Лекция 4.

3 октября 2001 г.

Для нахождения $\Gamma_j(x)$ воспользуемся правилом Крамера

$$\Gamma_j(x) = i\frac{\det(a^{(j)}_{km}(x))}{\det(a_{km}(x))}, \tag{1}$$

где матрица $(a^{(j)}_{km}(x))$ получается из матрицы $(a_{km}(x))$ заменой каждого из элементов j-го столбца на 1.

$$a^{(j)}_{km}(x) = a_{km}(x) \ \text{ при } \ m \neq j \quad a^{(j)}_{kj}(x) = 1. \tag{2}$$

Зададим новые матрицы $(\tilde a_{km}(x))$, $(\tilde a^{(j)}_{km}(x))$ формулой

$$\tilde a_{km}(x) = e^{(\kappa_k+\kappa_m)x+\theta_k+\theta_m}a_{km}(x), \quad \tilde a^{(j)}_{km}(x) = e^{(\kappa_k+\kappa_m)x+\theta_k+\theta_m}a^{(j)}_{km}(x), \tag{3}$$

т.е.

$$\tilde a_{kk}(x) = 1 + \frac{e^{2\kappa_k x+2\theta_k}}{2\kappa_k}, \quad \tilde a_{km} = \frac{e^{(\kappa_k+\kappa_m)x+\theta_k+\theta_m}}{\kappa_j+\kappa_m} \ \text{ при } \ j \neq m. \tag{4}$$

Легко видеть, что

$$\Gamma_j(x) = i\frac{\det(\tilde a^{(j)}_{km}(x))}{\det(\tilde a_{km}(x))}, \quad \sum_{j=1}^{N}\Gamma_j(x) = i\sum_{j=1}^{N}\frac{\det(\tilde a^{(j)}_{km}(x))}{\det(\tilde a_{km}(x))}. \tag{5}$$

В то же время матрица $(\tilde a^{(j)}_{km}(x))$ получается из $(\tilde a_{km}(x))$ дифференцированием по x j-ого столбца. Вычислим производную $\partial_x \det(\tilde a_{km}(x))$. По правилу Лейбница, пользуясь тем, что детерминант - линейная функция по каждому из столбцов, получаем

$$\partial_x \det(\tilde a_{km}(x)) = \sum_{j=1}^{N}\det(\tilde a^{(j)}_{km}(x)), \tag{6}$$

т.е.

$$\sum_{j=1}^{N}\Gamma_j(x) = i\frac{\partial_x \det(\tilde a_{km}(x))}{\det(\tilde a_{km}(x))} = i\partial_x \ln\det(\tilde a_{km}(x)), \tag{7}$$

$$u(x) = -2\partial_x^2 \ln\det(\tilde a_{km}(x)). \tag{8}$$

Учитывая, что t-динамика данных $\tilde{b}_j$ дается формулой

$$b_j(t) = e^{2\kappa_j^3 t} b_j(0), \tag{9}$$

получаем следующую формулу для явных решений KdV

$$u(x,t) = -2\partial_x^2 \ln \det(\tilde{a}_{km}(x,t)), \tag{10}$$

где

$$\tilde{a}_{kk}(x) = 1 + \frac{e^{2\kappa_k x + 2\kappa_k^3 t + 2\theta_k}}{2\kappa_k}, \quad \tilde{a}_{km} = \frac{e^{(\kappa_k+\kappa_m)x + (\kappa_k^3+\kappa_m^3)t + \theta_k + \theta_m}}{\kappa_j + \kappa_m} \quad \text{при} \quad j \neq m. \tag{11}$$

Эти решения называются N-солитонными решениями.

В Лекции 1 была определена **иерархия уравнений Кортевега-де Фриза**:

$$\frac{\partial L}{\partial t_{2n+1}} = [A_{2n+1}, L], \quad \text{где} \quad A_{2n+1} = \{(-L)^{(2n+1)/2}\}_- = \partial^{2n+1} + \ldots, \tag{12}$$

$\{(-L)^{(2n+1)/2}\}_-$ – дифференциальная часть формального псевдодифференциального оператора $(-L)^{(2n+1)/2}$. Обычное уравнение KdV соответствует $n = 1$, т.е. $t = t_3$.

Убедимся, что все уравнения иерархии **совместны**, т.е. можно для любого конечного набора времен $t_3, t_5, t_7, \ldots, t_{2N+1}$ можно построить функцию $u(x, t_3, t_5, t_7, \ldots, t_{2N+1})$, удовлетворяющую одновременно уравнениям (12) с $n = 1, 2, \ldots, N$.

Заметим, что далеко не любая пара дифференциальных уравнений совместна. Рассмотрим, например, следующую пару уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial t} = 1 \\ \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial \tau} = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial \tau} = x. \end{array} \right. \tag{13}$$

Если бы существовало общее решение $x(t,\tau)$, $y(t,\tau)$, то для него имело бы место соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial y}{\partial t}, \tag{14}$$

однако в силу уравнений (13)

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{\partial x}{\partial t} = 1 \quad \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial 0}{\partial \tau} = 0, \tag{15}$$

т.е. получили противоречие.

Пусть мы имеем пару уравнений

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \vec{v}_1(\vec{x}), \tag{16}$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \tau} = \vec{v}_2(\vec{x}). \tag{17}$$

Пусть $\vec{x}_0(t)$ – некоторое решение системы (16). Тогда положим $\vec{x}(t,0) = \vec{x}_0(t)$ и проинтегрируем систему (17) при всех t. Полученная функция удовлетворяет (17) при всех t, τ, но (16) выполнено только при $\tau = 0$. Несложно понять, что если пара (16) (17) совместна, то уравнение (16) выполнено при всех t, τ. Тем самым, если пара (16) (17) совместна, то сдвиг по τ **переводит решения уравнения (16) в решения того же уравнения**, или, что эквивалентно, уравнение (17) является **симметрией** уравнения (16).

Вычислим эволюцию данных рассеяния по переменной t_{2n+1} в силу (12). Уравнение (12) эквивалентно

$$[\partial_{t_{2n+1}} - A_{2n+1}, L] = 0, \tag{18}$$

поэтому двумерные собственные подпространства опертора Шредингера

$$(-\partial_x^2 + u(x, t_{2n+1}))\Psi(x, t_{2n+1}) = E\Psi(x, t_{2n+1}) \tag{19}$$

с базисом $\Psi_1(k, x, t_{2n+1})$, $\Psi_1(-k, x, t_{2n+1})$, $k^2 = E$, где

$$\Psi_1(k, x) = e^{ikx} + o(1), \quad x \to +\infty, \tag{20}$$

$$\Psi_1(k, x) = a(k, t_{2n+1})e^{ikx} + b(k, t_{2n+1})e^{-kx} + o(1), \quad x \to -\infty, \tag{21}$$

инвариантно относительно действия оператора $\partial_{t_{2n+1}} - A_{2n+1}$, т.е.

$$(\partial_{t_{2n+1}} - A_{2n+1})\Psi_1(k, x) = \alpha_1(k, t_{2n+1})\Psi_1(k, x) + \alpha_2(k, t_{2n+1})\Psi_1(-k, x). \tag{22}$$

Подставляя в (22) асимптотику (20) получаем

$$-(ik)^{2n+1}e^{ikx} + o(1) = \alpha_1(k, t_{2n+1})e^{ikx} + \alpha_2(k, t_{2n+1})e^{-ikx} + o(1), \tag{23}$$

т.е.

$$\alpha_2(k, t_{2n+1}) \equiv 0, \quad \alpha_1(k, t_{2n+1}) = -(ik)^{2n+1}, \tag{24}$$

$$(\partial_{t_{2n+1}} - A)\Psi_1(k,x) = -(ik)^{2n+1}\Psi_1(k,x). \tag{25}$$

С учетом (21) имеем

$$\left(\frac{\partial a(k,t_{2n+1})}{\partial t_{2n+1}} - (ik)^{2n+1}a(k,t_{2n+1})\right)e^{ikx} +$$

$$+\left(\frac{\partial b(k,t_{2n+1})}{\partial t_{2n+1}} + (ik)^{2n+1}b(k,t_{2n+1})\right)e^{-ikx} + o(1) = \tag{26}$$

$$= -(ik)^{2n+1}a(k,t_{2n+1})e^{ikx} - (ik)^{2n+1}b(k,t_{2n+1})e^{-ikx} + o(1),$$

т.е.

$$\frac{\partial a(k,t_{2n+1})}{\partial t_{2n+1}} = 0, \quad \frac{\partial b(k,t_{2n+1})}{\partial t_{2n+1}} = -2(ik)^{2n+1}b(k,t_{2n+1}). \tag{27}$$

Аналогично, для функций дискретного спектра имеем

$$(\partial_{t_{2n+1}} - A)\Psi_j(x) = -(-\kappa_j)^{2n+1}\Psi_j(x), \tag{28}$$

$$\left(\frac{\partial b_j(t_{2n+1})}{\partial t_{2n+1}} + (-\kappa_j)^{2n+1}b_j(t_{2n+1})\right)e^{\kappa_j x}(1+o(1)) = \tag{29}$$

$$= -(-\kappa_j)^{2n+1}b(k,t_{2n+1})e^{\kappa_j x}(1+o(1)),$$

т.е.

$$\frac{\partial \kappa_j(t_{2n+1})}{\partial t_{2n+1}} = 0, \quad \frac{\partial b_j(t_{2n+1})}{\partial t_{2n+1}} = 2(\kappa_j)^{2n+1}b_j(t_{2n+1}). \tag{30}$$

Система (27), (30) элементарно интегрируется

$$a(k,t_3,t_5,\ldots,t_{2N+1}) = a(k,0,0,\ldots,0), \tag{31}$$

$$b(k,t_3,t_5,\ldots,t_{2N+1}) = b(k,0,0,\ldots,0)e^{-2((ik)^3t_3+(ik)^5t_5+\ldots+(ik)^{2N+1}t_{2N+1})}, \tag{32}$$

$$\kappa_j(t_3,t_5,\ldots,t_{2N+1}) = \kappa_j(0,0,\ldots,0), \tag{33}$$

$$b_j(t_3,t_5,\ldots,t_{2N+1}) = b_j(0,0,\ldots,0)e^{2((\kappa_j)^3t_3+(\kappa_j)^5t_5+\ldots+(\kappa_j)^{2N+1}t_{2N+1})}. \tag{34}$$

Полученные функции удовлетворяют всем уравнениям иеранхии, что влечет ее совместность.

Следующая цель – вывести более удобные формулы для высших KdV. Для этого нам понадобится некоторая дополнительная информация из функционального анализа.

Оператор Шредингера

$$L = -\partial_x^2 + u(x) \tag{35}$$

с достаточно быстро убываюшим на бесконечности вещественным потенциалом $u(x)$ самосопряжен в $L^2(\mathbf{R}$. Поэтому для любой функции $f(x) \in L^2(\mathbf{R})$ имеет место разложение по собственным функциям:

$$f(x) = \sum_j c_j \Psi_j(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} c(k)\Psi_1(k,x)dk, \tag{36}$$

где $\Psi_j(x)$ – вещественные волновые функции дискретного спектра,

$$L\Psi_j(x) = -\kappa_j^2 \Psi_j(x), \quad \kappa^j \in \mathbf{R}, \tag{37}$$

$\Psi_1(k,x)$ – волновые функции непрерывного спектра,

$$L\Psi_1(k,x) = k^2\Psi_1(k,x), \quad k \in \mathbf{R}, \tag{38}$$

с нормировкой:

$$\Psi_1(k,x) = e^{ikx} + o(1), \quad x \to +\infty, \tag{39}$$

Теорема 1 *Для коэффициентов c_j, $c(k)$ имеют место следующие формулы:*

$$c_j = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\Psi_j(x)dx}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi_j^2(x)dx}, \tag{40}$$

$$c(k) = \frac{1}{a(k)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\Psi_2(-k,x)dx, \tag{41}$$

где $\Psi_2(k,x)$ – волновые функции непрерывного спектра,

$$L\Psi_2(k,x) = k^2\Psi_2(k,x), \quad k \in \mathbf{R}, \tag{42}$$

с нормировкой:

$$\Psi_2(k,x) = e^{ikx} + o(1), \quad x \to -\infty. \tag{43}$$

Фактически достаточно доказать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_j(x)\Psi_l(x)dx = 0 \quad \text{при} \quad j \neq l, \tag{44}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_j(x)\Psi_2(k,x)dx = 0 \quad \text{при всех} \quad j = 1,\ldots,n, \quad k \in \mathbf{R}, \tag{45}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(k,x)\Psi_2(k',x)dx = a(k)\delta(k+k'). \tag{46}$$

Формулы (44), (45) в точности соответствуют утверждению об ортогональности собственных функций самосопряженного оператора с различными собственными значениями. Действительно, поскольку подинтегральные выражения в (44), (45) экспоненциально убывают на бесконечности, то можно интегрировать по частям, и

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} [(L+\kappa_j^2)\Psi_j(x)]\Psi_l(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} -\Psi_j''(x)\Psi_l(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} [(u(x)+\kappa_j^2)\Psi_j(x)]\Psi_l(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_j(x)(-\Psi_l''(x))dx + \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_j(x)[(u(x)+\kappa_j^2)\Psi_l(x)]dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_j(x)[(L+\kappa_j^2)\Psi_l(x)]dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_j(x)[(-\kappa_l^2+\kappa_j^2)\Psi_l(x)]dx =$$

$$= (-\kappa_l^2+\kappa_j^2)\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_j(x)\Psi_l(x)dx$$

Поскольку $-\kappa_l^2+\kappa_j^2 \neq 0$, получаем (44). Аналогично

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} [(L+\kappa_j^2)\Psi_j(x)]\Psi_2(k,x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_j(x)[(L+\kappa_j^2)\Psi_2(k,x)]dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_j(x)[(k^2+\kappa_j^2)\Psi_2(k,x)]dx =$$

$$= (k^2+\kappa_j^2) \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_j(x)\Psi_2(k,x)dx$$

Формула (46) – соотношение для обобщенных функций, т.е. правую часть нужно проинтегрировать с некоторой пробной функцией. Сперва проверим, что для любой функции $\phi(k)$ такой, что $\phi(k) = (k^2 - k'^2)\tilde{\phi}(k)$, где $\tilde{\phi}(k)$ неособа,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \phi(k)\Psi_1(k,x)dk \right] \Psi_2(k',x)dx = 0. \qquad (47)$$

Действительно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \phi(k)\Psi_1(k,x)dk \right] \Psi_2(k',x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(k)(k^2-k'^2)\Psi_1(k,x)dk \right] \Psi_2(k',x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[(L-k'^2) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(k)\Psi_1(k,x)dk \right] \right] \Psi_2(k',x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(k)\Psi_1(k,x)dk \right] [(L-k'^2)\Psi_2(k',x)]dx = 0$$

Из формулы (47) следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(k,x)\Psi_2(k',x)dx = \alpha(k)\delta(k+k') + \beta(k)\delta(k-k'). \qquad (48)$$

Функции $\alpha(k)$, $\beta(k)$ мы вычислим в начале следующей лекции.

Список литературы

[1] В.Е.Захаров, С.В.Манаков, С.П.Новиков, Л.П.Питаевский “Теория солитонов. Метод обратной задачи”. М. Наука, 1980.

[2] М.Рид, Б.Саймон. “Методы современной математической физики”, М. Мир, 1977.

[3] Ф.Рисс, Б. Секефальви-Надь. “Лекции по функциональному анализу”, М. Мир, 1979.

[4] А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин. “Элементы теории функций и функционального ананлиза”, М. Наука, 1976.

[5] У.Рудин. “Функциональный анализ”, М. Мир, 1975.