Лекция 1.

12 сентября 2001 г.

Мы разберем процедуру интегрирования нелиненйных уравнений методом обратной задачи рассеяния на примере уравнения Кортевега-де Фриза (KdV).

$$u_t - \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{2}uu_x = 0, \tag{1}$$

где $u = u(x,t)$ – функция 2 переменных. Это уравнение было исторически первым, проинтегрированным с помощью преобразования рассеяния Гарднером, Грином, Крускалом и Миурой в 1967 году и на его примере можно продемонстрировать многие методы современной теории солитонов, избегая при этом ненужных технических трудностей.

Интегрирование KdV базирутся на использовании следующего представления, найденного Лаксом в 1968 году. Пусть L – вспомогательный одномерный оператор Шредингера

$$L = -\partial_x^2 + u(x,t) \tag{2}$$

зависящий от переменной t как от параметра,

$$A = \partial_x^3 - \frac{3}{2}u(x,t)\partial_x - \frac{3}{4}u(x,t)_x. \tag{3}$$

Прямое вычисление показывает, что уравнение (1) выполнено тогда и только тогда, когда имеет место следующее операторное равенство

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [A, L] \tag{4}$$

которое мы и будем эксплуатировать в дальнейшем. Равенство (4) понимается следующим образом. Прямое вычисление показывает, что коммутатор коэффициенты оператора A подобраны так, что в коммутаторе $[A, L] = AL - LA$ все члены порядка выше 0 сокращаются, и он оказывается оператором нулевого порядка, а именно оператором умножения на функцию $\frac{1}{4}u_{xxx} - \frac{3}{2}uu_x$. Оператор ∂_x^2 не зависит от t, поэтому $\frac{\partial L}{\partial t}$ – также обыкновенный дифференциальный оператор нулевого порядка, а именно оператор умножения на u_t.

Отметим, что для взятого наугад обыкновенного дифференциального оператора A соотношение (4) не задает потока на пространстве операторов Шредингера , поскольку в правой части получается порядок выше 0.

Конструкция, позволяющая строить такие операторы, была предложена в [4].

Рассмотрим кольцо **формальных псевдодифференциальных операторов** – выражений вида

$$K = \sum_{k=-\infty}^{n} v_k(x)\partial^k, \tag{5}$$

где

$$\partial = \partial_x, \tag{6}$$

∂^{-1} – некоторый символ, аналитический смысл которого мы не будем обсуждать, а ограничимся формально-алгебраическими свойствами. При этом $v_k(x)$ – гладкие функции переменной x, $v_k(x)\partial^k$, $k > 0$ понимается как композиция оператора k-кратного дифференциирования и умножения на функцию $v_k(x)$. Формула Лейбница дает

$$\partial v(x) = v(x)\partial + v_x(x). \tag{7}$$

Естественно, что

$$\partial\partial^{-1} = \partial^{-1}\partial = 1. \tag{8}$$

Из равенства

$$\partial\partial^{-1}v(x) = v(x) \tag{9}$$

и (7) следует, что

$$\partial^{-1}v(x) = v(x)\partial^{-1} - v_x(x)\partial^{-2} + v_{xx}(x)\partial^{-3} - v_{xxx}(x)\partial^{-4} + \dots. \tag{10}$$

В кольце операторов вида (5) естественно определены полуцелые степени оператора Шредингера. Действительно, будем искать такой оператор K, что

$$K^2 = -L. \tag{11}$$

Подставляя (5) в (11) сразу получаем

$$K = \partial + \sum_{k=-\infty}^{0} v_k(x)\partial^k, \tag{12}$$

Подставляя (12) в (11) получаем некоторый ряд. Приравнивая его коэффициент при нулевой степени ∂ функции $-u(x)$ и все остальные коэффициенты 0 мы получаем бесконечную систему уравнений, из которой по очереди можно найти все $v_k(x)$, причем все они определяются однозначно. Каждая из функций $v_k(x)$ оказывается полиномом от $u(x)$ и конечного числа ее производных по x.

Так, например,

$$K^2 = \partial^2 + 2v_0(x)\partial + O(\partial^0), \tag{13}$$

т.е.

$$v_0(x) = 0. \tag{14}$$

С учетом (14)

$$K^2 = \partial^2 + 2v_{-1}(x)\partial^{-1} + (2v_{-2}(x) + v_{-1x}(x))\partial^{-2} + o(\partial^{-2}), \tag{15}$$

т.е.

$$v_{-1}(x) = -\frac{u(x)}{2}. \tag{16}$$

$$v_{-2}(x) = \frac{u_x(x)}{4}. \tag{17}$$

Умножая $(-L)^{1/2}$ на целые степени $-L$ получаем $(-L)^{3/2}$, $(-L)^{5/2}$ и так далее. Все эти операторы коммутируют с L. Введем следующие операции проектирования

$$\left\{\sum_{k=-\infty}^{n} v_k(x)\partial^k\right\}_- = \sum_{k=0}^{n} v_k(x)\partial^k, \quad \left\{\sum_{k=-\infty}^{n} v_k(x)\partial^k\right\}_+ = \sum_{k=-\infty}^{-1} v_k(x)\partial^k. \tag{18}$$

(Здесь положительные степени ∂ играют роль Лорановских членов, а отрицательные – Тейлоровских, что и объясняет выбор обозначений).

Операция $\{\}_-$ отвечает выделению чисто дифференциальной части, т.е. проектированию на подпространство дифференциальных операторов. В частности, для оператора A, входящего в пару Лакса, имеем

$$A = \{(-L)^{3/2}\}_-. \tag{19}$$

Очевидно, что

$$\{K\}_- + \{K\}_+ = K. \tag{20}$$

$$0 = [(-L)^{n/2}, L] = [\{(-L)^{n/2}\}_-, L] + [\{(-L)^{n/2}\}_+, L], \tag{21}$$

поэтому

$$[\{(-L)^{n/2}\}_-, L] = -[\{(-L)^{n/2}\}_+, L]. \tag{22}$$

В правой части равенства (22) стоит дифференциальный оператор, в левой стороне – псевдодифференциальный оператор порядка 0. Это возможно только в том случае, когда в обеих частях равенства стоит дифференциальный оператор порядка 0, т.е.

$$\frac{\partial L}{\partial t_n} = [\{(-L)^{n/2}\}_-, L] \tag{23}$$

– корректно определенное уравнение. Уравнения (23) называются высшими уравнениями KdV, а их совокупность – **иерархией KdV**. Как мы покажем ниже, потоки на пространстве функций одной переменной, задаваемые этими уравнениями попарно коммутируют.

Ситуация, когда уравнение является членом бесконечной иерархии, типична для систем, интегрируемых методом обратной задачи.

Приведем для справки несколько примеров уравнений в частных производных, для которых существует аналог представления Лакса, и, следовательно, применим метод обратной задачи рассеяния (конечно же этот список ни в коей мере не претендует на полноту).

Пример 1 *Уравнение Кортевега-де Фриза (KdV).*

$$u_t - \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{2}uu_x = 0, \tag{24}$$

где $u = u(x,t)$ – функция 2 переменных. Его представление Лакса имеет вид

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [A, L], \tag{25}$$

где

$$L = -\partial_x^2 + u(x,t) \tag{26}$$

$$A = \partial_x^3 - \frac{3}{2}u(x,t)\partial_x - \frac{3}{4}u(x,t)_x. \tag{27}$$

Пример 2 *Нелинейное Уравнение Шредингера (NLS).*

$$i\psi_t = -\psi_{xx} + 2\kappa^2|\psi|^2\psi, \quad \psi = \psi(x,t) \tag{28}$$

В последнее время это уравнение активно используется для описания распространения коротких импульсов в оптических волокнах. Есть надежда, что разрабатываемые технологии позволят поднять скорость передачи информации в современных волокнах до 40 гигабит в секунду и более (сейчас характерные скорости – порядка 400 мегабит в секунду, т.е. в 100 раз ниже). Это позволит выйти на новый уровень сети Интернет.

Нелинейное уравнение Шредингера представляется как условие совместности следующей пары всмомогательных линейных задач

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial F(x,t,\lambda)}{\partial x} = U(x,t,\lambda)F(x,t,\lambda) \\ \\ \dfrac{\partial F(x,t,\lambda)}{\partial t} = V(x,t,\lambda)F(x,t,\lambda) \end{array} \right. \tag{29}$$

где $F(x,t,\lambda)$ – двухкомпонентный вектор

$$F(x,t,\lambda) = \left(\begin{array}{c} F_1(x,t,\lambda) \\ F_2(x,t,\lambda) \end{array} \right) \tag{30}$$

$U(x,t,\lambda)$, $V(x,t,\lambda)$ – 2×2-матрицы

$$U(x,t,\lambda) = \left[\begin{array}{cc} \frac{\lambda}{2i} & \kappa\bar{\psi}(x,t) \\ \kappa\psi(x,t) & -\frac{\lambda}{2i} \end{array} \right], \tag{31}$$

$$V(x,t,\lambda) = \left[\begin{array}{cc} i\kappa^2\psi(x,t)\bar{\psi}(x,t) & -i\kappa\bar{\psi}(x,t)_x \\ i\kappa\psi(x,t)_x & -i\kappa^2\psi(x,t)\bar{\psi}(x,t) \end{array} \right] - \lambda U(x,t,\lambda). \tag{32}$$

Указанное представление называется представлением нулевой кривизны или $U-V$ парой. Здесь операторы, входящие в $U-V$ пару полиномиально зависят от λ.

Наиболее интересен случай, когда κ^2 – вещественно. Аналитические свойства NLS существенно зависят от знака κ^2. Уравнение с $\kappa = 1$ называется дефокусирующим NLS, уравнение с $\kappa = i$ называется NLS с самофокусировкой.

Пример 3 *Уравнение Синус-Гордон (Sine-Gordon).*

$$u_{xt} = \sin u, \quad u = u(x,t). \tag{33}$$

Представление нулевой кривизны для него имеет вид

$$\Psi_x = \begin{bmatrix} i\lambda & \frac{i}{2}u_x \\ \frac{i}{2}u_x & -i\lambda \end{bmatrix} \Psi, \quad \Psi = \Psi(x,t,\lambda) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x,t,\lambda) \\ \Psi_2(x,t,\lambda) \end{pmatrix} \tag{34}$$

$$\Psi_t = \frac{1}{4i\lambda} \begin{bmatrix} \cos u & -i\sin u \\ i\sin u & -\cos u \end{bmatrix} \Psi. \tag{35}$$

Спектральный параметр λ здесь рационально входит в $U-V$-пару.

Это уравнение возникло в конце прошлого века при описании поверхностей постоянной отрицательной кривизны в R^3 и было достачно внимательно исследовано. В частности для него было найдено так называемое преобразование Бэклунда, позволяющее строить новые решения по уже известным.

Пример 4 *Уравнение Кадомцева-Петвиашвили (КП). Это уравнение с двумя пространственными и одной временной переменной естественно возникло в физике волн с дисперсией.*

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x = 3\alpha^2 u_{yy}, \quad u = u(x,y,t). \tag{36}$$

Два важнейших случая –

$\alpha = i$ – уравнение Кадомцева-Петвиашвили 1 и

$\alpha = 1$ – уравнение Кадомцева-Петвиашвили 2.

С аналитической точки зрения они существенно отличаются, хотя с точки зрения формальной алгебры одно из них получается из другого заменой $y \to iy$. В частности для КП 2 доказано, что все двоякопериодические решения аппроксимируются конечнозонными, а для КП 1 это открытая проблема, требующая существенно новых идей.

Представление нулевой кривизны имеет вид

$$[L, A] = 0, \tag{37}$$

где

$$L = \alpha\partial_y - \partial_x^2 + u(x,y,t) \tag{38}$$

$$A = \partial_t - 4\partial_x^3 + 6u(x,y,t)\partial_x + 3u(x,y,t)_x + 3\alpha w(x,y,t), \quad w_x = u_y. \tag{39}$$

Пример 5 *Уравнение Веселова-Новикова.*

$$u_t = 8\partial_z^3 u + 8\partial_{\bar z}^3 u + 2\partial_{\bar z}(uw) + 2\partial_z(u\bar w), \tag{40}$$

где

$$u = u(z,\bar{z},t), \quad w = w(z,\bar{z},t), \quad u(z,\bar{z},t) = \bar{u}(z,\bar{z},t), \quad \partial_z w = -3\partial_{\bar{z}} u. \tag{41}$$

Здесь использованы следующие обозначения. Вместо двух вещественных переменных x, y вводится одна комплексная переменная z

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy, \quad \partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y), \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y). \tag{42}$$

При этом, если явно не оговорено обратное, рассматриваются произвольные гладкие функции 2 вещественных переменных и никакой голоморфности по z заранее не предполагается ($\partial_{\bar{z}} u(z,\bar{z}) \neq 0$ в точках общего положения).

Представление нулевой кривизны для уравнения Веселова-Новикова записывается в терминах уже не пары Лакса, а $L - A - B$ тройки Манакова:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [A, L] + BL, \tag{43}$$

$$A = 8(\partial_z^3 + \partial_{\bar{z}}^3) + 2(w\partial_z + \bar{w}\partial_{\bar{z}}), \tag{44}$$

$$B = w_z + \bar{w}_{\bar{z}}, \tag{45}$$

Интегрирование уравнения Веселова-Новикова осуществляется при помощи задачи рассеяния для L при нулевой энергии (а не при всех энергиях, как у KdV). Поскольку L– двумерный оператор Шредингера, эта задача рассеяния интересна с физической точки зрения.

Пример 6 *Уравнение Ландау-Лившица.*

$$\vec{S}_t = \vec{S} \wedge \vec{S}_{xx} + \vec{S} \wedge J\vec{S}, \quad \vec{S} = \vec{S}(x,t) = \begin{pmatrix} S_1(x,t) \\ S_2(x,t) \\ S_3(x,t) \end{pmatrix}, \tag{46}$$

где $\wedge$ означает векторное произведение, J – постоянная диагональная матрица

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \quad J_1 < J_2 < J_3. \tag{47}$$

Представление нулевой кривизны имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(x,t,\lambda)}{\partial x} = U(x,t,\lambda)F(x,t,\lambda) \\ \\ \dfrac{\partial F(x,t,\lambda)}{\partial t} = V(x,t,\lambda)F(x,t,\lambda) \end{cases} \tag{48}$$

где $F(x,t,\lambda)$ – двухкомпонентный вектор

$$F(x,t,\lambda) = \begin{pmatrix} F_1(x,t,\lambda) \\ F_2(x,t,\lambda) \end{pmatrix}, \tag{49}$$

$U(x,t,\lambda)$, $V(x,t,\lambda)$ – 2×2-матрицы

$$U(x,t,\lambda) = \frac{1}{i}\sum_{a=1}^{3} u_a(\lambda) S_a(x,t)\sigma_a, \tag{50}$$

$$V(x,t,\lambda) = 2i\sum_{a=1}^{3} \frac{u_1(\lambda)u_2(\lambda)u_3(\lambda)}{u_a(\lambda)} S_a(x,t)\sigma_a +$$

$$+\frac{1}{i}\sum_{a,b,c=1}^{3} u_a(\lambda)\epsilon_{abc} S_b(x,t) S_c(x,t)_x \sigma_a, \tag{51}$$

$\epsilon_{abc} \neq 0$ только если числа a, b, c попарно различны,

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1, \quad \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = \epsilon_{132} = -1, \tag{52}$$

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \tag{53}$$

– матрицы Паули, $u_a(\lambda)$ – эллиптические функции переменной λ

$$u_1(\lambda) = \rho\frac{1}{sn(\lambda,k)}, \quad u_2(\lambda) = \rho\frac{dn(\lambda,k)}{sn(\lambda,k)}, \quad u_3(\lambda) = \rho\frac{cn(\lambda,k)}{sn(\lambda,k)}, \tag{54}$$

где $sn(\lambda,k)$, $cn(\lambda,k)$, $dn(\lambda,k)$ – эллиптические функции Якоби с модулем

$$k = \sqrt{\frac{J_2 - J_1}{J_3 - J_1}} \tag{55}$$

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{J_3 - J_1}. \tag{56}$$

Функции $u_a(\lambda)$ связаны соотношениями

$$u_a^2(\lambda) - u_b^2(\lambda) = \frac{1}{4}(J_b - J_a), \quad a, b = 1, 2, 3. \tag{57}$$

Уравнение Ландау-Лифшица интересно тем, что спектральный параметр λ "живет" на эллиптической кривой, а не на комплексной плоскости, как в предыдущих примерах.

В заключение приведем два примера интегрируемых систем с дискретной пространственной переменной.

Пример 7 *Ленгмюровская цепочка*

$$\frac{dc_n}{dt} = c_n(c_{n+1} - c_{n-1}), \quad c_n = c_n(t), \quad -\infty < n < \infty. \tag{58}$$

Представление Лакса для нее имеет вид

$$\frac{dL}{dt} = [L, A], \tag{59}$$

где L и A – бесконечные матрицы с элементами

$$L_{mn} = \sqrt{c_n}\delta_{n,m+1} + \sqrt{c_m}\delta_{n+1,m} \tag{60}$$

$$A_{mn} = \frac{1}{2}[\sqrt{c_n c_{n-1}}\delta_{n,m+2} - \sqrt{c_m c_{m-1}}\delta_{n+2,m}]. \tag{61}$$

Пример 8 *Цепочка Тода – цепочка осцилляторов с нелинейным взаимодействием*

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} = e^{x_{n+1} - x_n} - e^{x_n - x_{n-1}}, \quad x_n = x_n(t), \quad -\infty < n < \infty. \tag{62}$$

Представление Лакса для нее имеет вид

$$\frac{dL}{dt} = [L, A], \tag{63}$$

где L и A – бесконечные матрицы с элементами

$$L_{mn} = \sqrt{c_n}\delta_{n,m+1} + \sqrt{c_m}\delta_{n+1,m} + v_n\delta_{nm} \tag{64}$$

$$A_{mn} = \frac{1}{2}[\sqrt{c_n}\delta_{n,m+1} - \sqrt{c_m}\delta_{n+1,m}], \tag{65}$$

где

$$c_n = c_n(t) = e^{x_n(t) - x_{n-1}(t)}, \quad v_n = v_n(t) = \frac{d}{dt}x_n(t). \tag{66}$$

Оператор L в данном случае естественно рассматривать как интегрируемую дискретизацию одномерного операторв Шредингера. Отметим, что стандартная дискретизация одномерного Шредингера, отвечающая $c_n \equiv 1$ неинтегрируема.

Список литературы

[1] В.Е.Захаров, С.В.Манаков, С.П.Новиков, Л.П.Питаевский "Теория солитонов. Метод обратной задачи". М. Наука, 1980.

[2] Ф.Калоджеро, А.Дегасперис. "Спектральное преобразование и солитоны". М.Мир, 1985.

[3] М.Абловиц, Х.Сигур. "Солитоны и метод обратной задачи". М. Мир, 1987.

[4] И.М.Гельфанд, Л.А.Дикий. Дробные степени операторов и гамильтоновы системы. – Функциональный анализ и его приложения, 1976, т.10, №4, с. 13-29.