дискретный спектр оператора L не зависит от t, а "данные рассеяния дискретного спектра" эволюционируют по закону*

$$b_j(t) = e^{2\kappa_j^3 t}b_j(0), \quad E_j = -\kappa_j^2, \quad \kappa_j > 0. \tag{46}$$

Тем самым преобразование рассеяния преобразует KdV в тривиальную систему (43) плюс (46). Однако само преобразование крайне нетривиально. Отметим, что в пределе малых $u(x)$ оно переходит в преобразование Фурье потенциала. Действительно, если $u(x) \ll 1$, то

$$a(k) = 1 + o(u(x)), \quad b(k) = \frac{i}{2k} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(z) e^{2ikz} dz = \frac{\pi i}{k} \hat{u}(-2k). \tag{47}$$

Тем самым в линейном пределе мы получаем обычное преобразование Фурье для линеаризованного KdV

$$u_t = \frac{1}{4} u_{xxx}. \tag{48}$$

Мы научились вычислять данные рассеяния по потенциалу (интегральные уравнения достаточно хорошо решаются на компьютере) и вычислили их эволюцию в силу уравнения КдФ. Последний шаг – восстановление потенциала по данныи расеяния. При этом ключевую роль будет играть теорема Лиувилля: если функция $f(z)$ голоморфна и ограничена на всей комплексной плоскости, то она – константа. Тем самым условие голоморфности на всей комплескной плоскости очень жесткое.

Сформулируем свойства построенных выше решений уравнения Шредингера, которые мы будем использовать при решении обратной задаче. Поскольку мы проводим вычисления при фиксированном значении $t = t_0$, то в нижеследующих формулах зависимость от t будет опущена.

Теорема 6 *Уравнение Шредингера*

$$(-\partial_x^2 + u(x))\Psi(k, x) = k^2 \Psi(k, x) \tag{49}$$

с вещественным гладким убывающим на бесконечности потенциалом $u(x)$ *таким, что*

$$|u(x)| < \frac{c}{(1 + |x|)^{2+\epsilon}}, \quad \epsilon > 0 \tag{50}$$

имеет определенное при всех $k \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Im} k \neq 0$ *решение* $\Psi(k, x)$ *со следующим набором свойств:*

1. *При любом фиксированном* x $\Psi(k, x)$ *– голоморфная при* $\operatorname{Im} k \neq 0$ *функция комплексной переменной* k.

2. *При* $|k| \to \infty$ *имеет место асимптотика* $\Psi(k,x) = (1+o(1))e^{ikx}$.

3. *На вещественной прямой* $\operatorname{Im} k = 0$ *функция* $\Psi(k,x)$ *имеет разрыв первого рода, и ее граничные значения* $\Psi_1(k,x) = \Psi(k+i0,x)$, $\Psi_2(k,x) = \Psi(k-i0,x)$ *тождественно по* x *связаны соотношением*

$$\Psi_1(k,x) = a(k)\Psi_2(k,x) + b(k)\Psi_2(-k,x), \tag{51}$$

где $a(k)$ *и* $b(k)$ *– определенные на прошлой лекции данные рассеяния непрерывного спектра. Существенно то, что* $a(k)$ *и* $b(k)$ *не зависят от* x.

4. *Если* $i\kappa_j$, $\kappa_j > 0$ *– нуль функции* $a(k)$, *то имеет место соотношение*

$$\Psi(i\kappa_j,x) = b_j\Psi(-i\kappa_j,x) \tag{52}$$

где b_j *– "данные рассеяния дискретного спектра".*

Доказательство: Определим функцию $\Psi(k,x)$ формулой

$$\Psi(k,x) = \begin{cases} \Psi_1(k,x) & \text{при} \quad \operatorname{Im} k > 0 \\ \Psi_2(k,x) & \text{при} \quad \operatorname{Im} k < 0 \end{cases} . \tag{53}$$

Ее голоморфность вне вещественной оси была доказана выше. Воспользуемся тем, что волновые функции при вещественных k полностью определяются асимптотикой на любой из бесконечностей. При $x \to -\infty$ из (26), (27) следует, что

$$\Psi_1(k,x) = a(k)\Psi_2(k,x) + b(k)\Psi_2(-k,x) + o(1), \tag{54}$$

что и доказывает (51).

Как было указано выше, если $E_l = -\kappa_l^2$, $\kappa_l \in \mathbf{R}$, $\kappa_l > 0$ – точка дискретного спектра, то $a(i\kappa_l) = 0$, функция $\Psi_1(i\kappa_l,x)$, убывает при $x \to -\infty$. Поскольку $\Psi_2(-i\kappa_l,x)$ также убывает при $x \to -\infty$, то они пропорциональны друг другу. Сопоставляя (27) и (28), получаем (52).

Напомним, что функция $t(k) = 1/a(k)$ – называется коэффициентом прохождения, функция $r(k) = b(k)/a(k)$ – коэффициентом отражения.

Функции $a(k)$, $b(k)$, $t(k)$, $r(k)$ обладают следующими свойствами:

- $a(-k) = \bar{a}(k)$, $b(-k) = \bar{b}(k)$, $t(-k) = \bar{t}(k)$, $r(-k) = \bar{r}(k)$.
- $|a(k)|^2 - |b(k)|^2 \equiv 1$, или, что эквивалентно, $|t(k)|^2 + |r(k)|^2 \equiv 1$.

- При всех $k \quad |r(k)| \leq 1$.
- Функция $a(k)$ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость переменной k, причем $a(k) \to 1$ при $|k| \to \infty$.
- Все нули функции $a(k)$ простые, лежат на прямой $\operatorname{Re} k = 0$ и $a(i\kappa_j) = 0$ тогда и только тогда, когда $E_j = -\kappa_j^2$ – точка дискретного спектра. (Если дискретный спектр отсутствует, то $a(k)$ вообще не имеет нулей.)

Оказывается, что перечисленные выше свойства волновой функции достаточны для решения обратной задачи.

Зададим новую волновую функцию формулой

$$\tilde{\Psi}(k,x) = \begin{cases} \dfrac{\Psi(k,x)}{a(k)} & \text{при} \quad \operatorname{Im} k > 0 \\ \\ \Psi(k,x) & \text{при} \quad \operatorname{Im} k < 0. \end{cases} \tag{55}$$

Она обладает следующими свойствами

1. При любом фиксированном x $\tilde{\Psi}(k,x)$ – мероморфная при $\operatorname{Im} k \neq 0$ функция комплексной переменной k. В области $\operatorname{Im} k \neq 0$ она не имеет других особенностей кроме простых полюсов в точках $i\kappa_j = i\sqrt{-E_j}$, где E_j – точки дискретного спектра.
2. При $|k| \to \infty$ имеет место асимптотика $\tilde{\Psi}(k,x) = (1 + o(1))e^{ikx}$.
3. На вещественной прямой $\operatorname{Im} k = 0$ функция $\tilde{\Psi}(k,x)$ имеет разрыв первого рода и ее граничные значения $\tilde{\Psi}_\pm(k,x) = \tilde{\Psi}(k \pm i0, x)$ тождественно по x связаны соотношением

   $$\tilde{\Psi}_+(k,x) = \tilde{\Psi}_-(k,x) + r(k)\tilde{\Psi}_-(-k,x), \tag{56}$$

   где $r(k)$ – коэффициент отражения.
4. Если $i\kappa_j$ – полюс функции $\tilde{\Psi}(k,x)$, то имеет место соотношение

   $$\operatorname{res} \tilde{\Psi}(k,x)\Big|_{k=i\kappa_j} = \tilde{b}_j \tilde{\Psi}(-i\kappa_j, x) \tag{57}$$

   где

   $$\tilde{b}_j = \frac{b_j}{a'(i\kappa_j)}. \tag{58}$$

Отметим, что на мнимой оси функция $a(k)$ вещественна (поскольку при чисто мнимых k вещественны и уравнения и асимптотика на $+\infty$). При $k \to \infty$ $a(k) \to 1$, поэтому числа $ia'(i\kappa_j)$ вещественны и $(-1)^{(N-j)} ia'(i\kappa_j) > 0$, где N – число точек дискретного спектра. Как мы уже отмечали, числа b_j вещественны и $(-1)^{(N-j)} b_j > 0$. Отсюда следует, что числа $\tilde{b}_j$ чисто мнимые и

$$\frac{\tilde{b}_j}{i} > 0. \tag{59}$$

Мы решаем следующую задачу. Пусть заданы следующие данные рассеяния

1. Комплекснозначная функция вещественного аргумента $r(k)$ такая, что
   (a) $|r(k)| \leq 1$.
   (b) $r(-k) = \bar{r}(k)$.
   (c) $r(k) \to 0$ достаточно быстро при $|k| \to \infty$.
2. Набор положительных чисел $\kappa_1 < \kappa_2 < \ldots < \kappa_N$.
3. Набор чисто мнимых чисел $\tilde{b}_j$, $j = 1, \ldots, N$ таких, что $\frac{\tilde{b}_j}{i} > 0$.

Тогда по этим данным нужно построить функцию $\tilde{\Psi}(k, x)$, обладающую перечисленными выше свойствами, и доказать, что она является собственной функцией одномерного стационарного оператора Шредингера с некоторым потенциалом $u(x)$.

Для начала рассмотрим специальный случай безотражательных потенциалов

$$r(k) \equiv 0. \tag{60}$$

В этом случае разрыв на вещественной оси отсутсвтует, $\Psi(k, x)$ мероморфна по k с полюсами в точках $i\kappa_1$, $\ldots$, $i\kappa_N$, и, следовательно,

$$\Psi(k, x) = e^{ikx} \cdot \left[1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{\Gamma_j(x)}{k - i\kappa_j} \right] \tag{61}$$

Подставляя (61) в (57) получаем систему линейных уравнений на вычеты $\Gamma_j(x)$:

$$\Gamma_j(x) = e^{2\kappa_j x}\tilde{b}_j \left[1 + i\sum_{m=1}^{N} \frac{\Gamma_m(x)}{\kappa_j + \kappa_m}\right]. \tag{62}$$

Учитывая, что $\operatorname{Re}\tilde{b}_j = 0$ и $\operatorname{Im}\tilde{b}_j > 0$ введем обозначение

$$\tilde{b}_j = ie^{2\theta_j}. \tag{63}$$

Тогда система (62) приобретает вид

$$e^{-2\kappa_j x - 2\theta_j}\Gamma_j(x) = i - \sum_{m=1}^{N} \frac{\Gamma_m(x)}{\kappa_j + \kappa_m}, \tag{64}$$

т.е.

$$e^{-2\kappa_j x - 2\theta_j}\Gamma_j(x) + \sum_{m=1}^{N} \frac{\Gamma_m(x)}{\kappa_j + \kappa_m} = i, \tag{65}$$

$$\sum_{j=1}^{N} a_{mj}(x)\Gamma_j(x) = i, \tag{66}$$

где

$$a_{jj}(x) = e^{-2\kappa_j x - 2\theta_j} + \frac{1}{2\kappa_j}, \quad a_{jm} = \frac{1}{\kappa_j + \kappa_m} \quad \text{при} \quad j \neq m. \tag{67}$$

Решая систему алгебраических уравнений (66), находим функции $\Gamma_j(x)$, а, следовательно, и $\Psi(k, x)$. Остается найти потенциал $u(x)$.

Запишем разложение функции $\Psi(k, x)$ по $1/k$ в окрестности бесконечности:

$$\Psi(k, x) = e^{ikx} \cdot \left[1 + \frac{\chi_1(x)}{k} + \frac{\chi_2(x)}{k^2} + \frac{\chi_3(x)}{k^3} + \ldots\right] \tag{68}$$

Подставляя (68) в уравнение Шредингра

$$(-\partial_x^2 + u(x))\Psi = k^2\Psi, \tag{69}$$

и приравнивая 0 коэффициент при $e^{ikx}k^0$, получаем

$$u(x) = 2i\partial_x\chi_1(x). \tag{70}$$

Легко проверить, что

$$\chi_1(x) = \sum_{j=1}^{N} \Gamma_j(x), \tag{71}$$

т.е.

$$u(x) = 2i\partial_x \sum_{j=1}^{N} \Gamma_j(x). \tag{72}$$

Более компактную формулу для безотражательных потенциалов мы выведем на следующей лекции.

Список литературы

[1] М.Рид, Б.Саймон. "Методы современной математической физики", М. Мир, 1977.

[2] Л.Д,Ландау, Е.М.Лифшиц. "Теоретическая физика, том III. Квантовая механика". М.: Наука, 1974.

[3] В.Е.Захаров, С.В.Манаков, С.П.Новиков, Л.П.Питаевский "Теория солитонов. Метод обратной задачи". М. Наука, 1980.

[4] Ф.Калоджеро, А.Дегасперис. "Спектральное преобразование и солитоны". М.Мир, 1985.

[5] М.Абловиц, Х.Сигур. "Солитоны и метод обратной задачи". М. Мир, 1987.