Оглавление

1 Введение. **6**

I Предварительные сведения. **18**

2 Задача Коши для уравнения Кадомцева-Петвиашвили 2 в классе убывающих на бесконечности потенциалов. **18**

2.1 Прямое преобразование рассеяния. 18

2.2 Обратное преобразование рассеяния. 33

3 Алгебраические римановы поверхности. Циклы, дифференциалы, тета-функция Римана. **38**

3.1 Циклы на алгебраических кривых. 38

3.2 Дифференциалы на алгебраических кривых. 40

3.3 Векторные поля на окружности. 44

3.4 Билинейные соотношения Римана. 44

3.5 Отображение Абеля. 45

3.6 Тета-функция Римана. 46

4 Уравнение Кортевега – де Фриза. Конечнозонные решения. **47**

5 Конечнозонные решения уравнения Кадомцева-Петвиашвили. Высшие уравнения КП. **53**

6 Двумерные операторы Шредингера, "конечнозонные при одной энергии". Уравнения Веселова-Новикова. **57**

II Преобразование рассеяния для двумерного оператора Шредингера при одной энергии и параболического оператора. **64**

7 Преобразование рассеяния при фиксированной положительной энергии для двумерного оператора Шредингера с убывающим на бесконечности потенциалом. 64

7.1 Прямое преобразование рассеяния. 65

7.2 Обратное преобразование рассеяния. 75

7.3 Условия потенциальности и вещественности. 78

7.4 Связь с физической задачей рассеяния. Прозрачные при одной энергии потенциалы. 81

7.5 Интегрирование уравнений Веселова-Новикова. 86

8 Задача рассеяния при фиксированной отрицательной энергии. 87

9 Рациональные солитоны уравнений Веселова-Новикова – безотражательные при фиксированной энергии двумерные потенциалы. 99

9.1 Алгебраическая схема построения рациональных солитонов. 100

9.2 Редукции на данные рассеяния. 105

9.3 Явные формулы для потенциалов. Сведение к пфаффианам. 112

10 Прозрачные при одной энергии потенциалы, быстро убывающие на бесконечности. 121

10.1 Условия на данные расеяния для быстроубывающих потенциалов. Прямая задача. 122

10.2 Построение потенциалов, прозрачных при одной энергии. . 131

11 Преобразование рассеяния для быстороубывабщих потенциалов на фоне конечнозонных. 146

11.1 Прямое преобразование рассеяния на конечнозонном фоне. 151

11.2 Обратное преобразование рассеяния на конечнозонном фоне. 157

12 Несингулярность обратного спектрального преобразования для уравнения Кадомцева-Петвиашвили 2 с "большими" "данными рассеяния" в вещественном случае. 161

13 Несингулярность прямого спектрального преобразования для уравнения Кадомцева-Петвиашвили 2 с "большим" вещественным начальным потенциалом 164

13.1 Однородные решения интегрального уравнения прямой задачи рассеяния. 169

13.2 Регулярность прямого спектрального преобразования для параболического оператора. 178

13.3 Задача Коши для уравнения Кадомцева-Петвиашвили 2 в классе быстроубывающих на бесконечности потенциалов. . 186

III Неизоспектральные симметрии интегрируемых уравнений. 188

14 Действие неизоспектральных симметрий на конечнозонных решениях уравнения Кадомцева-Петвиашвили. 189

14.1 Неизоспектральные симметрии КдФ и КП. 189

14.2 Тензорная функция Бейкера-Ахиезера. 191

14.3 Деформации римановых поверхностей и задача Римана. . . 194

14.4 Ядро Коши-Бейкера-Ахиезера. 195

14.5 Деформации спектральных кривых и дополнительные симметрии КП. 198

14.6 Грассманнианы и пространства флагов. 200

14.7 Вариации геометрических объектов. 207

15 Неизоспектральные симметрии уравнений Уизема . 209

15.1 Уравнения Уизема для КдФ. 209

15.2 Дифференциалы на гиперэллиптических римановых поверхностях. 213
15.3 Неизоспектральные симметрии иерархии Уизема для КдФ. 217

16 Построение строго периодических конечнозонных решений интегрируемых уравнений методом изопериодических деформаций. 227

16.1 Условия периодичности в терминах дифференциала квазиимпульса. 230
16.2 Деформации, сохраняющие периоды дифференциала квазиимпульса. 234
16.3 Явные формулы для уравнений изопериодических деформаций. 238
16.4 Изопериодические деформации как градиентные системы. 246

17 Заключение. 249

18 Список литературы 252

1 Введение.

Одна из известнейших задач математической физики – задача о рассеянии асимптотически свободной частицы на локализованном потенциале (см., например, [52], [67], [81]). Условно ее можно разбить на две части – прямую и обратную задачи. Прямая задача состоит в вычислении амплитуд или сечений рассеяния в предположении, что потенциал известен, обратная – в восстановлении неизвестного потенциала по известным данным рассеяния.

Интерес к квантовой задаче рассеяния был, в первую очередь, мотивирован внутренними потребностями квантовой механики, включая проблему интерпретации ускорительных экспериментов и описание квантовой механики как суперпозиции элементарных процессов рассеяния.

Новый толчок к развитию теории рассеяния в 70-е годы дало появление метода обратной задачи в теории нелинейных уравнений. После того, как в 1967 году Гарднер, Грин, Крускал и Миура проинтегрировали уравнение Кортевега де Фриза при помощи задачи рассеяния для одномерного оператора Шредингера [107], этот метод был распространен на ряд других уравнений математической физики, включая уравнение Кадомцева-Петвиашвили [23], [36]. В свою очередь, развитие теории интегрируемых систем привело к появлению новых подходов к теории рассеяния, включая метод конечнозонного интегрирования, начало которому положила работа С.П.Новикова [59], а также работы Б.А.Дубровина [24], А.Р.Итса, В.Б.Матвеева [39], П.Лакса [124], Г.Мак-Кина и П.Ван Мербеке [131] и ряда других авторов (см., например, обзор [28]); метода нелокальной задачи Римана [129] С.В.Манакова, см. также [33]; метода $\bar{\partial}$-проблемы Р.Билза-Р.Койфмана [86], [87], М.Абловица, Д.Бар Якова, А.Фокаса [84].

С другой стороны, значительный интерес к задачам рассеяния для уравнений в частных производных связан с развитием волновой томо-

графии.

Движение бесспиновой частицы в стационарном потенциальном поле описывается в квантовой механике через разложение по собственным функциям стационарного оператора Шредингера ([52])

$$L = -\sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2 + u(x_1, \ldots, x_n).$$

Пусть потенциал $u(x_1, \ldots, x_n)$ достаточно быстро убывает при $|\vec{x}| \to \infty$, $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Тогда дискретный спектр L лежит в области отрицательных энергий, а непрерывный заполняет всю вещественную полуось и его кратность бесконечна при $n > 1$.

В зависимости от решаемой задачи базис собственных функций непрерывного спектра можно выбирать различными способами. В частности, в качестве базисных можно выбрать решения $\Psi(\vec{k}, \vec{x})$, отвечающие рассеянию частиц с импульсом $\vec{k}$ на потенциале $u(\vec{x})$:

$$L\Psi(\vec{k}, \vec{x}) = E\Psi(\vec{k}, \vec{x}), \qquad \vec{k} \in \mathbb{R}^n, \qquad E = |\vec{k}|^2. \tag{1.1}$$

Эти решения фиксируются выбором асимптотики при $|\vec{x}| \to \infty$:

$$\Psi(\vec{k}, \vec{x}) = e^{i(\vec{k}, \vec{x})} + f\left(\vec{k}, \frac{|\vec{k}|}{|\vec{x}|}\vec{x}\right) \frac{e^{i|\vec{k}||\vec{x}|}}{\sqrt{|\vec{x}|^{n-1}}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{|\vec{x}|^{n-1}}}\right), \tag{1.2}$$

где $f\left(\vec{k}, \frac{|\vec{k}|}{|\vec{x}|}\vec{x}\right)$ – некоторая заранее не известная функция.

Согласно теореме Като (см., например, [66]), при любом вещественном $\vec{k} \in \mathbb{R}^n$ решение с асимптотикой (1.2) существует и единственно. Отметим, что для фиксации единственного решения постулировать асимптотику вида $\Psi(\vec{k}, \vec{x}) = e^{i(\vec{k}, \vec{x})} + o(1)$ было бы недостаточно, поскольку существует большое количество решений с асимптотикой

$$\Psi(\vec{k}, \vec{x}) = e^{i(\vec{k}, \vec{x})} + g_1\left(\vec{k}, \frac{|\vec{k}|}{|\vec{x}|}\vec{x}\right) \frac{e^{i|\vec{k}||\vec{x}|}}{\sqrt{|\vec{x}|^{n-1}}} +$$

$$+g_2\left(\vec{k},\frac{|\vec{k}|}{|\vec{x}|}\vec{x}\right)\frac{e^{-i|\vec{k}||\vec{x}|}}{\sqrt{|\vec{x}|^{n-1}}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{|\vec{x}|^{n-1}}}\right). \tag{1.3}$$

Условие отсутствия в асимптотике членов вида $g_2\left(\vec{k},\frac{|\vec{k}|}{|\vec{x}|}\vec{x}\right)\frac{e^{-i|\vec{k}||\vec{x}|}}{\sqrt{|\vec{x}|^{n-1}}}$ называется условием излучения.

Функции (1.2) совместно с функциями дискретного спектра образуют полный базис в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n)$ (см. [66]).

Функция $f(\vec{k},\vec{l})$, $\vec{k},\vec{l}\in\mathbb{R}^n$, $|\vec{k}|^2=|\vec{l}|^2$ называется амплитудой рассеяния для потенциала $u(\vec{x})$.

Оператором рассеяния или S - матрицей называется оператор $\hat{1}+\hat{S}$ с ядром

$$s(\vec{v},\vec{v}\,')=\left(\sqrt{\frac{i|\vec{k}|}{2\pi}}\right)^{n-1}f(|k|\vec{v},|k|\vec{v}\,'), \tag{1.4}$$

действующий на функциях на единичной сфере.

$$(\hat{S}\,f)(\vec{v})=\int\limits_{\vec{v}\,'\in S^{n-1}}\!\!\!\dots\int s(\vec{v},\vec{v}\,')\,f(\vec{v}\,')\,d\sigma,$$

где $d\sigma$ – стандартный элемент объема.

Из вещественности оператора L следует, что оператор $\hat{1}+\hat{S}$ унитарен (см., например, [52])

$$(\hat{1}+\hat{S})(\hat{1}+\hat{S})^{+}=\hat{1}. \tag{1.5}$$

В терминах ядра $s(\vec{v},\vec{v}\,')$ соотношение (1.5) приобретает вид:

$$s(\vec{v},\vec{v}\,')+\bar{s}(\vec{v}\,',\vec{v})+\int\limits_{\vec{v}\,''\in S^{n-1}}\!\!\!\dots\int s(\vec{v},\vec{v}\,'')\,\bar{s}(\vec{v}\,',\vec{v}\,'')\,d\sigma=0. \tag{1.6}$$

В терминах $f(\vec{k},\vec{l})$:

$$f(\vec{k},\vec{l})+(-i)^{n-1}\bar{f}(\vec{l},\vec{k})+\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi i|\vec{k}|}\right)^{n-1}}\int\limits_{|\vec{k}\,''|=|\vec{k}|}\!\!\!\dots\int f(\vec{k},\vec{k}\,'')\bar{f}(\vec{l},\vec{k}\,'')d\tilde{\sigma}, \tag{1.7}$$

где $d\tilde{\sigma}$ – элемент объема на сфере радиуса $|\vec{k}|$.

Отсутствие в операторе L производных первого порядка (магнитного поля) влечет инвариантность процесса рассеяния относительно обращения времени. В терминах амплитуды рассеяния это означает следующую симметрию:

$$f(-\vec{l},-\vec{k}) = f(\vec{l},\vec{k}), \tag{1.8}$$

или, что эквивалентно,

$$s(-\vec{v}\,',-\vec{v}) = s(\vec{v},\vec{v}\,'). \tag{1.9}$$

Это свойство называется свойством взаимности.

Прямая задача рассеяния состоит в вычислени амплитуды рассеяния по потенциалу $u(\vec{x})$. Обратная задача рассеяния состоит в восстановлении потенциала по амплитуде рассеяния (и, возможно, данным, отвечающим дискретному спектру).

Одномерная задача рассеяния в размерности 1 была решена в 50-е годы в работе И.М.Гельфанда, Б.М.Левитана [9], [10] и В.А.Марченко [55], более строгое исследование этой задачи было проведено Л.Д.Фаддеевым (см. обзор [72]).

В отличие от одномерной задачи, многомерная задача, решенная Л.Д.Фаддеевым [72] (часть результатов была получена независимо от него Р.Г. Ньютоном [135], см. также книгу [81]), оказывается существенно более сложной. Дело в том, что в n - мерном пространстве амплитуда рассеяния $f(\vec{k},\vec{l})$, $|\vec{k}|^2 = |\vec{l}|^2$ – функция $2n-1$ вещественной переменной, по которой нужно восстановить функцию n вещественных переменных $u(\vec{x})$, т.е. эта задача сильно переопределена. Условия совместности, найденные Л.Д.Фаддеевым [72], имеют вид нелинейной системы интегральных уравнений, и анализ их – очень сложная задача. За время, прошедшее с момента выхода в свет работы [72], были найдены другие формулировки условий совместности (М.Абловиц - А.Нахман [132],

Р.Г.Новиков - Г.М.Хенкин [63], [64]), однако, по-видимому, привести их к простому виду невозможно.

Отметим, что если нам известна амплитуда рассеяния при всех энергиях, и мы априори знаем, что она отвечает некоторому потенциалу (т.е. условия совместности выполнены), то обратная задача в каком-то смысле тривиальна, поскольку при высоких энергиях многомерная задача рассеяния линеаризуется и амплитуда рассеяния переходит в преобразование Фурье потенциала $u(\vec{x})$

$$f(\vec{k},\vec{l}) = \frac{\left(\sqrt{|k|}\right)^{n-3}}{2i\left(\sqrt{2\pi i}\right)^{n-1}} \int \dots \int e^{i(\vec{k}-\vec{l})\vec{x}} u(\vec{x}) dx_1 \dots dx_n + o(1) \qquad (1.10)$$

(Ю.М.Березанский [2], Л.Д.Фаддеев [73]). Однако практическое использование высокоэнергетического предела часто затруднено, поскольку, во-первых, измерения в этой области оказываются невозможными, и, во-вторых, сама физическая модель перестает работать.

Один из естественных способов уменьшения переопределенности обратной задач состоит в том, что пытаемся восстановить потенциал, пользуясь лишь частью данных рассеяния. Одна из естественно возникающих при этом постановок – обратная задача рассеяния при фиксированной энергии ϵ_0. Она интересна еще и потому, что уравнение акустических волн в изотропной жидкости может быть приведено к виду:

$$-\Delta\Psi + q(x)\Psi = \omega^2 u(x)\Psi. \qquad (1.11)$$

Мы видим, что, вообще говоря, акустическая задача рассеяния существенно отличается от квантовой, однако при фиксированном ω^2 она совпадает с квантовой задачей рассеяния при фиксированной энергии ϵ_0 (см., например, [116]). Тем самым результаты, полученные в квантовой задаче рассеяния при фиксированной энергии могут быть приложены и к акустической задаче.

Из работ Р.Ньютона [134], Т.Редже [142], П.Сабатье [144] следует что, решение обратной задачи при одной энергии уже не единственно, поэтому естественный вопрос – с какой точностью мы можем восстановить потенциал по данным рассеяния, или, что то же самое, как можно описать множество всех решений обратной задачи.

Важный случай задачи при фиксированной энергии – задача о прозрачных при одной энергии ϵ_0 потенциалах, т.е. таких, что волны с энергией ϵ_0, приходящие с любого направления, на нем вообще не рассеиваются. Их существование было установлено достаточно давно (см., например, [144]), однако примеры работы [144] медленно убывали на бесконечности (как $r^{-3/2}$). Естественно возникает вопрос об описании таких потенциалов, а также, могут ли они быть хорошо локализованными в пространстве.

К сожалению, в наиболее интересной размерности $n = 3$ проблем, связанных с переопределенностью, избежать не удается. В то же время, при $n = 2$ амплитуда рассеяния при фиксированной энергии – функция двух переменных, и, как мы увидим в Главе 2, нетривиальных условий совместности действительно нет.

С другой стороны, в работах С.П.Новикова, Б.А.Дубровина, И.М.Кричевера, А.П.Веселова [27], [7], [8] было осуществлено построение "конечнозонных при одной энергии" двумерных операторов Шредингера. Оказалось, что с этой задачей связана иерархия солитонных уравнений (уравнений Веселова-Новикова), т.е. двумерная задача рассеяния при одной энергии обладает бесконечномерной алгеброй симметрий и, в некотором смысле, "вполне интегрируема" (более детально эти результаты изложены в разделе 6 Главы 1). Как отметил С.П.Новиков, эти результаты указывают на применимость методов теории солитонов к быстроубывающей задаче рассеяния для двумерного оператора Шредингера и возможность ее эффективного решения. Эта программа бы-

ла реализована автором совместно с Р.Г.Новиковым, С.В.Манаковым, С.П.Новиковым [11]-[15], [109], [61], [62], [136]. Изложение полученных при этом результатов является одной из основных целей данной работы,

Масштабным преобразованием

$$x \to \alpha^{-1}x, \quad y \to \alpha^{-1}y, \quad u \to \alpha^2 u, \quad \epsilon_0 \to \alpha^2\epsilon_0$$

задача для произвольной энергии ϵ_0 сводится к одному из трех случаев:

$$\epsilon_0 = 0, \quad \epsilon_0 = 1 \quad \epsilon_0 = -1.$$

В нашей работе мы ограничимся задачей рассеяния при $\epsilon_0 \neq 0$. Случай $\epsilon_0 = 1$ исследуется в разделе 7, случай $\epsilon_0 = -1$ – в разделе 8. При $\epsilon_0 = 0$ задача усложняется, поскольку функция Грина (и, как следствие, норма интегрального оператора) логарифмически растет при $p \to 0$. В частности. из результатов раздела 8 видно, что для сколь угодно мелкой потенциальной ямы прямое преобразование рассеяния сингулярно. В работах М.Боити, Х.Леона, М.Манны и Ф.Пемпинелли [90] и Цая [148] было показано, что эту трудность можно преодолеть, меняя нормировку функций Грина. Однако при этом приходится вводить переопределенный набор данных рассеяния и столь же простого ответа, как при $\epsilon_0 \neq 0$ получить не удается. (При $\epsilon_0 \neq 0$ мы работаем в предположении, что норма потенциала $u(x,y)$ в подходящем функциональном пространстве меньше абсолютной величины энергии, поэтому наивный предельный переход $\epsilon_0 \to 0$ не проходит).

Хорошо известно, что при исследовании обратных задач одним из важнейших приемов является выход в область комплексных импульсов.

Для многомерного оператора Шредингера решения с комплексным импульсом

$$\begin{gathered} L\Psi(\vec{k},\vec{x}) = E\Psi(\vec{k},\vec{x}), \qquad \vec{k} \in \mathbb{C}^n, \quad \operatorname{Im}\vec{k} \neq 0, \quad E = (\vec{k},\vec{k}) \\ \Psi(\vec{k},\vec{x}) = e^{i(\vec{k},\vec{x})}(1 + o(1)) \end{gathered} \tag{1.12}$$

были построены Л.Д.Фаддеевым [74]. В отличие от "физических" решений (1.2), они полностью задаются главным членом асимптотики, но при этом они определены лишь для точек $\vec{k}$ общего положения, а на некоторых подмногообразиях в $\mathbb{C}^n$ могут иметь особенности по $\vec{k}$.

Важным свойством решений (1.12) является их неголоморфная зависимость от $\vec{k}$. Как показал Л.Д.Фаддеев [72], их ограничения на одномерные подпространства $\vec{k} = s\vec{\gamma}+\vec{k}_I$, где $\vec{\gamma}, \vec{k} \in \mathbb{R}^n$, $(\vec{\gamma},\vec{\gamma}) = 1$, $(\vec{\gamma},\vec{k}_\perp) = 0$, $s \in \mathbb{C}$ мероморфные по s вне вещественной прямой $\operatorname{Im} s = 0$, и это свойство было использовано в работе [72] для решения обратной задачи. Наоборот, в более поздних работах [132], [63], [64] именно отклонение от голоморфности рассматривалось в качестве ключевого свойства. Подход, использующий $\bar{\partial}$-проблему играет центральную роль и в нашей работе.

С решениями (1.2) Л.Д.Фаддеев связал следующие "нефизические" "данные рассеяния"

$$h(\vec{k},\vec{l}) = \frac{1}{(2\pi)^n}\iint e^{-i(\vec{l},\vec{x})}u(\vec{x})\vec{\Psi}(\vec{k},\vec{x})d^nx, \tag{1.13}$$

где $\vec{k},\vec{l} \in \mathbb{C}^n$, $\operatorname{Im}\vec{k} = \operatorname{Im}\vec{l}$.

Как мы увидим ниже, часть вводимых таким образом "нефизических" "данных рассеяния" будет играть у нас роль параметров, описывающих все решения с заданной амплитудой рассеяния.

Несложно убедиться, что в пределе медленной зависимости потенциала от одной из переменных двумерный стационарный оператор Шредингера переходит в зависимости от знака энергии либо в одномерный нестационарный оператор Шредингера, либо в оператор теплопроводности, а уравнение Веселова-Новикова – в уравнение Кадомцева-Петвиашвили (КП).

Уравнение КП в настоящее время – одно из наиболее известных уравнений в теории солитонов, что обусловлено целым рядом его замечательных свойств:

– Уравнение КП – исторически первое уравнение с 2 пространственными переменными, для которого была установлена его интегрируемость методом обратной задачи рассеяния (В.Е.Захаров – А.Б.Шабат [36], [37], Дрюма [23]).

– Уравнение КП естественно возникает в ряде физических задач, например, в физике плазмы (Кадомцев – Петвиашвили [40]), в теории океанских волн.

– Уравнение КП описывает первую нелинейную поправку в многомасштабных разложениях нелинейных гамильтоновых систем с 2 пространственными переменными общего вида в предположении некоторых условий невырожденности [35].

– Многие известные системы теории солитонов получаются как редукции КП или допускают вложение в иерархию КП.

– При исследовани уравнения КП возникают чрезвычайно интересные математические структуры.

В литературе используются различные нормировки КП, однако все они эквивалентны с точностью до масштабного преобразования

$$(u, x, y, t) \longrightarrow (\gamma_1 u, \gamma_2 x, \gamma_3 y, \gamma_4 t).$$

В нашем тексте мы для определенности будем пользоваться следующей нормировкой:

$$(u_t + 6uu_x - u_{xxx})_x = 3\alpha^2 u_{yy}.$$

Наиболее интересным и осмысленным с точки зрения физических приложений является случай $\alpha^2 \neq 0$. Без ограничения общности можно считать $\alpha^2 = \pm 1$, т.е. мы будем предполагать, что имеет место один из двух случаев:

1) $\alpha = i$ – уравнение КП1,

2) $\alpha = 1$ – уравнение КП2.

С алгебраической точки зрения уравнения КП1 и КП2 эквивалентны, поскольку они переводятся друг в друга заменой $y \to \pm iy$. Однако с аналитической точки зрения КП1 и КП2 сильно отличаются друг от друга (так, например, для КП2 с периодическими начальными условиями удается определить прямое преобразование рассеяния для вспомогательной спектральной задачи и, тем самым, в каком-то смысле решить задачу Коши (Кричевер [43], [44]), а для КП1 до сих пор не ясно, возможно ли вообще получить аналогичный результат). Интегрирование КП основано на использовании следующего представления Лакса, а именно, уравнение КП

$$(u_t + 6uu_x - u_{xxx})_x = 3\alpha^2 u_{yy}.$$

эквивалентно условию коммутативности следующей пары линейных дифференциальных операторов

$$[L, A] = 0,$$

$$L = \alpha\partial_y - \partial_x + u(x, y, t),$$

$$A = \partial_t - 4\partial_x^3 + 6u(x, y, t)\partial_x + 3u_x(x, y, t) + 3\alpha w(x, y, t),$$

где

$$\partial_x w(x, y, t) = \partial_y u(x, y, t).$$

При $\alpha = i$ – L – нестационарный одномерный оператор Шредингера, при $\alpha = 1$ – L параболический оператор (оператор теплопроводности).

Важным свойством КП является его нелокальность. Эволюционное уравнение называется локальным, если оно представимо в следующем виде:

$$u_t(\vec{x}, t) = K[\vec{x}, u, u_x, \ldots],$$

где $K[\vec{x}, u, u_x, \ldots]$ – функция, зависящая от потенциала и его производных по пространственным переменным, взятым в точке $\vec{x}$. Если же для

вычисления $K[\vec{x}, u, u_x, \ldots]$ этого недостаточно и нужно знать $u(\vec{x}, t)$ в других точках, то уравнение называется нелокальным.

Задача Коши для уравнения КП1 в классе убывающих на бесконечности потенциалов была решена С.В.Манаковым [129], более регулярный вывод преобразования рассеяния был предложен М.Абловицем и А.Фокасом [99]. Спектральное преобразование для уравнения КП2 в предположении малости потенциала для прямой задачи (или данных рассеяния для обратной) было построено Абловицем, Бар Яковым и Фокасом в работе [84].

Методы, используемые в нашей работе при исследовании задачи рассеяния для двумерного оператора Шредингера аналогичны методам, используемым в теории КП. С другой стороны, техника, разработанная для оператора Шредингера, позволила получить ряд новых результатов для КП. В частности, удалось доказать, что при некоторых предположениях спектральное преобразование для КП2 с вещественным потенциалом неособо в обе стороны (ранее это было доказано лишь для некоторой окрестности нулевого потенциала). В свою очередь это доказывает несингулярную разрешимость задачи Коши со сколь угодно большими начальными условиями в быстроубывающем классе.

Первая глава диссертации носит вводный характер. В ней собраны основные определения, а также дан обзор тех фактов и методов из теории уравнения КП2, которые нам понадобятся в дальнейшем. Этот обзор сделан довольно подробным, поскольку излагаемый в нем материал доступен лишь в оригинальных публикациях, и в некоторых случаях требует уточнения.

Во второй главе изложены основные результаты по преобразованию рассеяния для двумерного оператора Шредингера и параболического оператора. В частности, построен полный независимый набор обобщенных данных рассеяния при фиксированной ненулевой энергии, найдены

редукции, обеспечивающие отсутствие в операторе членов с первыми производными (магнитого поля) и вещественность, найдена естественная параметризация множества потенциалов с заданной амплитудой рассеяния при одной энергии. Исследован вопрос о прозрачных (не рассеивающих) при одной энергии потенциалах, в частности, построены явные примеры и доказано, что такие потенциалы могут убывать на бесконечности быстрее любой степени расстояния. Доказаны теоремы о несингулярности преобразования рассеяния для параболического оператора. Для оператора Шредингера при энергии ниже основного состояния и параболического оператора построено преобразование рассеяния для убывающих потенциалов на конечнозонном фоне.

В третьей главе техника спектрального преобразования применена к исследованию так называемых неизоспектральных симметрий солитонных уравнений. В частности, построена геометрическая реализация действия подалгебры алгебры симметрий КП, изоморфной алгебре векторных полей на окружности на конечнозонных решениях, показано, что по крайней мере для уравнения КдФ это действие проносится через операцию усреднения. Предложен основанный на неизоспектральных симметриях новый алгоритм выделения чисто перидических по пространственной переменной конечнозонных решений.

Глава I

Предварительные сведения.

2 Задача Коши для уравнения Кадомцева-Петвиашвили 2 в классе убывающих на бесконечности потенциалов.

Напомним результаты работы [84]. (Мы также будем пользоваться оценками норм операторов из обзора [103].)

2.1 Прямое преобразование рассеяния.

Сначала опишем прямое спектральное преобразование. Отметим, что в отличие от нестационарного оператора Шредингера, входящего в пару Лакса для КП1, параболический оператор (оператор теплопроводности)

$$L = \partial_y - \partial_x^2 + u(x,y),$$

входящий в пару Лакса для КП2, не имеет нетривиальной спектральной теории и теории рассеяния в классическом понимании. Тем не менее, введенные в [84] обобщенные "данные рассеяния", связанные с растущими на бесконечности решениями (эти решения аналогичны введенным Л.Д.Фаддеевым растущим волновым функциям многомерного оператора Шредингера) оказываются достаточными для интегрирования КП2.

При исследовании прямой задачи мы будем сначала считать, что на потенциал $u(x,y)$ наложены следующие ограничения:

1) $u(x,y)$ – гладкая функция 2 вещественных переменных, определенная на $\mathbb{R}^2$.

2) Существует набор вещественных констант $\epsilon > 0, c_{ij}$ таких, что

$$\left|\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} u(x,y)\right| \leq \frac{c_{ij}}{(\sqrt{x^2+y^2+1})^{2+\epsilon}} \quad \text{при всех } i,j \geq 0. \tag{2.1}$$

3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x,y)dx \equiv 0 \qquad \text{при всех y.}$$

(условие 3 обеспечивает хорошее поведение данных рассеяния на бесконечности, см., например, [35]).

В задаче рассеяния для L все уровни энергии эквивалентны. Действительно, пусть $\Psi(x,y)$ - некоторое решение уравнения

$$L\Psi(x,y) = \epsilon\Psi(x,y).$$

Тогда функция

$$\tilde{\Psi}(x,y) = e^{-\epsilon y}\Psi(x,y)$$

- собственная функция L с энергией 0:

$$L\tilde{\Psi}(x,y) = 0.$$

Поэтому достаточно ограничиться нулевым уровнем энергиии

$$(\partial_y - \partial_x^2 + u(x,y))\Psi(\lambda,x,y) = 0. \tag{2.2}$$

Спектральный параметр λ вводим, задавая асимптотику волновой функции на бесконечности:

$$\Psi(\lambda,x,y) = e^{\lambda x+\lambda^2 y}\ \chi(\lambda,x,y), \qquad \text{где}$$

$$\chi(\lambda,x,y) = 1 + o(1) \qquad \text{при } x^2+y^2 \to \infty. \tag{2.3}$$

Введем следующие обозначения:

$$L_0 = \partial_y - \partial_x^2,$$

$$L_0(\lambda) = e^{-(\lambda x+\lambda^2 y)}\ L_0\ e^{\lambda x+\lambda^2 y} = \partial_y - \partial_x^2 - 2\lambda\partial_x,$$

$$\lambda_R = \mathrm{Re}\,\lambda, \quad \lambda_I = \mathrm{Im}\,\lambda.$$

Уравнение на функцию $\chi(\lambda, x, y)$ имеет вид:

$$L_0(\lambda)\chi(\lambda, x, y) + u(x, y)\chi(\lambda, x, y) = 0. \tag{2.4}$$

Дифференциальное уравнение (2.4) с граничным условием (2.4) эквивалентно интегральному уравнению

$$\chi(\lambda, x, y) = 1 - \hat{G}(\lambda)u(x, y)\chi(\lambda, x, y) \tag{2.5}$$

где $\hat{G}(\lambda)$ – интегральный оператор:

$$\hat{G}(\lambda)f(\lambda, x, y) = \iint G(\lambda, x - x', y - y')f(\lambda, x', y'), dx'dy',$$

$G(\lambda, x, y)$ – убывающая на бесконечности функция Грина оператора $L_0(\lambda)$

$$L_0(\lambda)G(\lambda, x, y) = \delta(x)\delta(y).$$

В импульсном представлении оператор $L_0(\lambda)$ – оператор умножения на функцию

$$\tilde{L}_0(\lambda) = ip_y + p_x^2 - 2i\lambda p_x,$$

откуда следует, что

$$G(\lambda, x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint \frac{e^{i(p_x x + p_y y)}}{p_x^2 + ip_y - 2i\lambda p_x} dp_x dp_y. \tag{2.6}$$

Интеграл по dp_y в формуле (2.6) явно вычисляется и мы получаем эквивалентное представление для $G(\lambda, x, y)$:

$$G(\lambda, x, y) = \frac{1}{4\pi} \int dp_x [\mathrm{sgn}(y) + \mathrm{sgn}(p_x^2 + 2\lambda_I p_x)] e^{i(p_x x + (ip_x^2 + 2\lambda p_x)y)} \tag{2.7}$$

Естественно возникает вопрос о сходимости (2.6) . Если $\lambda_I \neq 0$, то знаменатель (2.6) имеет 2 простых нуля в точках $p_x = p_y = 0$ и $p_x = -2\lambda_I$, $p_y = -4\lambda_I\lambda_R$ и эти особенности абсолютно интегрируемы. Если $\lambda_I = 0$, то знаменатель имеет единственный ноль в точке $p_x = p_y = 0$ и эта особенность также абсолютно интегрируема.

Тем самым единственная особенность, требующая регуляризации, – это окрестность бесконечности в p_x, p_y - плоскости. На бесконечности абсолютной сходимости нет, однако несложно проверяется, что формула (2.7) дает нам регуляризацию этого интеграла, непрерывную по x, y при $x^2 + y^2 \neq 0$.

Лемма 2.1 *Зафиксируем точку (x, y) такую, что $x^2 + y^2 \neq 0$. Тогда*

1) $G(\lambda, x, y)$ – непрерывная функция λ на всей λ - плоскости

2) Функция $G(\lambda, x, y)$ не голоморфна по λ, а имеет отличную от 0 производную по $\bar{\lambda}$:

$$\frac{\partial G(\lambda, x, y)}{\partial \bar{\lambda}} = -\frac{i \operatorname{sgn} \lambda_I}{2\pi} e^{-2i\lambda_I x - 4i\lambda_I \lambda_R y} \tag{2.8}$$

(Более строго было бы писать не $G(\lambda, x, y)$, а $G(\lambda, \bar{\lambda}, x, y)$. Однако, чтобы не усложнять формулы, в нашей работе мы будем опускать зависимость от переменных типа $\bar{\lambda}$, $\bar{x}$, не подразумевая голоморфности, если это явно не оговорено).

3) Функция $G(\lambda, x, y)$ имеет следующие симметрии:

а) $G(\bar{\lambda}, x, y) = \bar{G}(\lambda, x, y)$

б) $G(\bar{\lambda}, x, y) = e^{2i\lambda_I x + 4i\lambda_I \lambda_R y} G(\lambda, x, y)$

Доказательство пунктов 1 и 3 достаточно стандартно. Докажем пункт 2.

Обозначим $g(\lambda, x, y)$ подинтегральное выражение в (2.6):

$$g(\lambda, x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{e^{i(p_x x + p_y y)}}{p_x^2 + i p_y - 2i\lambda p_x}.$$

Числитель $g(\lambda, x, y)$ не зависит от λ вообще, а знаменатель зависит от λ, поэтому единственный источник неголоморфности интеграла – зависящие от λ нули знаменателя. У нас ровно один такой нуль: $p_x = 2\lambda_I$, $p_y = -4\lambda_I \lambda_R$.

Тем самым

$$\frac{\partial G(\lambda,x,y)}{\partial\bar\lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_0}=\iint\limits_{U_\epsilon(p_0)}\frac{\partial}{\partial\bar\lambda}\,g(\lambda,x,y,p_x,p_y)dp_xdp_y$$

где p_0 – координата подвижного нуля при $\lambda=\lambda_0\quad p_{0x}=-2\lambda_{0I},\quad p_{0y}=-4\lambda_{0I}\lambda_{0R},\quad U_\epsilon(p_0)$ – ϵ - окрестность точки p_0 в (p_x,p_y) плоскости. В окрестности точки p_{0x},p_{0y} введем локальные координаты $p_x=-2\mu_I,\ p_y=-4\mu_R\mu_I$, и для элемента объема имеем:

$$dp_xdp_y=8|\mu_I|d\mu_Rd\mu_I \tag{2.9}$$

В координатах μ_R, μ_I получаем:

$$\frac{\partial G(\lambda,x,y)}{\partial\bar\lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_0}=\iint\limits_{U_\epsilon(\lambda_0)}\frac{\partial}{\partial\bar\lambda}\,\frac{e^{-2i(\mu_Ix+2\mu_R\mu_Iy)}}{4i\mu_I(\lambda-\mu)}\,8|\mu_I|d\mu_Rd\mu_I$$

где интеграл берется по области $U_\epsilon(\lambda_0)$ – ϵ - окрестности точки $\mu=\lambda_0$ в μ - плоскости, $\mu=\mu_R+i\mu_I$.

Далее воспользуемся формулой Коши-Грина (называемой также обобщенной формулой Коши) (см., например, книгу [80], стр. 105).

Пусть $f(z)$ – функция класса C^1 в замыкании компактной области D на z - плоскости, ограниченной конечным числом спрямляемых кривых. Тогда если $z\in D$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial D}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}-\frac{1}{\pi}\iint\limits_D\frac{\partial f(\xi)}{\partial\xi}\,\frac{d\xi_Rd\xi_I}{\xi-z} \tag{2.10}$$

Из нее немедленно следует, что

$$\frac{\partial}{\partial\bar z}\,\frac{1}{z-\xi}=\pi\delta(z_R-\xi_R)\delta(z_I-\xi_I) \tag{2.11}$$

Подставляя (2.11) в (2.9) получаем:

$$\frac{\partial G(\lambda,x,y)}{\partial\bar\lambda}=-\frac{i}{2\pi}\iint\limits_{U_\epsilon(\lambda)}\delta(\lambda_R-\mu_R)\delta(\lambda_I-\mu_I)\,e^{-2i(\mu_Ix+2\mu_R\mu_Iy)}\,\frac{|\mu_I|}{\mu_I}\,d\mu_Rd\mu_I=$$

$$= -\frac{i}{2\pi}\,\mathrm{sgn}(\lambda_I)\,e^{-2i\lambda_I x - 4i\lambda_R\lambda_I y}.$$

Пункт 2 доказан.

Из формулы (2.7) несложно вычисляется асимптотика $G(\lambda, x, y)$ при больших x, y.

Лемма 2.2 *Пусть* $\lambda_I \neq 0$. *Тогда при* $x^2 + y^2 \to \infty$

$$G(\lambda, x, y) = \frac{i\,\mathrm{sgn}\,\lambda_I}{2\pi(x + 2\lambda y)} - \frac{i\,\mathrm{sgn}\,\lambda_I}{2\pi(x + 2\bar{\lambda} y)} e^{-2i\lambda_I x - 4i\lambda_I\lambda_R y} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Следующий шаг – исследование интегрального уравнения (2.5).

Убедимся, что при достаточно малом c_{00} норма интегрального оператора $\hat{G}(\lambda)u(x,y)$ меньше 1 и тем самым (2.5) однозначно разрешимо и решение можно выписать в виде ряда:

$$\chi(\lambda, x, y) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} [\hat{G}(\lambda)u(x,y)]^k \cdot 1. \tag{2.12}$$

При этом мы будем следовать работе [103].

Обозначим $\hat{u}(p_x, p_y)$ преобразование Фурье функции $u(x, y)$

$$\hat{u}(p_x, p_y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint e^{-i(p_x x + p_y y)}\, u(x, u)\, dxdy,$$

$$u(x, y) = \iint e^{i(p_x x + p_y y)}\, \hat{u}(p_x, p_y)\, dp_x dp_y.$$

Перепишем уравнение (2.5) в импульсном представлении. Пусть

$$\chi(\lambda, x, y) = \iint e^{i(p_x x + p_y y)}\, \hat{\chi}(\lambda, p_x, p_y)\, dp_x dp_y.$$

Тогда уравнение на $\chi(\lambda, p_x, p_y)$ имеет вид:

$$\hat{\chi}(\lambda, p_x, p_y) = \delta(x)\delta(y) - \frac{1}{p_x^2 - 2i\lambda p_x + i p_y} \iint \hat{u}(p_x - q_x, p_y - q_y)\, \hat{\chi}(\lambda, q_x, q_y)\, dq_x dq_y. \tag{2.13}$$

Лемма 2.3 *(доказательство см. [103])*

Пусть $f(p_x, p_y) \in L^2(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ *на* (p_x, p_y)*-плоскости. Тогда*

$$\frac{f(p_x, p_y)}{p_x^2 - 2i\lambda p_x + i p_y} \in L^2(\mathbb{R}^2) \quad и$$

$$\iint dp_x dp_y \left| \frac{f(p_x, p_y)}{p_x^2 - 2i\lambda p_x + i p_y} \right| \leq C_1 \max(\|f\|_{L^2}, \|f\|_{L^\infty}),$$

где

$$C_1 = 4\,\frac{\Gamma^2(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2})} + 2\sqrt[4]{2}.\sqrt{\pi} \tag{2.14}$$

Согласно неравенству Юнга оператор свертки

$$(\hat{u} * f)(p_x, p_y) = \iint \hat{u}(p_x - q_x, p_y - q_y)\, f(q_x, q_y)\, dq_x dq_y$$

с функцией $\hat{u}(p_x, p_y) \in L^2(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ отображает пространство $L^1(\mathbb{R}^2)$ в $L^2(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, причем

$$\|\hat{u} * f\|_{L^2} \leq \|\hat{u}\|_{L^2} \|f\|_{L^1},$$

$$\|\hat{u} * f\|_{L^\infty} \leq \|\hat{u}\|_{L^\infty} \|f\|_{L^1}.$$

Согласно неравенству Хаусдорфа-Юнга

$$\|\hat{u}\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{4\pi^2} \|u\|_{L^1} \leq \frac{c_{00}}{4\pi^2} \iint \frac{dxdy}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 1}\right)^{2+\epsilon}},$$

$$\|\hat{u}\|_{L^2} \leq \frac{1}{2\pi} \|u\|_{L^2} \leq \frac{c_{00}}{2\pi} \left[\iint \frac{dxdy}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 1}\right)^{2+\epsilon}} \right]^{1/2},$$

что и дает нам однозначную разрешимость (2.13) при достаточно малом c, причем $\hat{\chi}(\lambda, p_x, p_y) = \delta(x)\delta(y) + \hat{\chi}_1(\lambda, q_x, q_y)$, где $\hat{\chi}_1(\lambda, q_x, q_y) \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Отсюда следует сходимость последовательных приближений для (2.13) в пространстве $C(\mathbb{R}^2)$. Если константа c_{00} такова, что гарантирует сходимость ряда для $\chi(\lambda, x, y)$ при всех λ, то будем говорить, что для прямой задачи выполнено условие "малой нормы".

Мы показали, что в предположении "малой нормы" функция $\chi(\lambda, x, y)$ определена при всех λ (и в действительности непрерывно зависит от λ). Функция Грина не голоморфна по λ и, тем самым, $\chi(\lambda, x, y)$ так же не голоморфна, однако эта неголоморфность весьма специального вида.

Лемма 2.4 *Пусть $\Psi(\lambda, x, y)$ – волновая функция параболического оператора $L = \partial_y - \partial_x^2 + u(x, u)$, где $u(x, y)$ удовлетворяет условию "малости нормы", $\Psi(\lambda, x, y) = e^{\lambda x + \lambda^2 y}\chi(\lambda x, y)$, $\chi(\lambda, x, y) \to 1$ при $x^2 + y^2 \to \infty$. Тогда*

$$\frac{\chi(\lambda, x, y)}{\partial \bar{\lambda}} = T(\lambda) e^{-2i\lambda_I x - 4i\lambda_I \lambda_R y} \chi(\lambda, x, y),$$

$$\frac{\Psi(\lambda, x, y)}{\partial \bar{\lambda}} = T(\lambda)\Psi(\bar{\lambda} x, y),$$

где

$$T(\lambda) = \frac{i \operatorname{sgn} \lambda_I}{2\pi} b(\lambda), \tag{2.15}$$

$$b(\lambda) = \iint u(x, y) e^{2i\lambda_I x + 4i\lambda_I \lambda_R y} \chi(\lambda, x, y) dx dy. \tag{2.16}$$

Доказательство. Дифференцируя по $\bar{\lambda}$ уравнение (2.5), получаем:

$$\frac{\chi(\lambda, x, y)}{\partial \bar{\lambda}} = -\frac{\hat{G}(\lambda)}{\partial \bar{\lambda}} u(x, y)\, \chi(\lambda, x, y) - \hat{G}(\lambda)\chi(\lambda, x, y).$$

По формуле (2.8)

$$-\frac{\hat{G}(\lambda)}{\partial \bar{\lambda}} u(x, y)\, \chi(\lambda, x, y) = \frac{i \operatorname{sgn} \lambda_I}{2\pi} e^{-2i\lambda_I x - 4i\lambda_I \lambda_R y} \times$$

$$\times \iint u(x', y') e^{2i\lambda_I x' + 4i\lambda_I \lambda_R y'} \chi(\lambda, x', y') dx' dy',$$

т.е.

$$\frac{\hat{G}(\lambda)}{\partial \bar{\lambda}} u(x, y)\, \chi(\lambda, x, y) = T(\lambda)\, e^{-2i\lambda_I x - 4i\lambda_I \lambda_R y},$$

где $T(\lambda)$ – величина, не зависящая от x и y. Тем самым

$$\frac{\chi(\lambda, x, y)}{\partial \bar{\lambda}} = T(\lambda)\, e^{-2i\lambda_I x - 4i\lambda_I \lambda_R y} - \hat{G}(\lambda)\, u(x, y)\, \chi(\lambda, x, y),$$

т.е.

$$\frac{\chi(\lambda,x,y)}{\partial\bar{\lambda}} = T(\lambda)\,\chi(\lambda,x,y),$$

где $\chi(\lambda,x,y)$ – решение интегрального уравнения

$$\chi_1(\lambda,x,y) = e^{-2i\lambda_I x - 4i\lambda_I\lambda_R y} - \hat{G}(\lambda)\,u(x,y)\,\chi_1(\lambda,x,y).$$

Для вычисления $\chi_1(\lambda,x,y)$ воспользуемся свойством 3б функции Грина из Леммы 2.1, из которого следует,что

$$\hat{G}(\lambda) = e^{-2i\lambda_I x - 4i\lambda_I\lambda_R y}\hat{G}(\bar{\lambda})\,e^{2i\lambda_I x + 4i\lambda_I\lambda_R y},$$

и, тем самым, функция

$$\chi_2(\lambda,x,y) = e^{2i\lambda_I x + 4i\lambda_I\lambda_R y}\chi_1(\lambda,x,y)$$

удовлетворяет уравнению:

$$\chi_2(\lambda,x,y) = 1 - \hat{G}(\bar{\lambda})\chi_2(\lambda,x,y),$$

т.е.

$$\chi_2(\lambda,x,y) = \chi(\bar{\lambda},x,y), \qquad \chi_1(\lambda,x,y) = e^{-2i\lambda_I x - 4i\lambda_I\lambda_R y}\chi(\bar{\lambda},x,y).$$

Лемма доказана.

Суммируя вышесказанное, мы получаем:

Теорема 2.1 *1) Пусть потенциал $u(x,y)$ удовлетворяет условию "малой нормы". Тогда по нему однозначно строятся "данные рассеяния" $T(\lambda)$ или, что эквивалентно, $b(\lambda)$.*

2) Пусть потенциал $u(x,y)$ вещественен. Тогда "данные рассеяния" $b(\lambda)$ таковы, что

$$b(\bar{\lambda}) = \bar{b}(\lambda), \tag{2.17}$$

или, что эквивалентно, $T(\bar{\lambda}) = -\bar{T}(\lambda)$.

Доказательство пункта 2. Поскольку $G(\bar{\lambda}, x, y) = \bar{G}(\lambda, x, y)$, то из вещественности $u(x, y)$ сразу же следует, что

$$\chi(\bar{\lambda}, x, y) = \bar{\chi}(\lambda, x, y). \tag{2.18}$$

Подставляя (2.18) в (2.16) получаем требуемую симметрию.

До сих пор мы нигде не пользовались гладкостью $u(x, y)$. Наш следующий шаг – изучение асимптотики $b(\lambda)$ при больших λ, и мы будем пользоваться тем, что преобразование Фурье гладкой функции убывает на бесконечности быстрее любой степени расстояния от начала координат. Как и раньше, мы будем работать с волновой функцией в импульсном представлении.

Лемма 2.5 *Пусть $A(\lambda)$ – оператор $\hat{G}(\lambda)u(x, y)$, записанный в импульсном представлении*

$$A(\lambda)f(\lambda, x, y) = \frac{1}{p_x^2 - 2i\lambda p_x + ip_y} \iint \hat{u}(p_x - q_x, p_y - q_y)\, f(\lambda, q_x, q_y)\, dq_x dq_y.$$

Тогда при всех λ $A(\lambda)$ – ограниченный оператор оператор в пространстве $L^1(\mathbb{R}^2)$ функций двух переменных p_x, p_y и имеет место следующая оценка:

$$\|A(\lambda)\| = O\left(\frac{\ln|\lambda|}{|\lambda|}\right) \qquad \textit{при } |\lambda| \to \infty.$$

Доказательство. Оператор $A(\lambda)$ – композиция оператора свертки

$$\varphi(p_x, p_y) \to (\hat{u} * f)(p_x, p_y) = \iint \hat{u}(p_x - q_x, p_y - q_y)\, \varphi(q_x, q_y)\, dq_x dq_y$$

и оператора умножения на функцию

$$\varphi(q_x, q_y)\, dq_x dq_y \to D^{-1}(\lambda)\varphi(q_x, q_y)\, dq_x dq_y \frac{\varphi(q_x, q_y)\, dq_x dq_y}{p_x^2 - 2i\lambda p_x + ip_y},$$

где $D(\lambda) = p_x^2 - 2i\lambda p_x + ip_y$.

Введем следующую норму на пространстве функций двух переменных $\varphi(p_x, p_y)$

$$|||\varphi||| = \max_{(p_x,p_y)\in\mathbb{R}^2} |\varphi(p_x,p_y)| + \int dp_y \max_{\substack{p_x\in\mathbb{R}^2\\ p_y=const}} |\varphi(p_x,p_y)| + \iint |\varphi(p_x,p_y)|\, dp_x dp_y.$$

Несложно проверяется, что

$$|||\hat{u}||| < \infty$$

и

$$|||\hat{u} * \varphi||| \le |||\hat{u}|||\ \ \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}.$$

Убедимся теперь, что L^1 – норма функции $D^{-1}(\lambda)\varphi(p_x, p_y)$ оценивается через $|||\varphi|||$, т.е. оценим интеграл

$$\iint \frac{\varphi(p_x,p_y)}{D(\lambda)} dp_x dp_y = \iint \frac{\varphi(p_x,p_y)\, dp_x dp_y}{p_x^2 - 2i\lambda p_x + ip_y} \le \iint \frac{|\varphi(p_x,p_y)|}{|D(\lambda)|} dp_x dp_y.$$

Сделаем замену переменных:

$$p_x = s_x - \lambda_I,\ \ p_y = s_y - 2\lambda_R\lambda_I,\ \ \tilde{\varphi}(s_x,s_y) = \varphi(s_x - \lambda_I, s_y - 2\lambda_R\lambda_I),$$

$$D(\lambda) = s_x^2 - \lambda_I^2 + i(s_y - 2\lambda_R s_x),$$

$$\iint \frac{|\tilde{\varphi}(s_x,s_y)|}{|D(\lambda)|} = \int ds_y \int \frac{|\varphi(s_x,s_y)|}{|D(\lambda)|} ds_x.$$

Сначала рассмотрим случай $|\lambda_I| > |\lambda_R|,\ \ |\lambda_I| > 1$. Оценим интеграл по ds_x при фиксированном s_y:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|\varphi(s_x,s_y)|}{|D(\lambda)|} ds_x = \left(\int\limits_{U_1} + \int\limits_{U_2}\right) \frac{|\varphi(s_x,s_y)|}{|D(\lambda)|}\, ds_x,$$

где U_1 – область $|s_x| \le |\lambda_I| + 1$, $\quad U_2$ – дополнение к U_1. В области U_2 $|D(\lambda)| \ge |s_x^2 - \lambda_I^2| \ge |\lambda_I| \cdot \Big||s_x| - |\lambda_I|\Big| \ge |\lambda_I|$, т.е.

$$\int\limits_{U_2} \frac{|\varphi(s_x,s_y)|}{|D(\lambda)|}\, ds_x \le \frac{1}{|\lambda_I|} \int\limits_{U_2} |\varphi(s_x,s_y)|\, ds_x \le \frac{1}{|\lambda_I|} \int\limits_{\mathbb{R}} |\varphi(s_x,s_y)|\, ds_x.$$

В области U_1 наибольший вклад в интеграл дают области, в которых знаменатель близок к 0. Вещественная часть $D(\lambda)$ обращается в 0 в точках $s_x = \pm\lambda_I$, мнимая – в точке $s_x = s_y/2\lambda_R$.

Разобьем область U_1 на следующие части U_{11}, U_{12} – ϵ_1 - окрестности точек $\pm\lambda_I$, $U_{13} - U_1 \setminus (U_{11} \cup U_{12})$, где $\epsilon_1 = \min\left(\frac{1}{4|\lambda_I|}(|s_y| - 2|\lambda_R\lambda_I|), 1\right)$.

В областях U_1, U_2 $|D(\lambda| \geq |s_y - 2\lambda_R s_x|$, но

$$\Big||s_x| - |\lambda_I|\Big| \leq \frac{1}{4|\lambda_I|}(|s_y| - 2|\lambda_R\lambda_I|) \leq \frac{1}{4|\lambda_I|}\Big||s_y| - 2|\lambda_R\lambda_I|\Big|.$$

Следовательно,

$$|D(\lambda)| \geq \Big||s_y| - 2|\lambda_R|\,|s_x|\Big| \geq \Big||s_y| - 2|\lambda_R\lambda_I|\Big| - \Big|2|\lambda_R\lambda_I| - 2|\lambda_R|\,|s_y|\Big| \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\Big||s_y| - 2|\lambda_R\lambda_I|\Big|,$$

$$\int\limits_{U_{11}} \frac{|\tilde\varphi(s_x, s_y)|}{|D(\lambda)|}\,ds_x + \int\limits_{U_{12}} \frac{|\tilde\varphi(s_x, s_y)|}{|D(\lambda)|}\,ds_x \leq 2\cdot 4\epsilon_1 \cdot \max_{\substack{s_x\in\mathbb{R}^2\\ s_y=const}} |\tilde\varphi(s_x, s_y)| \times$$

$$\times \frac{2}{\Big||s_y| - 2|\lambda_R\lambda_I|\Big|} \leq \frac{4}{|\lambda_I|} \max_{\substack{s_x\in\mathbb{R}^2\\ s_y=const}} |\tilde\varphi(s_x, s_y)|.$$

В области U_{13} $D(\lambda) \geq |s_x^2 - \lambda_I^2| \geq |\lambda_I|\,\Big||s_x| - |\lambda_I|\Big|$.

Если $\epsilon_1 < 1$, то

$$\int\limits_{U_{13}} \frac{|\tilde\varphi(s_x, s_y)|}{|D(\lambda)|}\,ds_x \leq 2\cdot \max_{\substack{s_x\in\mathbb{R}^2\\ s_y=const}} |\tilde\varphi(s_x, s_y)| \left(\int\limits_0^{|\lambda_I|-\epsilon_1} + \int\limits_{|\lambda_I|+\epsilon_1}^{1} \frac{ds_x}{s_x - |\lambda_I|}\right) \leq$$

$$\leq 2\cdot \max_{\substack{s_x\in\mathbb{R}^2\\ s_y=const}} |\tilde\varphi(s_x, s_y)| + (2|\ln\epsilon_1| + |\ln|\lambda_I||) \leq$$

$$\leq 2\cdot \max_{\substack{s_x\in\mathbb{R}^2\\ s_y=const}} |\tilde\varphi(s_x, s_y)| \left[3|\ln|\lambda_I|| + 2\ln 4 + 2\Big|\ln\Big(\Big||s_y| - 2|\lambda_R\lambda_I|\Big|\Big)\Big|\right].$$

Если же $\epsilon_1 = 1$, то

$$\int\limits_{U_{13}} \frac{|\tilde\varphi(s_x, s_y)|}{|D(\lambda)|}\,ds_x \leq 2\cdot \max_{\substack{s_x\in\mathbb{R}^2\\ s_y=const}} |\tilde\varphi(s_x, s_y)|\,\Big|\ln(\Big||\lambda_I| - 1\Big|)\Big|$$

Интегрируя по s_y получаем нужную оценку.

Теперь рассмотрим случай $|\lambda_R| > |\lambda_I|, \quad |\lambda_R| > 1$. Сперва оцениваем при фиксированном s_y

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{\varphi}(s_x, s_y)|}{|D(\lambda)|}\, ds_x = \Big(\int\limits_{U_1} + \int\limits_{U_2}\Big) \frac{|\tilde{\varphi}(s_x, s_y)|}{|D(\lambda)|}\, ds_x.$$

В нашем случае U_1 – область $\left|s_x - \frac{s_y}{2\lambda_R}\right| \le 1, \quad U_2$ – дополнение к ней. В области U_2

$$|D(\lambda)| \ge |\operatorname{Im} D(\lambda)| = 2|\lambda_R|\left|s_x - \frac{s_y}{,} 2\lambda_R\right|$$

следовательно,

$$\int\limits_{U_2} \frac{|\tilde{\varphi}(s_x, s_y)|}{|D(\lambda)|}\, ds_x \le \frac{1}{2|\lambda_R|} \int\limits_{\mathbb{R}} |\tilde{\varphi}(s_x, s_y)|\, ds_x.$$

В свою очередь, область U_1 разобьем на области U_{11} и U_{12}, где U_{11} – ϵ_2 - окрестность точки $s_y/2\lambda_R, \quad U_{12}$ – дополнение к ней,

$$\epsilon_2 = \min\left(\frac{1}{2|\lambda_R|}\left(\left|\frac{s_y}{2\lambda_R}\right| - |\lambda_I|\right)^2,\ \frac{1}{2}\left|\left|\frac{s_y}{2\lambda_R}\right| - |\lambda_I|\right|,\ 1\right).$$

В области U_{11}

$$|D(\lambda)| \ge |\operatorname{Re} D(\lambda)| \ge \frac{1}{4}\ \left(\left|\frac{s_y}{2\lambda_R}\right| - |\lambda_I|\right)^2,$$

$$\int\limits_{U_{11}} \frac{|\tilde{\varphi}(s_x, s_y)|}{|D(\lambda)|}\, ds_x \le \frac{8}{|\lambda_R|} \max_{\substack{s_x \in \mathbb{R}^2 \\ s_y = const}} |\tilde{\varphi}(s_x, s_y)|.$$

В области U_{12}

$$|D(\lambda)| \ge |\operatorname{Im} D(\lambda)| = 2|\lambda_R|\left|s_x - \frac{s_y}{2\lambda_R}\right|$$

$$\int\limits_{U_{12}} \frac{|\tilde{\varphi}(s_x, s_y)|}{|D(\lambda)|}\, ds_x \le \max_{\substack{s_x \in \mathbb{R}^2 \\ s_y = const}} |\tilde{\varphi}(s_x, s_y)|\ \frac{1}{|\lambda_R|}\ |\ln \epsilon_2|.$$

Интегрируя по s_y получаем основной результат Леммы 2.5.

Отсюда получается следующий вывод:

Теорема 2.2 *Пусть $u(x,y)$ гладкая функция такая, что при всех $i,j \geq 0$ имеет место оценка:*

$$\left|\frac{\partial^{i+j}u(x,y)}{\partial^i x \partial^j y}\right| \leq \frac{c_{ij}}{\left(\sqrt{1+x^2+y^2}\right)^{2+\epsilon}}, \quad \text{где } \epsilon > 0,$$

Тогда для достаточно большого $|\lambda|$ ряд (2.12) сходится, и для того, чтобы вычислить $\chi(\lambda,x,y)$, а, следовательно, и $b(\lambda)$, с точностью до $O\left(\frac{1}{|\lambda|^{N+1-\delta}}\right)$, $\delta > 0$, достаточно ограничиться первыми N членами ряда.

Теорема 2.3 *Введем на плоскости λ новые переменные:*

$$\eta_I = \lambda_I, \;\; \eta_R = \lambda_R \lambda_I.$$

Если $|\eta| \to \infty$, то $|b(\eta)| \to 0$ быстрее любой степени $|\eta|$.

Доказательство. Подставляя ряд (2.12) в (2.16) и переходя к импульсному представлению, получаем:

$$b(\lambda) = 4\pi^2 \left[\hat{u}(-2\lambda_I, -4\lambda_I\lambda_R) + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\int \dots \int}_{k \text{ раз}} dp_{1x}dp_{1y}\dots dp_{kx}dp_{ky} \times \right.$$

$$\times \hat{u}(-2\lambda_I - p_{1x}, -4\lambda_I\lambda_R - p_{1y})\hat{u}(p_{1x}-p_{2x}, p_{1y}-p_{2y})\dots\hat{u}(p_{kx}-0, p_{ky}-0)\times$$

$$\left. \times \frac{1}{p_{1x}^2 - 2i\lambda p_{1x} + ip_{1y}} \frac{1}{p_{2x}^2 - 2i\lambda p_{2x} + ip_{2y}} \dots \frac{1}{p_{kx}^2 - 2i\lambda p_{kx} + ip_{ky}} \right].$$

Согласно Теореме 2.2 для того, чтобы проверить убывание быстрее m - й степени расстояния, достаточно ограничиться конечным числом членов. Мы знаем, что при $p_x^2 + p_y^2 \to \infty$ $|\hat{u}(p_x,p_y)|$ стремится к 0 быстрее любой степени $p_x^2 + p_y^2$. В то же время, если $|2\lambda_I + 4i\lambda_I\lambda_R| > kl_1$, то хотя бы в одном из сомножителей аргумент $\hat{u}$ больше l, что и дает нужную оценку.

Эта теорема без подробного доказательства приведена в работе [103]. Однако, поскольку результаты работы [103] относительно обратной задачи для КП2 требуют некоторых уточнений, мы сочли целесообразным дать полное доказательство.

Приведем для справки другое определение $T(\lambda)$. Несложно проверить, что при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0, \quad x^2+y^2 \to \infty$ асимптотика $\Psi(\lambda,x,y)$ имеет вид:

$$\Psi(\lambda,x,y)=\left(1+\frac{\alpha(\lambda)}{(x+2\lambda y)}\right)e^{\lambda x+\lambda^2 y}+\frac{\beta(\lambda)}{(x+2\bar\lambda y)}e^{\bar\lambda x+\bar\lambda^2 y}+o\left(\frac{1}{(x+2\lambda y)}e^{\lambda x+\lambda^2 y}\right).$$

Главный член в асимптотике

$$\frac{\partial\Psi(\lambda x,y)}{\partial\bar\lambda}=[\beta(\lambda)+o(1)]e^{\bar\lambda x+\bar\lambda^2 y}.$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial\Psi(\lambda x,y)}{\partial\bar\lambda}=T(\lambda)\Psi(\bar\lambda,x,y)=T(\lambda)\left(1+o(1)\right)e^{\bar\lambda x+\bar\lambda^2 y},$$

т.е.

$$T(\lambda)=\beta(\lambda), \tag{2.19}$$

До сих пор мы не пользовались условием

$$\int u(x,u)\,dx\equiv 0 \qquad \text{при всех } y \tag{2.20}$$

и для того, чтобы определить прямое преобразование рассеяния, оно не обязательно. Однако получающиеся при этом "данные рассеяния" $T(\lambda)$ уже не убывают при $|\lambda|\to\infty$ и более того,

$$\iint |T(\lambda)|d\lambda_R d\lambda_I$$

расходится на бесконечности, что приводит к появлению разрывов во времени в решениях КП2.

Лемма 2.6 *Пусть функция $u(x,y)$ удовлетворяет условиям Теоремы 2.2 и, кроме того, выполнено соотношение (2.20).*

Тогда

$$|b(\lambda)| = O\left(\frac{\ln|\lambda|}{|\lambda|}\right) \qquad \textit{при } |\lambda| \to \infty$$

и

$$\iint |b(\lambda)|\,|\lambda|^{1-\delta} d\lambda_R d\lambda_I \qquad \textit{сходится при всех } \delta > 0.$$

На этом мы временно прекратим обсуждение прямого преобразования рассеяния для параболического оператора. Мы вернемся к нему в Главе 2.

2.2 Обратное преобразование рассеяния.

Покажем теперь, как по "данным рассеяния" $T(\lambda)$ (или, что эквивалентно, $b(\lambda)$) восстанавливается потенциал $u(x,y)$.

Как и в теории КП1, первый шаг – построение волновой функции по "данным рассеяния".

Теорема 2.4 *Пусть $b(\lambda)$ – произвольная функция на $\mathbb{C}$ такая, что:*

1) $b(\lambda)$ – кусочно-непрерывна на $\mathbb{C}$ и ограничена (как и ранее, мы не предполагаем голоморфности b по λ).

2) $b(\lambda) \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

3) $\frac{1}{\pi}\max\limits_{\lambda\in\mathbb{C}}|b(\lambda)| + \frac{1}{2\pi^2}\iint |b(\lambda)| d\lambda_R d\lambda_I < 1$.

Тогда существует единственная функция $\Psi(\lambda,x,y)$, определенная при всех $\lambda \in \mathbb{C}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, непрерывная по всем переменным такая, что:

1)

$$\Psi(\lambda,x,y) = e^{\lambda x+\lambda^2 y}(1+o(1)) \quad \textit{при } |\lambda| \to \infty. \tag{2.21}$$

2)

$$\frac{\partial\Psi(\lambda,x,y)}{\partial\bar{\lambda}} = T(\lambda)\Psi(\bar{\lambda},x,y), \tag{2.22}$$

где

$$T(\lambda) = \frac{i\,\mathrm{sgn}\,\lambda_I}{2\pi}\,b(\lambda).$$

Доказательство. Пусть $\Psi(\bar{\lambda},x,y) = e^{\lambda x+\lambda^2 y}\chi(\bar{\lambda},x,y)$. Задача построения $\Psi(\bar{\lambda},x,y)$ сводится к задаче построения функции $\chi(\bar{\lambda},x,y)$ такой, что:

1)

$$\chi(\lambda,x,y)\to 1 \quad \text{при } |\lambda|\to\infty. \tag{2.23}$$

2)

$$\frac{\partial\chi(\lambda,x,y)}{\partial\bar{\lambda}} = e^{-2i\lambda_I x-4i\lambda_R\lambda_I y}T(\lambda)\chi(\bar{\lambda},x,y). \tag{2.24}$$

Используя формулу Коши-Грина (2.10) перепишем уравнение (2.24) в интегральной форме:

$$\chi(\lambda,x,y) = 1+\frac{1}{\pi}\iint\frac{d\mu_R d\mu_I}{\lambda-\mu}e^{-2i\mu_I x-4i\mu_R\mu_I y}T(\mu)\chi(\bar{\mu},x,y). \tag{2.25}$$

Вводя обозначение

$$\partial_{\bar{\lambda}}^{-1}f(\lambda) = \frac{1}{\pi}\iint\frac{d\mu_R d\mu_I}{\lambda-\mu}f(\mu), \tag{2.26}$$

уравнение(2.25) можно переписать в следующей форме:

$$\chi(\lambda,x,y) = 1+\partial_{\bar{\lambda}}^{-1}e^{-2i\mu_I x-4i\mu_R\mu_I y}T(\mu)\chi(\bar{\mu},x,y). \tag{2.27}$$

Убедимся, что при всех x,y интегральный оператор в правой части (2.25) ограничен на пространстве $C^0(\mathbb{C})$ функций переменной λ и его норма меньше 1.

Действительно,

$$\frac{1}{\pi}\iint\frac{d\mu_R d\mu_I}{\lambda-\mu}e^{-2i\mu_I x-4i\mu_R\mu_I y}T(\mu)\chi(\bar{\mu},x,y)\le$$

$$\leq \frac{1}{2\pi^2}\iint \frac{d\mu_R d\mu_I}{|\lambda-\mu|}|b(\mu)|\max_{\mu\in\mathbb{C}}|\chi(\bar{\mu},x,y)| =$$

$$= \frac{\|\chi(\mu,x,y)\|_{C^0(\mathbb{C})}}{2\pi^2}\left[\iint\limits_{|\lambda-\mu|\leq 1}\frac{d\mu_R d\mu_I}{\lambda-\mu}\max_{\mu\in\mathbb{C}}|b(\mu)| + \iint\limits_{|\lambda-\mu|\leq 1} d\mu_R d\mu_I |b(\mu)|\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\left[2\pi\max_{\mu\in\mathbb{C}}|b(\mu)| + \iint d\mu_R d\mu_I |b(\mu)|\right]\|\chi(\mu,x,y)\|_{C^0(\mathbb{C})}.$$

Применяя принцип сжимающих отображений получаем доказательство теоремы.

Примечание. Условия Теоремы 2.4 для данных рассеяния, построенных при решении прямой задачи, выполнены только если потенциал $u(x,y)$ удовлетворяет условию (2.20). Как показано в [103] , однозначная разрешимость уравнения (2.25) может быть доказана при более слабых ограничениях на $b(\lambda)$ и условие (2.20) можно не накладывать. Однако при этом асимптотическое поведение $\Psi(\bar{\lambda},x,y)$ при больших λ заметно ухудшается.

Убедимся теперь, что построенная функция $\Psi(\bar{\lambda},x,y)$ – собственная функция параболического оператора с некоторым потенциалом $u(x,y)$.

Теорема 2.5 *Пусть $b(\lambda)$ удовлетворяет тем же условиям, что и в Теореме 2.4 и, кроме того, функции $\lambda_I b(\lambda)$, $\lambda_I^2 b(\lambda)$, $\lambda_I\lambda_R b(\lambda)$, ограничены на λ - плоскости и лежат в $L^1(\mathbb{R}^2)$*

Тогда

1) При $\lambda_I\to\infty$, $|\lambda_I|\gg|\lambda_R|$

$$\Psi(\lambda,x,y) = e^{\lambda x+\lambda^2 y}\left(1+\frac{\chi_{-1}(x,y)}{\lambda}+o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right),$$

где

$$\chi_{-1}(x,y) = \frac{1}{\pi}\iint d\mu_R d\mu_I e^{-2i\mu_I x-4i\mu_R\mu_I y}T(\mu)\chi(\bar{\mu},x,y). \qquad (2.28)$$

2) Функция $\chi_{-1}(x,y)$ непрерывно дифференцируема по x

3) Пусть

$$u(x,y) = 2\partial_x \chi_{-1}(x,y). \tag{2.29}$$

Тогда

$$(\partial_y - \partial_x^2 + u(x,u))\Psi(\lambda,x,y) = 0.$$

Доказательство пункта 1 достаточно стандартно. Для того, чтобы проверить, что $\chi(\lambda,x,y)$ имеет как минимум 2 непрерывные производные по x и 1 по y, продифференцируем соответствующее число раз уравнение (2.28) и получим интегральные уравнения на $\partial_x\chi$, $\partial_x^2\chi$, $\partial_y\chi$, , однозначная разрешимость которых вытекает из принципа сжимающих отображений. Так же проверяется, что

$$\partial_x\chi(\lambda,x,y) = \frac{1}{\lambda}\,\partial_x\chi_1(x,y) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \qquad \text{при } \lambda_I \to \infty,$$

и

$$\Phi(\lambda,x,y) = (\partial_y - \partial_x^2 + u(x,u))\Psi(\lambda,x,y) =$$

$$= e^{\lambda x+\lambda^2 y}(\partial_y - \partial_x^2 - 2\lambda\partial_x + u(x,u))\chi(\lambda,x,y) =$$

$$= e^{\lambda x+\lambda^2 y}(u(x,y) - 2\partial_x\chi_1(x,y) + o(1)) = e^{\lambda x+\lambda^2 y}o(1).$$

Функция $\Psi(\lambda,x,y) + \Phi(\lambda,x,y)$ удовлетворяет уравнениям обратной задачи (2.22) и имеет ту же асимптотику при $|\lambda| \to \infty$, что и $\Psi(\lambda,x,y)$. Тем самым, по теореме единственности $\Phi(\lambda,x,y) = 0$.

Теорема 2.5 доказана.

Теорема 2.6 *Пусть "данные рассеяния" $b(\lambda)$ удовлетворяют условиям вещественности $b(\bar\lambda) = \bar b(\lambda)$. Тогда потенциал $u(x,u)$ вещественен.*

Доказательство. Если $T(\bar\lambda) = -\bar T(\lambda)$, то $\bar\Psi(\bar\lambda,x,y)$ удовлетворяет уравнениям обратной задачи (2.28) и имеет ту же асимптотику на бесконечности, что и $\Psi(\lambda,x,y)$. Тем самым $\Psi(\bar\lambda,x,y) = \bar\Psi(\lambda,x,y)$ и потенциал $u(x,y)$ вещественен.

Мы описали прямое и обратное спектральное преобразование для спектрального оператора. Покажем теперь, что спектральное преобразование линеаризует КП2.

Добавим в асимптотику волновой функции (2.21) зависимость от дополнительной переменной t:

$$\Psi(\lambda, x, y, t) = e^{\lambda x + \lambda^2 y + 4\lambda^3 t}(1 + o(1)). \tag{2.30}$$

Эта добавка ничего не меняет в доказательстве Теоремы 2.6 и точно также проверяем, что

$$A\Psi(\lambda, x, y, t) = 0, \qquad \text{где}$$

$$A = \partial_t - 4\partial_x^3 + 6u(x, y, t)\partial_x + 3u_x(x, y, t) + 3w(x, y, t),$$

$$w(x, y, t) = 2\partial_x \chi_1(x, y, t).$$

Тем самым функция $\Psi(\lambda, x, y, t)$ аннулируется операторами L, A, а тем самым и их коммутатором $[L, A]\Psi(\lambda, x, y, t) = 0$. Поскольку $[L, A]$ – оператор нулевого порядка, то $[L, A] = 0$, т.е. выполнено уравнение КП2.

Далее перейдем от $\Psi(\lambda, x, y, t)$ к $\tilde{\Psi}(\lambda, x, y, t) = e^{-4\lambda^3 t}\Psi(\lambda, x, y, t)$. При всех t $\tilde{\Psi}(\lambda, x, y, t)$ – зависящая от параметра t волновая функция Теоремы 2.4 но ее "данные рассеяния" $T(\lambda)$ уже зависят от t:

$$T(\lambda, t) = e^{4(\bar{\lambda}^3 - \lambda^3)t} T(\lambda, 0).$$

Тем самым мы доказали:

Теорема 2.7 *Динамика "данных рассеяния" $T(\lambda)$ $(b(\lambda))$ в силу уравнения КП2 имеет вид:*

$$T(\lambda, t) = e^{4(\bar{\lambda}^3 - \lambda^3)t} T(\lambda, 0).$$

3 Алгебраические римановы поверхности. Циклы, дифференциалы, тета-функция Римана.

Напомним накоторые основные определения из теории римановых поверхностей (комплексных алгебраических кривых) (см., например, [68]).

3.1 Циклы на алгебраических кривых.

Если явно не оговорено обратное, то под словами "риманова поверхность" и "алгебраическая кривая" мы будем понимать одномерное компактное неособое комплексное многообразие Γ. Как правило, мы будем употреблять термин "риманова поверхность" в тех случаях, когда наше многообразие реализовано как разветвленное накрытие.

Топологически любое такое многообразие – сфера с g ручками, где g – его род. Каноническим базисом 1-циклов на Γ называется любой базис вида $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$ – такой, что

$$a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0, \quad a_i \circ b_j = \delta_{ij}. \tag{3.1}$$

где $\circ$ форма пересечения. Конечно же, существует бесконечно много канонических базисов. Если зафиксирован некоторый канонический базис, то Γ можно представить как результат попарной склейки сторон $4g$-угольника (на рисунке $g = 2$)

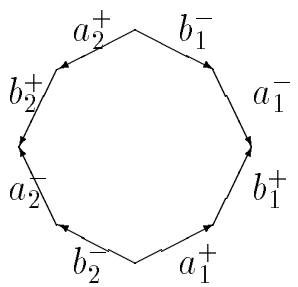

Рис. 3.1

согласно следующему правилу: $a_i^+ \leftrightarrow a_i^-$, $b_i^+ \leftrightarrow b_i^-$. (Все вершины склеиваются в одну точку). Сторонам $a_i^\pm$, $b_i^\pm$ многоугольника отвечают циклы a_i, b_i соответственно.

Важный для нас подкласс римановых поверхностей – гиперэллиптические римановы поверхности, возникающие в конечнозонной теории уравнений Кортевега – де Фриза (КдФ) и Нелинейного уравнения Шредингера (НУШ). Риманова поверхность Γ называется гиперэллипттической если на ней существует мероморфная функция E с парой простых полюсов или одним полюсом второго порядка. Функция E отображает Γ на комплексную плоскость, при этом Γ реализуется как двулистное накрытие над ней и изоморфна либо кривой

$$\text{а)}\quad Y^2 = (E - E_1)\dots(E - E_{2g+2}) \tag{3.2}$$

либо

$$\text{б)}\quad Y^2 = (E - E_1)\dots(E - E_{2g+1}). \tag{3.3}$$

Здесь g – род Γ, E_j – точки ветвления.

Случай а) реализуется в теории НУШ, случай б) – в теории КдФ.

В окрестности конечной точки ветвления E_j в качестве локальной координаты можно использовать величину $z = \sqrt{E - E_j}$. В случае а) в качестве локальной координаты в окрестности обеих бесконечно удаленных точек мы будем брать $z = 1/E$. В случае б) в качестве локальной координаты в бесконечно удаленной точке мы будем брать $z = 1/\lambda$, где $\lambda = \sqrt{-E}$.

Канонический базис на гиперэллиптической кривой с вещественными точками ветвления естественно выбрать следующим образом

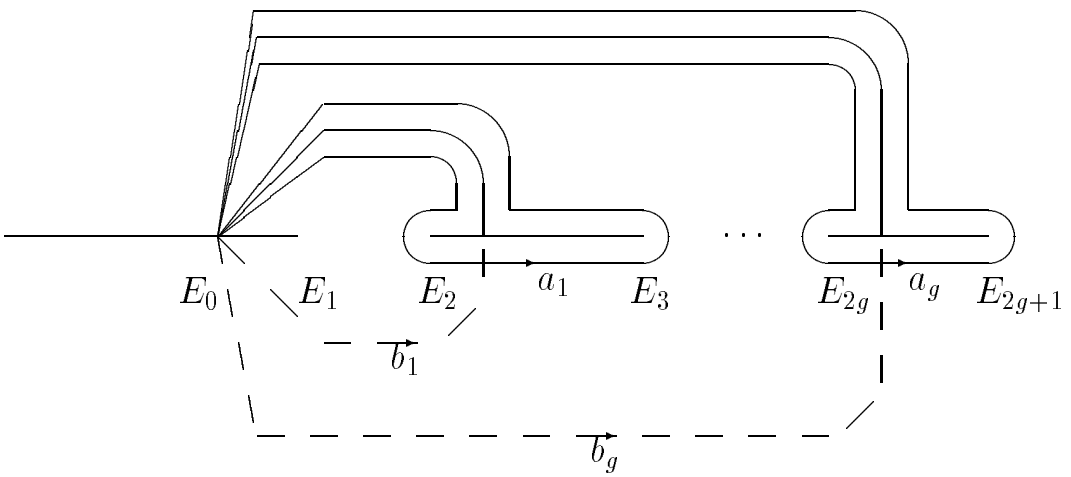

Рис. 3.2

(рисунок отвечает случаю б), разрезы проведены по интервалам $(-\infty, E_1)$, $(E_2, E_3), \ldots, (E_{2g}, E_{2g+1})$, точка E_0 – общая вершина $4g$–угольника. В случае а) разрезы проведем по интервалам (E_1,E_2), $(E_3, E_4), \ldots, (E_{2g+1}, E_{2g+2})$, точку E_0 выберем на интервале (E_1,E_2).

3.2 Дифференциалы на алгебраических кривых.

В дальнейшем нам понадобятся следующие формы на алгебраических кривых.

1. Голоморфные 1-формы (дифференциалы 1 рода). В локальных координатах они представимы в виде $\omega = f(\lambda)d\lambda$, где $f(\lambda)$ – голоморфная функция. Если на кривой Γ зафиксирован канонический базис циклов, то канонический базис голоморфных форм $\omega_1, \ldots, \omega_g$ фиксируется условиями

$$\oint_{a_j} \omega_i = \delta_{ij}. \tag{3.4}$$

Матрица b-периодов (B_{ij})

$$B_{ij} = \oint_{b_j} \omega_i. \tag{3.5}$$

называется матрицей Римана. Из билинейных соотношений Римана легко выводится, что она симметрична ($B_{ij} = B_{ji}$), и ее мнимая часть $\operatorname{Im} B_{ij}$ положительно определена.

Если Γ – гиперэллиптическая кривая с точками ветвления $E_1, \ldots, E_{2g+1}, \infty$ то

$$\omega_k = \frac{\left(\sum_{l=1}^{g} A_{kl} E^{l-1}\right) dE}{\sqrt{-4(E-E_1)\ldots(E-E_{2g+1})}}, \tag{3.6}$$

где константы A_{kl} однозначно находятся из условий (3.4) и выражаются через гиперэллиптические интегралы.

2. Дифференциалы 2 рода – мероморфные 1-формы, все вычеты которых равны 0. Пусть P – некоторая точка Γ с локальной координатой z. Тогда базис дифференциалов 2 рода с единственной особенностью в точке P можно зафиксировать, полагая

$$\Omega_k^P = d\left(\frac{1}{z^k}\right) + \text{регуляные члены}, \tag{3.7}$$

$$\oint_{a_i} \Omega_k^P = 0. \tag{3.8}$$

Важный частный случай – кривые с одной выделенной точкой с локальным параметром $z = 1/\lambda$, возникающие в теории КдФ и КП (в этом случае мы будем обозначать ее ∞, чтобы подчеркнуть, что она отвечает бесконечному значению спектрального параметра. Тогда мы будем опускать индекс P и писать просто Ω_k.

Обозначим $\vec{U}_k$ вектор периодов по b-циклам:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{b_j} \Omega_k = (U_k)_j, \ \vec{U}_k = ((U_k)_1, \ldots, (U_k)_g). \tag{3.9}$$

Из билинейных соотношений Римана (см. (3.27) ниже) следует, что разложение канонических голоморфных дифференциалов в точке ∞ имеет вид

$$\omega_j = -\sum_{k\geq 1} (U_k)_j z^{k-1} dz = \sum_{k\geq 1} (U_k)_j \lambda^{-k-1} d\lambda. \tag{3.10}$$

Коэффициенты разложения Ω_k в точке ∞ обозначим Q_{km}:

$$\Omega_k = d(\lambda^k) + \sum_{m\geq 1} Q_{km}\lambda^{-m-1}d\lambda. \tag{3.11}$$

Из билинейных соотношений Римана следует их сиимметрия:

$$Q_{ij} = Q_{ji}. \tag{3.12}$$

Если кривая Γ гипреэллиптична с ветвлением в точке $E = \infty$, то $\Omega_{2k} = d((-E)^k)$, $(U_{2k})_l = 0$. Отсюда видно,что $Q_{kl} = 0$ если хотя бы один из индексов k, l четен.

В этом случае

$$\Omega_{2n+1} = \frac{\left(-(2n+1)(-E)^{g+n} + \sum_{l=1}^{g} C_{nl}E^{l-1}\right)dE}{\sqrt{-4(E-E_1)\dots(E-E_{2g+1})}}, \tag{3.13}$$

C_{nl} определяются из условия нормировки (3.8) и выражаются через гиперэллиптические интегралы.

3. Дифференциалы 3 рода – Ω^{PQ} – мероморфные 1-формы, с двумя простыми полюсами в точках с P, Q и вычетами +1 в P, -1 в Q. Они однозначно фиксируются условиями:

$$\oint_{a_i} \Omega^{PQ} = 0. \tag{3.14}$$

4. Голоморфные 2-дифференциалы на Γ. В локальных координатах они имеют вид $\omega^{(2)} = \omega^{(2)}(z)(dz)^2$, размерность пространства таких дифференциалов – $3g-3$ при $g > 1$, 1 при $g = 1$ и 0 при $g = 0$. Для кривых общего положения можно выбрать переопределенный базис в виде $\omega^{(2)}_{ij} = \omega_i\omega_j$ где ω_j – стандартные 1-формы. (Для гиперэллиптических кривых этот набор не полон).

5. Прим-форма $E(\gamma, \gamma')$ – (см. [128], т. 2). Она задается следующими свойствами

(a) $E(\gamma,\gamma')$ – голоморфная $-1/2$-форма по переменным $\gamma,\gamma' \in \Gamma$, т.е. в локальных координатах она записывается как

$$E(t,t') = \frac{e(t,t')}{\sqrt{dt}\sqrt{dt'}}. \tag{3.15}$$

(b) $E(\gamma,\gamma') = 0$ если и только если $\gamma = \gamma'$.

(c) $E(\gamma,\gamma')$ антисимметрична по аргументам $E(\gamma',\gamma) = -E(\gamma,\gamma')$.

(d) Вблизи диагонали $\gamma \to \gamma'$: разложение $E(\gamma,\gamma')$ в координате $t(\gamma)$ имеет вид

$$E(\gamma,\gamma') = \frac{(t(\gamma)-t(\gamma'))\{1+O((t(\gamma)-t(\gamma'))^2\}}{\sqrt{dt(\gamma)dt(\gamma')}}. \tag{3.16}$$

(e) $E(\gamma,\gamma')$ многозначна на Γ и при обходах по базисным циклам a_k, b_k преобразуется по следующему закону.

$$E(\gamma+a_k,\gamma') = E(\gamma,\gamma'+a_k) = E(\gamma,\gamma'), \tag{3.17}$$

$$E(\gamma+b_k,\gamma') = \pm E(\gamma,\gamma')\exp(-\pi i B_{kk} + 2\pi i\int_\gamma^{\gamma'} w_k), \tag{3.18}$$

$$E(\gamma,\gamma'+b_k) = \pm E(\gamma,\gamma')\exp(-\pi i B_{kk} - 2\pi i\int_\gamma^{\gamma'} w_k). \tag{3.19}$$

Одно из важных свойств прим-формы – возможность выразить все дифференциалы второго и третьего рода через ее логарифмические производные:

$$d_\gamma d_z \ln E(\gamma,z) = -\sum_1^\infty \Omega_k(\gamma) z^{k-1}dz, \tag{3.20}$$

$$\Omega^{PQ} = d_x \ln\frac{E(x,P)}{E(x,Q)}. \tag{3.21}$$

Если на Γ выбрана отмеченая точка ∞, то разложение прим-формы вблизи нее имеет вид:

$$\ln\frac{E(z,z')}{z-z'} = \sum_{m\ge 2}\frac{Q_{m0}(z^m+(z')^m)}{m} + \sum_{m,n\ge 1}\frac{Q_{mn}z^m(z')^n}{mn},\ Q_{mn}=Q_{nm}, \tag{3.22}$$

где коэффициенты Q_{mn} с $m,n \ge 1$ те же, что и в (3.11).

3.3 Векторные поля на окружности.

Пусть на кривой Γ отмечена точка ∞ с локальным параметром $z = 1/\lambda$. Нам понадобится алгебра векторных полей, голоморфных в проколотой окрестности отмеченной точки с базисом (совпадающая с алгеброй векторных полей на окружности):

$$l_i = \lambda^{i+1}\partial_\lambda, -\infty < i < \infty. \tag{3.23}$$

Коммутатор векторных полей имеет вид:

$$[l_i, l_j] = (j-i)l_{i+j}. \tag{3.24}$$

В гиперэллиптическом случае для нас наиболее важна подалгебра, порожденная элементами с четными индексами:

$$L_i = l_{2i} = 2(-1)^i E^{i+1}\partial_E. \tag{3.25}$$

Эти поля однозначно опускаются на E-плоскость. Как мы увидим ниже, порождаемые этими полями деформации Γ уважают гиперэллиптическую структуру.

Алгебра Вирасоро – центральное расширение алгебры векторных полей на окружности. Коммутатор в ней имеет вид

$$[l_i, l_j] = (j-i)l_{i+j} + \frac{i^3 - i}{6} c\, \delta_{i+j\,0} \cdot 1. \tag{3.26}$$

где 1 – центральный элемент, константа c называется центральным зарядом. (Предполагается, что в неприводимых представлениях центральный элемент реализуется единичным оператором).

3.4 Билинейные соотношения Римана.

Нам понадобятся билинейные соотношения Римана для пары многозначных мероморфных дифференциалов Ω_1, Ω_2 со следующими свойствами:

1. Ω_1, Ω_2 локально однозначны, и, тем самым, не имеют ветвлений.

2. Все вычеты Ω_1, Ω_2 равны 0.

3. $d^{-1}\Delta_{a_k}\Omega_j$, $d^{-1}\Delta_{b_k}\Omega_j$ – однозначные мероморфные функции на Γ без особенностй на циклах (мы будем нормировать их, полагая их равными 0 в точке пересечения циклов всех циклов, отвечающей вершине многоугольника). Здесь Δ_{a_k}, Δ_{b_k} – приращения дифференциалов при обходе по циклам a_k, b_k соответственно, d^{-1} – первообразная дифференциала.

Тогда:

$$2\pi i \sum \operatorname{res}(d^{-1}\Omega_1)\Omega_2 = \sum_j \left\{ \oint_{a_j} \Omega_1 \oint_{b_j} \Omega_2 - \oint_{a_j} \Omega_2 \oint_{b_j} \Omega_1 + \oint_{a_j} (d^{-1}\Delta_{b_j}\Omega_2)\Omega_1 \right\} +$$

$$+ \sum_j \left\{ - \oint_{a_j} (d^{-1}\Delta_{b_j}\Omega_1)\Omega_2 + \oint_{b_j} (d^{-1}\Delta_{a_j}\Omega_1)\Omega_2 - \oint_{b_j} (d^{-1}\Delta_{a_j}\Omega_2)\Omega_1 \right\} + \quad (3.27)$$

$$+ \sum_j \left\{ - \oint_{a_j} (d^{-1}\Delta_{b_j}\Omega_1)(\Delta_{b_j}\Omega_2) - \oint_{b_j} (d^{-1}\Delta_{a_j}\Omega_2)(\Delta_{a_j}\Omega_1) \right\}.$$

Свойство 2 обеспечивает корректность определения правой части (3.27), – свойство 3 – левой. Доказательство (3.27) получается почти дословным повторением доказательства стандартных билинейных соотношений Римана из книги [68].

Замечание. Поскольку вычеты Ω_1, Ω_2 равны 0, то имеет место соотношение:

$$\sum \operatorname{res}(d^{-1}\Omega_1)\Omega_2 = -\sum \operatorname{res}(d^{-1}\Omega_2)\Omega_1 \quad (3.28)$$

3.5 Отображение Абеля.

Пусть Γ – некоторая алгебраическая кривая с фиксированным каноническим базисом циклов $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$ и отмеченной точкой γ_0; $\omega_1, \ldots, \omega_g$ – соответствущий канонический базис голоморфных форм.

Отображением Абеля $\vec{A}(\gamma)$ называется многозначное отображение $\Gamma \to C^g$, задаваемое формулой

$$(\vec{A}(\gamma))_k = \int_{\gamma_0}^{\gamma} \omega_k, \quad k = 1, \ldots, g. \tag{3.29}$$

Для дивизора $D = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ отображение Абеля задается формулой

$$\vec{A}(D) = \vec{A}(\gamma_1) + \ldots + \vec{A}(\gamma_n) \tag{3.30}$$

3.6 Тета-функция Римана.

Пусть B_{kj} произвольная комплексная симметричная $g \times g$ матрица такая, что $\operatorname{Im} B_{kj}$ положительно определена, $\vec{z}$ – произвольный комплексный g-компонентный вектор. Тета-функция Римана без характеристик определяется как сумма следующего ряда, (см. например, [128], [25], [89]):

$$\theta(\vec{z}|B_{kj}) = \sum_{m_1,\ldots,m_g} \exp\left\{\pi i \sum_{kj} B_{kj} m_k m_j + 2\pi i \sum_k z_k m_k\right\}, \tag{3.31}$$

где целые числа m_l, $l = 1, \ldots, g$ пробегают все значения от $-\infty$ до ∞. (Наше определение тета-функции совпадает с определением книги [128], определяемая в [25], [89] тета-функция отличается на множитель $2\pi i$ в обоих аргументах).

Ряд (3.31) сходится при всех $\vec{z} \in \mathbb{C}^g$. Одно из важнейших свойств тета-функции Римана — следующее свойство периодичности:

$$\theta(z_1, z_2, \ldots, z_l + 1, \ldots, z_g|B_{kj}) = \theta(z_1, z_2, \ldots, z_l, \ldots, z_g|B_{kj}). \tag{3.32}$$

$$\theta(z_1+B_{1l}, z_2+B_{2l}, \ldots, z_g+B_{gl}|B_{kj}) = \theta(z_1, z_2, \ldots, z_g|B_{kj})\exp\{-\pi i B_{ll} - 2\pi i z_l\}. \tag{3.33}$$

Наболее важен случай, когда B_{kj} – матрица периодов алгебраичекой кривой (элементарный подсчет размерностей показывает, что для матрицы B_{kj} общего положения это не так). В этой ситуации нули тета-функции допускают следующее геометрическое описание (см. например, [25]):

Лемма 3.1 *Пусть* Γ *– некоторая алгебраическая кривая с фиксированным каноническим базисом циклов, отмеченной точкой* γ_0 *и матрицей периодов* B_{kj}, $\vec{A}(\gamma)$ *обозначает отображение Абеля точки* γ *(3.29).*

Тогда сущесвует g*-мерный комплексный вектор* $\vec{K} = \vec{K}(\Gamma, \gamma_0)$ *такой, что при всех* $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$, *функция*

$$\varphi(\gamma) = \theta(\vec{A}(\gamma) - \vec{A}(\gamma_1) - \ldots - \vec{A}(\gamma_g) - \vec{K}|B_{kj}), \ \gamma \in \Gamma. \tag{3.34}$$

1. *либо тождественно равна 0 по* γ,

2. *либо имеет ровно* g *нулей по* γ *в точках* $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$.

$\vec{K}$ *называется вектором римановых констант.*

Тета-функцию с характеристиками $\vec{a}, \vec{b}$ можно определить следующим образом:

$$\theta \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{bmatrix} (\vec{z}|B_{kj}) = \exp\left\{ \pi i \sum_{kj} B_{kj} a_k a_j + 2\pi i \sum_k a_k \cdot (z_k + b_k) \right\} \theta(\vec{z} + B\vec{a} + \vec{b}|B_{kj}) \tag{3.35}$$

4 Уравнение Кортевега – де Фриза. Конечнозонные решения.

Уравнение Кортевега – де Фриза (КдФ) – исторически первое уравнение в частных производных, проинтегрированное методом обратной задачи теории рассеяния. Его можно получить из уравнения КП, предполагая, что решения не зависят от переменной y.

В нашей работе мы будем работать с уравнением КдФ в следующей нормировке:

$$u_t = \frac{1}{4} u_{xxx} - \frac{3}{2} u u_x. \tag{4.1}$$

Представление Лакса для КдФ (см. [123]) имеет вид:

$$\partial L/\partial t = [L, A], \tag{4.2}$$

где

$$L = -\partial_x^2 + u(x,t),\ A = \partial_x^3 - \frac{3}{4}(u(x,t)\partial_x + \partial_x u(x,t)) \tag{4.3}$$

обыкновенные дифференциальные операторы по x, зависящие от параметра t.

Уравнение КдФ обладает бесконечным набором попарно коммутирующих между собой симметрий, описываемых так называемыми высшими уравнениями КдФ.

Высшие уравнения КдФ имеют следующее представление Лакса:

$$\partial L/\partial_{t_{2n+1}} = [L, A_{2n+1}], \tag{4.4}$$

где

$$A_{2n+1} = \{(-L)^{\frac{2n+1}{2}}\}_+, \tag{4.5}$$

$(-L)^{\frac{2n+1}{2}}$ – формальный псевдодифференциальный оператор вида

$$(-L)^{\frac{2n+1}{2}} = \sum_{k=-\infty}^{2n+1} w_k(x,t)\partial_x^k, \tag{4.6}$$

$\{\ \}_+$ обозначает дифференциальную часть:

$$\left\{(-L)^{\frac{2n+1}{2}}\right\}_+ = \sum_{k=0}^{2n+1} w_k(x,t).\partial_x^k \tag{4.7}$$

Для унификации обозначений в теории КдФ и КП времена, отвечающие высшим уравнения КдФ нумеруются нечетными индексами. В частности, $t_1 = x$, $t_3 = t$ (время, отвечающее обычному КП) .

Важное свойство уравнений (4.1) , (4.4), вытекающее из представления Лакса — независимость спектра оператора L от всех времен t_3, t_5, ..., t_{2k+1}, ... (фактически именно это свойство лежит в основе метода обратной задачи). На самом деле, алгебра симметрий КдФ не ограничивается высшими КдФ и, в частности, содержит симметрии, не сохраняющие спектр L (мы обсудим их в Главе 3).

Другая конструкция высших уравнений КдФ использует так называемый рекурсионный оператор

$$\Lambda = -\partial_x^2 + 2\partial_x^{-1} u \partial_x + 2u \tag{4.8}$$

Уравнения (4.4) записываются в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t_{2n+1}} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{\Lambda}{4}\right)^n u = -2\frac{d}{dx}\left(-\frac{\Lambda}{4}\right)^{n+1} \cdot 1, \tag{4.9}$$

Напомним необходимые нам факты из периодической теории КдФ (более подробное изложение содержится, например в [35]). Опишем сперва прямое спектральное преобразование для опреаратора L. Пусть $u(x,t)$ – периодическая по x с периодом Π гладкая вещественная функция

$$u(x+\Pi, t) = u(x,t). \tag{4.10}$$

Для построения полного набора спектральных данных одновременно рассматриваются две спектральные задачи для оператора L:

1. Спектральная задача в пространстве $L^2(\mathbb{R})$: E – точка непрерывного спектра (дискретный спектр у этой задачи отсутствует) если существует хотя бы одно ограниченное по x на всей прямой решение уравнения $L\psi = E\psi$.

2. Задача Дирихле на периоде: $L\psi_a = E\psi_a,\ \psi_a(0) = \psi_a(\Pi) = 0$.

Спектр первой задачи состоит из набора отрезков $[E_1, E_2],\ [E_3, E_4]$, $\ldots, [E_{2n-1}, E_{2n}], \ldots$, где $E_1 < E_2 \le E_3 < E_4 \le E_5 \ldots$, $E_{2n+1} - E_{2n} \to 0$ при $n \to \infty$ (более детально его устройство мы обсудим в разделе 3.3).

Спектр задачи Дирихле состоит из бесконечного набора точек $d_1 < d_2 < d_3 < \ldots$ расположенных в лакунах первой задачи $d_1 \in [E_2, E_3],\ d_2 \in [E_4, E_5],\ d_3 \in [E_6, E_7], \ldots$.

Блоховской функцией называется совместная собственная функция оператора L и оператора сдвига на период:

$$L\psi(x,E) = E\psi(x,E), \tag{4.11}$$

$$\psi(x+\Pi,E) = e^{i\Pi p(E)}\psi(x,E). \tag{4.12}$$

При этом мы будем пользоваться стандартной нормировкой

$$\psi(0,E) = 1. \tag{4.13}$$

Нормированная таким образом блоховская функция оказывается мероморфной функцией по спектральному параметру на гиперэллиптической римановой поверхности Γ, двулистно накрывающей E-плоскость, точки ветвления которой – концы зон спектра E_1, E_2,..., и точка $E=\infty$. Над каждой лакуной расположен ровно один простой полюс блоховской функции γ_n, причем проекция γ_n, на E-плоскость совпадает с соответствующей точкой спектра задачи Дирихле d_n.

Функция $p(E_\pm)$ также определена на Γ и называется квазиимпульсом.

Для потенциалов общего положения число лакун $[E_{2k}, E_{2k+1}]$ ненулевой длины бесконечно. Однако наиболее важным при интегрировании КдФ (как и большинства других солитонных уравнений) является класс конечнозонных потенциалов – таких, что число лакун для них конечно: $E_{2n} = E_{2n+1}$ при всех $n > g$. (Бесконечнозонное интегрирование также обсуждалось в литературе [130], однако эффективность получаемых таким образом формул значительно ниже).

Обратная задача ставится следующим образом. Пусть заданы следующие "спектральные данные":

1. $2g+1$ вещественное число E_1, E_2, ..., E_{2g+1}, $E_1 < E_2 < \ldots < E_{2g+1}$, которые будут концами зон в спектре.

2. g точек γ_1, ..., γ_g на гиперэллиптической римановой поверхности Γ, двулистно накрывающей E- плоскость с точками ветвления ∞, E_1, E_2, ..., E_{2g+1}, выбранных так чтобы проекция $\gamma_к$ на E- плоскость $E(\gamma_k)$ лежала в k-ой лакуне: $E(\gamma_k) \in [E_{2k}, E_{2k+1}]$.

По этим данным однозначно строится неособый вещественный потенциал $u(x)$.

Потоки (4.1), (4.4) оставляют на месте точки ветвления E_k и сдвигают дивизор γ_k. Эволюция дивизора γ_k описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, называемыми уравнениями Дубровина. Эти уравнения линеаризуются отображением Абеля (см. раздел 3):

$$\vec{A}(\gamma_1) + \vec{A}(\gamma_2) + \ldots + \vec{A}(\gamma_g) = \vec{A}_0 + x\vec{U}_1 + t\vec{U}_3 + t_5\vec{U}_5 + \ldots, \qquad (4.14)$$

где $\vec{A}_0$ начальная фаза, $\vec{U}_k$ – векторы b-периодов дифференциалов второго рода, задаваемые (3.13).

Обратить преобразование Абеля можно используя тета-функцию Римана (см. раздел 3). Окончательный ответ дается формулой А.Р.Итса-В.Б.Матвеева (см., например [35]):

$$u(x, t_3, t_5, \ldots) = -2\partial_x^2 \ln\theta(\vec{U}_0 + x\vec{U}_1 + t\vec{U}_3 + t_5\vec{U}_5 + \ldots | B_{ij}) + C(\Gamma), \quad (4.15)$$

где $C(\Gamma)$ –некоторая константа, B_{ij} – матрица периодов поверхности Γ

$$\vec{U}_0 = -\vec{A}(\gamma_1(\vec{0})) - \ldots - \vec{A}(\gamma_g(\vec{0})) - \vec{K}, \qquad (4.16)$$

$\vec{K}$-вектор римановых констант.

Построенные таким образом решения, как правило, квазипериодичны по всем переменным, включая x. Задача описания поверхностей, отвечающих периодических по x решениям была исследована В.А.Марченко и И.В.Островским. Другой подход, предложенный Мартином Шмидтом и автором обсуждается в разделе 16.

Во многих случаях более удобным оказывается пользоваться другой нормировкой волновой функции, при которой дивизор $\gamma_1,\ldots,\ \gamma_g$ неподвижен а динамика по временам t_{2j+1} “включена” в существенную особенность.

Пусть $\Psi(\gamma,\vec{t})$, – функция переменной $\gamma\in\Gamma$, и бесконечномерного вещественного вектора $\vec{t}=(t_1,t_3,t_5,\ldots)$, $t_1=x$, $t_3=t$ такая, что

1. $L\Psi(\gamma,\vec{t})=E(\gamma)\Psi(\gamma,\vec{t})$.
2. $\Psi(\gamma,x+\Pi,t_3,t_5,\ldots)=e^{i\Pi p(\gamma)}\Psi(\gamma,x,t_3,t_5,\ldots)$.
3. $\Psi(\gamma,0,0,0,\ldots)=1$.
4. $(\partial_{t_{2n+1}}-A_{2n+1})\Psi(\gamma,\vec{t})=0$.

(Симметрии (4.4) попарно коммутируют, поэтому набор условий 4 самосогласован).

$\Psi(\gamma,\vec{t})$ называется функцией Бейкера-Ахиезера. Ее важнейшие свойства таковы:

1. $\Psi(\gamma,\vec{t})$ мероморфна по γ на $\Gamma\backslash\infty$.
2. $\Psi(\gamma,\vec{t})$ не имеет других особенностей по γ кроме простых полюсов в точках $\gamma_1,\ldots,\gamma_g$ и существенной особенности в точке ∞.
3. При $\gamma\to\infty$

$$\Psi(\gamma,\vec{t})=e^{\lambda x+\lambda^3 t+\lambda^5 t_5+\ldots}[1+\chi_{-1}(\vec{t})/\lambda+\chi_{-2}(\vec{t})/\lambda^2+\ldots]. \qquad (4.17)$$

где $\lambda=\lambda(\gamma)=\sqrt{-E(\gamma)}$

Перечисленные свойства однозначно определяют $\Psi(\gamma,\vec{t})$. Приведем для справки явную фомулу для нее (см, например [25]):

$$\Psi(\gamma,\vec{t})=$$

$$=\frac{\theta(\sum t_k\vec{U}_k+\vec{A}(\gamma)-\vec{A}(\gamma_1)-\ldots-\vec{A}(\gamma_g)-\vec{K})\theta(-\vec{A}(\gamma_1)-\ldots-\vec{A}(\gamma_g)-\vec{K})}{\theta(\sum t_k\vec{U}_k-\vec{A}(\gamma_1)-\ldots-\vec{A}(\gamma_g)-\vec{K})\theta(\vec{A}(\gamma)-\vec{A}(\gamma_1)-\ldots-\vec{A}(\gamma_g)-\vec{K})}\cdot \qquad (4.18)$$

$$\cdot e^{\sum t_k\int^\gamma\Omega_k}.$$

Здесь $\vec{K}$ – вектор констант Римана, константы интегрирования для интегралов в экспоненте фиксированы условием $\int^{\gamma} \Omega_k = \lambda^k + o(1)$.

Формула (4.15) легко получается сопоставлением (4.18) с формулой, выражающей потенциал $u(\vec{t})$ через разложение $\Psi(\gamma, \vec{t})$ в ∞

$$u(\vec{t}) = 2\partial_x \chi_{-1}(\vec{t}). \tag{4.19}$$

5 Конечнозонные решения уравнения Кадомцева-Петвиашвили. Высшие уравнения КП.

Конструкция алгебро-геометрических (конечнозонных) решений уравнения Кадомцева-Петвиашвили была предложена И.М.Кричевером в работе [42]. Она состоит в следующем.

Пусть Γ – неособая алгебраическая кривая рода g с отмеченной точкой ∞, фиксированным локальным параметром $w = 1/\lambda$ в ее окрестности, и на Γ задан дивизор $\gamma_1, ..., \gamma_g$ общего положения. Тогда при почти всех x, y, t существует единственная функция $\Psi(\lambda, x, y, t)$, определенная на Γ такая, что:

1) $\Psi(\gamma, x, y, t)$ мероморфна по λ на $\Gamma \backslash \infty$.

2) $\Psi(\gamma, x, y, t)$ не имеет других особенностей, кроме простых полюсов в точках $\gamma_1, ..., \gamma_g$ и существенной особенности в ∞.

3) При $\gamma \to \infty$ $\Psi(\gamma, x, y, t)$ имеет следующую асимптотику:

$$\Psi(\gamma, x, y, t) = e^{\lambda x + \lambda^2 y + 4\lambda^3 t}(1 + o(1)).$$

Функция $\Psi(\gamma, x, y, t)$ называется функцией Бейкера-Ахиезера. Так

же, как и для КдФ, она явно выражается через θ-функции:

$$\Psi(\gamma,\vec{t}) =$$

$$= \frac{\theta(\sum t_k\vec{U}_k + \vec{A}(\gamma) - \vec{A}(\gamma_1) - \ldots - \vec{A}(\gamma_g) - \vec{K})\theta(-\vec{A}(\gamma_1) - \ldots - \vec{A}(\gamma_g) - \vec{K})}{\theta(\sum t_k\vec{U}_k - \vec{A}(\gamma_1) - \ldots - \vec{A}(\gamma_g) - \vec{K})\theta(\vec{A}(\gamma) - \vec{A}(\gamma_1) - \ldots - \vec{A}(\gamma_g) - \vec{K})} \cdot \tag{5.1}$$

$$\cdot e^{\sum t_k \int^\gamma \Omega_k}.$$

Действуя точно так же, как и в быстроубывающем на бесконечности случае, проверяем, что $\Psi(\gamma, x, y, t)$ нулевая собственная функция операторов

$$L\Psi(\gamma, x, y, t) = A\Psi(\lambda, x, y, t) = 0,$$

где

$$L = -\partial_x^2 + u(x, y, t),$$

$$A = \partial_t - 4\partial_x^3 + 6u(x, y, t)\partial_x + 3u_x(x, y, t) + 3w(x, y, t),$$

т.е. $u(x, y, t)$ – решение уравнения КП2.

Так же, как и для КдФ, оно дается формулой В.Б.Матвеева-А.Р.Итса

$$u(x, y, t) = -2\partial_x^2 \log 6(x\vec{U}_1 + y\vec{U}_2 + 4t\vec{U}_3 - \vec{A}(\gamma_1) - ... - \vec{A}(\gamma_g) + \vec{K}) + c(\Gamma).$$

Для того, чтобы получить решения КП1, достаточно сделать подстановку $y = i\tilde{y}$.

Естественно поставить задачу о выделении вещественных неособых решений. Эта задача была решена Б.А.Дубровиным и С.М.Натанзоном [29]. Полученные в [29] условия вещественности и потенциальности состоят из двух частей – условия на кривую Γ и условия на дивизор. Сформулируем сначала условия на кривую.

Если потенциал $u(x, y, t)$ – веществен и несингулярен, то:

1) На Γ действует антиголоморфная инволюция τ такая, что $\tau(\infty) = \infty$,

$$\tau(k) = -\bar{k} \text{ для КП1}$$

$$\tau(k) = \bar{k} \text{ для КП2}$$

2) τ – антиинволюция разделяющего типа, т.е. ее неподвижные точки (вещественные овалы) разделяют Γ на две связные компоненты.

3) В случае КП2 Γ, кроме того, должна быть M-кривой, т.е. число ее овалов равно $g + 1$, где g – род кривой. Как известно, это максимальное число овалов.

Сформулируем теперь условия на дивизор.

1) Существует мероморфная 2-форма с единственным полюсом 2 порядка на ∞ такая, что ее дивизор полюсов совпадает с $\gamma_1, ..., \gamma_g$ $\tau(\gamma_1), ..., \tau(\gamma_g)$. Тогда соответствующие решения КП1 вещественны и неособы.

2) Пусть на каждом вещественном овале M-кривой Γ, кроме того, который содержит точку ∞, лежит ровно по одной точке дивизора $\gamma_1, ..., \gamma_g$. Тогда соответствующие решения КП2 вещественны и неособы.

В дальнейшем мы будем работать с конечнозонными решениями КП2, поэтому докажем достаточность последнего условия.

Действительно, пусть Γ – M-кривая, $\tau(k) = \bar{k}$, и все полюса лежат на овалах. Тогда аналитические свойства $\Psi(\gamma, x, y, t)$ и $\bar{\Psi}(\tau(\gamma), x, y, t)$ совпадают, следовательно, $\Psi(\gamma, x, y, t) = \bar{\Psi}(\tau(\gamma), x, y, t)$, т.е. $L = \bar{L}$, $u(x, y, t) = \bar{u}(x, y, t)$.

Проверим несингулярность потенциала. Как известно, особенности потенциала возникают тогда, когда один из нулей $\Psi(\gamma, x, y, t)$ попадает в точку ∞. Однако в начальный момент времени $x = y = t = 0$ нули

совпадают с полюсами $\gamma_1, ..., \gamma_g$ и на каждом овале лежит ровно по одному нулю. При всех x, y, t расположение нулей инвариантно относительно τ, поэтому ноль может сойти с овала, только столкнувшись с другим, однако на каждом из овалов ровно по одному нулю, следовательно, это невозможно.

До сих пор мы говорили только об уравнении КП. Однако, как хорошо известно, уравнение КП – лишь первый член бесконечной иерархии коммутирующих потоков. Чтобы не загромождать наши формулы нормировочными константами, сделаем замену переменных $t_3 = 4t$.

Высшие уравнения КП можно определить следующим образом. Пусть волновая функция $\Psi(\gamma, \vec{t})$ зависит от бесконечного набора времен $\vec{t} = (t_1, t_2, \ldots)$, где $t_1 = x$, $t_2 = y$, $t_3 = t/4$, мероморфна по γ на поверхности Γ вне точки ∞ с g простыми полюсами $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ и имеет существенную особенность вида:

$$\Psi(\gamma, \vec{t}) = e^{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k t_k}(1 + O(1/\lambda)) \tag{5.2}$$

в точке ∞. Тогда функция $\Psi(\gamma, \vec{t})$ – собственная функция бесконечного набора дифференциальных операторов

$$A_j = \partial_{t_j} - \partial_x^j + \sum_{k=0}^{j-1} a_{jk}(\vec{t})\partial_x^k$$

$$A_j \Psi(\gamma, \vec{t}) = 0.$$

Коммутатор $[L, A_j]$ – обыкновенный дифференциальный оператор, аннулирующий при всех λ волновую функцию $\Psi(\gamma, \vec{t})$, поэтому $[L, A_j] = 0$ при всех j. Коэффициенты асимптотического разложения волновой функции рекуррентно вычисляются через потенциал $u(x, y)$ (в нелокальной форме), следовательно все коэффициенты операторов A_j можно считать нелокальными функционалами от $u(x, y)$ и, следовательно, условие коммутации

$$[L, A_j] = 0$$

дает нам эволюционное уравнение на $u(x,y)$, называемое j-ым высшим уравнением КП. По построению видно, что эти потоки попарно коммутируют.

В классе быстроубывающих на бесконечности потенциалов (мы рассматриваем случай уравнения КП2) динамика "данных рассеяния" $T(\lambda)$ имеет вид

$$T(\lambda,\vec{t}) = e^{\sum_{j=3}^{\infty}(\bar{\lambda}^j-\lambda^j)t_j}T(\lambda). \tag{5.3}$$

(Мы включили динамику по x, y в асимптотику волновой функции, поэтому суммирование начинается с $j=3$). Другое представление для высших уравнений КП мы обсудим в разделе 14.

6 Двумерные операторы Шредингера, "конечнозонные при одной энергии". Уравнения Веселова-Новикова.

Конструкция "конечнозонных при одной энергии" двумерных операторов Шредингера, была предложена Б.А.Дубровиным, И.М.Кричевером и С.П.Новиковым [27]. Она состоит в следующем.

Пусть Γ – неособая алгебраическая кривая рода g с парой отмеченных точек ∞_1, ∞_2 , локальными параметрами w_1 и w_2 в точках ∞_1 и ∞_2 соответственно и на Γ выбран набор точек $\gamma_1,\dots,\gamma_g$ общего положения.

Тогда по этим данным однозначно строится функция $\Psi(\lambda,x,y)$, определенная при почти всех $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ и обладающая следующими аналитическими свойствами по переменной λ:

1) $\Psi(\lambda,x,y)$ мероморфна по λ на Γ вне точек ∞_1, ∞_2.

2) $\Psi(\lambda,x,y)$ не имеет других особенностей, кроме простых полюсов в точках γ_k и существенных особенностей в ∞_1, ∞_2.

3) В окрестности точек ∞_1, ∞_2 $\Psi(\lambda, x, y)$ имеет следующую асимптотику:

$$\Psi(\lambda, x, y) = e^{k_1 \bar{z}}(1 + o(1)) \qquad \text{при } \lambda \to \infty_1,$$
$$\Psi(\lambda, x, y) = e^{k_2 z}(c(z) + o(1)) \qquad \text{при } \lambda \to \infty_2. \tag{6.1}$$

Здесь

$$k_1 = k_1(\lambda) = 1/w_1(\lambda), \quad k_2 = k_2(\lambda) = 1/w_2(\lambda), \quad z = x+iy, \ \ \bar{z} = x-iy,$$
$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y), \qquad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y),$$

$c(z)$ – некоторая, заранее не известная функция x, y. В этом параграфе, как и в остальном тексте, мы используем следующее соглашение: обозначение $c(z)$ не влечет за собой голоморфности c по z $\frac{\partial c(z)}{\partial \bar{z}} \neq 0$, если обратное явно не оговорено.

Несложно проверяется, что $\Psi(\lambda, z)$ – собственная функция оператора вида

$$L = -4\partial_z \partial_{\bar{z}} + V(z)\partial_z + u(z)$$

Действительно, пусть

$$V(z) = 4\partial_{\bar{z}} \ln c(z)$$
$$u(z) = 4\partial_z \chi_{-1}(z),$$

где $\chi_{-1}(z)$ – первый коэффициент разложения $\Psi(\lambda, z)$ вблизи точки ∞_1:

$$\Psi(\lambda, z) = e^{k_1 z}\left(1 + \frac{\chi_{-1}(z)}{k_1} + \frac{\chi_{-1}(z)}{k_1} + \dots\right)$$

Пусть $\Phi(\lambda, z) = L\Psi(\lambda, z)$. Легко видеть, что функция $\Phi(\lambda, z) + \Psi(\lambda, z)$ удовлетворяет условиям 1)-3) и, тем самым, по свойству единственности, $\Phi(\lambda, z) = 0$, т.е.

$$L\Psi(\lambda, z) = 0$$

Получающийся при этом оператор содержит дополнительный член $V(z)\partial_z$ (магнитное поле), потенциал $u(z)$ комплексен и может иметь особенности.

Естественно поставить следующие задачи:

1) Какие "данные рассеяния" отвечают чисто потенциальным операторам, т.е. операторам L таким, что $V(z) \equiv 0$ (нет магнитного поля).

2) Пусть условия потенциальности для L уже выполнены. Какие дополнительные ограничения нужно наложить на "данные рассеяния", чтобы гарантировать вещественность функции $u(z)$.

3) Пусть выполнены условия потенциальности и вещественности. Как отобрать "данные рассеяния", отвечающие неособым (гладким) потенциалам.

Как правило, вещественость конечнозонных потенциалов влечет за собой наличие дополнительных условий на спектральную кривую [79]. Для конечнозоных двумерных операторов Шредингера первые две задачи были решены А.П.Веселовым и С.П.Новиковым [7], [8]. В этих же работах были найдены примеры данных рассеяния, отвечающих неособым потенциалам. Полное решение задачи 3 было получено С.М.Натанзоном в [57], [58], [133], однако найденный им ответ достаточно сложен и мы не будем обсуждать его в данной работе.

Напомним найденные в [7], [8] условия потенциальности и вещественности.

1) Пусть на кривой Γ действует голоморфная инволюция σ такая, что

$$\sigma(\infty_1) = \infty_1, \quad \sigma(\infty_2) = \infty_2, \quad \sigma(w_1) = -w_1, \quad \sigma(w_2) = -w_2,$$

и на дивизор $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ наложено следующее ограничение: существует мероморфная 1-форма Ω_1 на Γ с простыми полюсами в точках

∞_1, ∞_2 (без ограничения общности можно считать вычеты в этих точках равными 1 и -1 соответственно), нули которой – в окрестности точки $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$, $\sigma(\gamma_1), \ldots, \sigma(\gamma_g)$.

Тогда оператор L потенциален.

Докажем это. Рассмотрим форму

$$\Omega(\lambda, z) = \Psi(\lambda, z)\Psi(\sigma(\lambda), z)\Omega_1(\lambda).$$

Форма $\Omega(\lambda, z)$ голоморфна по λ вне точек ∞_1, ∞_2, поскольку полюса $\Psi(\lambda, z)\Psi(\sigma(\lambda), z)$ сокращаются с ее нулями. Экспоненты в $\Psi(\lambda, z)$ и $\Psi(\sigma(\lambda), z)$ сокращают друг друга и вычеты $\Omega(\lambda, z)$ в точках ∞_1, ∞_2 равны 1 и $-c^2(z)$ соответственно. Поскольку сумма вычетов $\Omega(\lambda, z)$ равна 0, то $c^2(z) = 1$, т.е. $c(z) = \pm 1$ и не зависит от z, т.е. $V(z) \equiv 0$.

2) Пусть в дополнение к σ на кривой Γ действует антиголоморфная инволюция τ такая, что

$$\tau(\infty_1) = \infty_2, \;\; \tau(\infty_2) = \infty_1, \;\; \tau(w_1) = \bar{w}_2, \;\; \tau(D) = D,$$

где D – дивизор $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$.

Тогда соответствующий потенциал $u(z)$ вещественен.

Действительно, рассмотрим функцию $\bar{\Psi}(\tau(\lambda), z)$. Ее аналитические свойства совпадают со свойствами $\Psi(\lambda, z)$, поэтому $\bar{\Psi}(\tau(\lambda), z) = \pm\Psi(\lambda, z)$, откуда следует вещественность L.

Явное выражение для потенциала $u(z)$ имеет вид:

$$u_1(z) = -8\partial_z\partial_{\bar{z}} \ln \theta(uz + \bar{u}\bar{z} + \xi_0(D)) + \epsilon_0(\Gamma, \sigma), \tag{6.2}$$

где θ – функция Прима без характеристик (подробности см. в работах [7], [8]). Наиболее удобные формулы для $u(z)$ получены И.А.Таймановым [69], дальнейшее развитие см. [70].

Отметим, что по тем же "данным рассеяния" можно построить второй вещественный потенциал (И.А.Тайманов [69], С.М.Натанзон [57]). Действительно, вместо τ в качестве антиголоморфной инволюции можно взять антиголоморфную инволюцию $\sigma\tau$ и выбрать новый дивизор D' так, что $\xi_0(D') = i\xi_0(D)$. Тогда потенциал

$$u_2(z) = -8\partial_z\partial_{\bar{z}} \ln \theta(uz - \bar{u}\bar{z} + i\xi_0(D)) + \epsilon_0(\Gamma, \sigma)$$

также будет вещественным.

В дальнейшем нам понадобится важный частный случай, отвечающий следующей геометрии Γ.

Теорема 6.1 *Пусть* $\Gamma - \mathrm{M}$ - *кривая относительно* τ , *т.е.* τ *имеет максимально возможное число овалов* – $g+1 = 2h+1$: $a_1 ... a_g, b$. *Пусть инволюция* σ *переводит овал* b *в себя и переставляет друг с другом овалы* $a_j, a_{j+h}, j = 1, ..., h$.

Пусть, кроме того, на каждом овале a_j *лежит ровно одна точка* γ_j *дивизора* D.

Тогда получающийся при этом потенциал $u(z)$ *несингулярен и оператор* L *строго положителен.*

Эта теорема была доказана в работах [7], [8]. Доказательство несингулярности состоит в следующем. Рассмотрим z-динамику нулей по λ функции $\Psi(\lambda, z)$. При $z = 0$ нули $\Psi(\lambda, z)$ совпадают с дивизором $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ и расположены инвариантно относительно τ. Тем самым, при всех z нули $\Psi(\lambda, z)$ "вынуждены" оставаться каждый на своем овале a_j. Однако, как известно, особенности $u(z)$ возникают, если один из нулей попадает в одну из точек ∞_1, ∞_2, и, тем самым, потенциал $u(z)$ не имеет особенностей.

Положительность L была доказана в [7], [8] неявно с использованием связности данного семейства при фиксированном g, и, тем самым, возможности сведения $u(z)$ к сумме двух конечнозонных потенциалов

$u(z) = u_1(x) + u_2(y)$, для которых положительность уже легко проверяется. Прямое доказательство будет дано в разделе 8 Главы 2. Оно основано на следующем свойстве $\Psi(\lambda, z)$. Если точка λ лежит на овале b, то функция $\Psi(\lambda, z)$ при всех z либо чисто вещественная, либо чисто мнимая, и при этом не имеет нулей. Вещественость следует из соотношения $\bar{\Psi}(\tau(\lambda), z) = \pm\Psi(\lambda, z)$, а поскольку при всех z нули $\Psi(\lambda, z)$ лежат на a-овалах, то на b-овале их нет.

В работе [8] была построена бесконечная иерархия интегрируемых уравнений (уравнений Веселова-Новикова), связанная с задачей рассеяния для L при фиксированной (в нашем случае нулевой) энергии. Эти уравнения естественно записываются в терминах $L - A - B$ троек Манакова [54]:

$$\frac{\partial L}{\partial t_n} = [A_n, L] + B_n L, \tag{6.3}$$

где

$$A_n = 2^{2n+1}(\partial_z^{2n+1} + \partial_{\bar{z}}^{2n+1}) + ...,$$

порядок B_n меньше $2n + 1$.

В частности, при $n = 1$

$$A_1 = 8(\partial_z^3 + \partial_{\bar{z}}^3) + 2(w(z,t)\partial_z + \bar{w}\partial_{\bar{z}}),$$

$$B_1 = w_z + \bar{w}_{\bar{z}},$$

и уравнения имеют вид:

$$u_t = 8\partial_z^3 u + 8\partial_{\bar{z}}^3 u + 2\partial_{\bar{z}}(uw) + 2\partial_z(u\bar{w}), \tag{6.4}$$

где

$$u(z) = \bar{u}(z), \qquad \partial_z w(z) = -3\partial_{\bar{z}} u(z),$$

(как и везде, в этой работе мы опускаем в формулах зависимость от $\bar{z}$, не предполагая при этом голоморфности.)

Наличие члена с B_n в (6.3) связано с тем, что операторы $\partial_t - A_n$ и L коммутируют лишь на нулевых собственных функциях L, поэтому их коммутатор уже не ноль, а лишь элемент идеала, порожденного L.

Для построения конечнозонных решений уравнений Веселова-Новикова мы заменяем асимптотику (6.1) на

$$\Psi(\lambda, z) = e^{k_1 \bar{z} + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{(2j+1)} k_1^{(2j+1)} t_j} (1 + o(1)) \quad \text{при } \lambda \to \infty_1.$$

$$\Psi(\lambda, z) = e^{k_2 z + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{(2j+1)} k_2^{(2j+1)} t_j} (c(z, t_1, ...) + o(1)) \quad \text{при } \lambda \to \infty_2.$$

(На самом деле уравнения Веселова-Новикова уважают условия потенциальности, и, поэтому, $c(z, t_1, ...) \equiv 1$). Эти решения явно выражаются через θ-функции Прима.

Другие функциональные классы решений уравнений Веселова-Новикова мы обсудим в Главе 2.

Глава II

Преобразование рассеяния для двумерного оператора Шредингера при одной энергии и параболического оператора.

7 Преобразование рассеяния при фиксированной положительной энергии для двумерного оператора Шредингера с убывающим на бесконечности потенциалом.

Основные результаты данного раздела были получены автором совместно с С.В.Манаковым [11].

Мы будем считать, что $\epsilon_0 = 1$ и использовать следующие комплексные обозначения

$$z = x + iy, \;\; \bar{z} = x - iy, \;\; \partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y), \;\; \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y), \; x = z_R, \; y = z_I \tag{7.1}$$

$$L = -4\partial_z\partial_{\bar{z}} + u(z) \tag{7.2}$$

(Как и везде в этой работе мы пишем $u(z)$ вместо $u(z, \bar{z})$, т.е. обозначение $u(z)$ не подразумевает голоморфной зависимости от z, если обратное явно не оговорено).

Мы будем предполагать, что $u(z)$ – гладкая вещественная функция такая, что

$$|\partial_z^m \partial_{\bar{z}}^n u(z)| < \frac{C_{mn}}{(1 + |z|)^{2+\epsilon}}, \;\; \text{при } m, n \geq 0 \tag{7.3}$$

где C_{mn}, ϵ – некоторые положительные константы.

Многообразие

$$p_x^2 + p_y^2 = 1$$

в импульсном пространстве $\mathbb{C}^2$ мы параметризуем комплексным параметром

$$\lambda = \lambda_R + i\lambda_I, \quad \lambda_R,\ \lambda_I \in \mathbb{R}$$
$$p_x = \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right), \quad p_y = -\frac{i}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) \tag{7.4}$$

Физически значениям импульса $\operatorname{Im} p_x = \operatorname{Im} p_y = 0$ отвечает окружность $|\lambda| = 1$ в λ-плоскости.

7.1 Прямое преобразование рассеяния.

Первый шаг к определению данных рассеяния – построение волновых функций оператора Шредингера

$$L\Psi(\lambda, z) = \Psi(\lambda, z) \tag{7.5}$$

с асимптотикой

$$\Psi(\lambda, z) = e^{\frac{i}{2}(\lambda\bar{z} + z/\lambda)}\chi(\lambda, z) \tag{7.6}$$

где

$$\chi(\lambda, z) = 1 + o(1) \quad \text{при } |z| \to \infty. \tag{7.7}$$

Согласно работе Л.Д.Фаддеева [74], при $|\lambda| \neq 1$ асимптотика (7.7) однозначно фиксирует решение в точках общего положения.

Уравнение (7.5) эквивалентно следующему

$$[L_0(\lambda) + u(z)]\chi(\lambda, z) = 0, \tag{7.8}$$

где

$$L_0(\lambda) = -4\partial_z\partial_{\bar{z}} - 2i\lambda\partial_z - \frac{2i}{\lambda}\partial_{\bar{z}}.$$

В свою очередь при $|\lambda| \neq 1$ уравнение (7.8) с граничным условием (7.7) эквивалентно интегральному уравнению

$$\chi(\lambda, z) = 1 - \hat{G}(\lambda)u(z)\chi(\lambda, z), \tag{7.9}$$

где $\hat{G}(\lambda)$ – интегральный оператор

$$(\hat{G}(\lambda)f)(z) = \iint G(\lambda, z - z')f(z')dz_R dz_I, \tag{7.10}$$

$G(\lambda, z)$ – убывающая на бесконечности функция Грина оператора $L_0(\lambda)$,

$$L_0(\lambda)G(\lambda, z) = \delta(z_R)\delta(z_I), \tag{7.11}$$

$$G(\lambda, z) = \frac{1}{\pi^2}\iint \frac{e^{i(k\bar{z}+\bar{k}z)}}{4k\bar{k} + 2\lambda\bar{k} + 2k/\lambda}dk_r dk_I. \tag{7.12}$$

Нам понадобятся следующие свойства функции Грина (7.12):

Лемма 7.1 *1)* $G(\lambda, z) \to 0$ *при* $|z| \to \infty$

2) $G(\lambda, z)$ *ограничена в* λ *- плоскости при фиксированном* z

3) При $|\lambda| \neq 1$

$$\frac{\partial G(\lambda, z)}{\partial \bar{\lambda}} = -\frac{1}{4\pi\bar{\lambda}}\operatorname{sgn}(\lambda\bar{\lambda} - 1)e^{-\frac{i}{2}\left[\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)\bar{z}+\left(\bar{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\right)z\right]}$$

3) При $|\lambda| \neq 1$

$$G(\lambda, z) = \frac{i}{2\pi}\operatorname{sgn}(\lambda\bar{\lambda} - 1)\left[\frac{1}{\lambda\bar{z} - z/\lambda} - \frac{1}{\bar{\lambda}z - \bar{z}/\bar{\lambda}}e^{-\frac{i}{2}\left[\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)\bar{z}+\left(\bar{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\right)z\right]}\right]$$

5) $G(-1/\bar{\lambda}, z) = \bar{G}(\lambda, z)$

6) $G(-1/\bar{\lambda}, z) = e^{\frac{i}{2}\left[\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)\bar{z}+\left(\bar{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\right)z\right]}G(\lambda, z)$

7) $G(e^{i\varphi}\lambda, e^{i\varphi}z) = G(\lambda, z)$, *где* $\varphi \in \mathbb{R}$.

8) На единичной окружности $G(\lambda, z)$ *имеет разрыв 1 рода и граничные значения*

$$G_\pm(\lambda, z) = G(\lambda(1 \pm 0), z)$$

связаны соотношениями

$$G_+(\lambda, z) - G_-(\lambda, z) = e^{-\frac{i}{2}(\lambda\bar{z}+\bar{\lambda}z)}\frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi e^{-\frac{i}{2}\left(\lambda\bar{z}e^{i\varphi}+\bar{\lambda}ze^{-i\varphi}\right)}\operatorname{sgn}\varphi$$

9) При $|\lambda| = 1$ удобно записать $G(\lambda, z)$ в следующем виде:

$$G(\lambda(1 \pm 0), z) = e^{-\frac{i}{2}(\lambda\bar{z}+\bar{\lambda}z)} G_1(\pm\lambda, z) \tag{7.13}$$

Тогда для $G_1(\lambda, z)$ выполнено

$$\frac{\partial G_1(e^{i\eta}, z)}{\partial \eta} = \frac{i}{4\pi}\left[e^{-\frac{i}{2}(e^{i\eta}\bar{z}+e^{-i\eta}z)} - e^{\frac{i}{2}(e^{i\eta}\bar{z}+e^{-i\eta}z)}\right]$$

Доказательство. Пусть $|\lambda| \neq 1$. Тогда знаменатель подинтегрального выражения имеет два простых нуля в точках $k = 0$ и $k = -\frac{1}{2}(\lambda + 1/\bar{\lambda})$ и, кроме того, интеграл не сходится абсолютно на бесконечности. Однако при $|z| \neq 0$ интеграл на бесконечности естественно регуляризуется интегрированием по частям, а в окрестности нулей он абсолютно сходится, откуда и следует его гладкая зависимость от λ.

Подинтегральное выражение мероморфно зависит от λ, поэтому единственный источник неголоморфности – нули знаменателя, положение которых зависит от λ. Пользуясь формулой

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\lambda}} \frac{1}{a\lambda + b\mu + c\bar{\mu}} = \frac{\pi\bar{a}}{|b\bar{b} - c\bar{c}|}\delta(\mu_R - \mu_{0R}(\lambda))\delta(\mu_I - \mu_{0I}(\lambda)) \tag{7.14}$$

где $\mu_{0R}(\lambda)$, $\mu_{0I}(\lambda)$ – нули подинтегрального выражения, записанные как функции от λ, получаем свойство 3).

Хорошо известно, что асимптотика функции при больших $|z|$ "садится" на особенности преобразования Фурье. Используя формулу

$$\frac{1}{\pi^2}\iint \frac{e^{i(k\bar{z}+\bar{k}z)}}{ak + b\bar{k}} dk_R dk_I = \frac{i}{\pi}\operatorname{sgn}(a\bar{a} - b\bar{b})\frac{1}{az - b\bar{z}} \tag{7.15}$$

несложно получить свойство 4).

Свойства 5)-7) сразу следуют из представления (7.12).

Рассмотрим предел функции $G(\lambda, z)$ при $|\lambda| \to 1$. При $|\lambda| = 1$ интеграл интеграл имеет особенность вида $1/x$ на окружности $|2k + \lambda| = 1$ и значение функции Грина зависит от выбора регуляризации.

При $|\lambda| = 1 \pm 0$ мы имеем:

$$G(\lambda(1 \pm 0), z) = \frac{1}{\pi^2} \iint \frac{e^{i(k\bar{z}+\bar{k}z)}}{4k\bar{k} + 2\lambda\bar{k} + 2\bar{\lambda}k \pm 0(\lambda\bar{k} + \bar{\lambda}k)} dk_R dk_I \qquad (7.16)$$

Несложно видеть, что

$$G_1(\lambda, z) = \frac{1}{\pi^2} \iint \frac{e^{i(k\bar{z}+\bar{k}z)}}{4k\bar{k} - 1 + 0(\lambda\bar{k} - \bar{\lambda}k)} dk_R dk_I =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \iint \frac{e^{ir\left(\lambda\bar{z}e^{i\varphi} + \bar{\lambda}ze^{-i\varphi}\right)}}{4r^2 - 1 - i0\sin\varphi} r dr d\varphi \qquad (7.17)$$

$$G(\lambda(1+0), z) - G(\lambda(1-0), z) = e^{-\frac{i}{2}(\lambda\bar{z}+\bar{\lambda}z)}[G_1(\lambda, z) - G_1(-\lambda, z)] \qquad (7.18)$$

Применяя к (7.18) формулу Племеля-Сохоцкого, получаем свойство 8).

Далее нам понадобится следующая оценка, доказанная в работе [136], стр. 424.

Существует константа $c > 0$ такая, что

$$|G(\lambda, z)| \leq \frac{c}{\sqrt{|z|}\sqrt{|\lambda| + |1/\lambda|}\sqrt[4]{|\epsilon_0|}} \qquad (7.19)$$

Отсюда уже легко получается следующая оценка. Пусть $f(z)$ – функция из пространств $C(\mathbb{C}^1)$ и $L^1(\mathbb{C}^1)$. Тогда функция $(\hat{G}(\lambda)f)(z)$ корректно определена, лежит в пространстве $C(\mathbb{C}^1)$ и

$$\max_{z\in\mathbb{C}} |f(z)| \leq \frac{c}{\sqrt{|\lambda| + |1/\lambda|}\sqrt[4]{|\epsilon_0|}} \left[\iint_{\mathbb{C}} |f(z')| dz'_R dz'_I + \frac{4\pi}{3} \max_{z'\in\mathbb{C}} |f(z)|\right]$$

Теперь оценим норму оператора умножения на функцию $u(z)$. Пусть $f(z)$ лежит в пространстве $C(\mathbb{C}^1)$. Тогда $u(z)f(z)$ лежит в пространствах $L^1(\mathbb{C}^1)$ и $C(\mathbb{C}^1)$ одновременно и

$$\max_{z\in\mathbb{C}} |u(z)f(z)| \leq c_{00} \max_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|$$

$$\iint\limits_{\mathbb{C}} |u(z)f(z')|dz'_R dz'_I \leq D_\epsilon c_{00} \max_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|$$

где

$$D_\epsilon = \iint \frac{dz_R dz_I}{(1+|z|)^{2+\epsilon}}$$

Отсюда видно, что если

$$c_{00} < \frac{\sqrt[4]{|\epsilon_0|}}{c\left(\frac{4\pi}{3} + D_\epsilon\right)} \tag{7.20}$$

то норма интегрального оператора $\hat{G}(\lambda)u(z)$ в пространстве непрерывных ограниченных функций на $\mathbb{C}$ меньше 1, интегральное уравнение (7.9) однозначно разрешимо при всех λ и его решение можно записать в виде сходящегося ряда

$$\chi(\lambda, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\hat{G}(\lambda)u(z)\right)^n \cdot 1. \tag{7.21}$$

Условие (7.20) мы будем называть условием "малости нормы". Если оно не выполнено, то ряд (7.21) гарантировано сходится лишь при $|\lambda| + |1/\lambda| > R_0$, где R_0 – некоторая положительная константа, зависящая от c_{00} и ϵ. Далее в этом разделе мы всегда будем предполагать, что условие "малости нормы" выполнено.

Теперь мы можем приступить к исследованию аналитических свойств волновой функции $\Psi(\lambda, z)$.

Лемма 7.2 *Пусть выполнено условие "малости нормы" (7.20). Тогда:*

1) *Функция $\Psi(\lambda, z)$ непрерывна по λ при $|\lambda| \neq 1$.*

2) *$\Psi(\lambda, z)$ не голоморфна по параметру λ. Ее производная по λ удовлетворяет следующему уравнению:*

$$\frac{\partial\Psi(\lambda, z)}{\partial\bar{\lambda}} = T(\lambda)\Psi(-\frac{1}{\bar{\lambda}}, z) \tag{7.22}$$

где $T(\lambda)$ – не зависящая от z функция переменной λ, задаваемая формулой

$$T(\lambda) = \frac{\pi \operatorname{sgn}(\lambda\bar{\lambda} - 1)}{\bar{\lambda}}\, b(\lambda), \tag{7.23}$$

$$b(\lambda) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{\mathbb{C}^1} e^{\frac{i}{2}\left[\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)\bar{z}+\left(\bar{\lambda}+\frac{1}{\bar{\lambda}}\right)z\right]} u(z)\chi(\lambda, z)\, dz_R dz_I \tag{7.24}$$

3) Функция $\Psi(\lambda, z)$ имеет разрыв первого рода на окружности, причем граничные значения $\Psi_\pm(\lambda, z) = \Psi(\lambda(1 \pm 0), z)$ корректно определены и связаны соотношением

$$\Psi_+(\lambda, z) = \Psi_-(\lambda, z) + \oint\limits_{|\lambda'|=1} R(\lambda, \mu)\Psi_-(\lambda', z)|d\mu| \tag{7.25}$$

где не зависящее от z ядро $R(\lambda, \lambda')$ определяется следующим образом.

Пусть $\Psi_1(\lambda, \mu, z)$ $(|\lambda| = |\mu| = 1)$ – решение уравнения (7.5), задаваемое как решение интегрального уравнения

$$\Psi_1(\lambda, \mu, z) = e^{\frac{i}{2}(\lambda\bar{z}+z/\lambda)} - \hat{G}_1(\mu)u(z)\Psi_1(\lambda, \mu, z) \tag{7.26}$$

Легко видеть, что

$$\Psi_+(\lambda, z) = \Psi_1(\lambda, \lambda, z), \quad \Psi_-(\lambda, z) = \Psi_1(\lambda, -\lambda, z) \tag{7.27}$$

Пусть

$$\begin{aligned} w_+(\lambda, \mu) &= \frac{1}{4\pi} \iint e^{-\frac{i}{2}(\mu\bar{z}+\bar{\mu}z)} u(z)\Psi_1(\lambda, \mu, z)\, dz_R dz_I \\ w_-(\lambda, \mu) &= \frac{1}{4\pi} \iint e^{-\frac{i}{2}(\mu\bar{z}+\bar{\mu}z)} u(z)\Psi_1(\lambda, -\mu, z)\, dz_R dz_I \end{aligned} \tag{7.28}$$

$\hat{W}^\pm_\pm$ – интегральные операторы, действующие на функциях на окружности вида

$$(\hat{W}^+_+ f)(\lambda) = -\pi i \int\limits_0^\pi w_+(\lambda, \lambda e^{i\varphi}) f(\lambda e^{i\varphi}) d\varphi$$

$$(\hat{W}_+^- f)(\lambda) = \pi i \int\limits_{-\pi}^{0} w_+(\lambda, \lambda e^{i\varphi}) f(\lambda e^{i\varphi}) d\varphi$$

$$(\hat{W}_-^+ f)(\lambda) = -\pi i \int\limits_{-\pi}^{0} w_-(\lambda, \lambda e^{i\varphi}) f(\lambda e^{i\varphi}) d\varphi \tag{7.29}$$

$$(\hat{W}_-^- f)(\lambda) = \pi i \int\limits_{0}^{\pi} w_-(\lambda, \lambda e^{i\varphi}) f(\lambda e^{i\varphi}) d\varphi$$

Тогда

$$(\hat{1} + \hat{R}) = (\hat{1} + \hat{W}_+^+)^{-1}(\hat{1} + \hat{W}_-^+) = (\hat{1} + \hat{W}_+^-)^{-1}(\hat{1} + \hat{W}_-^-) \tag{7.30}$$

Доказательство. Продифференцируем по $\bar{\lambda}$ уравнение (7.9). Мы получаем

$$\frac{\partial \chi(\lambda, z)}{\partial \bar{\lambda}} = -\frac{\partial \hat{G}(\lambda)}{\partial \bar{\lambda}} u(z) \chi(\lambda, z) - \hat{G}(\lambda) u(z) \frac{\partial \chi(\lambda, z)}{\partial \bar{\lambda}} \tag{7.31}$$

Согласно пункту 3) Леммы 7.1

$$\frac{\partial G(\lambda, z)}{\partial \bar{\lambda}} u(z) \chi(\lambda, z) = -\frac{1}{4\pi \bar{\lambda}} \operatorname{sgn}(\lambda\bar{\lambda} - 1) e^{-\frac{i}{2}\left[\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)\bar{z} + \left(\bar{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\right) z\right]} \times$$

$$\times \iint e^{\frac{i}{2}\left[\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)\bar{z}' + \left(\bar{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\right) z'\right]} u(z') \chi(\lambda, z') dz'_R dz'_I = \tag{7.32}$$

$$= -\frac{\pi}{\lambda} \operatorname{sgn}(\lambda\bar{\lambda} - 1) b(\lambda) e^{-\frac{i}{2}\left[\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)\bar{z} + \left(\bar{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\right) z\right]} = -T(\lambda) e^{-\frac{i}{2}\left[\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)\bar{z} + \left(\bar{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\right) z\right]}$$

Согласно определению с учетом свойства 6) Леммы 7.1

$$\chi\left(-\frac{1}{\bar{\lambda}}, z\right) = 1 - e^{\frac{i}{2}\left[\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)\bar{z} + \left(\bar{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\right) z\right]} \hat{G}(\lambda) e^{-\frac{i}{2}\left[\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)\bar{z} + \left(\bar{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\right) z\right]} \chi\left(-\frac{1}{\bar{\lambda}}, z\right)$$

т.е. функция $\chi_1(\lambda, z) = e^{-\frac{i}{2}\left[\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)\bar{z} + \left(\bar{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\right) z\right]} \chi\left(-\frac{1}{\lambda}, z\right)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \chi_1(\lambda, z)}{\partial \bar{\lambda}} = e^{-\frac{i}{2}\left[\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)\bar{z} + \left(\bar{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\right) z\right]} - \hat{G}(\lambda) \chi_1(\lambda, z). \tag{7.33}$$

Мы видим, что уравнения (7.31) и (7.33) отличаются лишь на множитель $T(\lambda)$ при свободном члене, откуда следует, что

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\lambda}}\chi(\lambda,z)=T(\lambda)\chi_1(\lambda,z),$$

т.е.

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\lambda}}\chi(\lambda,z)=T(\lambda)e^{-\frac{i}{2}\left[\left(\lambda+\frac{1}{\bar{\lambda}}\right)\bar{z}+\left(\bar{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\right)z\right]}\chi\left(-\frac{1}{\bar{\lambda}},z\right) \tag{7.34}$$

Переписывая (7.34) в терминах $\Psi(\lambda,z)$, получаем формулу (7.22).

(Данная схема доказательства практически повторяет вывод $\bar{\partial}$-уравнений на волновую функцию в работе [84]).

Докажем теперь утверждение 3).

Продифференцируем функцию $\Psi_1(\lambda,\lambda e^{i\varphi},z)$ по φ

$$\frac{\partial\Psi_1(\lambda,\lambda e^{i\varphi},z)}{\partial\varphi}=\frac{i}{4\pi}e^{\frac{i}{2}(\lambda e^{i\varphi}\bar{z}+\bar{\lambda}e^{i\varphi}z)}\iint e^{-\frac{i}{2}(\lambda e^{i\varphi}\bar{z}+\bar{\lambda}e^{i\varphi}z)}u(z)\Psi_1(\lambda,\lambda e^{i\varphi},z)dz_Rdz_I-$$

$$-\frac{i}{4\pi}e^{-\frac{i}{2}(\lambda e^{i\varphi}\bar{z}+\bar{\lambda}e^{i\varphi}z)}\iint e^{\frac{i}{2}(\lambda e^{i\varphi}\bar{z}+\bar{\lambda}e^{i\varphi}z)}u(z)\Psi_1(\lambda,\lambda e^{i\varphi},z)dz_Rdz_I-$$

$$-\hat{G}_1(\lambda e^{i\varphi})u(z)\frac{\partial\Psi_1(\lambda,\lambda e^{i\varphi},z)}{\partial\varphi},$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial\Psi_1(\lambda,\lambda e^{i\varphi},z)}{\partial\varphi}=\pi i w_+(\lambda,\lambda e^{i\varphi})\Psi_+(\lambda e^{i\varphi},z)-\pi i w_-(\lambda,-\lambda e^{i\varphi})\Psi_-(-\lambda e^{i\varphi},z)$$

Тем самым с учетом (7.27)

$$\Psi_+(\lambda,z)-\Psi_-(\lambda,z)= \tag{7.35}$$

$$=\pi i\int\limits_0^\pi\left[w_+(\lambda,\lambda e^{i\varphi})\Psi_+(\lambda e^{i\varphi},z)-w_-(\lambda,-\lambda e^{i\varphi})\Psi_-(-\lambda e^{i\varphi},z)\right]d\varphi=$$

$$=-\pi i\int\limits_\pi^0\left[w_+(\lambda,\lambda e^{i\varphi})\Psi_+(\lambda e^{i\varphi},z)-w_-(\lambda,-\lambda e^{i\varphi})\Psi_-(-\lambda e^{i\varphi},z)\right]d\varphi$$

В терминах интегральных операторов (7.29) соотношение (7.35) записывается в следующем виде

$$(\hat{1} + \hat{W}_+^+)\Psi_+(\lambda, z) = (\hat{1} + \hat{W}_-^+)\Psi_-(\lambda, z),$$

$$(\hat{1} + \hat{W}_+^-)\Psi_+(\lambda, z) = (\hat{1} + \hat{W}_-^-)\Psi_-(\lambda, z)$$

причем эти соотношения выполнены при всех λ. Тем самым

$$\Psi_+(\lambda, z) = (\hat{1} + \hat{W}_+^+)^{-1}(\hat{1} + \hat{W}_-^+)\Psi_-(\lambda, z),$$

$$\Psi_+(\lambda, z) = (\hat{1} + \hat{W}_+^-)^{-1}(\hat{1} + \hat{W}_-^-)\Psi_-(\lambda, z)$$

что и доказывает утверждение 3).

Суммируя вышесказанное, получаем

Теорема 7.1 *Пусть $u(z)$ – некоторая непрерывная функция переменной z (не обязательно вещественная) такая, что*

$$|u(z)| < \frac{C_{00}}{(1 + |z|)^{2+\epsilon}}, \tag{7.36}$$

где C_{mn}, ϵ – некоторые положительные константы, и выполнено условие "малости нормы" (7.20). Тогда по потенциалу $u(z)$ строятся следующие обобщенные данные рассеяния при одной энергии $\epsilon_0 = 1$.

1) *Функция $R(\lambda, \lambda')$ на двумерном торе $|\lambda| = |\lambda'| = 1$, называемая ядром нелокальной задачи Римана.*

2) *Функция $T(\lambda)$ двух вещественных переменных λ_R, λ_I на λ-плоскости $\mathbb{C}^1 = \mathbb{R}^2$ (никакой голоморфности по λ $T(\lambda)$ не предполагается).*

Как мы увидим ниже, данные $R(\lambda, \lambda')$ являются "физическими", т.е. выражаются через амплитуду рассеяния $S(\vec{k}, \vec{l})$ при энергии $\epsilon_0 = 1$, а $T(\lambda)$ – нефизическими, т.е. амплитуда рассеяния при $S(\vec{k}, \vec{l})$ при $\epsilon_0 = 1$ от них не зависит.

Докажем теперь, что гладкость потенциала $u(z)$влечет за собой быстрое убывание "данных рассеяния" $T(\lambda)$ при $\lambda \to 0, \infty$.

Теорема 7.2 *Пусть $u(z)$ – гладкая функция, для производных которой выполнена оценка (7.3). Тогда при достаточно больших значениях $|\lambda| + |1/\lambda|$ интегральное уравнение (7.9) разрешимо (мы здесь не предполагаем малости нормы $u(z)$) и при $|\lambda|+|1/\lambda| \to \infty$ $T(\lambda) \to 0$ быстрее любой степени $|\lambda| + |1/\lambda|$.*

Доказательство. Перепишем уравнение (7.9) в импульсном представлении.

Пусть

$$\tilde{\chi}(\lambda, k) = \frac{1}{\pi^2} \iint \chi(\lambda, z) e^{-i(k\bar{z}+\bar{k}z)} dz_R dz_I$$

$$\tilde{u}(k) = \frac{1}{\pi^2} \iint u(z) e^{-i(k\bar{z}+\bar{k}z)} dz_R dz_I$$

– преобразования Фурье функций $\chi(\lambda, z)$ и $u(z)$ соответственно. Хорошо известно, что если выполнено условие (7.3), то $\tilde{u}(z)$ убывает при $|k| \to \infty$ быстрее любой степени k. Поскольку норма оператора $\hat{G}(\lambda)u(z)$ при $|\lambda| + |1/\lambda| \to \infty$ оценивается как $O\left(\frac{1}{|\lambda|+|1/\lambda|}\right)$, то для вычисления $\chi(\lambda, z)$ и, следовательно, $b(\lambda)$ с точностью до $O\left((|\lambda| + |1/\lambda|)^{-N}\right)$ достаточно взять первые N членов ряда (7.21). В импульсном представлении ряд для функции $b(\lambda)$ приобретает вид

$$b(\lambda) = \frac{1}{4}\Bigg[\tilde{u}\left(-\frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\iint \iint \ldots \iint}_{n \text{ раз}} dk_{1R} dk_{1I} \ldots dk_{nR} dk_{nI} \times$$

$$\times\, \tilde{u}\left(-\frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\bar{\lambda}}\right) - k_1\right) \tilde{u}(k_1 - k_2) \cdot \ldots \cdot \tilde{u}(k_n - 0) \times \qquad (7.37)$$

$$\times \frac{1}{4k_1\bar{k}_1 + 2\lambda\bar{k}_1 + 2k_1/\lambda} \cdot \frac{1}{4k_2\bar{k}_2 + 2\lambda\bar{k}_2 + 2k_2/\lambda} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{4k_n\bar{k}_n + 2\lambda\bar{k}_n + 2k_n/\lambda}\Bigg]$$

(Отметим, что этот ряд аналогичен ряду из Теоремы 2.3). Рассмотрим n-й член ряда (7.37). Поскольку сумма аргументов функций $\tilde{u}(k_j - k_{j+1})$ равна $-\frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)$, то хотя бы один из них по модулю больше $\frac{1}{2n}|\lambda + \frac{1}{\lambda}|$,

откуда и следует убывание этого члена ряда при $|\lambda + \frac{1}{\lambda}| \to \infty$ быстрее любой степени λ, что и доказывает Теорему 7.2.

Замечание. В задаче рассеяния для двумерного оператора Шредингера при фиксированоой положительной энергии возникают одновременно нелокальная задача Римана и $\bar{\partial}$-проблема. С алгебраической точки зрения обе эти задачи можно интерпретировать как специальные случаи нелокальной $\bar{\partial}$-проблемы, определенной в [34]. Однако при работе с ядрами общего вида непонятна их связь со спектральными свойствами получающихся потенциалов.

7.2 Обратное преобразование рассеяния.

Введем следующие обозначения:

$$T(\lambda, z) = e^{-\frac{i}{2}\left[\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)\bar{z}+\left(\bar{\lambda}+\frac{1}{\bar{\lambda}}\right)z\right]}T(\lambda)$$
$$R(\lambda, \lambda', z) = e^{-\frac{i}{2}\left[(\lambda-\lambda')\bar{z}+(\bar{\lambda}+\bar{\lambda}')z\right]}R(\lambda, \lambda') \tag{7.38}$$

Тогда для восстановления потенциала по данным рассеяния достаточно убедиться, что следующие свойства функции $\chi(\lambda, z)$ как функции переменной λ при фиксированном z полностью определяют ее (по крайней мере, для достаточно "малых" данных рассеяния).

1) Функция $\chi(\lambda, z)$ определена при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ и непрерывна по λ при $|\lambda| \neq 1$.

2) $\chi(\lambda, z) \to 1$ при $\lambda \to \infty$.

3)
$$\frac{\partial}{\partial\bar{\lambda}}\chi(\lambda, z) = T(\lambda, z)\chi\left(-\frac{1}{\bar{\lambda}}, z\right) \quad \text{при } |\lambda| \neq 1. \tag{7.39}$$

4) На единичной окружности $\chi(\lambda, z)$ имеет разрыв первого рода, причем граничные значения $\chi_\pm(\lambda, z) = \chi(\lambda(1 \pm 0), z)$ связаны соотношением

$$\chi_+(\lambda, z) = \chi_-(\lambda, z) + \oint\limits_{|\lambda'|=1} R(\lambda, \lambda', z)\chi_-(\lambda', z)|d\lambda'| \tag{7.40}$$

Применяя к $\chi(\lambda, z)$ обобщенную формулу Коши, получаем интегральное уравнение обратной задачи рассеяния

$$\chi(\lambda, z) = 1 - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda''|=1} \frac{d\lambda''}{\lambda'' - \lambda} \oint\limits_{|\lambda'|=1} R(\lambda'', \lambda', z)\chi_-(\lambda', z)|d\lambda'| -$$

$$- \frac{1}{\pi} \iint \frac{T(\lambda', z)}{\lambda' - \lambda} \chi\left(-\frac{1}{\bar{\lambda}'}, z\right) d\lambda'_R d\lambda'_I \tag{7.41}$$

Нам понадобятся следующие нормы в пространстве функций одной комплексной переменной λ. Пусть $\lambda = re^{i\varphi}$.

$$\begin{aligned} \|f(\lambda)\|_1 &= \max_{0 \le r \le \infty} \sqrt{\int\limits_0^{2\pi} f(re^{i\varphi})\bar{f}(re^{i\varphi})d\varphi} \\ \|f(\lambda)\|_2 &= \int\limits_0^\infty dr \sqrt{\int\limits_0^{2\pi} f(re^{i\varphi})\bar{f}(re^{i\varphi})d\varphi} \end{aligned} \tag{7.42}$$

Теорема 7.3 *1. Пусть $R(\lambda, \lambda')$, $|\lambda| = |\lambda'| = 1$, $T(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ – произвольные кусочно-непрерывные ограниченные функции такие, что:*

$$\sqrt{\iint\limits_{|\lambda|=|\lambda'|=1} |d\lambda||d\lambda'|R^2(\lambda, \lambda')} + 2\int\limits_0^\infty dr \max_{0 \le \varphi \le 2\pi} |T(re^{i\varphi})| < 1. \tag{7.43}$$

Тогда интегральное уравнение (7.41) однозначно разрешимо при всех z. Пусть, кроме того, $T(\lambda)$ убывает при $\lambda \to 0, \infty$ быстрее любой степени λ. Тогда $\chi(\lambda, z)$ – гладкая функция переменной z при $\lambda \neq 1$.

2. Функция $\Psi(\lambda, z) = e^{\frac{i}{2}(\lambda\bar{z}+z/\lambda)}\chi(\lambda, z)$, *где* $\chi(\lambda, z)$ – *построенное в пункте 1 решение уравнения (7.41) – собственная функция оператора Шредингера*

$$L\Psi(\lambda, z) = \epsilon_0\Psi(\lambda, z), \quad \epsilon_0 = 1$$

$$L = -4\partial_z\partial_{\bar{z}} + V(z)\partial_z + u(z),$$

где

$$V(z) = 4\partial_{\bar{z}} \ln \chi(0, z) \tag{7.44}$$

$$u(z) = 2i\partial_z\chi_{-1}^{\infty}(z), \quad \text{где} \tag{7.45}$$

$\chi_{-1}^{\infty}(z)$ – *коэффициент разложения* $\chi(\lambda, z)$ *при* $\lambda \to \infty$*:*

$$\chi(\lambda, z) = 1 + \frac{\chi_{-1}^{\infty}(z)}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \tag{7.46}$$

(Поскольку $T(\lambda) \to 0$ *быстро убывает при* $\lambda \to \infty$*, то разложение идет по степеням* $1/\lambda$*).*

Кроме того, устремляя $\lambda \to \infty$ *в (7.41) получаем:*

$$\chi_{-1}^{\infty}(z) = \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{|\lambda''|=1} |d\lambda''| \oint\limits_{|\lambda'|=1} |d\lambda'|\lambda'' R(\lambda'', \lambda', z)\chi_-(\lambda', z) +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\iint T(\lambda', z)\chi\left(-\frac{1}{\bar{\lambda}'}, z\right) d\lambda'_R d\lambda'_I \tag{7.47}$$

Доказательство. Оператор разложения функции на окружности в разность функций, голоморфных внутри круга и вне его – оператор ортогонального проектирования в $L^2(S^1)$, поэтому его норма меньше 1. Отсюда следует, что

$$\| \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\lambda''|=1} \frac{d\lambda''}{\lambda'' - \lambda} \oint\limits_{|\lambda'|=1} R(\lambda'', \lambda', z)\phi_-(\lambda')|d\lambda'| \|_1 \leq$$

$$\|\hat{R}(\lambda)\|_{L^2(S^1)} \cdot \|\phi(\lambda)\|_{L^2(S^1)}$$

Также проверяется, что

$$\|\partial_{\bar\lambda}^{-1}\phi(\lambda)\|_1 \le 2\|\phi(\lambda)\|_2,$$

откуда следует, что интегральный оператор в правой части (7.42) – сжимающий оператор в пространстве функций с нормой $\|\ \|_1$, что и дает однозначную разрешимость.

Для доказательства гладкости продифференцируем правую часть (7.41) по z и $\bar z$ нужное число раз. При этом быстрое убывание T при $\lambda \to 0, \infty$ гарантирует, что неоднородная часть получающегося уравнения корректно определена и лежит в пространстве функций от λ с ограниченной $\|\ \|_1$, что и дает нам существование производных как решений интегрального уравнения.

Пусть теперь $X(\lambda, z) = e^{-\frac{i}{2}(\lambda\bar z + z/\lambda)} L\Psi(\lambda, z)$. Легко проверяется, что функция $X(\lambda, z) + \chi(\lambda, z)$ обладает перечисленными выше свойствами 1)-4), откуда по теореме единственности следует ее равенство 0.

Теорема 7.3 доказана.

Отвечающий данным общего положения $R(\lambda, \lambda')$, $T(\lambda)$ оператор Шредингера оказывается комплексным и содержит член с производной первого порядка.

Естественный следующий шаг – выделение чисто потенциальных вещественных операторов (нахождение аналогов $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ группы редукций периодической задачи).

7.3 Условия потенциальности и вещественности.

Теорема 7.4 *1. Пусть L – оператор Шредингера без магнитного поля и выполнены условия "малости нормы". Тогда "данные рассеяния" обладают следующими симметриями:*

$$b\left(\frac{1}{\bar\lambda}\right) = b(\lambda) \tag{7.48}$$

$$R(\lambda,\lambda')+R(-\lambda',-\lambda)+\oint\limits_{|\lambda''|=1} R(\lambda,\lambda'')R(-\lambda',-\lambda'')|d\lambda''|=0. \qquad (7.49)$$

Пусть, кроме того, потенциал $u(z)$ вещественен. Тогда "данные рассеяния" удовлетворяют соотношениям:

$$b\left(-\frac{1}{\bar\lambda}\right)=\bar b(\lambda) \qquad (7.50)$$

$$R(\lambda,\lambda')+\bar R(-\lambda,-\lambda')+\oint\limits_{|\lambda''|=1} R(\lambda,\lambda'')\bar R(-\lambda'',-\lambda')|d\lambda''|=0. \qquad (7.51)$$

Замечание. *Условие (7.49) плюс условие (7.51) дают нам эрмитовость оператора $\hat R$*

$$R(\lambda,\lambda')=\bar R(\lambda',\lambda) \qquad (7.52)$$

Замечание. *Условие (7.49) означает, что оператор $\hat 1+\hat R$ сохраняет следующее скалярное произведение на пространстве функций на окружности:*

$$<f,g>=\oint\limits_{|\lambda|=1} f(\lambda)g(-\lambda)|d\lambda| \qquad (7.53)$$

2. Если $R(\lambda,\lambda')$, $b(\lambda)$ – произвольные функции такие, что выполнены редукции (7.48), (7.49) и обратная задача однозначно разрешима, то соответствующий оператор L не содержит первых производных. Если, кроме того, выполнены соотношения (7.50), (7.51), то потенциал $u(z)$ вещественен.

Доказательство. Сперва докажем свойство (7.48). Сделаем в формуле (7.37) следующую замену переменных:

$$\tilde k_{n+1-i}=-\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{\bar\lambda}\right)-k_1$$

С учетом того, что $\tilde G(\lambda,-\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)-k_1)=\tilde G(\frac{1}{\lambda},k)$, где

$$\tilde G(\lambda,k)=\frac{1}{4k\bar k+2\lambda\bar k+2k/\lambda},$$

ряд для $b(\lambda)$ переходит в ряд для $b(\frac{1}{\lambda})$, что и доказывает их равенство.

Необходимость условия (7.49) мы докажем ниже, пользуясь формулой, связывающей ядро $R(\lambda, \lambda')$ с амплитудой рассеяния. Докажем, что условия (7.48), (7.49) являются достаточными.

Рассмотрим следующую форму:

$$\phi(\lambda, z)d\lambda = \Psi(\lambda, z)\Psi(-\lambda, z)\frac{d\lambda}{\lambda} \tag{7.54}$$

По формуле Грина

$$\oint\limits_{|\lambda|=1-0} \phi(\lambda, z)d\lambda - \oint\limits_{|\lambda|=1/R} \phi(\lambda, z)d\lambda = \iint\limits_{\frac{1}{R}\le\lambda<1} \frac{\phi(\lambda, z)}{\partial\bar{\lambda}}\frac{d\bar{\lambda}\wedge d\lambda}{\lambda} \tag{7.55}$$

$$\oint\limits_{|\lambda|=R} \phi(\lambda, z)d\lambda - \oint\limits_{|\lambda|=1+0} \phi(\lambda, z)d\lambda = \iint\limits_{1<\lambda\le R} \frac{\phi(\lambda, z)}{\partial\bar{\lambda}}\frac{d\bar{\lambda}\wedge d\lambda}{\lambda}$$

Поскольку оператор $\hat{1} + \hat{R}$ сохраняет скалярное произведение (7.53), то

$$\oint\limits_{|\lambda|=1+0} \phi(\lambda, z)d\lambda = \oint\limits_{|\lambda|=1-0} \phi(\lambda, z)d\lambda$$

и

$$\oint\limits_{|\lambda|=1-0} \phi(\lambda, z)d\lambda - \oint\limits_{|\lambda|=1/R} \phi(\lambda, z)d\lambda = \iint\limits_{\frac{1}{R}\le\lambda<1,\ |\lambda|\neq 1} \frac{\phi(\lambda, z)}{\partial\bar{\lambda}}\frac{d\bar{\lambda}\wedge d\lambda}{\lambda} =$$

$$= \pi \iint\limits_{\frac{1}{R}\le\lambda<1,\ |\lambda|\neq 1} \operatorname{sgn}(\lambda\bar{\lambda} - 1)\Big[b(\lambda)\Psi(-\frac{1}{\bar{\lambda}}, z)\Psi(-\lambda, z) +$$

$$+ b(-\lambda)\Psi(\lambda, z)\Psi(-\frac{1}{\bar{\lambda}}, z)\Big]\frac{d\bar{\lambda}\wedge d\lambda}{\bar{\lambda}\lambda}$$

С учетом того, что форма $\frac{d\bar{\lambda}\wedge d\lambda}{\bar{\lambda}\lambda}$ инвариантна относительно замены $\lambda \to -1/\bar{\lambda}$, получаем, что интегралы в точках λ и $-1/\bar{\lambda}$ взаимно сокращаются и, следовательно,

$$\oint\limits_{|\lambda|=R} \phi(\lambda, z)d\lambda = \oint\limits_{|\lambda|=1/R} \phi(\lambda, z)d\lambda.$$

С другой стороны, при $R \to \infty$

$$\oint\limits_{|\lambda|=R} \phi(\lambda, z)d\lambda \to 1, \qquad \oint\limits_{|\lambda|=1/R} \phi(\lambda, z)d\lambda \to \chi^2(0, z),$$

следовательно, $\chi(0, z) = \pm 1$ и $V(z) = 0$, что и требовалось доказать.

Если потенциал $u(z)$ вещественный, то $\Psi(-1/\bar{\lambda}, z) = \bar{\Psi}(\lambda, z)$, откуда сразу получаем (7.50), (7.51). Наоборот, если выполнены (7.50), (7.51), то функция $\bar{\Psi}(-1/\bar{\lambda}, z)$ также удовлетворяет уравнениям обратной задачи, и, следовательно, $L = \bar{L}$.

Замечание. Для случая, когда $\bar{\partial}$-проблема отсутствует, достаточные условия на данные нелокальной задачи Римана были получены автором совместно с Р.Г.Новиковым в работах [12], [13].

Замечание. Редукции (7.49), (7.51) нелинейны. Их можно линеаризовать преобразованием Кэли $\hat{Z} = \hat{R}(2 + \hat{R})^{-1}$.

7.4 Связь с физической задачей рассеяния. Прозрачные при одной энергии потенциалы.

Асимптотика волновой функции при больших значениях $|z|$ несложно вычисляется методом стационарной фазы и при этом

$$\Psi(\lambda, z) = e^{\frac{i}{2}(\lambda\bar{z}+z/\lambda)} \left(1 + O\left(\frac{1}{|z|}\right)\right) \quad \text{при } |\lambda| \neq 1,$$

$$\Psi_{\pm}(\lambda, z) = e^{\frac{i}{2}(\lambda\bar{z}+z/\lambda)} + \frac{A_{\pm}(\lambda, z/\|z|)}{\sqrt{z}} e^{i|z|} +$$

$$+ \frac{B_{\pm}(\lambda, z/\|z|)}{\sqrt{z}} e^{-i|z|} + \left(1 + O\left(\frac{1}{|z|}\right)\right) \quad \text{при } |\lambda| = 1,$$

причем коэффициенты $A_{\pm}$, $B_{\pm}$ зависят лишь от $R(\lambda, \lambda')$ и $T(\lambda)$ при $|\lambda| = 1$. Отсюда следует, что амплитуда рассеяния для получающихся потенциалов не зависит от $T(\lambda)$ (если потенциал $u(z)$ достаточно быстро убывает на бесконечности, то значение $T(\lambda)$ на окружности $|\lambda| = 1$

связано с $R(\lambda,\lambda')$ некоторым условием непрерывности, подробнее см. раздел 10). В частности, полагая $R(\lambda,\lambda')=0$, $T(\lambda)=0$ при $|\lambda|=1$ мы получаем потенциалы с нулевым рассеянием при одной энергии $\epsilon_0=1$. Отметим, что в отличие от одномерного случая, когда для безотражательных потенциалов фазовый сдвиг прошедшей волны нетривиален, в двумерии фазовый сдвиг отсутствует. Вопрос о скорости убывания прозрачных потенциалов на бесконечности подробно рассмотрен в разделе 10. Точно решаемые примеры найдены в разделе 9.

Формула, связывающая ядро нелокальной задачи Римана $R(\lambda,\lambda')$ с амплитудой рассеяния, измеряемой при той энергии, при которой рассматривается наша задача (в данном случае $\epsilon_0=1$) была найдена Р.Г.Новиковым в [62], [136]. Напомним ее вывод.

Для этого вычислим асимптотику функций $\Psi_\pm(\lambda,z)$ при больших z (здесь $|\lambda|=1$). Пусть

$$h_\pm(\lambda,z)=\frac{1}{4\pi^2}\iint e^{-i(\mu\bar z+\bar\mu z)}u(z)\Psi_\pm(\lambda,z)dz_Rdz_I \tag{7.56}$$

Из (7.9) следует, что

$$\Psi_\pm(\lambda,z)=e^{\frac{i}{2}(\lambda\bar z+z/\lambda)}-\iint e^{i(k\bar z+\bar k z)}\frac{\widetilde{u(z)\Psi_\pm}(\lambda,k)}{4k\bar k-1\pm 0(\lambda\bar k+k\bar\lambda)}dk_Rdk_I \tag{7.57}$$

где

$$\widetilde{u(z)\Psi_\pm}(\lambda,k)=\frac{1}{\pi^2}\iint e^{-i(k\bar z+\bar k z)}u(z)\Psi_\pm(\lambda,z)dz_Rdz_I \tag{7.58}$$

Легко видеть, что

$$h_\pm(\lambda,\mu)=\frac{1}{4}\widetilde{u(z)\Psi_\pm}(\lambda,\mu/2) \tag{7.59}$$

Преобразуя (7.57), получаем:

$$\Psi_\pm(\lambda,z)=e^{\frac{i}{2}(\lambda\bar z+z/\lambda)}-\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\infty}rdr\frac{e^{ir\left(\lambda\bar z e^{i\varphi}+\bar\lambda z e^{-i\varphi}\right)}\widetilde{u(z)\Psi_\pm}(\lambda,e^{i\varphi})}{4r^2-1\mp i0\sin\varphi} \tag{7.60}$$

При больших $|z|$ асимптотика "садится" на особенности подинтегрального выражения, поэтому

$$\Psi_{\pm}(\lambda,z)\sim e^{\frac{i}{2}(\lambda\bar{z}+z/\lambda)}-\frac{\pi i}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi e^{-\frac{i}{2}\left(\lambda\bar{z}e^{i\varphi}+\bar{\lambda}ze^{-i\varphi}\right)}h_{\pm}(\lambda,\lambda e^{i\varphi})\times$$

$$\times\left[\operatorname{sgn}\left(\lambda\bar{z}e^{i\varphi}+\bar{\lambda}ze^{-i\varphi}\right)\pm\operatorname{sgn}\sin\varphi\right]=$$

$$=e^{\frac{i}{2}(\lambda\bar{z}+z/\lambda)}\mp\pi i\int\limits_0^{\pi}d\varphi\theta\left(\pm\left(\lambda\bar{z}e^{i\varphi}+\bar{\lambda}ze^{-i\varphi}\right)\right)\times$$

$$\times\left[h_{\pm}(\lambda,\lambda e^{i\varphi})e^{\frac{i}{2}\left(\lambda\bar{z}e^{i\varphi}+\bar{\lambda}ze^{-i\varphi}\right)}-h_{\pm}(\lambda,-\lambda e^{i\varphi})e^{-\frac{i}{2}\left(\lambda\bar{z}e^{i\varphi}+\bar{\lambda}ze^{-i\varphi}\right)}\right]\qquad(7.61)$$

Напомним, что растущей при $|z|\to\infty$ фазе отвечает рассеянная волна, а убывающей при $|z|\to\infty$ – падающая. Пусть $\Psi_0(\lambda,z)=e^{\frac{i}{2}(\lambda\bar{z}+z/\lambda)}$ – решение вакуумного уравнения Шредингера.

Таким образом, решения $\Psi_{\pm}(\lambda,z)$ отвечают следующим процесам рассеяния:

1) Падающая волна вида

$$\Psi_{+}^{in}(\lambda,z)=\Psi_0(\lambda,z)+\pi i\int\limits_{-\pi}^{0}h_{+}(\lambda,\lambda e^{i\varphi})\Psi_0(\lambda e^{i\varphi},\lambda)d\varphi\qquad(7.62)$$

переходит в рассеянную

$$\Psi_{+}^{out}(\lambda,z)=\Psi_0(\lambda,z)-\pi i\int\limits_{0}^{\pi}h_{+}(\lambda,\lambda e^{i\varphi})\Psi_0(\lambda e^{i\varphi},\lambda)d\varphi\qquad(7.63)$$

2) Падающая волна вида

$$\Psi_{-}^{in}(\lambda,z)=\Psi_0(\lambda,z)+\pi i\int\limits_{0}^{\pi}h_{-}(\lambda,\lambda e^{i\varphi})\Psi_0(\lambda e^{i\varphi},\lambda)d\varphi\qquad(7.64)$$

переходит в рассеянную

$$\Psi_{-}^{out}(\lambda,z)=\Psi_0(\lambda,z)-\pi i\int\limits_{-\pi}^{0}h_{-}(\lambda,\lambda e^{i\varphi})\Psi_0(\lambda e^{i\varphi},\lambda)d\varphi\qquad(7.65)$$

Перепишем соотношение (7.40) в операторном виде. Пусть $\hat{K}^{\pm}_{\pm}$ – интегральные операторы вида:

$$
\begin{aligned}
(\hat{K}^{+}_{+}f)(\lambda) &= -\pi i \int\limits_{0}^{\pi} h_{+}(\lambda, \lambda e^{i\varphi}) f(\lambda e^{i\varphi}) d\varphi \\
(\hat{K}^{-}_{+}f)(\lambda) &= \pi i \int\limits_{-\pi}^{0} h_{+}(\lambda, \lambda e^{i\varphi}) f(\lambda e^{i\varphi}) d\varphi \\
(\hat{K}^{+}_{-}f)(\lambda) &= -\pi i \int\limits_{-\pi}^{0} h_{-}(\lambda, \lambda e^{i\varphi}) f(\lambda e^{i\varphi}) d\varphi \\
(\hat{K}^{-}_{-}f)(\lambda) &= \pi i \int\limits_{0}^{\pi} h_{-}(\lambda, \lambda e^{i\varphi}) f(\lambda e^{i\varphi}) d\varphi
\end{aligned}
\tag{7.66}
$$

Тогда соотношения (7.62)-(7.65) записываются в виде:

$$
\begin{aligned}
\Psi^{in}_{+}(\lambda) &= (\hat{1} + \hat{K}^{-}_{+})\Psi_0(\lambda), \qquad \Psi^{out}_{+}(\lambda) = (\hat{1} + \hat{K}^{+}_{+})\Psi_0(\lambda) \\
\Psi^{in}_{-}(\lambda) &= (\hat{1} + \hat{K}^{-}_{-})\Psi_0(\lambda), \qquad \Psi^{out}_{-}(\lambda) = (\hat{1} + \hat{K}^{-}_{-})\Psi_0(\lambda)
\end{aligned}
$$

С другой стороны, согласно определению оператора рассеяния, падающей волне $\Psi_0(\lambda)$ соответствует рассеянная волна $(\hat{1} + \hat{S})\Psi_0(\lambda)$, следовательно

$$
\begin{aligned}
(\hat{1} + \hat{K}^{+}_{+}) &= (\hat{1} + \hat{K}^{-}_{+})(\hat{1} + \hat{S}) \\
(\hat{1} + \hat{K}^{+}_{-}) &= (\hat{1} + \hat{K}^{-}_{-})(\hat{1} + \hat{S})
\end{aligned}
\tag{7.67}
$$

В то же время, согласно определению данных нелокальной задачи Римана,

$$
\begin{aligned}
(\hat{1} + \hat{K}^{+}_{+}) &= (\hat{1} + \hat{R})(\hat{1} + \hat{K}^{+}_{-}) \\
(\hat{1} + \hat{K}^{-}_{+}) &= (\hat{1} + \hat{R})(\hat{1} + \hat{K}^{-}_{-})
\end{aligned}
\tag{7.68}
$$

Операторы K_+^+, K_-^- назовем квазиверхнетреугольными, поскольку интегрирование ведется по φ от 0 до π, K_-^+ и K_+^- – соответственно квазинижнетреугольными.

Связь операторов $\hat{S}$ и $\hat{R}$ описывается следующим образом. Для операторов $\hat{S}$ и $\hat{R}$ общего положения существует единственная пара факторизаций (7.67), (7.68), поэтому если мы знаем, к примеру, $\hat{R}$, то по нему находятся все 4 оператора $\hat{K}_\pm^\pm$ и, следовательно, и матрица оператора $\hat{S}$ и наоборот. Эти формулы очень похожи на формулы, связывающие оператор рассеяния с ядром нелокальной задачи Римана для одномерного нестационарного оператора Шредингера в работе С.В.Манакова [129] с тем отличием, что в [129] операторы действуют на функциях на прямой и факторизации – чисто треугольные.

Докажем теперь редукцию (7.49).

Пусть # – следующая операция сопряжения. Если $\hat{K}$ – оператор с ядром $K(\lambda,\mu)$, то $\hat{K}^\#$ – оператор с ядром $K(-\mu,-\lambda)$.

Дословно повторяя доказательство пункта 1 Теоремы 7.4, получаем, что функции $w_\pm(\lambda,\mu)$, задаваемые (7.28) и функции $h_\pm(\lambda,\mu)$, задаваемые (7.56), связаны соотношением

$$w_\pm(\lambda,\mu) = h_\mp(-\mu,-\lambda) \tag{7.69}$$

откуда следует, что

$$(\hat{1}+\hat{W}_+^+)^\# = (\hat{1}+\hat{K}_-^+), \qquad (\hat{1}+\hat{W}_+^-)^\# = (\hat{1}+\hat{K}_-^-),$$

$$(\hat{1}+\hat{W}_-^+)^\# = (\hat{1}+\hat{K}_+^+), \qquad (\hat{1}+\hat{W}_-^-)^\# = (\hat{1}+\hat{K}_+^-),$$

Поскольку

$$(\hat{1}+\hat{R}) = (\hat{1}+\hat{W}_+^+)^{-1}(\hat{1}+\hat{W}_-^+),$$

то

$$(\hat{1}+\hat{R})^\# = (\hat{1}+\hat{W}_-^+)^\#(\hat{1}+\hat{W}_+^+)^\# - 1 = (\hat{1}+\hat{K}_+^+)(\hat{1}+\hat{K}_-^+)^{-1} =$$

$$= \left[(\hat{1} + \hat{K}_-^+)(\hat{1} + \hat{K}_+^+)^{-1}\right]^{-1} = (\hat{1} + \hat{R})^{-1},$$

что и требовалось доказать.

7.5 Интегрирование уравнений Веселова-Новикова.

Подобно тому, как преобразование рассеяния для нестационарного оператора Шредингера и параболического оператора позволяет решать уравнение КП, результаты данного раздела позволяют решать задачу Коши для уравнений Веселова-Новикова в классе потенциалов, выходящих на фиксированую отрицательную константу $-\epsilon_0$. Действительно, если $u(z) \to -\epsilon_0$, при $|z| \to \infty$, то задача рассеяния для оператора $L = -4\partial_z\partial_{\bar{z}} + u(z)$ при нулевой энергии – то же самое, что задача рассеяния при энергии ϵ_0 для убывающего на бесконечности потенциала $u(z) + \epsilon_0$.

Тогда легко проверяется, что иерархия Веселова-Новикова порождает следующую динамику данных рассеяния (здесь мы считаем, что $\epsilon_0 = \kappa^2 > 0$).

$$\begin{gathered} R(\lambda, \lambda', \vec{t}) = e^{\sum_{j=1}^{\infty}(i\kappa)^{2j+1}(\lambda^{2j+1} + \bar{\lambda}^{2j+1} - (\lambda')^{2j+1} - (\bar{\lambda}')^{2j+1})t_j} R(\lambda, \lambda') \\ T(\lambda, \vec{t}) = e^{\sum_{j=1}^{\infty}(i\kappa)^{2j+1}(\lambda^{2j+1} + \bar{\lambda}^{2j+1} + \frac{1}{(\lambda')^{2j+1}} + \frac{1}{(\bar{\lambda}')^{2j+1}})t_j} T(\lambda) \end{gathered} \tag{7.70}$$

В заключение раздела в качестве примера рассмотрим линейный предел нашей конструкции при $R(\lambda, \lambda')$, $T(\lambda) \ll 1$ (Борновское приближение). В этом приближении условие потенциальности (7.49) приобретает вид:

$$R(\lambda, \lambda') = -R(-\lambda', -\lambda) \tag{7.71}$$

Полагая в (7.47) $\chi(\lambda, z) \equiv 1$, получаем:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{|\lambda|=|\lambda'|=1} \lambda(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}')R(\lambda, \lambda')e^{-\frac{i}{2}\left[(\lambda-\lambda')\bar{z} + (\bar{\lambda}+\bar{\lambda}')z\right]}|d\lambda||d\lambda'| +$$

$$+\iint \mathrm{sgn}(\lambda\bar{\lambda}-1)b(\lambda)e^{-\frac{i}{2}\left[\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)\bar{z}+\left(\bar{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\right)z\right]}\frac{(\lambda\bar{\lambda}+1)d\lambda_R d\lambda_I}{\lambda\bar{\lambda}}$$

Мы видим, что функция $R(\lambda,\lambda')$ определяет преобразование Фурье внутри круга радиуса 2 в импульсном пространстве, а функция $T(\lambda)$ – преобразование Фурье вне этого круга, что полностью согласуется с хорошо известным свойством амплитуды рассеяния в Борновском приближении: она зависит от преобразования Фурье потенциала в круге радиуса $2\sqrt{\epsilon_0}$.

8 Задача рассеяния при фиксированной отрицательной энергии.

Основные результаты этого раздела были получены автором совместно с С.П.Новиковым в работе [15].

В этом разделе мы будем работать при фиксированоой энергии $\epsilon_0 = -1$. Построение прямого преобразования рассеяния в этом случае принципиально ничем не отличается от случая положительной энергии, поэтому мы приведем получающийся ответ без вывода.

Теорема 8.1 *1. Пусть $u(z)$ -гладкая функция, удовлетворяющая условиям (7.3), и условию малости нормы (7.20). Тогда при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ существует единственное решение уравнения Шредингера*

$$L\Psi(\lambda,z) = \epsilon_0\Psi(\lambda,z), \quad \epsilon_0 = -1, \tag{8.1}$$

где

$$L = -4\partial_z\partial_{\bar{z}} + u(z), \tag{8.2}$$

с асимптотикой

$$\Psi(\lambda,z) = e^{\frac{1}{2}(\lambda\bar{z}+z/\lambda)}\chi(\lambda,z), \quad \chi(\lambda,z) = 1+O(1) \quad \textit{при } |z|\to\infty. \tag{8.3}$$

(В отличие от задачи при положительной энергии случай $|\lambda| = 1$ *не требует наложения дополнительных условий типа условия излучения). Это решение обладает следующими аналитическими свойствами:*

a) $\Psi(\lambda, z)$ *– непрерывная функция переменной* λ *на всей* λ*-плоскости кроме точки 0.*

b) При $|\lambda| \neq 1$ *имеет место уравнение*

$$\frac{\partial \Psi(\lambda, z)}{\partial \lambda} = T(\lambda)\Psi\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}, z\right), \tag{8.4}$$

где

$$T(\lambda) = \frac{\pi \operatorname{sgn}(\lambda\bar{\lambda} - 1)}{\bar{\lambda}} b(\lambda) \tag{8.5}$$

$$b(\lambda) = \frac{1}{4\pi^2} \iint e^{\frac{1}{2}\left(\left(\lambda - \frac{1}{\bar{\lambda}}\right)\bar{z} - \left(\bar{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\right)z\right)} u(z)\chi(\lambda, z) dz_R dz_I \tag{8.6}$$

2. *Данные рассеяния* $b(\lambda)$ *обладают следующей симметрией*

$$b\left(-\frac{1}{\bar{\lambda}}\right) = b(\lambda) \tag{8.7}$$

(условие потенциальности).

3. *Функция* $b(\lambda)$ *убывает при* $\lambda \to 0$ *и при* $\lambda \to \infty$ *быстрее любой степени* λ*.*

4. *Пусть потенциал* $u(z)$ *вещественен. Тогда задача обладает дополнительной симметрией*

$$\Psi\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}, z\right) = \bar{\Psi}(\lambda, z) \tag{8.8}$$

$$b\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}\right) = \bar{b}(\lambda), \tag{8.9}$$

и в этом случае уравнение (8.10) влечет

$$\frac{\partial \Psi(\lambda, z)}{\partial \lambda} = T(\lambda)\bar{\Psi}(\lambda, z), \tag{8.10}$$

$$\frac{\partial \chi(\lambda, z)}{\partial \lambda} = T(\lambda, z)\bar{\chi}(\lambda, z), \tag{8.11}$$

$$T(\lambda, z) = T(\lambda)e^{-\frac{1}{2}\left(\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)\bar{z}-\left(\bar{\lambda}-\frac{1}{\lambda}\right)z\right)} \tag{8.12}$$

т.е. $\chi(\lambda, z)$ – обобщенно аналитическая функция в смысле книги И.Н.Векуа [5].

В отличие от задачи при положительной энергии мы имеем только один тип "данных рассеяния", что достаточно естественно, поскольку при отрицательных энергиях нет аналога матрицы рассеяния.

Уравнения обратной задачи имеют вид.

$$\chi(\lambda, z) = 1 - \frac{1}{\pi}\iint \frac{T(\lambda', z)}{\lambda' - \lambda}\chi\left(\frac{1}{\bar{\lambda}'}, z\right) d\lambda'_R d\lambda'_I \tag{8.13}$$

Для случая данных $T(\lambda)$ общего вида с достаточно малой нормой уравнение (8.13) однозначно разрешимо и дает нам комплексный оператор Шредингера с магнитным полем. Оказывается , что если выполнены редукции потенциальности и вещественности, то условие малости нормы в обратной задаче можно отбросить, и она все равно остается одозначно разрешимой, однако при этом мы получаем лишь часть пространства потенциалов. Более точно

Теорема 8.2 *1) Пусть $b(\lambda)$ – некоторая кусочно-непрерывная функция на $\mathbb{C}P^1$ такая, что*

$$\frac{1}{\lambda^3}b(\lambda) \in L^p(D),$$

где D – единичный диск и выполены редукции потенциальности и вещественности (8.7) , (8.9). Тогда уравнения обратной задачи (8.13) однозначно разрешимы при всех z, соответствующий оператор Шредингера потенциален и вещественен, потенциал $u(z)$ – непрерываная функция, убывающая при $z \to \infty$.

2) Спектр оператора L лежит строго выше точки -1.

3) Если $b(\lambda)$ убывает при $\lambda \to 0$ и $\lambda \to \infty$ быстрее любой степени λ, то потенциал $u(z)$ – гладкий.

4) Если потенциал $u(z)$, построенный выше, убывает быстрее, чем $|z|^{-2-\delta}$, где δ– некоторое положительное число, то выполнено следующее нелокальное соотношение на единичной окружности

$$b(\lambda) - h_1(\lambda) = C = \text{const} \tag{8.14}$$

где $|\lambda| = 1$,

$$h_1(\lambda) = -\frac{1}{\pi} \iint \frac{b(\mu)T(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu_R d\mu_I. \tag{8.15}$$

Отметим, что более быстрое убывание потенциала на бесконечности влечет за собой появление дополнительных соотношений на данные рассеяния. В частности, если потенциал $u(z)$ убывает быстрее, чем$|z|^{-3-\delta}$, то имеет место соотношение

$$\lambda^2 \frac{\partial}{\partial \lambda} b(\lambda) - h_2(\lambda) = A + B\lambda^2, \quad |\lambda| = 1, \tag{8.16}$$

где A, B – некоторые константы, левая часть (8.16) непрерывна при $|\lambda| = 1$, фунция $h_2(\lambda)$ задается формулой

$$h_2(\lambda) = -\frac{1}{\pi} \iint \frac{[-\mu^2 \partial_\mu T(\mu)]b(\mu) + T(\mu)T(1/\mu)(h_1(\mu) + C)}{\mu - \lambda} d\mu_R d\mu_I.$$

Докажем пункт 1. Убедимся что уравнение обратной задачи (8.13) однозначно разрешимо. Поскольку оператор в уравнении (8.13) компактен, то достаточно проверить, что оно не имеет однородных решений. Предположим противное. Пусть $\chi_0(\lambda, z_0)$ – однородное решение при некотором z_0. Из редукции потенциальности (8.7) следует, что $\chi_0(0, z_0)^2 = \chi_0(\infty, z_0)^2 = 0$. Пусть $\chi_1(\lambda, z_0) = \chi_0(\lambda, z_0) \pm \bar{\chi}_0(1/\bar{\lambda}, z_0)$ (знак + или - выбираем так , чтобы $\chi_1(\lambda, z_0)$ не оказалась тождественным нулем). Тогда

из редукции вещественности (8.7) следует, что

$$\frac{\partial \chi_1(\lambda, z_0)}{\partial \lambda} = \pm T(\lambda, z)\bar{\chi}_1(\lambda, z_0), \tag{8.17}$$

т.е. $\chi_1(\lambda, z_0)$ – обобщенно аналитическая функция на $\mathbb{C}P^1$ без особенностей и с нулями в точках 0 и ∞. Однако в силу принципа аргумента для числа нулей обобщенно аналитических функций без особенностей [5] это невозможно, и мы пришли к противоречию. Заметим, что попутно мы доказали, что при $|\lambda| = 1$ волновая функция $\Psi(\lambda, z)$ вещественна и никогда не обращается в 0.

Докажем теперь, что спектр L лежит выше точки $\epsilon_0 = -1$ и одновременно докажем утверждение о положительности оператора L из Теоремы 6.1. Это будет следовать из существования строго положительных нигде не обращающихся в 0 и растущих при $z \to \infty$ решений уравнения $L\Psi(z) = \epsilon_0\Psi(z)$ ($L\Psi(z) = 0$ в конечнозонном случае). В качестве $\Psi(z)$ мы возьмем

$$\Psi(z) = \oint\limits_{|\lambda|=1} \Psi(\lambda, z)|d\lambda|$$

в убывающем случае и

$$\Psi(z) = q \oint\limits_b \Psi(\lambda, z)d\rho(\lambda)$$

в конечнозонном случае. Здесь интеграл берется по b-овалу, $\rho(\lambda)$ – произвольная положительная мера на b, q – одно из чисел ± 1, $\pm i$,

$$\Psi(z) \in \mathbb{R}, \quad \Psi(z) > 0, \quad \text{при всех} \quad z \in \mathbb{C}. \tag{8.18}$$

Используя (8.18), оценку на положение спектра можно извлечь из следующих лемм, воспроизводящих некоторые элементарные рассуждения из известной книги Куранта-Гильберта [51], хотя в таком виде леммы в [51] не сформулированы.

Лемма 8.1 *Пусть* $u(x_1, ..., x_n)$ *– гладкий вещественный потенциал в* $\mathbb{R}^n$ *такой, что* $u > \text{const}$ *при* $|x|^2 > r_0$ *и найдется гладкое вещественное положительное решение* Ψ *уравнения*

$$L\Psi = -\Delta\Psi + u\Psi = \epsilon_0, \quad \Psi > 0.$$

Тогда для ϵ_{min} *имеется равенство (8.20) (см. ниже) и всегда* $\epsilon_0 \leq \epsilon_{min}$*, где* ϵ_{min} *– уровень основного состояния оператора* L *в* $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n)$*.*

Доказательство. Пусть S – область в $\mathbb{R}^n$, содержащая шар большого радиуса $r \to \infty$. Энергия ϵ_{min} определяется как предел минимумов функционалов при $r \to \infty$

$$\min_{S,\varphi} \int\!\dots\!\int_S (|\nabla\varphi|^2 + u\varphi^2) d^n x = \min_S \epsilon_{min}(S),$$

$$\int\!\dots\!\int_S \varphi^2 d^n x = 1, \quad \varphi\Big|_{\partial S} = 0, \quad \varphi \geq 0.$$

Пусть $\varphi = \eta\Psi$, где $\eta = 0$ на границе ∂S, $\eta \geq 0$. Мы имеем цепочку равенств

$$\int\!\dots\!\int_S (|\nabla\varphi|^2 + u\varphi^2) d^n x = \int\!\dots\!\int_S (-\varphi\Delta\varphi + u\varphi^2) d^n x =$$

$$= \int\!\dots\!\int_S [-\eta\Psi\Delta(\eta\Psi) + \eta^2\Psi^2 u] d^n x =$$

$$= \int\!\dots\!\int_S [\eta\Delta\eta\Psi^2 - 2(\eta\nabla\eta\Psi\nabla\Psi) - \eta^2\Psi\Delta\Psi + u\eta^2\Psi^2] d^n x =$$

$$= \int\!\dots\!\int_S [-\eta\nabla(\nabla\eta\Psi^2) + \eta^2\Psi(-\Delta\Psi + u\Psi)] d^n x =$$

$$= \int\!\dots\!\int_S |\nabla\eta|^2\Psi^2 d^n x + \epsilon_0 \int\!\dots\!\int_S \eta^2\Psi^2 d^n x. \tag{8.19}$$

Отсюда получаем

$$\epsilon_{min}(S) = \int\!\dots\!\int_S \left|\nabla\frac{\varphi}{\Psi}\right|^2 \Psi^2 d^n x + \epsilon_0, \tag{8.20}$$

где φ – собственная функция основного состояния области S. Лемма 8.1 доказана.

Лемма 8.2 *Пусть при условиях Леммы 8.1 потенциал u – быстроубывающий в $\mathbb{R}^n$ и Ψ не совпадают с собственной функцией основного состояния в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\epsilon_0 < \epsilon_{min}$.*

Доказательство. При этих условиях можно взять $S = \mathbb{R}^n$; пусть φ – собственная функция основного состояния $L\varphi = \epsilon_{min}$. Мы знаем, что $\varphi > 0$ и $\varphi \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n)$. Из цепочки равенств (8.19) мы получим (8.20)

$$(L\varphi, \varphi) = \epsilon_{min}(\varphi, \varphi) = \epsilon_{min} = \epsilon_0 + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \dots \int \Psi^2 \nabla \left(\frac{\varphi}{\Psi}\right)^2 d^n x,$$

отсюда следует Лемма 8.2 .

Лемма 8.3 *Пусть при условиях Леммы 8.1 потенциал u – периодический в $\mathbb{R}^n$ и Ψ – гладкая положительная собственная функция $L\Psi = \epsilon_0 \Psi$, не являющаяся основным состоянием. Тогда $\epsilon_0 < \epsilon_{min}$.*

Доказательство. Пусть S_m –параллелограмм в $\mathbb{R}^n$ со сторонами, кратными базисным векторам решетки $T_1, ..., T_n$ с кратностями $m_1, ..., m_n$, $\min(m_1, ..., m_n) \to \infty$. Функция φ основного состояния в $\mathbb{R}^n$ периодична с периодами $T_1, ..., T_n$, $\varphi > 0$ и $L\varphi = \epsilon_{min}\varphi$. Пусть S_1 – элементарная ячейка; для площади S_m имеем $|S| = m_1 \cdot, ..., \cdot m_n |S_1|$.

Основное состояние общее для всех областей S_m и совпадает с φ , оно же – основное состояние в $\mathbb{R}^n$. Так как φ периодична, в цепочке равенств (8.19) также нет граничных членов для областей S_m . Отсюда мы имеем для S_1

$$\epsilon_{min} = \epsilon_0 + \int\limits_{S_1} \dots \int \Psi^2 \left(\nabla \left(\frac{\varphi}{\Psi}\right)\right)^2 d^n x > \epsilon_0.$$

Здесь φ нормирована в области S_1 .

Лемма 8.3 доказана.

Лемма 8.4 *Пусть потенциал u – вещественный, гладкий, квазипериодический и φ – основное состояние оператора L с той же группой*

периодов, что и и. Если существует гладкое положительное решение $\Psi > 0$ *уравнения* $L\Psi = \epsilon_0\Psi$ *, где* Ψ *не совпадает с* φ*, то* $\epsilon_0 < \epsilon_{min}$.

Доказательство также вытекает из цепочки неравенств (8.19), (8.20), где вместо интеграла по ячейке S_1 взято боровское среднее. Теорема 6.1 и пункт 2 Теоремы 8.2 доказаны.

Доказательство пункта 3 ничем не отличается от случая положительной энергии.

Докажем пункт 4. Мы убедились, что $\chi(z,\lambda)$ ограничена на всем пространстве z, λ и при больших z равномерно по λ стремится к 1. Введем дополнительную функцию

$$h(l,\lambda) = \frac{1}{4\ \pi^2}\iint e^{\frac{1}{2}[l\bar{z}-\bar{l}z]}u(z)\chi(z,\lambda)dz_R dz_I \tag{8.21}$$

Функция $h(l,\lambda)$ непрерывна, ограничена и даже липшициева по l, λ с показателями ϵ_1, ϵ_2, где $\epsilon_1 < \epsilon$, $\epsilon_2 < 1$. При $l = \lambda - 1/\bar{\lambda}$ мы получаем функцию $b(\lambda)$

$$b(\lambda) = h(\lambda - 1/\bar{\lambda}, \lambda) \tag{8.22}$$

Из (8.4) вытекает следующее уравнение для h:

$$\frac{\partial h(l,\lambda)}{\partial\bar{\lambda}} = T(\lambda)h(l + 1/\bar{\lambda} - \lambda,\ 1/\bar{\lambda}) \tag{8.23}$$

(аналоги (8.23) для многомерного случая активно используются в [63], [132], [87]).

В частности, для функции $\tilde{h}(\lambda) = h(0,\lambda)$ получаем

$$\frac{\tilde{h}(\lambda)}{\partial\bar{\lambda}} = T(\lambda)b(1/\bar{\lambda}) \tag{8.24}$$

С другой стороны, при $|\lambda| = 1$ $\ b(\lambda) = \tilde{h}(\lambda)$. Интегрируя (8.23), получаем:

$$b(\lambda) + \frac{1}{\pi}\iint \frac{T(\mu)b(1/\bar{\mu})d\mu_R d\mu_I}{\mu - \lambda} = \text{const}, \quad |\lambda| = 1. \tag{8.25}$$

Доказательство Теоремы 8.2 завершено.

Дополнение 1. Представляют интерес два предельных случая изложенной схемы.

I. *Данные рассеяния при нулевой энерги.* Пусть $\epsilon_0 \to 0$, $\mu_+ = \kappa\lambda$, $\mu_- = 1/(\kappa\lambda)$, $\epsilon_0 = -4\kappa^2$. При $\epsilon_0 \to 0$ контур $|\lambda| = 1$ стягивается в точку, которую мы обозначим B_0, а сфера Римана спектрального параметра распадается на две S_+ и S_- с координаиами μ_+ и μ_- соответственно, пересекающиеся по точке B_0, $\mu_+ = \mu_- = 0$. Редукции (8.7), (8.9) переходят в соотношения $b(-\mu) = \bar{b}(\mu)$ и $b(\mu_+) = \bar{b}(\mu_-)$. Уравнения обратной задачи приобретают вид:

$$\frac{\partial\Psi(z,\mu_\pm)}{\partial\bar{\mu}_\pm} = T(\mu_\pm)\Psi(z,\bar{\mu}_\mp) \tag{8.26}$$

где

$$T(\mu_\pm) = \pm\pi b(\mu_\pm)/\bar{\mu}_\mp,$$
$$\Psi(z,\mu_\pm) = e^{\mp\mu_\pm z_\pm}, \quad \mu_\pm \to \infty, \quad z_- = \bar{z}, \quad z_+ = z.$$

Если потребовать $\mathcal{L}_p$-интегрируемость функции $T(\mu)$ с $p > 2$ в окрестности 0 вместе с достаточно быстрым убыванием на бесконечности, то доказательства несингулярности потенциала и отсутствия дискретного спектра в точности воспроизводят соответствующие рассуждения Теоремы 8.2. Однако при этом мы получаем потенциалы не общего положения.

II. *Предельный переход к параболическому оператору.* Пусть $\epsilon_0 = -4\kappa^2 \to -\infty$, функция $T(\lambda)$ сосредоточена в окрестности точек $\lambda = \pm i$ размера порядка $1/\kappa$, $X = x$, $Y = y/\kappa$, $\mu = \kappa(\lambda + i)$. Тогда при $\kappa \to \infty$ функция $\Psi_1(X,Y,\mu) = e^{-2\kappa^2 Y}\Psi(x,\lambda)$ переходит в собственную функцию параболического оператора

$$L_1 = -\partial_X^2 + 4\partial_Y + u(X,Y), \tag{8.27}$$

$$L_1\Psi_1(X,Y,\mu) = 0. \tag{8.28}$$

Так же, как и в теории оператора Шредингера, применение теории обобщенно-аналитических функций позволяет доказать несингулярность потенциала $u(X,Y)$ без предположений о малости нормы $T_1(\mu)$ (смотри раздел 12). Отметим, что локальная форма $\bar\partial$-проблемы типа (8.11) для параболического оператора использовалась в [53], однако однозначная разрешимость без преположения о малости нормы в работе [53] отмечена не была.

Дополнение 2. Отрицательные энергии выше основного состояния. Для энергий выше основного состояния ситуация сложнее и правильная постановка задачи рассеяния до сих пор не ясна. Тем не менее, изложим некоторые предварительные наблюдения.

Пусть энергия ϵ_0 не является уровнем дискретного спектра оператора $L = -\Delta + u$. Определенные выше собственные функции $\Psi(z,\lambda)$ семейства F при $\epsilon = \epsilon_0 < 0$ и "данные обратной задачи" $T(\lambda)$ вводятся по-прежнему и обладают группой редукций (8.7), (8.9), однако, обе функции T и Ψ уже не являются гладкими во всей λ-плоскости. Как показывает сопоставление с [63], [64], эти функции в ситуации общего положения обладают набором полюсов вдоль кривых Γ_j:

$$f_j(\lambda) = 0, \;\; T = T_{-1}/f(\lambda) + T_0, \;\; f_j = \bar f_j, \;\; \Psi = \Psi_{-1}/f_j(\lambda) + \Psi_0 \qquad (8.29)$$

где $T_{-1}, T_0, \Psi_{-1}, \Psi_0$ – гладкие функции.

Функция Ψ всюду, где T гладко, по-прежнему удовлетворяет уравнению (8.10), т.е. обобщенно аналитична

$$\partial\Psi/\bar\lambda = T\bar\Psi. \qquad (8.30)$$

Набор кривых Γ_j в λ-плоскости инвариантен относительно группы редукций $\lambda \to -\lambda$, $\lambda \to 1/\bar\lambda$,

В случае общего положения имеем

$$|\partial f_j/\bar\lambda| \neq 0 \quad \text{если } f_j = 0. \qquad (8.31)$$

Для $\epsilon > \epsilon_{min}$, в силу доказанного выше, функция $\Psi(z,\lambda)$ обязана иметь нули при $|\lambda| = 1$ и некоторых значениях z. При всех z нули $\Psi(z,\lambda)$ лежат в компактной части λ-плоскости. Легко видеть, что многообразие полюсов $\Gamma = \cup\Gamma_j$ компактно и не зависит от z.

Из уравнения (8.10) следует, что все нули Ψ, расположенные вне многообразия полюсов Γ, имеют положительную кратность. Поэтому, при тех z, при которых Ψ имеет нули вне Γ, функция Ψ_{-1} обязана иметь нули на кривых Γ отрицательной кратности. При $z \to \infty$ нули Ψ положительной кратности подходят к нулям Ψ_{-1} отрицательной кратности. Обозначим нули через $\gamma_j^{\pm}(z)$

$$\Psi_{-1} = 0 \quad \text{при } \lambda = \gamma_j(z), \quad f_j = 0.$$

Из уравнения (8.10) и разложения (8.29) легко следует такое равенство для T_{-1}:

$$\frac{1}{T_{-1}}\frac{\partial f_j}{\partial\bar{\lambda}} = -\frac{\bar{\Psi}_{-1}}{\Psi_{-1}} = -e^{-2ig(\lambda)}$$

Отсюда следует, в частности, ограничение

$$|T_{-1}| = \frac{\partial f_j}{\partial\bar{\lambda}} \neq 0, \quad f_j = 0 \tag{8.32}$$

Наиболее естественным расположением является "гнездо"

$$[0 \subset \Gamma_{-N} \subset \Gamma_{-N+1} \subset \ldots \subset \Gamma_{-1} \subset S^1 \subset \Gamma_1 \subset \ldots \subset \Gamma_N],$$

где S^1 – это единичная окружность $|\lambda| = 1$, все Γ_j инвариантны относительно преобразования $\lambda \to -\lambda$, Γ_{-j} получается из Γ_j преобразованием $\lambda \to 1/\bar{\lambda}$. По-видимому, число вращения функции $T_{-1} \neq 0$ вдоль контура Γ_j равно 1.

Имеет место следующая

Лемма 8.5 *Для того, чтобы уравнение (8.10) в окрестности каждой точки контура Γ_j локально имело совокупность решений, зависящих*

от двух вещественнозначных функций одной переменной (точки контура), необходимо и достаточно кроме условия (8.32) выполнение следующих соотношений (8.34)

Пусть в окрестности кривой Γ_j задана полугеодезическая система координат α, β, причем α – расстояние до Γ_j, β – натуральный параметр на Γ_j, линии $\beta = \mathrm{const}$ – отрезки прямых, перпендикулярных Γ_j. С учетом (8.29), (8.32) получаем

$$\Psi = e^{ig(\beta)}[\varphi_{-1}(\beta)/\alpha + \varphi_0(\beta) + \varphi_1(\beta)\alpha + O(\alpha^2)],$$

$$T = e^{i(2g(\beta)+h(\beta))}[-1/2\alpha + \tau_0(\beta) + \tau_1(\beta)\alpha + O(\alpha^2)], \qquad (8.33)$$

$$d\lambda = e^{ih(\beta)}(d\alpha + id\beta) \text{ при } \alpha = 0$$

где $g(\beta)$, $h(\beta)$, и $\varphi_{-1}(\beta)$ – вещественные функции. Тогда для того, чтобы произвольное решение уравнения (8.10) в окрестности каждой точки контура Γ_j зависело от двух вещественных функций одной переменной, необходимо потребовать, чтобы выполнялось

$$\mathrm{Re}\,\tau_0(\beta) = K(\beta)/4, \qquad K(\beta) = -(\partial e_\beta/\partial\beta, e_\alpha),$$

$$\mathrm{Im}\,\tau_1(\beta) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g(\beta)}{\partial\beta^2} + \frac{1}{4}\frac{\partial K(\beta)}{\partial\beta} \qquad (8.34)$$

e_β – касательный вектор к Γ_j, e_α – нормальный, $e_\alpha \times e_\beta = 1$. Произвольными функциями, от которых зависит локальное решение, являются $\varphi_{-1}(\beta)$ и $\mathrm{Im}\,\varphi_1(\beta)$. Если условия (8.34) выполнены, то локальное решение (8.10) зависит лишь от одной вещественнозначной функции.

Для решения обратной задачи выполнение условия (8.34) по-видимому, необходимо. Если условие (8.34) не выполнено, то обратная задача, вообще говоря, не будет разрешима для уровней энергии вне дискретного спектра.

9 Рациональные солитоны уравнений Веселова-Новикова – безотражательные при фиксированной энергии двумерные потенциалы.

В данном разделе, если не оговорено обратное, мы излагаем результаты работы автора [14].

При изучении обратной задачи рассеяния для двумерного потенциала Шредингера при фиксированной энергии мы предполагаем, что интегральное уравнение (7.41) не имеет однородных решений ни при каких значениях спектрального параметра λ. Как известно, если потенциал $u(x, y)$ достаточно велик, то это не так. Так, например, в работе С.П.Новикова и автора [15] было показано, что если мы рассматриваем задачу рассеяния при фиксированной отрицательной энергии $\epsilon_0 < 0$, то необходимым условием отсутствия сингулярности является положительность оператора $L - \epsilon_0$, т.е. в спектре оператора Шредингера нет точек ниже ϵ_0 (см. раздел 8).

Вопрос о том, как правильно определить "данные рассеяния" в случае, когда существуют однородные решения интегрального уравнения (и, как следствие, сингулярности волновой функции) до сих пор остается открытым (частичные результаты на этот счет были получены в [15], см. также раздел 8). Дело в том, что в отличие от волновой функции нестационарного одномерного оператора Шредингера (ассоциированного с КП1) волновая функция двумерного оператора Шредингера не голоморфна на многообразии $p_x^2 + p_y^2 = \epsilon_0$ и особенности не обязаны быть полюсами, а могут иметь более сложное устройство. Более того, для вещественных потенциалов общего положения мы имеем не особые точки, а целые особые контура (подробнее этот вопрос обсуждается в разделе 8).

Тем не менее можно попытаться построить точно решаемые потен-

циалы, действуя по аналогии с теорией КП1. Предположим, что "данные рассеяния" $R(\lambda, \bar{\lambda})$ и $T(\lambda)$ тождественно равны 0, волновая функция $\Psi(\lambda, x, y)$ – рациональная функция спектрального параметра λ (для простоты мы будем рассматривать случай общего положения, когда все полюса простые), и в полюсах выполнены соотношения (9.4), аналогичные выведенным в [99] для КП1. Пусть $\epsilon_0 > 0$. Если при этом выполнены некоторые дополнительные соотношения ($\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ - редукции), описанные ниже, то получаются неособые вещественные потенциалы, убывающие на бесконечности как квадрат расстояния от начала координат, прозрачные при энергии ϵ_0. Прозрачность (безотражательность) означает, что "физические" волновые функции явно вычисляются при $p_x^2 + p_y^2 = \epsilon_0$ и имеют асимптотику

$$\Psi(\vec{p}, x, y) = e^{i(p_x x + p_y y)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right) \qquad \text{при } |x|^2 + |y|^2 \to \infty.$$

(Напомним, что рассеянная волна убывает в размерности 2 как $O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+y^2}}\right)$).

Эти решения отвечают рациональным солитонам уравнений Веселова-Новикова. Они были построены независимо автором [14] и В.Е.Захаровым [32] .

9.1 Алгебраическая схема построения рациональных солитонов.

Первый шаг – построение операторов Шредингера с рациональными коэффициентами (в общем случае комплексных и с ненулевым магнитным полем).

Теорема 9.1 *Пусть*

$$\Psi(\lambda, z) = e^{\theta(\lambda, z)} \chi(\lambda, z), \tag{9.1}$$

$$\chi(\lambda, z) = 1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{\chi_j^{(-1)}(z)}{\lambda - \lambda_j}, \qquad \textit{где} \tag{9.2}$$

$$\theta(\lambda, z) = \frac{ik}{2}(\lambda\bar{z} + \frac{z}{\lambda}),$$

функции $\chi_j^{(-1)}(z)$ *определены как решения системы линейных уравнений*

$$\chi_j^{(0)}(z) = (\kappa_j(z) + \gamma_j)\chi_j^{(-1)}(z), \tag{9.3}$$

где $\lambda_j,\ j = 1, \ldots, N$ *– набор точек в* $\bar{\mathbb{C}}$ *таких, что* $\lambda_j \neq 0, \infty$,

$$\kappa_j(z) = -\frac{\partial}{\partial\lambda}\theta(\lambda_j, z) = -\frac{ik}{2}(\bar{z} + \frac{z}{\lambda_j^2}),$$

γ_j *– произвольные комплексные константы;* $\chi_j^{(0)}$ *– коэффициенты разложения при* $(\lambda - \lambda_j)^0$ *функции* $\chi(\lambda, z)$ *в точке* λ_j*:*

$$\chi(\lambda, z) = \frac{\chi_j^{(-1)}(z)}{\lambda - \lambda_j} + \chi_j^{(0)}(z) + \chi_j^{(1)}(z)(\lambda - \lambda_j) + o((\lambda - \lambda)^2).$$

В терминах коэфициентов разложения функции $\Psi(\lambda, z)$ *в окрестности точки* λ_j

$$\Psi(\lambda, z) = \frac{\Psi_j^{(-1)}(z)}{\lambda - \lambda_j} + \Psi_j^{(0)}(z) + \Psi_j^{(1)}(z)(\lambda - \lambda_j) + o((\lambda - \lambda)^2)$$

условие (9.3) записывается как

$$\Psi_j^{(0)}(z) = \gamma_j\Psi_j^{(-1)}(z). \tag{9.4}$$

Тогда $\Psi(\lambda, z)$ *– собственная функция оператора*

$$L = -4\partial_z\partial\bar{z} + V(z)\partial_z + u(z),$$

$$L\Psi(\lambda, z) = k^2\Psi(\lambda, z),$$

где потенциалы $V(z)$, $u(z)$ *имеют вид:*

$$V(z) = 4\partial\bar{z}\ln\left(1 - \sum_{j=1}^{N}\frac{\chi_j^{(-1)}(z)}{\lambda_j}\right), \tag{9.5}$$

$$u(z) = -4\partial_z\partial\bar{z}\ln\det A, \tag{9.6}$$

$A = (a_{kj})$ – $N \times N$ *матрица с элементами*

$$\begin{aligned} a_{kj} &= \frac{1}{\lambda_j - \lambda_k}, \qquad \textit{при } i \neq j \\ a_{kk}(z) &= \kappa_k(z) + \gamma_k. \end{aligned} \tag{9.7}$$

Если все $|\lambda_j| \neq 1$, *то функции* $V(z)$, $u(z)$ *убывают при* $|z| \to \infty$ *как* $O(1/|z|^2)$.

Доказательство.

1. Перепишем (9.3) в виде замкнутой системы уравнений на $\chi_j^{(-1)}(z)$. Разлагая (9.2) вблизи λ_j, получаем:

$$\chi_j^{(0)}(z) = 1 + \sum_{k\neq j}^{N} \frac{\chi_k^{(-1)}(z)}{\lambda_j - \lambda_k}. \tag{9.8}$$

Подставляя (9.8) в (9.3) , получаем:

$$1 + \sum_{k\neq j}^{N} \frac{\chi_k^{(-1)}(z)}{\lambda_j - \lambda_k} = (\kappa_j(z) + \gamma_j)\chi_j^{(-1)}(z),$$

т.е.

$$\sum_k a_{jk}(z)\chi_j^{(-1)}(z) = 1, \qquad j = 1, \ldots, N,$$

где $a_{jk}(z)$ определены формулой (9.7). Мы имеем N уравнений на N неизвестных, причем при $|z| \to \infty$ эта система диагональна и однозначно разрешима в главном порядке. Тем самым, однозначно разрешима в точках общего положения. Если часть точек λ_j лежит на единичной окружности, то матрица A диагональна в главном порядке при $|z| \to \infty$ вдоль лучей общего положения, что достаточно для нас.

2. Легко вычислить асимптотику $\chi(\lambda, z)$ в точках 0 и ∞:

$$\chi(\lambda, z) = 1 + \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{N} \chi_j^{(-1)}(z) + O(\frac{1}{\lambda^2}) \qquad \text{при } \lambda \to \infty, \tag{9.9}$$

$$\chi(\lambda, z) = 1 - \lambda \sum_{j=1}^{N} \frac{\chi_j^{(-1)}(z)}{\lambda_j} + O(\lambda) \qquad \text{при } \lambda \to 0. \tag{9.10}$$

3. Будем искать оператор L, для которого $\Psi(\lambda, z)$ – собственная функция, в следующем виде:

$$L = -4\partial_z\partial\bar{z} + v(z)\partial_z + w(z)\partial\bar{z} + u(z),$$

где $v(z)$, $w(z)$, $u(z)$ – пока неизвестные функции. Мы ищем оператор L такой, что $L\Psi(\lambda, z) = k^2\Psi(\lambda, z)$, т.е. $\tilde{\chi}(\lambda, z) = 0$, где

$$\tilde{\chi}(\lambda, z) = e^{-\theta(\lambda,z)}(L - k^2)e^{\theta(\lambda,z)}\chi(\lambda, z).$$

Условие $\tilde{\chi}(\lambda, z) = O(\lambda)$ при $\lambda \to 0$ дает нам (9.5).

Условие $\tilde{\chi}(\lambda, z) = O(1/\lambda)$ при $\lambda \to \infty$ дает нам

$$u(z) = 2ik\partial_z \left[\sum_{j=1}^{N} \chi_j^{(-1)}(z)\right].$$

Докажем теперь формулу (9.6). Для начала заметим, что

$$\begin{pmatrix} \chi_1^{(-1)}(z) \\ \vdots \\ \chi_N^{(-1)}(z) \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

и, следовательно,

$$\sum_{j=1}^{N} \chi_j^{(-1)}(z) = \mathrm{tr} \left[[1, \ldots, 1]A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right] =$$

$$= \mathrm{tr}\left[\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} [1,\dots,1]A^{-1}\right] = \mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} A^{-1}\right].$$

Введем новую матрицу $\tilde{A}(w,z) = (\tilde{a}_{ij}(w,z))$

$$\tilde{a}_{ij}(w,z) = e^{-\frac{ik}{2}(\bar{z}-\bar{w})(\lambda_j-\lambda_k)} a_{kj}(w).$$

Очевидно, что

$$\det \tilde{A}(w,z) = \det A(w), \tag{9.11}$$

$$\tilde{A}(z,z) = A(z),$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{w}} \tilde{A}(w,z)\Big|_{w=z} = -\frac{ik}{2} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \ln\det A(w,z) = \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \ln\det A(w,z)\Big|_{w=z} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \ln\det \tilde{A}(w,z)\Big|_{w=z} = \mathrm{tr}\left[\left(\frac{\partial}{\partial \bar{w}}\tilde{A}(w,z)\right)\tilde{A}(w,z)^{-1}\right]\Big|_{w=z} =$$

$$= -\frac{ik}{2}\,\mathrm{tr}\left[\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \tilde{A}(w,z)^{-1}\right]\Bigg|_{w=z} =$$

$$= -\frac{ik}{2}\,\mathrm{tr}\left[\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} A(z)^{-1}\right] = -\frac{ik}{2}\sum_{j=1}^{N} \chi_j^{(-1)}(z), \tag{9.12}$$

то

$$u(z) = 2ik\left(-\frac{2}{ik}\right)\partial_z\partial\bar{z}\ln\det A = -4\partial_z\partial\bar{z}\ln\det A.$$

Теорема 9.1 доказана.

9.2 Редукции на данные рассеяния.

Следующий шаг в соответствии с общей схемой – выделение чисто потенциальных операторов, т.е. таких, что $v(z) \equiv 0$ (магнитный член отсутствует).

Лемма 9.1 *Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ – набор "спектральных данных" из Теоремы 9.1 такой, что при всех j $|\lambda_j| \neq 1$ $v(z) \equiv 0$. Тогда расположение полюсов λ_j симметрично относительно отражения $\lambda_j \to -\lambda_j$, т.е. число N четно и можно выбрать их нумерацию так, что $\lambda_{2j} = -\lambda_{2j-1}$, $j = 1, \dots, N/2$.*

Доказательство. Асимптотика $v(z)$ при $|z| \to \infty$ несложно вычисляется:

$$v(z) = \frac{v_2(z/|z|)}{|z|^2} + \frac{v_3(z/|z|)}{|z|^3} + \dots, \tag{9.13}$$

где:

$$v_2(z/|v|) = -2ik \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\kappa_j^2(z/|z|)\lambda_j} + \frac{v_3(z/|z|)}{|z|^3} + \dots. \tag{9.14}$$

Если $v(z) \equiv 0$, то это означает независимое обнуление всех членов $v_k(z/|z|)$, поскольку их степени однородности различны, т.е. $v_2(z/|z|) \equiv 0$. Введем новую переменную $w = z/|z|$

$$\kappa_j(w) = -\frac{ik}{2}\left(\frac{1}{w} - \frac{w}{\lambda_j^2}\right).$$

Аналитическое продолжение $\frac{1}{\kappa_j^2(w)}$ имеет двойные полюса в точках $\pm\lambda_j$, поэтому $v_2(w) \equiv 0$ при $|w| = 1$ тогда и только тогда, когда эти полюса взаимно сокращаются, т.е. каждому λ_j соответствует $\lambda_k = -\lambda_j$.

Лемма доказана.

Условия Леммы 9.1 являются необходимыми, но еще не достаточными, поскольку они гарантируют обращение в 0 лишь $v_2(z/|z|)$.

Лемма 9.2 *Пусть* $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ – *набор "спектральных данных" такой, что* $v(z) \equiv 0$ *и нумерация* λ_j *выбрана так, что* $\lambda_{2j} = -\lambda_{2j-1}$, $j = 1, \ldots, N/2$. *Тогда* $\gamma_{2j-1} - \gamma_{2j} = 1/\lambda_{2j-1}$ *для всех* j.

Доказательство. Вычислим следующий член разложения $v_3(z/|z|)/|z|^3$ в предположении $v(z) \equiv 0$:

$$\frac{v_3(z/|z|)}{|z|^3} = 4\partial_{\bar z}\left[\sum_{j=1}^{N}\frac{\gamma_j}{\lambda_j\kappa_j^2(z)} + \sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}\frac{1}{\kappa_j(z)\kappa_k(z)\lambda_j(\lambda_k-\lambda_j)}\right].$$

Принимая во внимание, что $\kappa_{2j}(z) = \kappa_{2j-1}(z)$, вычислим коэффициент перед $1/\kappa_{2j-1}^3(z)$ в разложении для $v(z)$. Получаем

$$\frac{v_3(z/|z|)}{|z|^3} = 4ik\sum_{j=1}^{N/2}\frac{\gamma_{2j-1}-\gamma_{2j}}{\lambda_{2j-1}\kappa_{2j-1}^3(z)} - \frac{1}{\lambda_{2j-1}^2\kappa_{2j-1}^3(z)} + \ldots,$$

где ... означает члены, содержащие смешанные произведения. Аналогично с предыдущей леммой проверяется функциональная независимость отдельных слагаемых, поэтому из $v_3(z/|z|) \equiv 0$ вытекает $\gamma_{2j-1} - \gamma_{2j} = 1/\lambda_{2j-1}$, что и требовалось доказать.

Убедимся, что найденные необходимые условия являются и достаточными.

Лемма 9.3 *Пусть "спектральные данные"* $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$, $|\lambda_j| \neq 1$ *удовлетворяют соотношениям:*

$$\lambda_{2j} = -\lambda_{2j-1}, \quad \gamma_{2j-1} - \gamma_{2j} = 1/\lambda_{2j-1}, \quad j = 1, \ldots, N/2.$$

Тогда оператор L *не содержит магнитного члена, т.е.* $v(z) \equiv 0$.

Доказательство. Рассмотрим следующую 1-форму на $\mathbb{C}$:

$$\omega = \Psi(\lambda, z)\Psi(-\lambda, z)\frac{d\lambda}{\lambda} = \chi(\lambda, z)\chi(-\lambda, z)\frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Эта форма мероморфна по λ на $\bar{\mathbb{C}}$, имеет полюса первого порядка в точках $0, \infty$. Убедимся, что вне этих точек все вычеты формы равны 0. Рассмотрим, например, точку λ_{2j-1}. Выпишем разложение $\Psi(\lambda, z)$ в точках λ_{2j-1} и λ_{2j}:

$$\Psi(\lambda, z) = \frac{\Psi_{2j-1}^{(-1)}(z)}{\lambda - \lambda_{2j-1}} + \Psi_{2j-1}^{(0)}(z) + \dots\ , \qquad \lambda \to \lambda_{2j-1},$$

$$\Psi(\lambda, z) = \frac{\Psi_{2j}^{(-1)}(z)}{\lambda + \lambda_{2j-1}} + \Psi_{2j}^{(0)}(z) + \dots\ , \qquad \lambda \to \lambda_{2j}.$$

Учитывая (9.4)

$$\Psi(\lambda, z) = \Psi_{2j-1}^{(-1)}(z) \left[\frac{1}{\lambda - \lambda_{2j-1}} + \gamma_{2j-1} + O(1)\right]\ , \qquad \lambda \to \lambda_{2j-1},$$

$$\Psi(-\lambda, z) = -\Psi_{2j}^{(-1)}(z) \left[\frac{1}{\lambda - \lambda_{2j-1}} - \gamma_{2j} + O(1)\right]\ , \qquad \lambda \to \lambda_{2j-1},$$

$$\Psi(\lambda, z)\Psi(-\lambda, z)\frac{d\lambda}{\lambda} = -\Psi_{2j-1}^{(-1)}(z)\Psi_{2j}^{(-1)}(z)\times$$

$$\times \left[\frac{1}{(\lambda - \lambda_{2j-1})^2} + \frac{\gamma_{2j-1} - \gamma_{2j}}{(\lambda - \lambda_{2j-1})} + O(1)\right]\frac{d\lambda}{\lambda} =$$

$$= -\Psi_{2j-1}^{(-1)}(z)\Psi_{2j}^{(-1)}(z) \left[\frac{1}{(\lambda - \lambda_{2j-1})^2\lambda} + \frac{1}{(\lambda - \lambda_{2j-1})\lambda_{2j-1}^2} + O(1)\right] d\lambda =$$

$$= -\Psi_{2j-1}^{(-1)}(z)\Psi_{2j}^{(-1)}(z) \left[\frac{1}{(\lambda - \lambda_{2j-1})^2\lambda_{2j-1}} - \right.$$

$$\left. - \frac{(\lambda - \lambda_{2j-1})}{(\lambda - \lambda_{2j-1})^2\lambda_{2j-1}^2} + \frac{1}{(\lambda - \lambda_{2j-1})\lambda_{2j-1}^2} + O(1)\right] d\lambda =$$

$$= -\Psi_{2j-1}^{(-1)}(z)\Psi_{2j}^{(-1)}(z) \left[\frac{1}{(\lambda - \lambda_{2j-1})^2\lambda_{2j-1}} + O(1)\right] d\lambda,$$

т.е. член $d\lambda/(\lambda - \lambda_{2j-1})$ отсутствует. Тем самым все вычеты ω вне 0 и ∞ равны 0 и

$$\oint_{\gamma_1} \chi(\lambda, z)\chi(-\lambda, z)\frac{d\lambda}{\lambda} = \oint_{\gamma_2} \chi(\lambda, z)\chi(-\lambda, z)\frac{d\lambda}{\lambda},$$

где γ_1, γ_2 – контуры, окружающие точки 0 и ∞ соответственно. С учетом (9.9), (9.10)

$$\oint_{\gamma_2} \chi(\lambda,z)\chi(-\lambda,z)\frac{d\lambda}{\lambda} = 2\pi i,$$

$$\oint_{\gamma_1} \chi(\lambda,z)\chi(-\lambda,z)\frac{d\lambda}{\lambda} = 2\pi i\chi^2(0,z),$$

т.е. $\chi^2(0,z) \equiv 1$. Поскольку $\chi(0,z) \to 1$ при $|z| \to \infty$ $\chi(0,z) \equiv 1$. В то же время

$$v(z) = 4\partial_{\bar z} \ln \chi(0,z),$$

т.е. $v(z) \equiv 0$, что и требовалось доказать.

Начиная с этого момента будем считать условия Леммы 9.3 выполненными, т.е. $v(z) \equiv 0$, и сформулируем необходимые и достаточные условия вещественности потенциала $u(z)$.

Лемма 9.4 *Пусть "спектральные данные"* $\lambda_1,\dots,\lambda_N$, $\gamma_1,\dots,\gamma_N$, $|\lambda_j| \neq 1$ *удовлетворяют условиям потенциальности:*

$$\lambda_{2j} = -\lambda_{2j-1},\ \ \gamma_{2j-1} - \gamma_{2j} = 1/\lambda_{2j-1},\ \ j = 1,\dots,N/2. \tag{9.15}$$

Тогда потенциал $u(z)$ веществен, т.е. $u(z) = \bar u(z)$ тогда и только тогда, когда в дополнение к (9.15) выполнено:

1) *Расположение полюсов инвариантно относительно антиголоморфной инволюции $\lambda \to 1/\bar\lambda$, т.е. общее число полюсов кратно 4 и нумерацию можно выбрать так, что $\lambda_{4j-3} = 1/\bar\lambda 4j-1$*

2) *Параметры γ_j связаны соотношением: $\gamma_{4j-3} = \bar\lambda^2_{4j-3}\bar\gamma_{4j-3}$.*

Доказательство. Вычислим $u(z)$ с точностью до $O(1/|z|)^4$):

$$u(z) = \sum_{j=1}^{N}\left[-\frac{8}{(\bar z\lambda_{2j-1} - z/\lambda_{2j-1})^2} - \frac{16i}{k(\bar z\lambda_{2j-1} - z/\lambda_{2j-1})^3} +\right.$$

$$+\frac{32i\gamma_{2j-1}\lambda_{2j-1}}{k(\bar{z}\lambda_{2j-1}-z/\lambda_{2j-1})^3}\Big]+O\left(\frac{1}{|z|^4}\right).$$

Из вещественности слагаемых, дающих вклад в $O(1/|z|)^2)$, получаем условие 1. Вещественность в порядке $O(1/|z|)^3)$ дает условие 2.

Убедимся, что условия Леммы 9.4 являются также достаточными.

Лемма 9.5 *Пусть "спектральные данные"* $\lambda_1,\dots,\lambda_{4N}$, $\gamma_1,\dots,\gamma_{4N}$, $|\lambda_j|\neq 1$ *таковы, что:*

1)

$$\lambda_{2j}=-\lambda_{2j-1},\ \ \gamma_{2j-1}-\gamma_{2j}=1/\lambda_{2j-1},\ \ j=1,\dots,2N,$$

2)

$$\lambda_{4j-1}=\frac{1}{\bar{\lambda}_{4j-3}},\ \ \gamma_{4j-3}=\bar{\lambda}^2_{4j-3}\bar{\gamma}_{4j-3},\ \ j=1,\dots,N.$$

Тогда соответствующий оператор L потенциален, $L=-4\partial_z\partial_{\bar{z}}+u(z)$ и вещественен, т.е. $u(z)=\bar{u}(z)$

Доказательство. Пусть $\Psi(\lambda,z)$ – собственная функция L, построенная по схеме Теоремы 9.1. Рассмотрим также функцию $\tilde{\Psi}(\lambda,z)=\bar{\Psi}(-1/\bar{\lambda},z)$. Как было доказано в Лемме 9.3, при выполнении условий потенциальности $\chi(0,\lambda)\equiv 0$, т.е. при $\lambda\to\infty$

$$\tilde{\Psi}(\lambda,z)=e^{\frac{ik}{2}(\lambda\bar{z}+z/\lambda)}(1+o(1)),$$

и нормировка $\tilde{\Psi}(\lambda,z)$ совпвдает с нормировкой $\Psi(\lambda,z)$. Благодаря симметрии расположения λ_j $\Psi(\lambda,z)$ и $\tilde{\Psi}(\lambda,z)$ имеют простые полюса в одних и тех же точках. Убедимся теперь, что в каждом из полюсов λ_j функция $\Psi(\lambda,z)$ удовлетворяет соотношению (9.4). Отсюда будет вытекать, что $\tilde{\Psi}(\lambda,z)\equiv\Psi(\lambda,z)$. С другой стороны, если $(L-k^2)\Psi(\lambda,z)=0$, при всех λ, то $(\bar{L}-k^2)\tilde{\Psi}(\lambda,z)=0$, где $\bar{L}=-4\partial_z\partial_{\bar{z}}+\bar{u}(z)$. Тем самым $L=\bar{L}$, т.е. $u(z)=\bar{u}(z)$.

Нам остается проверить, что если

$$\tilde{\Psi}(\lambda, z) = \frac{\tilde{\Psi}_j^{(-1)}(z)}{\lambda - \lambda_j} + \tilde{\Psi}_j^{(0)}(z) + O(\lambda - \lambda_j) \quad \text{при } \lambda \to \lambda_j,$$

то $\tilde{\Psi}_j^{(0)}(z) = \gamma_j \tilde{\Psi}_j^{(-1)}(z)$. Благодаря симметрии спектральных данных достаточно ограничиться случаем $\lambda \to \lambda_{4j-3}$.

$$\tilde{\Psi}(\lambda, z) = \bar{\Psi}(-1/\bar{\lambda}, z) = \frac{\bar{\Psi}_{4j}^{(-1)}(z)}{-\frac{1}{\bar{\lambda}} - \bar{\lambda}_{4j}} + \bar{\gamma}_{4j} \bar{\Psi}_{4j}^{(-1)}(z) + o(1) =$$

$$= \frac{\bar{\Psi}_{4j}^{(-1)}(z)}{\frac{1}{\lambda_{4j-3}} - \frac{1}{\lambda}} + \bar{\gamma}_{4j} \bar{\Psi}_{4j}^{(-1)}(z) + o(1) =$$

$$= \bar{\Psi}_{4j}^{(-1)}(z) \left[\frac{\lambda \lambda_{4j-3}}{\lambda - \lambda_{4j-3}} + \bar{\gamma}_{4j} + o(1) \right] =$$

$$= \bar{\Psi}_{4j}^{(-1)}(z) \lambda_{4j-3}^2 \left[\frac{1}{\lambda - \lambda_{4j-3}} + \frac{1}{\lambda_{4j-3}} + \frac{\bar{\gamma}_{4j}}{\lambda_{4j-3}^2} + o(1) \right] =$$

$$= \bar{\Psi}_{4j}^{(-1)}(z) \lambda_{4j-3}^2 \left[\frac{1}{\lambda - \lambda_{4j-3}} + \gamma_{4j-2} + \frac{1}{\lambda_{4j-3}} + o(1) \right] =$$

$$= \bar{\Psi}_{4j}^{(-1)}(z) \lambda_{4j-3}^2 \left[\frac{1}{\lambda - \lambda_{4j-3}} + \gamma_{4j-3} + o(1) \right],$$

т.е.

$$\tilde{\Psi}_{4j-3}^{(-1)} = \lambda_{4j-3}^2 \bar{\Psi}_{4j}^{(-1)}, \qquad \tilde{\Psi}_{4j-3}^{(0)} = \gamma_{4j-3} \tilde{\Psi}_{4j-3}^{(-1)}.$$

Лемма доказана.

Потенциалы $v(z)$, $u(z)$, построенные по "спектральным данным" λ_1, $\ldots$, λ_{4N}, $\gamma_1, \ldots, \gamma_{4N}$ – рациональные функции x, y. В случае общего положения эти потенциалы могут иметь особенности. Однако в наиболее интересном случае "спектральных данных", удовлетворяющих условиям потенциальности и вещественности, потенциал $u(z)$ автоматически получается неособым.

Лемма 9.6 *Пусть "спектральные данные удовлетворяют тем же ограничениям, что и в Лемме 9.5. Тогда потенциал $u(z)$ неособый при всех z.*

Доказательство. Особенности потенциала $u(z)$ возникают, если $\det A \equiv 0$ в некоторой точке z_0. Это означает, что существует нетривиальное решение $\vec{\Phi}$ однородного уравнения

$$A(z_0)\vec{\Phi} = \vec{0}, \qquad \vec{\Phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_{4N} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(\lambda) = e^{\theta(\lambda,z_0)} \sum_{j=1}^{4N} \frac{\phi_j}{\lambda - \lambda_j} = e^{\theta(\lambda,z_0)} X(\lambda).$$

Повторяя рассуждения Леммы 9.5 получаем, что $X(0) = 0$. Пусть

$$\tilde{\Phi}(\lambda) = \Phi(\lambda) + \bar{\Phi}(-1/\bar{\lambda}) \qquad \text{или} \qquad \tilde{\Phi}(\lambda) = \Phi(\lambda) + \bar{\Phi}(-1/\bar{\lambda})$$

(знак $+$ или $-$ выбираем так, чтобы $\tilde{\Phi}(\lambda)$ было отлично от 0), и пусть

$$\omega = \tilde{\Phi}(\lambda)\tilde{\Phi}(-\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Форма ω обладает следующими свойствами:

1) ω мероморфна на $\bar{\mathbb{C}}$, при этом в точках 0 и ∞ она неособа.

2) Единственными особенностями ω являются полюса 2 порядка в точках $\lambda_1, \ldots, \lambda_{4N}$, при этом вычеты в этих точках равны 0. (Проверка аналогична Лемме 9.5).

3) Поскольку $\tilde{\Phi}(-\bar{1}/\bar{\lambda}) = \pm\tilde{\Phi}(\lambda)$, то на единичной окружности $\lambda\bar{\lambda} = 1$, $\tilde{\Phi}(\lambda)\tilde{\Phi}(-\lambda) = \pm\tilde{\Phi}(\lambda)\bar{\tilde{\Phi}}(\lambda)$ – вещественная неотрицательная функция.

4)

$$\oint\limits_{\gamma_2} \omega = \oint\limits_{|\lambda|=1} \omega,$$

где γ_2 – контур, окружающий точку ∞, такой, что все λ_j лежат внутри него.

Поскольку ω неособа в ∞, то этот интеграл равен 0, т.е.

$$0 = \oint\limits_{|\lambda|=1} \tilde{\Phi}(\lambda)\bar{\tilde{\Phi}}(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda} = \pm i \oint\limits_{|\lambda|=1} |\tilde{\Phi}(\lambda)|^2 \, |d\lambda|. \tag{9.16}$$

Однако в правой части (9.16) под знаком интеграла стоит строго неотрицательное выражение и из равенства 0 вытекает, что $\tilde{\Phi}(\lambda) \equiv 0$, и мы получили противоречие. Неособость $u(z)$ доказана.

Отметим, что схема данного доказательства повторяет схему доказательства несингулярности решений уравнения КП-1, приведенного в работе Б.А.Дубровина и С.М.Натанзона [29]. Автор благодарен С.М.Натанзону за разъяснение работы [29].

9.3 Явные формулы для потенциалов. Сведение к пфаффианам.

Формулы для потенциала $u(z)$ получаются довольно сложными (простейший вещественный потенциальный оператор соответствует детерминанту матрицы 4×4). Несколько упростить их позволяет следующее наблюдение:

Лемма 9.7 *Пусть "спектральные данные"* $\lambda_1, \ldots, \lambda_{4N}$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_{4N}$, $|\lambda_j| \neq 1$ *удовлетворяют условию потенциальности:*

$$\lambda_{2j} = -\lambda_{2j-1}, \;\; \gamma_{2j-1} - \gamma_{2j} = 1/\lambda_{2j-1}, \;\; j = 1, \ldots, N.$$

Тогда $\det A = P^2(z, \bar{z}, \vec{\lambda}, \vec{\gamma})$, *где* $P(z, \bar{z}, \vec{\lambda}, \vec{\gamma})$ – *некоторый многочлен от переменных* $z, \bar{z}$ *с коэффициентами, рационально зависящими от* λ_j, γ_j.

Доказательство. Убедимся, что серией преобразований, сохраняющих определитель, матрица A приводится к кососимметричному виду и воспользуемся тем, что определение кососимметрической матрицы есть квадрат пфаффиана.

Для упрощения вычислений введем следующее обозначение:

$$\tilde{\kappa}_{2j-1}(z) = \kappa_{2j-1}(z) + \gamma_{2j-1} - \frac{1}{2\lambda_{2j-1}},$$

$$\tilde{\kappa}_{2j}(z) = \tilde{\kappa}_{2j-1}(z),$$

Тогда:

$$a_{kj} = \frac{1}{\lambda_j - \lambda_k}, \qquad j \neq k, \qquad a_{kk}(z) = \tilde{\kappa}_k(z) + \frac{1}{2\lambda_k}.$$

Шаг 1. По Лемме 9.3

$$\sum_{j=1}^{2N} \frac{\chi_j^{(-1)}(z)}{2\lambda_j} \equiv 0, \tag{9.17}$$

где $\chi_j^{(-1)}(z)$ – решения системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{2N} a_{jk}(z)\chi_k^{(-1)}(z) = 1, \qquad j = 1, \ldots, 2N.$$

Пусть $A^{(1)} = (a_{ij}^{(1)})$, где

$$a_{jk}^{(1)}(z) = a_{jk} - \frac{1}{2\lambda_k},$$

т.е.

$$a_{jk}^{(1)} = \frac{1}{2}\frac{\lambda_k + \lambda_j}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda_j)},$$

$$a_{jj}^{(1)}(z) = \tilde{\kappa}_j(z).$$

Из (9.17) следует, что

$$\sum_{k=1}^{2N} a_{jk}^{(1)}(z)\chi_k^{(-1)}(z) = 1, \qquad j = 1, \ldots, 2N.$$

Повторяя рассуждения Теоремы 9.1 получаем, что

$$\frac{\partial}{\partial \bar z} \ln \det A^{(1)}(z) = -\frac{ik}{2} \sum_{j=1}^{N} \chi_j^{(-1)}(z).$$

Сопоставляя с (9.12) видим, что $A^{(1)}(z) = \varphi_1(z) A(z)$, где $\varphi_1(z)$ – мероморфная функция z, т.е. $\partial_{\bar z} \varphi_1(z) \equiv 0$. При этом $\varphi_1(z) \to 1$ при $z \to 1$ и $\varphi_1(z)$ – рациональная функция z.

С другой стороны, несложно проверяется, что

$$-\frac{ik}{2} \sum_{j=1}^{N} \frac{\chi_j^{(-1)}(z)}{\lambda_j^2} = \partial_z \ln \det A(z) = \partial_z \ln \det A^{(1)}(z),$$

$$\partial_z \varphi_1(z) \equiv 0, \qquad \text{т.е.} \qquad \varphi_1(z) \equiv 1.$$

Тем самым

$$\det A^{(1)}(z) = \det A(z).$$

Шаг 2. Пусть $A^{(2)} = (a_{jk}^{(2)})$, где

$$a_{jk}^{(2)}(z) = a_{jk}^{(1)} \frac{\lambda_k}{\lambda_j},$$

$$a_{jk}^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{\lambda_k + \lambda_j}{\lambda_j(\lambda_k - \lambda_j)}, \qquad j \neq k,$$

$$a_{jj}^{(2)} = \tilde\kappa_j(z).$$

Очевидно, что

$$\det A^{(2)}(z) = \det A(z).$$

Шаг 3. Пусть $U = (u_{jk})$, где

$$u_{2j-1,\,2j-1} = u_{2j-1,\,2j} = u_{2j,\,2j-1} = 1, \quad u_{2j,\,2j} = -1, \quad j = 1, \dots, N,$$

все остальные $u_{jk} = 0$. Пусть $A^{(3)}(z) = (a_{jk}^{(3)})$,

$$A^{(3)}(z) = U^{-1} A^2(z) U.$$

Тогда

$$a^{(3)}_{2j-1,\,2j-1}(z) = a^{(3)}_{2j,\,2j}(z) = \tilde{\kappa}_{2j-1}(z),$$

$$a^{(3)}_{2j-1,\,2k} = \frac{2\lambda_{2k-1}}{\lambda^2_{2k-1} - \lambda^2_{2j-1}},$$

$$a^{(3)}_{2j,\,2k-1} = \frac{\lambda^2_{2k-1} + \lambda^2_{2j-1}}{\lambda_{2j-1}(\lambda^2_{2k-1} - \lambda^2_{2j-1})}.$$

Все остальные элементы равны 0.

Очевидно, что

$$\det A^{(3)}(z) = \det A^{(2)}(z) = \det A(z).$$

Шаг 4. Пусть $A^{(4)} = (a^{(4)}_{jk})(z)$,

$$a^{(4)}_{2j-1,\,2k-1} = a^{(3)}_{2j-1,\,2k-1}, \qquad a^{(4)}_{2j,\,2k-1} = a^{(3)}_{2j,\,2k-1}\lambda_{2j-1},$$

$$a^{(4)}_{2j-1,\,2k} = a^{(3)}_{2j-1,\,2k}/\lambda_{2k-1}, \qquad a^{(4)}_{2j,\,2k} = a^{(3)}_{2j,\,2k}\lambda_{2j-1}/\lambda_{2k-1}.$$

Тогда

$$a^{(4)}_{2j-1,\,2k-1}(z) = a^{(4)}_{2j,\,2k}(z) = \tilde{\kappa}_{2j-1}(z),$$

$$a^{(4)}_{2j-1,\,2k} = \frac{2}{\lambda^2_{2k-1} - \lambda^2_{2j-1}},$$

$$a^{(4)}_{2j,\,2k-1} = \frac{\lambda^2_{2k-1} + \lambda^2_{2j-1}}{\lambda^2_{2k-1} - \lambda^2_{2j-1}}.$$

Все остальные элементы равны 0.

Очевидно, что

$$\det A^{(4)}(z) = \det A^{(3)}(z) = \det A(z).$$

Шаг 5. Подвергнем $A^{(4)}(z)$ следующему преобразованию: переставим часть столбцов и строк плюс умножим половину столбцов на -1:

$$a^{(5)}_{jk}(z) = -a^{(4)}_{2j-1,\,2k}(z), \qquad a^{(5)}_{j,\,k+3}(z) = a^{(4)}_{2j-1,\,2k-1}(z),$$

$$a^{(5)}_{j+3,\,k}(z) = -a^{(4)}_{2j,\,2k}(z), \qquad a^{(5)}_{j+3,\,k+3}(z) = a^{(4)}_{2j,\,2k-1}(z).$$

Несложно убедиться, что $A^{(5)}$ кососимметрична и

$$\det A^{(5)}(z) = \det A^{(4)}(z) = \ldots = \det A(z).$$

Лемма 9.7 доказана.

Обсудим теперь спектральные свойства построенных операторов. Вообще говоря, скорость убывания построенных потенциалов $1/r^2$, поэтому при определении прямого преобразования могут возникать некоторые сложности. Однако, к счастью, физические решения уравнения

$$L\Psi(\vec{k},\vec{x}) = \epsilon\Psi(\vec{k},\vec{x})$$

явно известны при $\epsilon = \epsilon_0$ (они совпадают с $\Psi(\lambda, z)$ при $|\lambda| = 1$) и убывают при $|z| \to \infty$ как $1/|z|$. Поскольку члены, отвечающие рассеянной волне, убывают, как $1/\sqrt{z}$, то мы получаем следующий результат:

Лемма 9.8 *Пусть "спектральные данные"* $\lambda_1, \ldots, \lambda_{4N}$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_{4N}$, *удовлетворяют условиям вещественности и потенциальности Леммы 9.5. Тогда при* $\epsilon = \epsilon_0$ *потенциал* $u(z)$ *прозрачен (т.е. амплитуда рассеяния тождественно равна 0).*

Суммируя полученные в данном параграфе результаты, получаем:

Теорема 9.2 *1) Пусть* $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ *– набор попарно различных точек на* λ *- плоскости таких, что* $\lambda_j \neq 0, \infty$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ *- набор комплексных констант, отвечающих точкам* λ_j.

Тогда существует единственная функция $\Psi(\lambda, z)$ *такая, что:*

a)

$$\Psi(\lambda, z) = e^{\frac{ik}{2}(\lambda\bar{z} + \frac{z}{\lambda})}\left[1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{\chi_j^{(-1)}(z)}{\lambda - \lambda_j}\right]$$

b) В каждой из точек λ_j выполнено соотношение:

$$\Psi_j^{(0)}(z) = \gamma_j \Psi_j^{(-1)}(z),$$

где $\Psi_j^{(k)}(z)$ – коэффициенты ряда Лорана в окрестности точки λ_j:

$$\Psi(\lambda, z) = \frac{\Psi_j^{(-1)}(z)}{\lambda - \lambda_j} + \Psi_j^{(0)}(z) + \Psi_j^{(1)}(z)(\lambda - \lambda_j) + \dots$$

и единственный оператор

$$L = -4\partial_z \partial \bar{z} + V(z)\partial_z + u(z)$$

такой, что

$$L\Psi(\lambda, z) = k^2 \Psi(\lambda, z)$$

при всех λ. Коэффициенты $V(z)$, $u(z)$ – рациональные функции z, $\bar{z}$, определяемые формулами (9.5) и (9.6).

2) Пусть $|\lambda_j| \neq 1$ при всех j. Тогда функции $V(z)$, $u(z)$ несингулярны при достаточно большом $|z|$ и убывают как $O(1/|z|^2)$ при $|z| \to \infty$.

3) Пусть $|\lambda_j| \neq 1$ при всех j. Тогда оператор L потенциален ($V(z) \equiv 0$) тогда и только тогда, когда расположение точек λ_j инвариантно относительно поворота $z \to -z$ (в этом случае мы всегда будем предполагать, что нумерация λ_j выбрана так, что $\lambda_{2j} = -\lambda_{2j-1}$) и, кроме того, константы γ_j связаны соотношениями $\gamma_{2j-1} - \gamma_{2j} = 1/\lambda_{2j-1}$.

4) Пусть выполнены условия пункта 3). Тогда потенциал $u(z)$ вещественен при всех z тогда и только тогда, когда расположение полюсов инвариантно относительно отражения $\lambda \to 1/\bar{\lambda}$ (в этом случае мы считаем, что нумерация λ_j выбрана так, что $\lambda_{4j} = 1/\lambda_{4j-3}$) и, кроме того, $\gamma_{4j-1} = \bar{\lambda}_{4j-3}^2 \bar{\gamma}_{4j-3}$.

5) Пусть выполнены условия пунктов 3), 4). Тогда потенциал $u(z)$ особый при всех z и он прозрачен при энергии $\epsilon_0 = k^2$, т.е. оператор рассеяния при $\epsilon = k^2$ единичный.

6) Пусть функции $\kappa_j(z)$ зависят от дополнительной переменной t:

$$\kappa_j(z) = -\frac{ik}{2}(\bar{z} - z/\lambda_j^2) + 3ik^3(\lambda_j^2 - 1/\lambda_j^4)t.$$

Тогда функции

$$v(z,t) = -k^2 - 4\partial_z\partial_{\bar{z}} \ln\det A,$$

$$w(z,t) = 12\partial_{\bar{z}}^2 \ln\det A,$$

где $A = (a_{ij})$ – матрица (9.7), задают многосолитонные рациональные решения уравнений Веселова-Новикова (6.4).

Доказательство пункта 6) Теоремы 9.2 достаточно стандартно.

В качестве иллюстрации вычислим явно потенциал $u(z)$ в простейших случаях, когда число полюсов $\chi(\lambda, z)$ равно 4 и 8 соответственно.

Для односолитонного решения $\lambda_2 = -\lambda_1$, $\lambda_3 = 1/\bar{\lambda}_1$, $\lambda_4 = -1/\bar{\lambda}_1$, $\tilde{\kappa}_2 = \tilde{\kappa}_1$, $\tilde{\kappa}_3 = \bar{\lambda}_1^2\bar{\tilde{\kappa}}_1$, $\tilde{\kappa}_4 = \tilde{\kappa}_3$, имеем

$$\det A = \bar{\mu}_1^2 \det H, \qquad \text{где } \mu_1 = \lambda_1^2,$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\mu_1\bar{\mu}_1 - 1} & \tilde{\kappa}_1 & 0 \\ -\frac{2}{\mu_1\bar{\mu}_1 - 1} & 0 & 0 & \bar{\tilde{\kappa}}_1 \\ -\tilde{\kappa}_1 & 0 & 0 & -\frac{\mu_1\bar{\mu}_1 + 1}{\mu_1\bar{\mu}_1 - 1} \\ 0 & -\bar{\tilde{\kappa}}_1 & \frac{\mu_1\bar{\mu}_1 + 1}{\mu_1\bar{\mu}_1 - 1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Поскольку H – кососимметрическая матрица, то $\det H = (pf\, H)^2$, где pf означает пфаффиан H. В случае матрицы H размера 4×4 $pf\, H = H_{12}H_{34} - H_{13}H_{24} + H_{14}H_{23}$. Тем самым $\det H = p_4^2(\tilde{\kappa}, \bar{\tilde{\kappa}})$

$$p_4(\tilde{\kappa}, \bar{\tilde{\kappa}}) = \tilde{\kappa}_1\bar{\tilde{\kappa}}_1 + 2\frac{\lambda_1^2\bar{\lambda}_1^2 + 1}{(\lambda_1^2\bar{\lambda}_1^2 - 1)^2},$$

$$\tilde{\kappa}_1 = -\frac{ik}{2}(\bar{z} - z/\lambda_1^2 + \gamma_1),$$

$$u(z) = -8\partial_z\partial_{\bar{z}} \ln p_4.$$

Пусть $k = 2$, $\lambda = \sqrt{3}$, $\gamma_1 = 0$, $t = 0$. Тогда

$$p_4(x, y) = \frac{4}{9}\,x^2 + \frac{16}{9}\,y^2 + \frac{5}{16},$$

$$u := 768\,\frac{-64\,x^2 + 256\,y^2 - 75}{(64\,x^2 + 256\,y^2 + 45)^2},$$

и его график имеет вид:

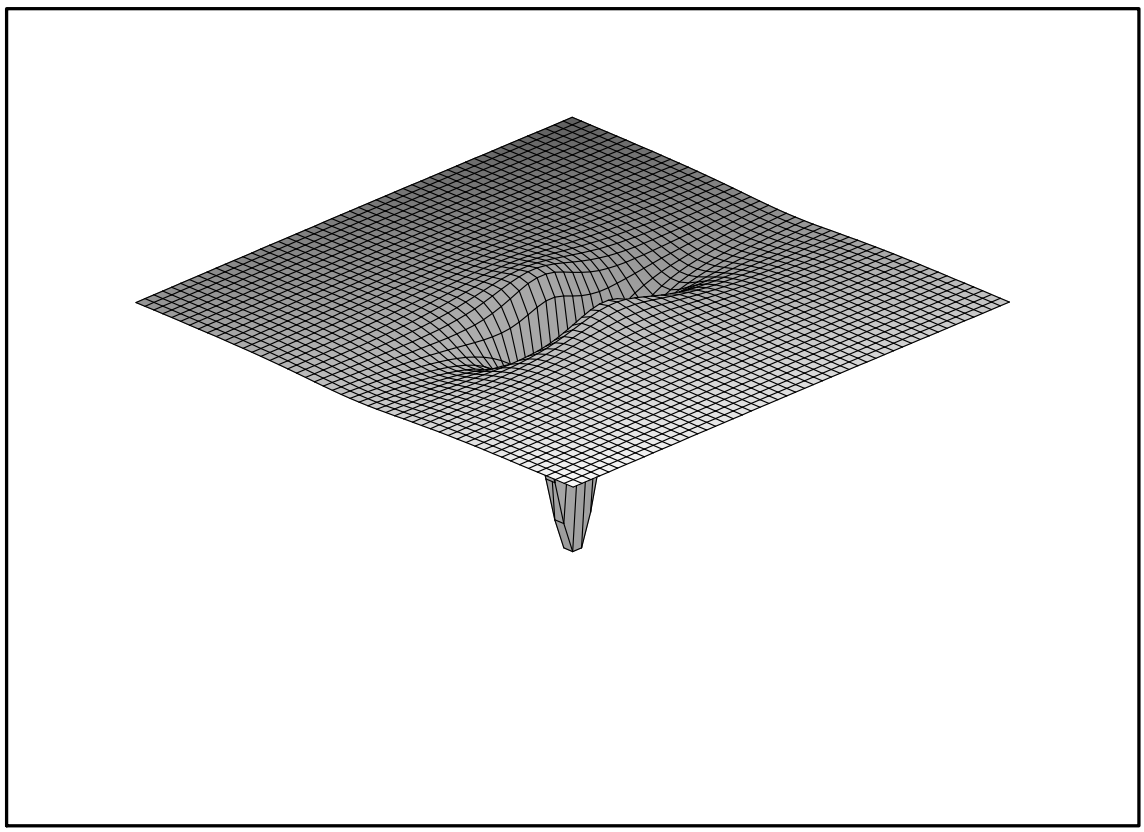

Рис 9.1

Двухсолитонные потенциалы отвечают следующей конфигурации полюсов: $\lambda_2 = -\lambda_1$, $\lambda_3 = 1/\bar{\lambda}_1$, $\lambda_4 = -1/\bar{\lambda}_1$, $\lambda_6 = -\lambda_5$, $\lambda_7 = 1/\bar{\lambda}_5$, $\lambda_8 = -1/\bar{\lambda}_5$, функции $\tilde{\kappa}_j$ связаны соотношениями $\tilde{\kappa}_2 = \tilde{\kappa}_1$, $\tilde{\kappa}_3 = \bar{\lambda}_1^2\bar{\tilde{\kappa}}_1$, $\tilde{\kappa}_4 = \bar{\lambda}_1^2\bar{\tilde{\kappa}}_3$, $\tilde{\kappa}_6 = \tilde{\kappa}_5$, $\tilde{\kappa}_7 = \bar{\lambda}_5^2\bar{\tilde{\kappa}}_5$, $\tilde{\kappa}_8 = \bar{\lambda}_5^2\bar{\tilde{\kappa}}_5$. Пусть $\mu_1 = \lambda_1^2$, $\mu_5 = \lambda_5^2$.

Мы имеем:

$$\det A = \bar{\mu}_1^2\bar{\mu}_5^2 p_8(\tilde{\kappa}_1, \bar{\tilde{\kappa}}_1, \tilde{\kappa}_5, \bar{\tilde{\kappa}}_5)$$

где

$$p_8 = \left[2\frac{\tilde{\kappa}_1\bar{\tilde{\kappa}}_1}{pf_1(\mu_5\bar{\mu}_5 - 1)} + \frac{\mu_1\bar{\mu}_1 + 1}{\mu_1\bar{\mu}_1 - 1}\right]\left[2\frac{\tilde{\kappa}_5\bar{\tilde{\kappa}}_5}{pf_1(\mu_1\bar{\mu}_1 - 1)} + \frac{\mu_5\bar{\mu}_5 + 1}{\mu_5\bar{\mu}_5 - 1}\right] +$$

$$+ \left[2\frac{\tilde{\kappa}_1\tilde{\kappa}_5}{pf_1(\bar{\mu}_5 - \bar{\mu}_1)} + \frac{\mu_5 + \mu_1}{\mu_5 - \mu_1}\right]\left[2\frac{\bar{\tilde{\kappa}}_1\bar{\tilde{\kappa}}_5}{pf_1(\mu_5 - \mu_1)} + \frac{\bar{\mu}_5 + \bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_5 - \bar{\mu}_1}\right] -$$

$$- \left[2\frac{\tilde{\kappa}_1\bar{\tilde{\kappa}}_5}{pf_1(\bar{\mu}_1\mu_5 - 1)} - \frac{\mu_1\bar{\mu}_5 + 1}{\mu_1\bar{\mu}_5 - 1}\right]\left[2\frac{\bar{\tilde{\kappa}}_1\bar{\tilde{\kappa}}_5}{pf_1(\mu_1\bar{\mu}_5 - 1)} - \frac{\bar{\mu}_1\mu_5 + 1}{\bar{\mu}_1\mu_5 - 1}\right].$$

$$pf_1 = 4\left[\frac{1}{(\mu_1\bar{\mu}_1 - 1)(\mu_5\bar{\mu}_5 - 1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(\mu_5 - \mu_1)(\bar{\mu}_5 - \bar{\mu}_1)} - \frac{1}{(\mu_1\bar{\mu}_5 - 1)(\bar{\mu}_1\mu_5 - 1)}\right]$$

$$\tilde{\kappa}_1 = -\frac{ik}{2}(\bar{z} - z/\mu_1 + \gamma_1), \qquad \tilde{\kappa}_5 = -\frac{ik}{2}(\bar{z} - z/\mu_5 + \gamma_5),$$

$$u(z) = -8\partial_z\partial_{\bar{z}} \ln p_8.$$

Пусть $k = 2$, $\lambda_1^2 = 3$, $\lambda_5^2 = 1 - 2i$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_5 = 0$, $t = 0$. Тогда потенциал имеет вид:

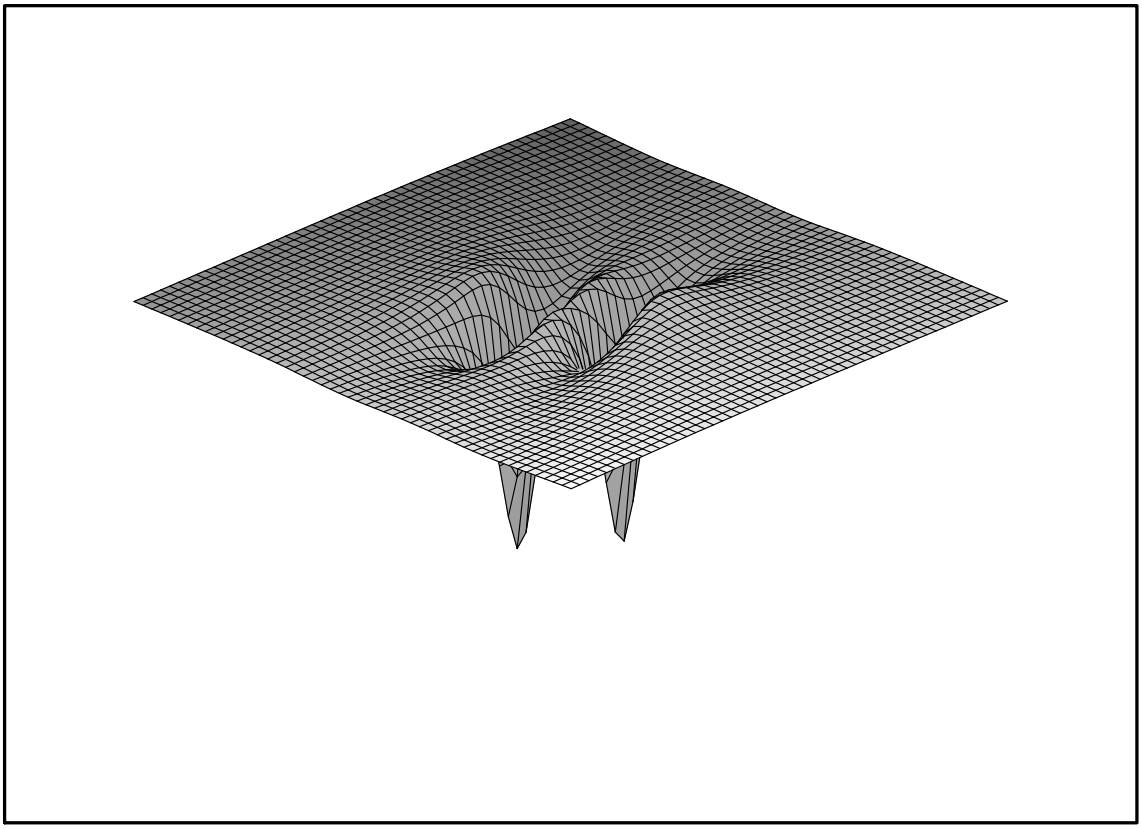

Рис 9.2

10 Прозрачные при одной энергии потенциалы, быстро убывающие на бесконечности.

Основные результаты этого раздела были получены автором совместно с Р.Г.Новиковым в работе [109].

В разделе 9 были построены явные примеры рациональных потенциалов прозрачных при одной энергии со скоростью убывания $1/r^2$. В разделе 7 мы дали полное описание прозрачных при одной энергии по-

тенциалов с условием "малой нормы". Однако вопрос о скорости убывания на бесконечности этих потенциалов не обсуждался. и как мы увидим ниже, он оказывется достаточно нетривиальным. В этом разделе мы покажем, что существует достаточно много прозрачных при одной энергии неособых потенциалов, убывающих на бесконечности быстрее любой степени расстояния. В то же время, как показано в [62], [136] [109], экспоненциально убывающих на бесконечности прозрачных потенциалов не существует, и получающаяся скорость убывания, в некотором смысле, "максимально возможная".

10.1 Условия на данные расеяния для быстроубывающих потенциалов. Прямая задача.

Введем следующие обозначения:

$$u(x,y) \in C_M^{(N)}(\mathbb{R}^2),$$

если

$$\frac{\partial^{n_1+n_2}}{\partial x^{n_1}\partial y^{n_2}} u(x,y) \in C(\mathbb{R}^2)$$

и

$$\left|\frac{\partial^{n_1+n_2}}{\partial x^{n_1}\partial y^{n_2}} u(x,y)\right| < \frac{c_{n_1,n_2}}{(1+\sqrt{x^2+y^2})^M}, \quad c_{n_1,n_2} > 0 \tag{10.1}$$

для всех неотрицательных целых чисел n_1, n_2 таких, что $n_1 + n_2 \leq N$.

Пусть потенциал $u(x,y)$ веществен,

$$u(x,y) = \bar{u}(x,y), \tag{10.2}$$

$$u(x,y) \in C^{(3)}_{M+2+\varepsilon}(\mathbb{R}^2), \tag{10.3}$$

и константа c_{00} достаточно мала, чтобы гарантировать однозначную разрешимость уравнений прямой задачи рассеяния при всех λ (выполнено условие малости нормы). Покажем, что в этом случае на граничные значения "данных рассеяния" на единичной окружности возникают $2M+2$

соотношения (переходящие в линейном пределе в условие непрерывности первых M производных преобразования Фурье потенциала на границе круга радиуса 2 в импульсном пространстве).

Как и раньше, мы будем использовать комплексные обозначения

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy, \quad \partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y), \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y),$$

и писать $u(z)$ вместо $u(z, \bar{z})$, не подразумевая при этом голоморфности.

Нам понадобятся следующие дополнительные "данные рассеяния", введенные Р.Г.Новиковым в [136].

$$a_m(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{\mathbb{C}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^m e^{-\frac{i}{2}[\lambda \bar{z} + z/\lambda]} \right] u(z) \psi(z, \lambda) dz_R dz_I, \tag{10.4}$$

$$b_m(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{\mathbb{C}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \right)^m e^{\frac{i}{2}[\bar{\lambda} z + \bar{z}/\bar{\lambda}]} \right] u(z) \psi(z, \lambda) dz_R dz_I. \tag{10.5}$$

Очевидно, что $a(\lambda) = a_0(\lambda),\ b(\lambda) = b_0(\lambda)$.

Из (10.3) следует, что

1) При $m = 0, 1, \ldots, M$ все интегралы (10.4), (10.5) сходятся и функции $a_m(\lambda), b_m(\lambda)$ непрерывны в областях $D_+ -$ and $D_+ \backslash 0$, где $D_\pm = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda|^{\mp 1} \leq 1\}$.

2)

$$\text{при} \quad |\lambda| \to \infty \quad a_m(\lambda) = O(1), \quad b_m(\lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda|^3} \right). \tag{10.6}$$

$$\text{при} \quad |\lambda| \to 0 \quad a_m(\lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda|^{2m}} \right), \quad b_m(\lambda) = O\left(\frac{|\lambda|^3}{|\lambda|^{2m}} \right). \tag{10.7}$$

Из (10.4) , (10.5) с учетом вещественности $u(z)$ следует, что

3)

$$\partial_{\bar{\lambda}} a_m(\lambda) = T(\lambda) \overline{b_m(\lambda)}, \tag{10.8}$$

$$\partial_{\bar{\lambda}} b_m(\lambda) = b_{m+1}(\lambda) + T(\lambda) \overline{a_m(\lambda)}, \tag{10.9}$$

где, как и раньше,

$$T(\lambda) = \frac{\pi \mathrm{sgn}(\lambda\bar{\lambda} - 1)}{\bar{\lambda}} b(\lambda). \tag{10.10}$$

В формулах (10.4), (10.5), мы применяем операторы ∂_λ and $\partial_{\bar{\lambda}}$ к голоморфной и антиголоморфной функции соответственно. Пусть

$$\lambda = re^{i\varphi},\ \lambda' = r'e^{i\varphi'},\ r, r' \in \mathrm{R}_+.$$

Тогда

$$\partial_\lambda = \frac{\bar{\lambda}}{\lambda}\partial_{\bar{\lambda}} + \frac{1}{i\lambda}\partial_\varphi,\ \partial_{\bar{\lambda}} = \frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\partial_\lambda - \frac{1}{i\bar{\lambda}}\partial_\varphi,$$

и для произвольной голоморфной функции $f(\lambda), \lambda \in \mathrm{C}\backslash 0$ имеем

$$\partial_\lambda^n f(\lambda) = \left(\frac{1}{i\lambda}\partial_\varphi\right)^n f(\lambda),\ \partial_{\bar{\lambda}}^n \overline{f(\lambda)} = \left(-\frac{1}{i\bar{\lambda}}\partial_\varphi\right)^n \overline{f(\lambda)},\ \lambda \in \mathbb{C}\backslash 0. \tag{10.11}$$

Поэтому операторы ∂_λ^m and $\partial_{\bar{\lambda}}^m$ в (10.4), (10.5) можно заменить на $\left(\frac{1}{i\lambda}\partial_\varphi\right)^m$ и $\left(-\frac{1}{i\bar{\lambda}}\partial_\varphi\right)^m$ соответственно.

Учитывая определение функций $h_\pm(\lambda, \lambda')$ (7.56) и формулы (10.4), (10.5) получаем

$$a_m(\lambda(1+0))|_{|\lambda|=1} = \left(\frac{1}{i\lambda'}\partial_{\varphi'}\right)^m h_+(\lambda, \lambda')\Big|_{\lambda'=\lambda}, \tag{10.12}$$

$$b_m(\lambda(1+0))|_{|\lambda|=1} = (-i\lambda'\partial_{\varphi'})^m h_+(\lambda, \lambda')\big|_{\lambda'=-\lambda}, \tag{10.13}$$

$$a_m(\lambda(1-0))|_{|\lambda|=1} = \left(\frac{1}{i\lambda'}\partial_{\varphi'}\right)^m h_-(\lambda, \lambda')\Big|_{\lambda'=\lambda}, \tag{10.14}$$

$$b_m(\lambda(1-0))|_{|\lambda|=1} = (-i\lambda'\partial_{\varphi'})^m h_-(\lambda, \lambda')\big|_{\lambda'=-\lambda}. \tag{10.15}$$

Если потенциал $u(z)$ удовлетворяет (10.2), (10.3), то амплитуда рассеяния $f(\lambda, \lambda')$ и функции $h_\pm(\lambda, \lambda')$ M раз непрерывно дифференциируемы на торе и $b(\lambda) \in C_3^{(M)}(D_+)$.

Если же $u(x, y) \in C_\infty^{(\infty)}(\mathrm{R}^2)$, то

$$f(\lambda, \lambda') \in C^{(\infty)}(T^2). \tag{10.16}$$

Если, кроме этого, выполнено условие “малости нормы”, то

$$b(\lambda) \in C_{\infty}^{(\infty)}(D_{\pm}). \tag{10.17}$$

Соотношения (10.8)-(10.9), (10.12)-(10.15) для $m = 0, \ldots, M$ и свойства (10.6)-(10.7), для $m = 0$ были доказаны в [136]. Покажем, что их них вытекает набор из $2M + 2$ соотношений между функцией $b(\lambda)$ и функциями $h_{\pm}(\lambda, \lambda')$. Напомним, что если мы знаем ядро $R(\lambda, \lambda')$ то функции $h_{\pm}(\lambda, \lambda')$ вычисляются по нему, и, тем самым мы получаем соотношения между $b(\lambda)$ и $R(\lambda, \lambda')$.

Обозначим $a_m^{\pm}(\lambda), b_m^{\pm}(\lambda)$ ограничения функций $a_m(\lambda), b_m(\lambda)$ на области $D_{\pm}$ соответственно.

$$a_m^{\pm}(\lambda) = \theta(\pm(\lambda\bar{\lambda} - 1))a_m(\lambda),\ b_m^{\pm}(\lambda) = \theta(\pm(\lambda\bar{\lambda} - 1))b_m(\lambda), \tag{10.18}$$

где θ – функция Хевисайда.

Соотошения мы будем определять индукцией по M.

Пусть $M = 0$. Тогда уравнение (10.12) с $m = 0$ приобретает вид

$$b_0^+(\lambda(1+0))|_{|\lambda|=1} = h_+(\lambda, -\lambda),\ b_0^+(\lambda) = \theta(\lambda\bar{\lambda} - 1)b_0(\lambda). \tag{10.19}$$

Соотношение (10.19) – первое из наших дополнительных условий.

Мы видим, что вычисление $a_0^+(\lambda)$ сводится к решению краевой задачи для уравнения (10.8) в области D_+ с граничными условиями (10.12) на единичной окружности $|\lambda| = 1$ и (10.6) на $\lambda = \infty$. Эта граничная задача разрешима тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D_+} h_+(\xi,\xi)\frac{d\xi}{\xi - \lambda} - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{D_+} \frac{\pi b(\xi)\overline{b(\xi)}}{\bar{\xi}}\frac{d\xi_R d\xi_I}{\xi - \lambda}\right]\Big|_{|\lambda|=1-0} \equiv -s_0, \tag{10.20}$$

где s_0 – некоторая константа. Если оно выполнено, то функция $a_0^+(\lambda)$ имеет вид

$$a_0^+(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D_+} h_+(\xi,\xi)\frac{d\xi}{\xi - \lambda} - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{D_+} \frac{\pi b(\xi)\overline{b(\xi)}}{\bar{\xi}}\frac{d\xi_R d\xi_I}{\xi - \lambda} + s_0. \tag{10.21}$$

Соотношение (10.20) и есть второе дополнительное условие на данные рассеяния.

Пусть теперь для $M = n\ 2n + 2$ условий на данные рассеяния уже построены и мы уже выразили функции $a_m^+(\lambda)$, $b_m^+(\lambda)$, $m = 0, \ldots, n$ через $b_0^+(\lambda)$ и $\left(\frac{1}{i\lambda'}\partial_{\varphi'}\right)^m h_+(\lambda, \lambda')|_{\lambda'=\lambda},\ m = 0, \ldots, n$.

Положим $M = n + 1$. Согласно (10.9)

$$b_{n+1}^+(\lambda) = \frac{\partial}{\partial\bar{\lambda}} b_n^+(\lambda) - \frac{\pi}{\lambda} b_0^+(\lambda)\overline{a_n^+(\lambda)}, \tag{10.22}$$

причем мы считаем, что все функции в правой части уже выражены через $b_0^+(\lambda)$ и $h_+(\lambda, \lambda')$. Тогда мы получаем новое соотношение на данные рассеяния

$$b_{n+1}^+(\lambda(1+0))|_{|\lambda|=1} = (i\lambda'\partial_{\varphi'})^{n+1} h_+(\lambda, \lambda')|_{\lambda'=-\lambda}. \tag{10.23}$$

Другое соотношение возникает как условие разрешимости граничной задачи для $a_{n+1}^+(\lambda)$ и имеет вид

$$\left[\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial D_+}\left(\left(\frac{1}{i\lambda'}\partial_{\varphi'}\right)^{n+1} h_+(\xi, \lambda')\Big|_{\lambda'=\xi}\right)\frac{d\xi}{\xi - \lambda} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{D_+}\frac{\pi b_0^+(\xi)\overline{b_{n+1}^+(\xi)}}{\bar{\xi}}\frac{d\xi_R d\xi_I}{\xi - \lambda}\right]\Bigg|_{|\lambda|=1-0} \equiv -s_{n+1} \tag{10.24}$$

где s_{n+1} – некоторая заранее не известная константа .

В этом случае $a_{n+1}^+(\lambda)$ дается формулой

$$a_{n+1}^+(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial D_+}\left(\left(\frac{1}{i\lambda'}\partial_{\varphi'}\right)^{n+1} h_+(\xi, \lambda')\Big|_{\lambda'=\xi}\right)\frac{d\xi}{\xi - \lambda} -$$

$$- \frac{1}{\pi}\iint\limits_{D_+}\frac{\pi b_0^+(\xi)\overline{b_{n+1}^+(\xi)}}{\bar{\xi}}\frac{d\xi_R d\xi_I}{\xi - \lambda} + s_{n+1}. \tag{10.25}$$

Шаг индукции сделан.

Половина из этих соотношений была найдена в [136]. Аналоги другой половины для случая отрицательной энергии были выписаны автором и С.П.Новиковым в работе [15] (см. раздел 8). Условия, связывающие граничные значения $b_m^+(\lambda)$ с $h_+(\lambda,\lambda')$ естественно называть локальными, условия разрешимости граничных задач – нелокальными.

Вместо области D_+ можно было бы рассмотреть область D_-, однако из-за вещественности потенциала мы получили бы тот же самый набор соотношений. Функции $a_m(\lambda)$, $b_m(\lambda)$ в области D_- выражаются через их значения в D_+ по формулам:

$$a_m^-(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} \overline{\beta_{mk}(-1/\bar\lambda) a_m^+(-1/\bar\lambda)}, \tag{10.26}$$

$$b_m^-(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} \beta_{mk}(-1/\bar\lambda)\ \overline{b_m^+(-1/\bar\lambda)}, \tag{10.27}$$

где функции $\beta_{mk}(\lambda)$ задаются как коэффициенты разложения дифференциальных операторов

$$(\lambda^2\partial_\lambda)^m = \sum_{k=0}^{m} \beta_{mk}(\lambda)\partial_\lambda^k \tag{10.28}$$

и имеют следующие свойства:

a) $\beta_{mm}(\lambda) = \lambda^{2m}$.

b) $\beta_{m0}(\lambda) = 0$ при $m > 0$.

c) $\deg\, \beta_{mk}(\lambda) = m + k$ при $0 < k \le m$.

d) $\beta_{m+1,k}(\lambda) = \lambda^2\beta_{m,k-1}(\lambda) + \lambda^2\partial_\lambda b_{mk}(\lambda)$

где $\beta_{00} = 1,\ \beta_{m,-1} = 0,\ \beta_{m,m+1} = 0$.

Обсудим подробнее случай прозрачных при $E = 1$ потенциалов, для которых $f(\lambda,\lambda') \equiv 0$ (и $h_+(\lambda,\lambda') \equiv 0$ соответственно). Тогда $M+1$ локальное условие просто означает, что при $|\lambda| = 1$ функция $b(\lambda)$ и ее

производные $\partial_\lambda^{n_1}\partial_{\bar\lambda}^{n_2} b(\lambda)$ с $n_1 \geq 0$, $n_2 \geq 0$, $n_1 + n_2 \leq M$ равны 0. Но нелокальные условия даже в этом случае достаточно нетривиальны. Первое из них имеет вид:

$$I_0(\lambda)|_{|\lambda|=1} \equiv -s_0, \tag{10.29}$$

где

$$I_0(\lambda) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\xi|\geq 1} \frac{\pi b(\xi)\overline{b(\xi)}}{\bar\xi}\frac{d\xi_R d\xi_I}{\xi - \lambda} \tag{10.30}$$

и

$$a_0^+(\lambda) = I_0(\lambda) + s_0. \tag{10.31}$$

Из (10.4) следует, что

$$a_0^+(\infty) = \hat u(0), \tag{10.32}$$

где $\hat u(p)$ – преобразование Фурье потенциала $u(z)$.

Из (10.30) вытекает достаточно неожиданное следствие.

Следствие 1 *Пусть $u(z)$ ненулевой потенциал, прозрачный при одной энергии, удовлетворяющий условию "малости нормы" и $u(z) \in C^{(3)}_{2+\varepsilon}(\mathbb{R}^2)$. Тогда его среднее строго положительно:*

$$\hat u(0) > 0, \tag{10.33}$$

где

$$\hat u(p) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{z\in\mathbb{C}} e^{-\frac{i}{2}(p\bar z + \bar p z)} u(z) dz_R dz_I,\ p \in \mathbb{C}. \tag{10.34}$$

Докажем Следствие 1.

Из (10.30), (10.31) вытекает, что

$$\partial_{\bar\lambda}\, a_0^+(e^{i\varphi}\lambda) = \frac{\pi\theta(\lambda\bar\lambda - 1)}{\bar\lambda}\,|b(e^{i\varphi}\lambda)|^2. \tag{10.35}$$

Усредним функцию $a_0^+(\lambda)$ по углу

$$\alpha_0(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a_0^+(e^{i\varphi}\lambda) d\varphi. \tag{10.36}$$

Для усредненной функции имеет место соотношение

$$\partial_{\bar\lambda}\alpha_0(\lambda) = \frac{\pi\theta(\lambda\bar\lambda - 1)}{\bar\lambda}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |b(e^{i\varphi}\lambda)|^2 d\varphi, \tag{10.37}$$

$\alpha_0(\lambda) = 0$ при $|\lambda| \le 1,\ \alpha_0(\infty) = \hat u(0)$.

На вещественной оси $\operatorname{Im}\lambda = 0$, $\operatorname{Re}\lambda = r > 0$ имеем:

$$\partial_r\alpha_0(r) = 2\partial_{\bar\lambda}\alpha_0(\lambda)|_{\operatorname{Im}\lambda=0} = \frac{2\pi}{r}\theta(r^2-1)\int_0^{2\pi} |b(e^{i\varphi}r)|^2 d\varphi \ge 0. \tag{10.38}$$

Поскольку $\alpha_0(1) = 0$, $\alpha_0(\infty) = \hat u(0)$, то $\hat u(0) > 0$. Следствие 1 доказано.

Следствие 1 дает нам довольно сильные ограниченичения на геометрию носителя функции $b(\lambda)$. В частности:

Следствие 2 *Если выполнены условия Следствия 1, то точки* 0 *и* ∞ *нельзя соединить путем, не пересекающим носителя* $b(\lambda)$.

Доказательство:

Функция $a_0^+(\lambda)$ тождественно 0 при $|\lambda| \le 1$. Если бы такой путь существовал, то $a_0^+(\lambda)$ была бы голоморфна в его окрестности и тождественно равна 0 на нем, откуда следовало бы, что $a_0^+(\infty) = 0$. Но это противоречит Следствию 1. Следствие 2 доказано.

Найденные нами условия на данные рассеяния для потенциалов общего вида достаточно сложны. Обсудим их для случая центральных потенциалов $u(z) = u(|z|)$ с нулевым рассеянием при $E = 1$. Для них функции a_m, b_m имеют вид

$$a_m(e^{i\varphi}\lambda) = e^{-im\varphi}a_m(\lambda),\ b_m(e^{i\varphi}\lambda) = e^{im\varphi}b_m(\lambda). \tag{10.39}$$

Убедимся, что в этом случае нелокальные условия выполняются автоматически за счет симметрии задачи.

Лемма 10.1 *Пусть* $R(\lambda,\lambda') \equiv 0$ *и* $b(\lambda)$ *таково, что*

1) $b(\lambda) \in C_\infty^{(\infty)}(\mathbb{C})$,

2) $\partial_\lambda^m \partial_{\bar\lambda}^n b(\lambda)|_{|\lambda|=1} = 0$ *при всех* $m, n \geq 0$,

3) $b(e^{i\varphi}\lambda) = b(\lambda)$,

4) $b(\lambda) = \overline{b(\lambda)}$, $b(1/\lambda) = b(\lambda)$

Тогда все сформулированные выше условия на данные рассеяния, отвечающие быстоубывающим на бесконечности потенциалам, выполнены автоматически.

Докажем Лемму 10.1 индукцией по номеру соотношения. Функция $b_0^+(\lambda) = \theta(\lambda\bar\lambda - 1)b(\lambda)$ нам известна и удовлетворяет первому локальному соотношению.

Пусть первые $2n+1$ соотношение на данные рассеяния выполнены, функции $b_n^+(\lambda)$ и $a_{n-1}^+(\lambda)$ уже выражены через $b(\lambda)$, для них выполнено сооношение (10.39) , и все производные $b_n^+(\lambda)$ обращаются в 0 на окружности $|\lambda| = 1$.

Проверим, что выполнены два следующих соотношения, выразим $b_{n+1}^+(\lambda)$ и $a_n(\lambda)$ через $b(\lambda)$ и убедимся, что эти фукции также удовлетворяют (10.39) и все производные $b_{n+1}^+(\lambda)$ обращаются в 0 при $|\lambda| = 1$. Положим

$$a_n^+(\lambda) = \frac{1}{\lambda^n}[I_n(\lambda) - I_n(1)],$$

где

$$I_n = \partial_{\bar\lambda}^{-1}\left[\frac{\pi\lambda^n}{\bar\lambda}\theta(\lambda\bar\lambda - 1)b(\lambda)\overline{b_n(\lambda)}\right] = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{\pi\xi^n}{\bar\xi}\theta(\xi\bar\xi - 1)\frac{b(\xi)\overline{b_n(\xi)}}{\xi - \lambda}d\xi_R d\xi_I. \tag{10.40}$$

Функция $I_n(\lambda)$ корректно определена, и $I_n(\lambda) = I_n(|\lambda|)$ (это следует из (10.39)). Тогда $a_n^+(\lambda) \equiv 0$ при $|\lambda| = 1$ и является решением краевой задачи (10.8), с граничным условием (10.12) для $h_+(\lambda, \lambda') \equiv 0$,(3.4a-) и имеет симметрию (10.39). Положим

$$b_{n+1}^+(\lambda) = \partial_{\bar\lambda} b_n^+(\lambda) - \frac{\pi}{\bar\lambda}b(\lambda)\overline{a_n^+(\lambda)}. \tag{10.41}$$

Мы видим, что $b_n^+(\lambda)$ удовлетворяет (10.13). Поскольку все производные $b_n^+(\lambda)$ равны 0 при $|\lambda| = 1$ это верно и для $b_{n+1}^+(\lambda)$. Лемма доказана.

10.2 Построение потенциалов, прозрачных при одной энергии.

Убедимся теперь, что найденные нами необходимые дополнительные условия на данные рассеяния потенциалов, быстро убывающих на бесконечности, для случая нулевой амплитуды рассеяния при $E = 1$ являются также и достаточными. По-видимому, это верно и для ненулевой амплитуды рассеяния, однако полного доказательства этого факта пока нет.

Теорема 10.1 *Пусть $b(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ произвольная функция со следующими свойствами:*

1) $b(\lambda) \in C_\infty^{(\infty)}(\mathbb{C})$.

2) $b(1/\bar\lambda) = b(\lambda)$, $b(-1/\bar\lambda) = \bar b(\lambda)$.

3) $\partial_\lambda^m \partial_{\bar\lambda}^n b(\lambda)\big|_{|\lambda|=1} = 0$ *при всех* $m, n \geq 0$.

4) Функции $b(\lambda)$ удовлетворяют первым $M+1$ нелокальным соотношениям, сформулированным выше для случая $f(\lambda, \lambda') \equiv 0$, т.е. следующие $M+1$ граничные задачи во внешности единичного круга $D_+ = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \geq 1\}$

$$\partial_{\bar\lambda} a_m^+(\lambda) = T(\lambda)\, \overline{b_m^+(\lambda)},$$

$$a_m^+(\lambda)\big|_{|\lambda|=1} = 0, \;\; a_m^+(\infty) = O(1), \;\; m = 0, 1, \ldots, M \tag{10.42}$$

разрешимы, где функции $b_m^+(\lambda)$ реккурентно определяются формулами

$$b_{m+1}^+(\lambda) = \partial_{\bar\lambda} b_m^+(\lambda) - \frac{\pi}{\bar\lambda}\theta(\lambda\bar\lambda - 1)\, b(\lambda)\, \overline{a_m^+(\lambda)}, \tag{10.43}$$

$$b_0^+(\lambda) = \theta(\lambda\bar\lambda - 1)\, b(\lambda). \tag{10.44}$$

Положим $f(\lambda,\lambda')\equiv 0$. *Тогда построенный по "данным рассеяния"* $b(\lambda)$, $f(\lambda,\lambda')$ *потенциал* $u(z)$ *обладает следующими свойствами:*

1) $u(z)$ *вещественен.*

2) $u(z)\in C^{(\infty)}_{M+3}(\mathbb{R}^2)$.

3) Его амплитуда рассеяния при $E=1$ *равна 0* ($f(\lambda,\lambda')\equiv 0$ *при* $|\lambda|=|\lambda'|=1$). *Более того, физические решения уравнения Шредингера при* $E=1$ *имеют следующую асимптотику*

$$\varphi^+(z,\lambda)=e^{\frac{i}{2}(\lambda\bar z+z/\lambda)}+O\left(|z|^{-M-2}\right),\quad \text{где}\quad |\lambda|=1, \tag{10.45}$$

или, в стандартных обозначениях,

$$\varphi^+(k,x)=e^{ikx}+O\left(|x|^{-M-2}\right),\ k^2=E=1. \tag{10.46}$$

Сопоставляя Теорему 10.1 с Леммой 10.1, получаем:

Теорема 10.2 *Пусть* $R(\lambda,\lambda')\equiv 0$, *и* $b(\lambda)$ *удовлетворяет условиям Леммы 10.1.*

Тогда соответствующий потенциал $u(z)$ *вещественен,* $u(z)\in C^{(\infty)}_{\infty}(\mathbb{R}^2)$, *и*

$$\varphi^+(k,x)=e^{ikx}+O\left(1/|x|^{\infty}\right),\ k^2=E=1,$$

(т.е. $\varphi^+(k,x)-e^{ikx}$ *убывает при* $|x|\to\infty$ *быстрее любой степени* $|x|^{-1}$). *Тем самым, построенный потенциал прозрачен (имеет единичный оператор рассеяния) при одной энергии* $E=1$ *и, более того, рассеянная волна отсутствует при* $E=1$ *во всех порядках по* $1/z$ *при* $z\to\infty$.

Оставшаяся часть раздела посвящена доказательству Теоремы 10.1. Его идея состоит в том, что мы получим асимптотический ряд для волновой функции и потенциала при больших значениях z и убедимся, что для потенциала все его коэффициенты равны 0.

Напомним, что предэкспонента волновой функции $\chi(z,\lambda)$ определена как решение уравнения

$$\partial_{\bar\lambda}\chi(z,\lambda) = T(\lambda,z)\overline{\chi(z,\lambda)}, \tag{10.47}$$

с асимптотикой

$$\chi(z,\lambda)\to 1 \quad \text{при} \quad |\lambda|\to\infty, \tag{10.48}$$

где

$$T(\lambda,z) = e^{-\frac{i}{2}(\lambda\bar z + z/\lambda + \bar\lambda z + \bar z/\bar\lambda)}T(\lambda), \quad T(\lambda) = \frac{\pi\ sgn\,(\lambda\bar\lambda - 1)}{\bar\lambda}b(\lambda). \tag{10.49}$$

Это уравнение эквивалентно интегральному уравнению на $\chi(z,\lambda)$

$$\chi(z,\lambda) = 1 + (A_z\chi)(z,\lambda), \tag{10.50}$$

где

$$(A_z f)(\lambda) = \partial_{\bar\lambda}^{-1}(T(\lambda,z)\overline{f(\lambda)}) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{C}}\frac{T(\zeta,z)\overline{f(\zeta)}}{\zeta-\lambda}d\zeta_R d\zeta_I. \tag{10.51}$$

Из уравнения (10.50) следует, что

$$\chi(z,\lambda) = 1 + A_z\cdot 1 + (A_z^2\chi)(z,\lambda). \tag{10.52}$$

Как мы уже отмечали, это уравнение разрешимо при всех z и решение имеет вид

$$\chi(z,\lambda) = \left(I - A_z^2\right)^{-1}(1 + A_z\cdot 1). \tag{10.53}$$

При больших z оно разлагается в равномерно сходящийся ряд

$$\chi(z,\lambda) = \left(I + A_z^2 + A_z^4 + A_z^6 + \ldots\right)(1 + A_z\cdot 1). \tag{10.54}$$

Для исследования ряда (10.54) нам нужно оценить по норме операторы A_z^2, A_z. Запишем A_z^2 в следующем виде:

$$(A_z^2 f)(z,\lambda) = \frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{\mathbb{C}} K(z,\lambda,\eta)f(\eta)d\eta_R d\eta_I, \text{ где} \tag{10.55}$$

$$K(z,\lambda,\eta) = I(\lambda,\eta,z)\exp\,[\frac{i}{2}(\eta\bar{z} + z/\eta + \bar{\eta}z + \bar{z}/\bar{\eta})]\overline{T(\eta)}, \tag{10.56}$$

$$I(\lambda,\eta,z) = \iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{T(\zeta)}{(\zeta-\lambda)(\bar{\eta}-\bar{\zeta})}\exp\,[-\frac{i}{2}(\zeta\bar{z} + z/\zeta + \bar{\zeta}z + \bar{z}/\bar{\zeta})]d\zeta_R d\zeta_I. \tag{10.57}$$

Лемма 10.2 *Пусть $b(\lambda)$ удовлетворяет условиям 1),2),3) Теоремы 10.1. Тогда*

1)

$$|\partial_z^m \partial_{\bar{z}}^n I(z,\lambda,\eta)| \le \frac{\alpha_{mn}^{(1)}}{(1+|z|)}\,\frac{(1+\varphi(|\lambda-\eta|))}{|\lambda-\eta|}, \tag{10.58}$$

где $\varphi(z) = \frac{\ln r}{1+r|\ln r|}$ при всех $m,n \ge 0$.

2) Для любой тестовой функции $f(\lambda) \in C(\bar{\mathbb{C}})$ имеем $(A_z f) \in C(\bar{\mathbb{C}})$, $(A_z^2 f) \in C(\bar{\mathbb{C}})$ и выполняются следующие оценки:

a)

$$(A_z^2 f)(\lambda) = \frac{c_{-1}(z)}{\lambda} \;+\; O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right) \quad \textit{при} \quad \lambda \to \infty, \quad \textit{где} \tag{10.59}$$

$$c_{-1} = -\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{\mathbb{C}}\iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{T(\zeta)\overline{T(\eta)}}{\bar{\eta}-\bar{\zeta}}\exp\left[-\frac{i}{2}(\zeta\bar{z} + z/\zeta + \bar{\zeta}z + \bar{z}/\bar{\zeta})\right]\times$$

$$\times\exp\left[\frac{i}{2}(\eta\bar{z} + z/\eta + \bar{\eta}z + \bar{z}/\bar{\eta})\right] f(\eta)d\zeta_R d\zeta_I d\eta_R d\eta_I, \tag{10.60}$$

$$|\partial_z^m \partial_{\bar{z}}^n\, c_{-1}| \le \frac{\beta_{mn}^{(1)}}{(1+|z|)}\|f\|_C \quad \textit{при всех} \quad m,n \ge 0. \tag{10.61}$$

b)

$$\|\left(\partial_z^m \partial_{\bar{z}}^n A_z^2\right) f\|_C \le \frac{\gamma_{mn}^{(1)}}{(1+|z|)}\|f\|_C \quad \textit{при всех} \quad m,n \ge 0. \tag{10.62}$$

c)

$$\|\left(\partial_z^m \partial_{\bar{z}}^n A_z\right) f(\lambda)\|_C \le \varepsilon_{mn}\,\|f\|_C \quad \textit{при всех} \quad m,n > 0. \tag{10.63}$$

Формула (10.54) может быть записана как

$$\chi(z,\lambda) = 1 + A_z \cdot 1 + A_z^2 \cdot 1 + \ldots + A_z^{2M+5} \cdot 1 + R_M, \qquad (10.64)$$

где

$$R_M = \left(\sum_{k=M+3}^{\infty} A_z^{2k} \right) (1 + A_z \cdot 1). \qquad (10.65)$$

Из Леммы 10.2 вытекает следующая оценка на R_M.

Лемма 10.3 *Пусть $b(\lambda)$ удовлетворяет условиям 1),2),3) Теоремы 10.1. Тогда*

1)

$$|\partial_z^m \partial_{\bar{z}}^n R_M| \le \frac{\alpha_{mn}^{(2)}}{(1+|z|)^{M+3}} \quad \textit{при всех} \quad m,n \ge 0. \qquad (10.66)$$

2)

$$R_M = \frac{q(z)}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad \textit{при } \lambda \to \infty, \ \textit{где} \qquad (10.67)$$

$$|\partial_z^m \partial_{\bar{z}}^n q(z)| \le \frac{\beta_{mn}^{(2)}}{(1+|z|)^{M+3}} \quad \textit{при всех} \quad m,n \ge 0. \qquad (10.68)$$

Используя (10.68) получаем, что вклад R_M в потенциал $u(z)$ и в функцию $\chi(z,\lambda)$ лежит в пространстве $C^{(\infty)}_{M+3}(\mathbb{R}^2)$. Отсюда следует:

Лемма 10.4 *Для того, чтобы вычислить потенциал $u(z)$ и функцию $\chi(z,\lambda)$ с точностью до членов порядка $O\left(1/|z|^{M+3}\right)$ достаточно учесть первые $2M+6$ члнов в формуле (10.64).*

Пусть

$$\chi_M(z,\lambda) = 1 + A_z \cdot 1 + \ldots + A_z^{2M+5} \cdot 1. \qquad (10.69)$$

Следующий шаг – получение оценок на функцию $\chi_M(z,\lambda)$.

Лемма 10.5 *Пусть $b(\lambda)$ удовлетворяет условиям 1),2),3) Теоремы 10.1, $f(z,\lambda)$ – некоторая гладкая функция двух переменных λ, z такая, что все производные $\partial_z^k \partial_{\bar z}^l \partial_\lambda^m \partial_{\bar\lambda}^n f(z,\lambda)$ равномерно по z ограничены в λ-плоскости, т.е.*

$$|\partial_z^k \partial_{\bar z}^l \partial_\lambda^m \partial_{\bar\lambda}^n f(z,\lambda)| \le \alpha_{klmn} \quad \text{для всех } z,\lambda. \tag{10.70}$$

Тогда

1) Имеет место следующее асимптотическое разложение

$$A_z * f(z,\lambda) = \frac{2i}{(z-\bar z/\bar\lambda^2)} \exp\left[-\frac{i}{2}(\lambda\bar z + \bar\lambda z + z/\lambda + \bar z/\bar\lambda)\right] \times$$

$$\times \left\{ \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\partial_{\bar\lambda} \circ \frac{2i}{z-\bar z/\bar\lambda^2} \right)^k \right] * (T(\lambda)\overline{f(z,\lambda)}) + O\left(\frac{1}{|z|^\infty}\right) \right\}. \tag{10.71}$$

Здесь $\circ$ обозначает произведение операторов и $*$ обозначает результат применения дифференциального оператора к функции.

2) Рассмотрим асимптотическое разложение $A_z * f(z,\lambda)$ при $\lambda \to \infty$

$$A_z * f(z,\lambda) = \frac{\alpha_{-1}(z)}{\lambda} + \frac{\alpha_{-2}(z)}{\lambda^2} + \dots \tag{10.72}$$

(Поскольку $T(\lambda)$ быстро убывает при $|\lambda| \to \infty$, то в (10.72) нет неголоморфных членов). Тогда при всех k $\alpha_{-k}(z) \in C_\infty^{(\infty)}(\mathbb{R}^2)$.

3) Пусть $|\lambda| = 1$. Тогда функция $A_z * f(z,\lambda)$ убывает при $z \to \infty$ быстрее любой степени $|z|$ вместе со всеми производными.

4) $A_z^2 * f(z,\lambda)$ – гладкая функция z,λ такая, что все выражения $|z|\left|\left(\partial_z^{n_1}\partial_{\bar z}^{n_2}\partial_\lambda^{k_1}\partial_{\bar\lambda}^{k_2} f(z,\lambda)\right)\right|$ ограничены по z,λ. (Для $A_z * f(z,\lambda)$ это неверно.)

5)

$$A_z^2 * f(z,\lambda) = -\partial_{\bar\lambda}^{-1}\left\{ T(\lambda)\frac{1}{w\mathcal{R}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{w^k}\left(\partial_\lambda \circ \frac{1}{\mathcal{R}}\right)^k\right] * (\overline{T(\lambda)} f(\lambda,z))\right\} + O\left(\frac{1}{|z|^\infty}\right), \tag{10.73}$$

где

$$w = \bar{z}/2i,\ \mathcal{R} = (1 - \nu/\lambda^2),\ \nu = z/\bar{z}. \tag{10.74}$$

Лемма 10.6 *Рассмотрим функцию $A_z^{2k+1}*1$, где $k \in \mathbb{N} \cup 0$. Она обладает следующими свойствами:*

1) При $|\lambda| = 1$

$$A_z^{2k+1} * 1 \in C_\infty^{(\infty)}(\mathbb{R}^2) \quad по \quad z.$$

2) Рассмотрм асимптотическое пазложение этой функции при $\lambda \to \infty$

$$A_z^{2k+1} * 1 = \frac{\chi_{-1,2k+1}(z)}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Тогда $\chi_{-1,2k+1}(z) \in C_\infty^{(\infty)}(\mathbb{R}^2)$ по z.

Тем самым члены вида $A_z^{2k+1} * 1,\ k \in \mathbb{N} \cup 0$ в асимптотическом разложении (10.64) дают вклад в функцию $\chi(z, \lambda)$ при $|\lambda| = 1$ и в потенциал $u(z)$ определяемый (7.45) из функциональноого класса $C_\infty^{(\infty)}(\mathbb{R}^2)$ по переменной z. Тем самым, при асимптотических вычислениях этими членами можно принебречь.

Это утверждение непосредственно вытекает из пунктов 2-4 Леммы 10.5.

Мы показали, что для вычисления $u(z)$ с точностью до членов порядка $O\left(1/|z|^{M+3}\right)$ функцию $\chi(z, \lambda)$ достаточно апроксимировать рядом

$$\chi(z, \lambda) \sim \chi_M^{Appr}(z, \lambda) = 1 + A_z^2 \cdot 1 + A_z^4 \cdot 1 + \ldots + A_z^{2M+4} \cdot 1. \tag{10.75}$$

Для вычисления асимптотики $\chi_M^{Appr}(z, \lambda)$ при больших $|z|$ применим формулу (10.73) из Леммы 10.5. Мы получаем, что

$$\chi_M^{Appr}(z, \lambda) = 1 + \frac{\mathcal{C}_0(\lambda, \nu)}{w} + \frac{\mathcal{C}_1(\lambda, \nu)}{w^2} + \ldots + \frac{\mathcal{C}_M(\lambda, \nu)}{w^{M+1}} + \frac{\mathcal{C}_{M+1}(\lambda, \nu)}{w^{M+2}} + u_M(z, \lambda), \tag{10.76}$$

где $w, \mathcal{R}, \nu$ определены в (10.74), и

$$u_M(z,\lambda) \in C^{(\infty)}_{M+3}(\mathbb{R}^2 \backslash D) \quad \text{по} \quad z \quad \text{при всех} \quad \lambda, \tag{10.77}$$

$$u_M(z,\lambda) = u_{M,-1}(z)/\lambda + O(1/|\lambda|^2) \; as \; \lambda \to \infty, \; u_{M,-1}(z) \in C^{(\infty)}_{M+3} \in (\mathbb{R}^2 \backslash D), \tag{10.78}$$

где D – единичный диск $|z| < 1$, функции $\mathcal{C}_k(\lambda,\nu)$ определяются рекуррентными формулами

$$\mathcal{C}_n(\lambda,\nu) = -\partial_{\bar\lambda}^{-1}\left[\frac{1}{\mathcal{R}} T(\lambda) \sum_{k=0}^{n} \left(\partial_\lambda \circ \frac{1}{\mathcal{R}}\right)^k * \left[\overline{T(\lambda)} \mathcal{C}_{n-k-1}(\lambda,\nu)\right]\right], \quad \mathcal{C}_{-1}(\lambda,\nu) \equiv 1. \tag{10.79}$$

Действительно, мы имеем

$$\chi^{Appr}_{M+1}(z,\lambda) = 1 + A^2_z * \chi^{Appr}_M(z,\lambda). \tag{10.80}$$

Подставляя (10.73) в (10.80) и, сравнивая коэффициенты при $1/w^{n+1}$, $n = 0, \ldots, M+1$ в обеих частях, получаем (10.79).

Введем дополнительные обозначения. Рассмотрим дифференциальный оператор $\frac{1}{\mathcal{R}}\left(\partial_\lambda \circ \frac{1}{\mathcal{R}}\right)^n$. Его можно записать в следущем виде

$$\frac{1}{\mathcal{R}}\left(\partial_\lambda \circ \frac{1}{\mathcal{R}}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} f_{nk} \partial^k_\lambda, \quad \text{где} \quad f_{nk} = f_{nk}(\lambda,\nu), \quad \mathcal{R} = \mathcal{R}(\lambda,\nu) = 1 - \nu/\lambda^2. \tag{10.81}$$

Функции $f_{nk} = f_{nk}(\lambda,\nu)$ обладают следующими свойствами:

a)

$$f_{nn} = \frac{1}{\mathcal{R}^{n+1}} = \frac{1}{(1-\nu/\lambda^2)^{n+1}}. \tag{10.82}$$

b)

$$f_{nk} = \delta_{nk} + O\left(1/|\lambda|^{n-k+2}\right) \; as \; \lambda \to \infty. \tag{10.83}$$

c)

$$f_{nk} = O(|\lambda|^{n+k+2}) \; as \; \lambda \to 0. \tag{10.84}$$

d)

$$f_{n+1,k} = \frac{1}{\mathcal{R}}(\partial_\lambda f_{nk} + f_{n,k-1}),\ \ f_{00} = \frac{1}{\mathcal{R}} = \frac{1}{1-\nu/\lambda^2}, f_{k,1} = 0,\ \ f_{k,k+1} = 0. \tag{10.85}$$

e) При фиксированном ν функция $f(\lambda,\nu)$ мероморфна по λ с полюсами в точках $\lambda^2 = \nu$. В них

$$f_{nk} = O\left(\frac{1}{\lambda^2-\nu}\right)^{2n-k+1}. \tag{10.86}$$

Мы готовы сформулировать основную алгебраическую лемму раздела.

Лемма 10.7 *Пусть для $b(\lambda)$ выполнены условия Теоремы 10.1. Тогда для $n = 1,\dots,M$ имеет место*

$$\mathcal{C}_n(\lambda,\nu) = \sum_{l=0}^{n} f_{nl} c_l(\lambda), \tag{10.87}$$

где функции $c_l(\lambda)$ удовлетворяют следующим уравнениям

$$\partial_{\bar\lambda} c_l(\lambda) = -\left[T(\lambda)\sum_{k=0}^{n}\partial_\lambda^k(\overline{T(\lambda)}c_{n-k-1}(\lambda))\right],\ \ c_{-1}(\lambda)\equiv 1,\ \ \lambda\neq 0. \tag{10.88}$$

(Эти уравнения можно получить формальной подстановкой $\nu = 0$ в уравнение (10.79)). Эти функции не зависят от ν и определяются

$$c_n(\lambda) = -\pi sgn\,(\lambda\bar\lambda - 1)\sum_{k=0}^{n}\alpha_{nk}(\lambda)a_k(\lambda), \tag{10.89}$$

где $\alpha_{nk}(\lambda)$ задаются

$$\partial_\lambda^n \circ \frac{1}{\lambda} = \sum_{k=0}^{n}\alpha_{nk}(\lambda)\circ\partial_\lambda^k,\ \ \alpha_{nk}(\lambda) = (-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}\frac{1}{\lambda^{n-k+1}} \tag{10.90}$$

и функции $a_m(\lambda)$ имеют вид

$$a_m(\lambda) = \theta(\lambda\bar\lambda - 1)a_m^+(\lambda) + \theta(1-\lambda\bar\lambda)a_m^-(\lambda), \tag{10.91}$$

где $a_m^+(\lambda)$ – решения краевой задачи (10.42) и $a_m^-(\lambda)$ даются (10.26).

Доказательство Леммы 10.2 достаточно стандартно и мы не будем приводить его здесь (см. работу [109]). Доказательство Лемм 10.5, 10.7 будет приведено ниже.

Вернемся к доказательству Теоремы 10.1. Утверждение 1 было доказано в разделе 8. Используя (10.76), (10.87), (10.89), (10.83), (10.90), (10.74), получаем следующую оценку на $\chi_M^{Appr}(z,\lambda)$ при $\lambda \to \infty$

$$\chi_M^{Appr}(z,\lambda) = 1 - \frac{\pi}{\lambda}\sum_{k=0}^{M}\left(\frac{2i}{\bar z}\right)^{k+1} a_k(\infty) + \frac{(2i)^{M+2}\mathcal{C}_{M+1,-1}(\nu)}{\bar z^{M+2}}\,\frac{1}{\lambda} + \\ + \frac{v_{M,-1}(z)}{\lambda} + O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right), \tag{10.92}$$

где

$$\mathcal{C}_{M+1}(\lambda,\nu) = \frac{\mathcal{C}_{M+1,-1}(\nu)}{\lambda} + O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right). \tag{10.93}$$

Из формулы (7.45), (10.92), (10.74) и Лемм 10.5, 10.7 следует

$$u(z) = \frac{(2i)^{M+3}}{\bar z^{M+3}}\,\frac{\partial \mathcal{C}_{M+1,-1}(\nu)}{\partial \nu} + 2i\partial_z v_{M,-1}(z) + \tilde u_M(z), \tag{10.94}$$

где $\tilde u_M(z) \in C^{(\infty)}_{M+3}(\mathbb{R}^2\backslash D)$, все члены в (10.94) – функции класса $C^{(\infty)}_{M+3}(\mathbb{R}^2\backslash D)$. Функция $u(z)$ гладкая, что доказывает утверждение 2.

Из (10.42) и свойства 3) функции $b(\lambda)$ в условии Теоремы 10.1 следует, что

$$\partial_\lambda^{n_1}\partial_{\bar\lambda}^{n_2} a_m^+(\lambda)\big|_{|\lambda|=1} = 0 \quad \text{для всех} \quad n_1, n_2 \geq 0. \tag{10.95}$$

Используя (10.76), (10.87), (10.89), свойство e) функций f_{nk}, (10.90), (10.95) и Лемму 10.6 получаем, что

$$\mathcal{C}_k(\lambda,\nu)\big|_{|\lambda|=1} \equiv 0, \;\; k = 0,\dots,M \tag{10.96}$$

и

$$\chi(z,\lambda)\big|_{|\lambda|=1} = 1 + \frac{\mathcal{C}_{M+1}(\lambda,\nu)}{w^{M+2}} + u_M(z,\lambda) + \tilde\chi_M(z,\lambda), \tag{10.97}$$

где $u_M(z,\lambda) \in C^{(\infty)}_{M+3}(\mathbb{R}^2\backslash D)$, $\tilde\chi_M(z,\lambda) \in C^{(\infty)}_{M+3}(\mathbb{R}^2\backslash D)$.

Из (10.97) следует, что функция

$$\varphi(z,\lambda) = e^{\frac{i}{2}(\lambda\bar{z}+z/\lambda)}\chi(z,\lambda)|_{|\lambda|=1} \tag{10.98}$$

имеет асимптотику (10.45). Поскольку для нее выполнено условие излучения, то $\varphi(z,\lambda)$ совпадает с физическим решением $\varphi^-(z,\lambda)$.

Теорема 10.1 доказана.

Доказательство Леммы 10.5.

$$\partial_{\bar\lambda}^{-1}\left(e^{iS(\lambda,z)}F(\lambda,z)\right) =$$

$$= \frac{e^{iS}}{iS_{\bar\lambda}}\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k\left(\partial_{\bar\lambda}\circ\frac{1}{iS_{\bar\lambda}}\right)^k F(\lambda,z) + (-1)^N\partial_{\bar\lambda}^{-1}\left[e^{iS}\left(\partial_{\bar\lambda}\circ\frac{1}{iS_{\bar\lambda}}\right)^N F(\lambda,z)\right], \tag{10.99}$$

где

$$\left(\partial_{\bar\lambda}^{-1}f\right)(\lambda) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{C}} f(\zeta)\frac{d\zeta_R d\zeta_I}{\zeta-\lambda}. \tag{10.100}$$

Для функций общего вида это формальный ряд, однако если все фукции $\left(\partial_{\bar\lambda}\circ\frac{1}{iS_{\bar\lambda}}\right)^k F(\lambda,z)$, $k=0,\dots,N$ непрерывны по λ и убывают при $\lambda\to\infty$ достаточно быстро, то (10.99) становится точным равенством. Применяя (10.99) к $A_z * f(z,\lambda)$ получаем

$$A_z * f(z,\lambda) = \frac{2i}{(z-\bar{z}/\bar\lambda^2)}\exp\left[-\frac{i}{2}(\lambda\bar{z}+\bar\lambda z + z/\lambda + \bar{z}/\bar\lambda)\right]\times$$

$$\times\left[\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k\left(\partial_{\bar\lambda}\circ\frac{2i}{z-\bar{z}/\bar\lambda^2}\right)^k\right] * (T(\lambda)\overline{f(z,\lambda)}) + \mathcal{R}_N(z,\lambda), \tag{10.101}$$

$$\mathcal{R}_N(z,\lambda) = (-1)^N\partial_{\bar\lambda}^{-1}\left[\exp\left[-\frac{i}{2}(\lambda\bar{z}+\bar\lambda z + z/\lambda + \bar{z}/\bar\lambda)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left(\partial_{\bar\lambda}\circ\frac{2i}{z-\bar{z}/\bar\lambda^2}\right)^N * (T(\lambda)\overline{f(z,\lambda)})\right] =$$

$$= \frac{(-1)^N}{w^N}\partial_{\bar\lambda}^{-1}\left[\exp\left[-\frac{i}{2}(\lambda\bar z + \bar\lambda z + z/\lambda + \bar z/\bar\lambda)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left(\partial_{\bar\lambda}\circ\frac{1}{1-\bar\nu/\bar\lambda^2}\right)^N * (T(\lambda)\overline{f(z,\lambda)})\right]. \qquad (10.102)$$

Функции $\left(\partial_{\bar\lambda}\circ\frac{1}{1-\bar\nu/\lambda^2}\right)^N * (T(\lambda)\overline{f(z,\lambda)})$ и все их производные ограничены на λ-плоскости равномерно по z. Тем самым,

$$\partial_\lambda^{k_1}\partial_{\bar\lambda}^{k_2}\partial_z^{n_1}\partial_{\bar z}^{n_2}\mathcal{R}_N(z,\lambda) = O\left(\frac{1}{|z|^{N-k_1-k_2}}\right),\ |z|\to\infty \text{ при всех } k_1,k_2,n_1,n_2\geq 0. \qquad (10.103)$$

Это доказывает (10.71). Здесь мы воспользовались следующим соотношением. Пусть $\varphi(z,\lambda)$ – гладкая функция z,λ, $z\neq 0$ и все производные $\partial_z^{n_1}\partial_{\bar z}^{n_2}\varphi(z,\lambda)$, $n_1,n_2\geq 0$ – шварцевские функции по λ. Тогда

$$\partial_z^{n_1}\partial_{\bar z}^{n_2}\partial_\lambda^{k_1}\partial_{\bar\lambda}^{k_2}\partial_{\bar\lambda}^{-1} * \varphi(z,\lambda) = \partial_{\bar\lambda}^{-1}\partial_z^{n_1}\partial_{\bar z}^{n_2}\partial_\lambda^{k_1}\partial_{\bar\lambda}^{k_2} * \varphi(z,\lambda), \qquad (10.104)$$

где $\partial_{\bar\lambda}^{-1}$ заданы формулой (10.100).

Для того, чтобы вычислить (10.72), рассмотрим (10.101) при $|\lambda|\to\infty$. Мы видим, что нетривиальный вклад возникает только от членов $\mathcal{R}_N(\lambda,z)$.

$$\alpha_{-k}(z) = \frac{(-1)^N}{w^N}\left(\frac{1}{\pi}\right)\iint\limits_{\mathbb{C}}\exp\left[-\frac{i}{2}(\lambda\bar z + \bar\lambda z + z/\lambda + \bar z/\bar\lambda)\right]\times$$

$$\times\left(\partial_{\bar\lambda}\circ\frac{1}{1-\bar\nu/\bar\lambda^2}\right)^N * (T(\lambda)\overline{f(z,\lambda)}\,\lambda^{k-1}d\lambda_R d\lambda_I, \qquad (10.105)$$

где N можно выбрать сколь угодно большим. Это доказывает утверждение 2.

Пусть $|\lambda|=1$. Тогда

$$A_z * f(z,\lambda) = \mathcal{R}_N(z,\lambda) \qquad (10.106)$$

для всех $N\geq 0$. Это доказывает утверждение 3.

Применяя A_z к обеим частям (10.101) получаем

$$A_z^2 * f(z,\lambda) = -\partial_{\bar\lambda}^{-1}\left\{T(\lambda)\frac{1}{w\mathcal{R}}\left[\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{w^k}\left(\partial_\lambda\circ\frac{1}{\mathcal{R}}\right)^k\right] * (\overline{T(\lambda)}f(\lambda,z))\right\} + Q_N, \tag{10.107}$$

где $w, \mathcal{R}(\nu,\lambda)$ заданы (10.74),

$$Q_N(z,\lambda) = \partial_{\bar\lambda}^{-1}\left\{T(\lambda)\exp\left[\frac{i}{2}(\lambda\bar z + \bar\lambda z + z/\lambda + \bar z/\bar\lambda\right]\overline{\mathcal{R}_N(z,\lambda)}\right\}, \tag{10.108}$$

$\mathcal{R}_N(z,\lambda)$ определена (10.102). Пусть $N > n_1 + n_2$. Применим опрератор $D = \partial_z^{n_1}\partial_{\bar z}^{n_2}\partial_\lambda^{k_1}\partial_{\bar\lambda}^{k_2}$ к (10.107). Используя (10.103),(10.104) получаем

$$DA_z^2 * f(z,\lambda) = -\partial_{\bar\lambda}^{-1}\left\{D * \left(\sum_{k=0}^{N-1}\left[\frac{1}{\mathcal{R}}\frac{1}{w^{k+1}}\left(\partial_\lambda\circ\frac{1}{\mathcal{R}}\right)^k\right] * (\overline{T(\lambda)}f(\lambda,z))\right)\right\} +$$

$$+\,\partial_{\bar\lambda}^{-1}\left\{D * \left(T(\lambda)\exp\left[\frac{i}{2}(\lambda\bar z + \lambda z + z/\lambda + \bar z/\bar\lambda\right]\overline{\mathcal{R}_N(z,\lambda)}\right)\right\}. \tag{10.109}$$

Учитывая (10.70) и свойства 1)-3) из формулировки Теоремы 10.1 получаем, что k-ый член , $0 \le k \le N-1$ в (10.109) равен $O\left(\frac{1}{|z|^{k+1}}\right)$ при $|z| \to \infty$ равномерно по λ. Сопоставляя с (10.102) получаем утверждение 4. Поскольку N в (10.107),(10.109),(10.103) можно взять любым, получаем доказательство (10.73).

Доказательство Леммы 10.7.

Заметим, что функции $\mathcal{C}_n(\lambda,\nu),\ n = 0,\dots,M$ удовлетворяют (10.79) тогда и только тогда, когда выполнено

$$\begin{cases} \partial_{\bar\lambda}\mathcal{C}_m(\lambda,\nu) = \frac{1}{\mathcal{R}}T(\lambda)\overline{\mathcal{D}_m(\lambda,\nu)},\ m = 0,\dots,M \\ \mathcal{D}_m(\lambda,\nu) = \overline{\left(\partial_\lambda\circ\frac{1}{\mathcal{R}}\right)}\mathcal{D}_{m-1}(\lambda,\nu) - T(\lambda)\overline{\mathcal{C}_{m-1}(\lambda,\nu)},\ m = 1,\dots,M, \end{cases} \tag{10.110}$$

где

$$\mathcal{D}_0(\lambda,\nu) = -T(\lambda), \tag{10.111}$$

функции $\mathcal{C}_m(\lambda,\nu)$ непрерывны по λ при постоянном ν и

$$\mathcal{C}_m(\lambda,\nu) \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda\to\infty. \tag{10.112}$$

Отметим, что функции $c_m(\lambda)$ удовлетворяют (10.88) тогда и только тогда, когда они удовлетворяют

$$\begin{cases} \partial_{\bar\lambda} c_m(\lambda) = T(\lambda)\overline{d_m(\lambda)}, \ \lambda \neq 0, \ m = 0, \dots, M \\ d_m(\lambda) = \partial_{\bar\lambda} d_{m-1}(\lambda) - T(\lambda)\overline{c_{m-1}(\lambda)}, \ \lambda \neq 0, \ m = 1, \dots, M, \end{cases} \tag{10.113}$$

где

$$d_0(\lambda) = -T(\lambda). \tag{10.114}$$

Уравнения (10.113) совпадают с (10.8), (10.9), отличаясь лишь стартовой функцией $d_0(\lambda)$ вместо $b_0(\lambda)$.

Убедимся, что функции $c_m(\lambda)$ из (10.89), $m = 0, \dots, M$ и функции

$$d_m(\lambda) = -\pi \operatorname{sgn}(\lambda\bar\lambda - 1) \sum_{k=0}^{m} \overline{\alpha_{mk}(\lambda)}\ b_k(\lambda) \tag{10.115}$$

удовлетворяют (10.113). Прямое вычисление с помощью (10.8), (10.9) дает

$$\begin{aligned} \partial_{\bar\lambda} c_m(\lambda) &= -\pi \operatorname{sgn}(\lambda\bar\lambda - 1) \sum_{k=0}^{m} \partial_{\bar\lambda} \left(\alpha_{mk}(\lambda) a_k(\lambda)\right) = \\ &= -\pi \operatorname{sgn}(\lambda\bar\lambda - 1) \sum_{k=0}^{m} \alpha_{mk}(\lambda) \partial_{\bar\lambda} a_k(\lambda) = \\ &= -\pi \operatorname{sgn}(\lambda\bar\lambda - 1) \sum_{k=0}^{m} \alpha_{mk}(\lambda) T(\lambda) \overline{b_k(\lambda)} = \\ &= T(\lambda) \left(-\pi \operatorname{sgn}(\lambda\bar\lambda - 1) \overline{\sum_{k=0}^{m} \overline{\alpha_{mk}(\lambda)} b_k(\lambda)} \right) = T(\lambda)\overline{d_m(\lambda)}, \end{aligned} \tag{10.116}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\bar\lambda}\, d_m(\lambda) &= -\pi \operatorname{sgn}(\lambda\bar\lambda - 1) \sum_{k=0}^{m} \partial_{\bar\lambda} \left(\overline{\alpha_{mk}(\lambda)} b_k(\lambda)\right) = \\ &= -\pi \operatorname{sgn}(\lambda\bar\lambda - 1) \left[\sum_{k=0}^{m} (\overline{\partial_{\bar\lambda}\, \alpha_{mk}(\lambda)}) b_k(\lambda) + \sum_{k=0}^{m} \overline{\alpha_{mk}(\lambda)} (b_{k+1}(\lambda) + T(\lambda)\overline{a_k(\lambda)}) \right] = \\ &= -\pi \operatorname{sgn}(\lambda\bar\lambda - 1) \left[\sum_{k=0}^{m} \overline{\alpha_{m+1,k}(\lambda)} b_k(\lambda) - \sum_{k=1}^{m} \overline{\alpha_{m,k-1}(\lambda)} b_k(\lambda) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{m} \overline{\alpha_{mk}(\lambda)}\, b_{k+1}(\lambda) + T(\lambda) \sum_{k=0}^{m} \overline{\alpha_{mk}(\lambda)}\, \overline{a_k(\lambda)} \right] = \end{aligned}$$

$$= -\pi\,\mathrm{sgn}(\lambda\bar\lambda - 1)\sum_{k=0}^{m+1}\overline{\alpha_{m+1,k}(\lambda)}\,b_k(\lambda) +$$

$$+T(\lambda)\overline{\left(-\pi\,\mathrm{sgn}(\lambda\bar\lambda-1)\sum_{k=0}^{m}\alpha_{mk}(\lambda)a_k(\lambda)\right)} = d_{m+1}(\lambda)+T(\lambda)\overline{c_m(\lambda)}. \quad (10.117)$$

Мы используем то, что все функции $a_k(\lambda)$, $b_k(\lambda)$, $k = 0,\dots,M$ обращаются в 0 на единичной окружности $|\lambda| = 1$ со всеми производными. (Это свойство вытекает из условий 1),3),4) Теоремы 10.1.) Благодаря этому функции $c_n(\lambda)$, определяемые (10.89), и $d_n(\lambda)$,определяемые (10.115) , оказываются гладкими на окружности $|\lambda| = 1$.

Проверим, что функции $\mathcal{C}_n(\lambda,\nu)$. определяемые (10.87), и $\mathcal{D}_n(\lambda,\nu)$, определяемые

$$\mathcal{D}_n(\lambda,\nu) = \bar{\mathcal{R}}\sum_{l=0}^{n}\overline{f_{nl}(\lambda,\nu)}\,d_l(\lambda), \quad (10.118)$$

удовлетворяют (10.110).

Прямое вычисление с помощью (10.113),(10.85) дает

$$\partial_{\bar\lambda}\,\mathcal{C}_m(\lambda,\nu) = \partial_{\bar\lambda}\sum_{k=0}^{m} f_{mk}(\lambda,\nu)\,c_m(\lambda) =$$

$$\sum_{k=0}^{m} f_{mk}(\lambda,\nu)\,\partial_{\bar\lambda}\,c_m(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} f_{mk}(\lambda,\nu)\,T(\lambda)\,\overline{d_k(\lambda)} =$$

$$= T(\lambda)\,\frac{1}{\mathcal{R}(\lambda,\nu)}\times\overline{\left(\sum_{k=0}^{m}\overline{\mathcal{R}(\lambda,\nu)}\,\overline{f_{mk}(\lambda,\nu)}d_k(\lambda)\right)}$$

$$= \frac{T(\lambda)}{\mathcal{R}(\lambda,\nu)}\,\overline{\mathcal{D}_m(\lambda,\nu)}, \quad (10.119)$$

$$\overline{\left(\partial_\lambda\circ\frac{1}{\mathcal{R}(\lambda,\nu)}\right)}\,\mathcal{D}_m(\lambda,\nu) = \partial_{\bar\lambda}\sum_{l=0}^{m}\overline{f_{nl}(\lambda,\nu)}\,d_l(\lambda) =$$

$$= \sum_{l=0}^{m}\overline{\mathcal{R}(\lambda,\nu)}\,\overline{f_{n+1,l}(\lambda,\nu)}\,d_l(\lambda) - \sum_{l=1}^{m}\overline{f_{n,l-1}(\lambda,\nu)}\,d_l(\lambda) +$$

$$+\sum_{l=0}^{m}\overline{f_{nl}(\lambda,\nu)}\,d_{l+1}(\lambda) + \sum_{l=o}^{m}\overline{f_{nl}(\lambda,\nu)}\,T(\lambda)\,\overline{c_l(\lambda)} =$$

$$\sum_{l=0}^{m+1} \overline{\mathcal{R}(\lambda,\nu)}\,\overline{f_{n+1,l}(\lambda,\nu)}\,d_l(\lambda) + T(\lambda)\,\left(\overline{\sum_{l=0}^{m} f_{nl}(\lambda,\nu)\,c_l(\lambda)}\right) =$$

$$= \mathcal{D}_{m+1}(\lambda,\nu) + T(\lambda)\,\overline{\mathcal{C}_m(\lambda,\nu)}. \qquad (10.120)$$

Используя (10.84),(10.90) несложно проверить, что функции $\mathcal{C}_m(\lambda,\nu)$, $\mathcal{D}_m(\lambda,\nu)$ с $m = 0,\dots,M$ ограничены по λ по $\mathcal{C}_m(\lambda,\nu) \to 0$ при $\lambda \to \infty$.

Лемма 10.7 доказана.

11 Преобразование рассеяния для быстороубывабщих потенциалов на фоне конечнозонных.

Результаты этого раздела были получены автором в работах [16], [17].

Мы уже обсуждали преобразование рассеяния для двумерного оператора Шредингера

$$L_S = -\partial_x^2 - \partial_y^2 + u(x,y), \qquad (11.1)$$

и параболического оператора

$$L_P = \partial_y - \partial_x^2 + u(x,y), \qquad (11.2)$$

с убывающим на бесконечности потенциалом. Оказывается, что эти результаты можно достаточно естественно перенести на случай, когда потенциал предсталяет собой сумму конечнозонного потенциала и потенциала, убывающего на бесконечности,

$$u(x,y) = u_0(x,y) + u_1(x,y), \qquad (11.3)$$

где потенциал $u_0(x,y)$ построен по алгебраической кривой Γ и дивизору на ней, которые считаются известными , $u_1(x,y)$ достаточно быстро убывает при $x^2+y^2 \to \infty$. Такие потенциалы мы будем называть быстроубывающими на фоне конечнозонных.

Для уравнений с одной пространственной переменной задачи такого типа рассматривались рядом авторов, в частности Е.А.Кузнецовым и А.В.Михайловым [50], И.М.Кричевером [45], Н.Е.Фирсовой [76], Р.Ф.Бикбаевым и Р.А.Шариповым [3].

Как мы уже отмечали, аналитическая постановка задачи рассеяния для двумерного оператора Шредингера при одной энергии существенно зависит от ее знака. При этом аналитически простейшим оказывался случай отрицательной энергии ниже основного состояния. В конечнозонной теории ему соответствует случай M-кривой с дивизором, лежащим на вещественных овалах. Вообще говоря, существует достаточно много типов римановых поверхностей, порождающих неособые вещественные конечнозонные решения [57], [58], [133] и, по-видимому, им отвечают различные типы "данных рассеяния" при добавлении быстроубывающего члена. Для параболического оператора, входящего в пару Лакса для КП 2 ситуация проще, поскольку вещественным неособым потенциалам отвечают в точности M-кривые с дивизором на овалах [29]. В нашей работе мы ограничимся изучением случая, когда $u_0(x,y)$ – неособый вещественный потенциал, построенный по такой кривой. Было бы интересно в будущем рассмотреть и другие геометрии.

Мы покажем, что при добавлении быстроубывающего члена волновая функция по-прежнему "живет" на кривой Γ, однако она перестает быть мероморфной по спектральному параметру, и на Γ возникает $\bar\partial$-проблема. При этом мы будем использовать модифицированный вариант теории возмущений конечнозонных операторов, разработанной И.М.Кричевером [46], [43], [118], [119].

Введем "данные рассеяния", отвечающие конечнозонной части $u_0(x,y)$. В случае параболического оператора это

1) Алгебраическая кривая Γ рода $g < \infty$ с отмеченной точкой ∞, локальным параметром $w = 1/k$ в окрестности ∞ и антиголоморфной

инволюцией $\tau : \Gamma \to \Gamma$ такой, что

a) τ имеет $g+1$ неподвижный овал $a_1, \ldots, a_g, b$ причем $\infty \in b$.

b) $\tau(k) = \bar{k}$.

2) Дивизор $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ на Γ такой, что $\gamma_i \in a_i$.

Дифференциалы квазиимпульсов dp_x и dp_y определяются как мероморфные дифференциалы на Γ, голоморфные вне точки ∞ с асмиптотикой

$$dp_x = -idk + O(1), \quad dp_y = -id(k^2) + O(1), \quad \text{при} \quad \gamma \to \infty, \tag{11.4}$$

и нормировкой

$$\operatorname{Im} \oint_c dp_x = \operatorname{Im} \oint_c dp_y = 0 \tag{11.5}$$

где c – произвольный замкнутый цикл на Γ, не проходящий через ∞.

Для случая общего положения существует единственный мероморфный дифференциал $d\Omega$ с нулями в точках γ_j и особенностью $-idk + O(1)$ в точке ∞. У него есть еще g нулей, которые мы обозначим $\gamma_1^+, \ldots, \gamma_g^+$.

В случае оператора Шредингера "данные рассеяния" конечнозонного потенциала – это

1) Алгебраическая кривая Γ рода $g = 2h < \infty$ с парой отмеченных точек ∞_1, ∞_2, локальными параметрами $w_1 = 1/k_1$, $w_2 = 1/k_2$ в окрестностях ∞_1 и ∞_2 соответственно, голоморфной инволюцией $\sigma : \Gamma \to \Gamma$ и антиголоморфной инволюцией $\tau : \Gamma \to \Gamma$ такими, что

a) $\tau\sigma = \sigma\tau$.

b) τ имеет $2g+1$ неподвижный овал $a_1, \ldots, a_{2g}, b$.

c) Для $i = 1, \ldots, h$ $\sigma(a_i) = a_{i+h}$, $\sigma(a_{i+h}) = a_i$ $\sigma(b) = b$.

d) $\tau(\infty_1) = \infty_2$, $\tau(\infty_2) = \infty_1$, $\sigma(\infty_1) = \infty_1$, $\sigma(\infty_2) = \infty_2$.

e) $\tau(k_1) = \bar{k}_2$, $\sigma(k_1) = -k_1$, $\sigma(k_2) = -k_2$.

2) Дивизор $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ на Γ такой, что

a) $\gamma_i \in a_i$.

b) Существует мероморфный дифференциал $d\Omega$ с нулями γ_i и $\sigma(\gamma_i)$, $i = 1, \ldots, g$ и простыми полюсами в точках $\infty_{1,2}$ не имеющий других особенностей. Напомним, что это накладывает серьезные ограничения на положение γ_i. Отнормируем $d\Omega$ условием:

$$d\Omega \sim -dk_1/2k_1 \quad \text{при} \quad \gamma \to \infty_1, \quad d\Omega \sim dk_2/2k_2 \quad \text{при} \quad \gamma \to \infty_2. \tag{11.6}$$

В этом случае $\gamma_j^+ = \sigma(\gamma_j)$.

Дифференциалы квазиимпульсов несингулярны вне точек ∞_1, ∞_2,

$$\begin{aligned} dp_x = -i dk_1, \quad dp_y = -dk_1, \quad \text{при} \quad \gamma \to \infty_1, \\ dp_x = -i dk_2, \quad dp_y = dk_2, \quad \text{при} \quad \gamma \to \infty_2, \end{aligned} \tag{11.7}$$

и нормируются условием вещественности интегралов по всем циклам (11.5).

Первообразные функций квазиимпульса уже многозначны на Γ, однако их мнимые части (собственно и определяющие скорость роста или убывания волновых функций на бесконечности) уже однозначны. Естественно выбрать константу интегрирования так, чтобы для одной из ветвей выполнялось:

$$dp_x = -ik, \quad dp_y = -i(k^2), \quad \text{при} \quad \gamma \to \infty, \tag{11.8}$$

для параболического опреатора,

$$dp_x = -ik_1, \quad dp_y = -k_1, \quad \text{при} \quad \gamma \to \infty_1, \tag{11.9}$$

для оператора Шредингера.

Многозначные функции p_x and p_y естественно назвать квазиимпульсами.

Нам понадобятся следующие свойства дифференциалов квазиимпульса:

Лемма 11.1 *Ограничения dp_x and dp_y на вещественные овалы τ – чисто мнимые дифференциалы.*

Действительно, дифференциалы $-\overline{\tau(dp_x)}$, $-\overline{\tau(dp_y)}$ имеют те же асимптотики и ту же нормировку, что и dp_x, dp_y соответственно, а значит, $\tau(dp_x) = -\overline{dp_x}$, $\tau(dp_y) = -\overline{dp_y}$, что и доказывает Лемму.

Лемма 11.2 *Пусть α_1, α_2 – произвольные вещественные константы. Тогда все нули $\alpha_1 dp_x + \alpha_2 dp_y$ лежат на вещественных овалах инволюции τ, причем на каждом из овалов a_k лежит ровно по 2 нуля, на b лежит один ноль в случае параболического оператора и 2 нуля в случае оператора Шредингера.*

Доказательство. Поскольку первообразная $\mathrm{Im}(\alpha_1 p_x + \alpha_2 p_y)$ однозначна на Γ, то на каждом из овалов a_k она имеет минимум и максимум, т.е. ее дифференциал имеет как минимум 2 нуля. Так же проверяется наличие как минимум одного или двух нулей на b. Поскольку на овалах дифференциал $\alpha_1 dp_x + \alpha_2 dp_y$ чисто мнимый, обращение в 0 мнимой части на них влечет зануление и самого дифференциала. Поскольку общее число нулей $2g+1$ или $2g+2$ соответственно, то на каждом овале лежит не более 2 нулей и других нулей нет.

Лемма 11.3 *Расмотрим отображение Γ на R^2, задаваемое формулой:*

$$\gamma \to \left(\mathrm{Im} \int_{\gamma_0}^{\gamma} dp_x,\ \mathrm{Im} \int_{\gamma_0}^{\gamma} dp_y \right), \tag{11.10}$$

где γ_0 некая начальная точка. Тогда:

а) Образы неподвижных овалов – выпуклые множества на плоскости.

b) Образы двух точек γ_1 and γ_2 совпадают тогда и только тогда, когда либо $\gamma_1 = \gamma_2$ либо $\gamma_1 = \tau\gamma_2$.

Доказательство. Выпуклость образов овалов сразу вытекает из предыдущей леммы. Поскольку τ – инволюция разделяющего типа, то после удаления неподвижных овалов Γ распадается на две сферы с $g+1$ дыркой каждая. Рассмотрим ограничение этого отображения на одну их них. Поскольку образы овалов выпуклы, можно заклеить все дырки дисками и продолжить отображение на эти диски так, чтобы якобиан отображения на этих дисках был везде отличен от 0. Это будет отображение сферы на сферу. Из асимптотики вблизи бесконечности видно, что степень этого отображения равна 1. С другой стороны, вне овалов дифференциалы dp_x и dp_y линейно независимы с вещественными коэффициентами, а следовательно, якобиан отображения отличен от 0. В свою очередь это означает взаимную однозначность на каждой из сфер.

Хорошо известно, что для задачи рассеяния с малым убывающим на бесконечности потенциалом завязанными оказываются те пары точек λ, μ, для которых $\mathrm{Im}(p_x(\lambda)) = \mathrm{Im}(p_x(\mu))$, $\mathrm{Im}(p_y(\lambda)) = \mathrm{Im}(p_y(\mu))$. Доказанная лемма означает, что для выбранной геометрии мы имеем чистую $\bar\partial$-проблему.

Отметим также, что

$$\tau(dp_x) = -\overline{dp_x},\ \tau(dp_y) = -\overline{dp_y}, \tau(d\Omega) = -\overline{d\Omega}. \tag{11.11}$$

Кроме того, для случая оператора Шредингера

$$\sigma(dp_x) = -dp_x,\ \sigma(dp_y) = -dp_y, \sigma(d\Omega) = d\Omega, \tag{11.12}$$

11.1 Прямое преобразование рассеяния на конечнозонном фоне.

Рассмотрим задачу нахождения волновых функций оператора L

$$L\Psi(k, x, y) = 0 \tag{11.13}$$

где L – один из операторов L_S, L_P. Введем следующие обозначения

$$L_{S0} = -\partial_x^2 - \partial_y^2 + u_0(x,y), \quad L_{P0} = \partial_y - \partial_x^2 + u_0(x,y), \tag{11.14}$$

$$L = L_0 + u_1(x,y), \tag{11.15}$$

где L_0 – один из операторов L_{S0}, L_{P0}.

Роль "вакуумной" волновой функции в этом случае будет играть волновая функция L_0 – функция Бейкера-Ахиезера. Обозначим ее $\Psi_0(\lambda,x,y)$. Сопряженная волновая функция $\Psi_0^+(\lambda,x,y)$ (см. [45]) имеет простые полюса в точках $\gamma_1^+, \ldots, \gamma_g^+$ по λ и существенные особенности в бесконечных точках такие, что

$$\Psi_0(\lambda,x,y)\Psi_0^+(\lambda,x,y) = (1+o(1)) \text{ при } \lambda \to \infty \quad (\lambda \to \infty_{1,2}). \tag{11.16}$$

В предудущих разделах при построении волновой функции мы выписывали интегральное уравнение на ее предэкспоненту $\chi(\lambda,x,y)$, при этом зависимость от спектрального параметра включаласть в уравнение на функцию Грина, и она фиксировалось условием убывания на бесконечности. В этом разделе мы будем использовать эквивалентный подход, когда мы выписываем интегральное уравнение на саму волновую функцию, функция Грина определяется как решение уравнения

$$L_0 G(\lambda,x,y,x',y') = \delta(x-x')\delta(y-y') \tag{11.17}$$

с асимптотикой на бесконечности

$$G(\lambda,x,y,x',y') = o(1)e^{i(p_x x + p_y y)} \text{ при } \; x^2+y^2 \to \infty, \tag{11.18}$$

$$G(\lambda,x,y,x',y') = o(1)e^{-i(p_x x + p y_y))} \text{ при } \; x'^2+y'^2 \to \infty, \tag{11.19}$$

Лемма 11.4 *Функция Грина оператора L_0 дается следующей формулой*

$$G(\lambda,x,y,x',y') = \frac{1}{4\pi} \oint\limits_{\mathrm{Im}\, p_x(\mu)=\mathrm{Im}\, p_x(\lambda)} \Psi_0(\mu,x,y)\Psi_0^+(\mu,x',y') \cdot$$

$$\cdot\, [sgn(y-y') + sgn\ \mathrm{Im}(p_y(\mu) - p_y(\lambda))] d\Omega(\mu), \tag{11.20}$$

Ориентация на контуре $\operatorname{Im} p_x(\mu) = \operatorname{Im} p_x(\lambda)$ фиксируется условием $\operatorname{Re} dp_x(\mu) > 0$.

Замечание. Функции $\Psi_0(k,x,y)$, $\Psi_0^+(k,x,y)$ имеют полюса на конечной части Γ, однако они совпадают с нулями $d\Omega$, поэтому подинтегральное выражение неособо вне бесконечных точек.

Доказательство. Сперва проверим, что формула (11.20) выполнена для случая $u_0(x,y) \equiv 0$ если $L_0 = L_{P0}$ ($u_0(x,y) \equiv 1$ если $L_0 = L_{S0}$). Действительно, для параболического оператора она с точностью до экспоненциального множителя совпадает с (2.7), а для оператора Шредингера она получается из формулы

$$G(\lambda,x,y) = \frac{1}{4\pi^2} e^{\frac{1}{2}(\lambda\bar{z}+z/\lambda)} \iint \frac{e^{i(p_x x + p_y y)}}{p_x^2 + p_y^2 - i(\lambda+1/\lambda)p_x - (\lambda - 1/\lambda)p_y} dp_x dp_y$$

интегрированием по переменной p_y. Соответствующую функцию Грина обозначим $G_0(\lambda, x-x', y-y')$.

Из формулы (11.20) сразу следует, что разность $G(\lambda,x,y,x',y') - G_0(\lambda,x-x',y-y')$ при всех λ непрерывная при $y \neq y'$ ограниченная функция на (x,y)-плоскости, убывающая при $x^2+y^2 \to \infty$.

Убедимся, что при $x^2+y^2 \neq 0$ $L_0 G(\lambda,x,y,x',y') = 0$. При $y \neq y'$ функция Грина определяется как сходящийся интеграл по μ от функций $\Psi_0(\mu,x,y)$. По определению $L_0\Psi_0(\mu,x,y) = 0$, откуда следует зануление и функции Грина. При пересечении прямой $y = y'$ меняется контур, по которому ведется интегрирование, поэтому поведение функции Грина на этой прямой требует отдельного рассмотрения. Для того, чтобы доказать, что $L_0 G(\lambda,x,y,x',y') = 0$ при $x \neq x'$, $y = y'$, проверим, что функция $G(\lambda,x,y,x',y')$ непрерывна при $x \neq x'$ на прямой $y = y'$ в случае параболического оператора и непрерывна на ней вместе с первой производной в случае оператора Шредингера.

Расмотрим случай параболического оператора. При $x \neq x'$

$$G(\lambda,x,y'+0,x',y') - G(\lambda,x,y'-0,x',y') =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{\mathrm{Im}p_x(\mu)=\mathrm{Im}p_x(\lambda)} \Psi_0(\mu,x,y)\Psi_0^+(\mu,x',y)d\Omega(\mu). \qquad (11.21)$$

Подинтегральное выражение в (11.21) голоморфно вне ∞, и

$$\Psi_0(\mu,x,y)\Psi_0^+(\mu,x',y)d\Omega(\mu) \sim -ie^{\mu(x-x')}(1+O(\frac{1}{\mu^2}))d\mu \sim$$

$$\sim e^{ip_x(x-x')}(1+O(\frac{1}{p^2}))dp \text{ при } \mu\to\infty \qquad (11.22)$$

(вычет в бесконечности равен 0 поскольку это единственная особенность мероморфного дифференциала на компактной кривой). Поэтому интеграл (11.22) не зависит от λ. Устремляя $\mathrm{Im}\,\lambda \to \pm\infty$ в зависимости от знака $x-x'$, завершаем доказательство.

Случай оператора Шредингера проверяется аналогично.

Другой способ доказательства формулы (11.20) для случая, когда потенциал $u(x,y)$ чисто периодический, состоит в следующем. Для периодической задачи с граничными условиями $f(x+\Pi) = \omega f(x)$ функция Грина была вычислена в [118]. Интегрируя по окружности $|\omega| = 1$ получаем функцию Грина на прямой (11.20).

Подинтегральное выражение в формуле для функции Грина голоморфно, поэтому единственный источник неголоморфности – граничные точки на контуре, по которому ведется интегрирование, неголоморфно зависящие от λ. Дифференциируя интеграл по пределу интегрирования, получаем

$$\frac{\partial G_0}{\partial\bar\lambda} =$$

$$= -\sum_{k_j} \mathrm{sgn}\ \mathrm{Im}\left(\frac{dp_y(k_j)}{dp_x(k_j)}\right)\frac{\partial k_j}{\partial\bar\lambda}\frac{1}{2\pi}\Psi_0(k_j,x,y)\Psi_0^+(k_j,x',y')\frac{\partial\Omega(k_j)}{\partial k_j}, \qquad (11.23)$$

где сумма берется по всем точкам k_j таким, что

$$\mathrm{Im}p_x(k_j) = \mathrm{Im}p_x(\lambda), \quad \mathrm{Im}p_y(k_j) = \mathrm{Im}p_y(\lambda). \qquad (11.24)$$

Для M-кривой (11.24) имеет ровно 2 решения: $k_1 = \lambda$ and $k_2 = \tau(\lambda)$. Вводя антиголоморфную внешнюю производную по спектральному параметру

$$\bar\partial = d\bar k \frac{\partial}{\partial \bar k}, \tag{11.25}$$

запишем (11.23) в следующем виде:

$$\bar\partial G_0(\lambda, x-x', y-y') = \frac{-1}{2\pi} \mathrm{sgn\ Im} \left(\frac{dp_y(\lambda)}{dp_x(\lambda)} \right) \Psi_0(\tau(\lambda), x, y) \Psi_0^+(\tau(\lambda), x', y') \overline{d\Omega(\lambda)}. \tag{11.26}$$

Здесь мы воспользовались соотношениями (11.11).

Отметим также, что используемая в этом разделе функция Грина всегда вещественна. Нам понадобится ее симметрия:

$$G(\tau(\lambda), x, y, x', y') = G(\lambda, x, y, x', y'). \tag{11.27}$$

Кроме того, для оператора Шредингера с вещественным потенциалом выполняется

$$G(\sigma(\lambda), x, y, x', y') = G(\lambda, x', y', x, y) \tag{11.28}$$

Для проверки (11.27) достаточно заметить, что в точках λ и $\tau(\lambda)$ функции Грина имеют одинаковую асимптотику и удовлетворяют одному и тому же уравнению. Свойство (11.28) вытекает из соотношения $\Psi_0^+(\sigma\lambda, x, y) = \Psi_0(\lambda, x, y)$ и инвариантности формы $d\Omega$ относительно инволюции σ.

Следующий шаг – вычисление собственных функций оператора $L_0 + u_1(x, y)$. Если норма $u_1(x, y)$ достаточно мала, то интегральное уравнение обратной задачи однозначно разрешимо при всех λ

$$\Psi(\lambda, x, y) = \Psi_0(\lambda, x, y) - \int\int dx'dy' G(\lambda, x, y, x', y') u_1(x', y') \Psi(\lambda, x', y'). \tag{11.29}$$

Как мы уже отмечали, если условие малости нормы не выполнено, то вопрос об описании преобразования рассеяния остается открытым даже для сферы Римана. Поскольку функция Грина не голоморфна, то не

голоморфна и волновая функция. Дифференциируя (11.29) по $\bar{\lambda}$ и используя соотношение (11.27) мы получаем уравнение обратной задачи:

$$\bar{\partial}\Psi(\lambda, x, y) = T(\lambda)\Psi(\tau(\lambda), x, y), \tag{11.30}$$

где

$$T(\lambda) = -\frac{1}{2\pi}U(\lambda)\,\mathrm{sgn}\ \ \mathrm{Im}\,\frac{dp_y(\lambda)}{dp_x(\lambda)}\overline{d\Omega(\lambda)}, \tag{11.31}$$

$$U(\lambda) = \iint dxdy\Psi_0^+(\tau(\lambda), x, y)u_1(x, y)\Psi(\lambda, x, y). \tag{11.32}$$

Отсюда следует

Теорема 11.1 *Пусть потенциал $u_1(x, y)$ достаточно мал. Тогда уравнение (11.29) имеет единственное решение при всех $\lambda \in \Gamma$, и $\Psi(\lambda, x, y)$ имеет следующие свойства:*

1) Она непрерывна по $\lambda \in \Gamma$ вне дивизора γ_j и бесконечностей. В регулярных точках она не голоморфна и удовлетворяет уравнению (11.30), где $(0,1)$-дифференциал $T(\lambda)$ дается формулой (11.31).

2) В точках γ_j функция $\Psi(\lambda, x, y)$ имеет особенности вида:

$$\Psi(\lambda, x, y) \sim c(\lambda, x, y)/(\lambda - \gamma_j), \tag{11.33}$$

где $c(\lambda)$ некоторая непрерывная (но не голоморфная) функция.

3)

$$\Psi(\lambda, x, y) \to \Psi_0(\lambda, x, y) \quad \textit{при} \quad \lambda \to \infty\ (\lambda \to \infty_{1,2})\ \textit{соответственно.} \tag{11.34}$$

4) $(0,1)$-форма $T(\lambda)$ непрерывна вне точек γ_j и в этих точках имеет особенность вида $T(\lambda) \sim \frac{\overline{(\lambda-\gamma_j)}}{(\lambda-\gamma_j)}d\bar{\lambda}$.

Теорема 11.2 *Для оператора Шредингера с вещественным потенциалом имеем*

$$U(\tau(\lambda)) = \overline{U(\lambda)}, \quad U(\tau(\sigma(\lambda))) = U(\lambda). \tag{11.35}$$

Для оператора теплопроводности с вещественным потенциалом выполнена первая из редукций (11.35).

Доказательство. Первая из редукций немедленно получается из симметрии волновой функции $\Psi(\tau(\lambda), x, y) = \bar{\Psi}(\lambda, x, y)$, $\Psi_0(\tau(\lambda), x, y) = \bar{\Psi}_0(\lambda, x, y)$. Доказательство второй из них использует симметрию (11.28), и практически дословно повторяет рассуждение Теоремы 7.4.

11.2 Обратное преобразование рассеяния на конечнозонном фоне.

Теорема 11.3 *1) Пусть L_0 – вещественный опрератор с неособым конечнозонным потенциалом, построенным по M-кривой, причем если L_0-оператор Шредингера, то он предполагается потенциальным. Пусть на его спектральной кривой Γ задана $(0,1)$-форма $T(\lambda)$, непрерывная вне точек дивизора, с особенностями вида $T(\lambda) \sim \frac{\overline{(\lambda-\gamma_j)}}{(\lambda-\gamma_j)} d\bar{\lambda}$ в них и достаточно быстро убывающая при $\lambda \to \infty$ ($\lambda \to \infty_{1,2}$) соответственно. Пусть, кроме того, выполнено первое из соотношений (11.35) если L_0 – параболический оператор, и выполнены оба соотношения (11.35) если L_0 – оператор Шредингера (напомним, что связь $T(\lambda)$ с $U(\lambda)$ дается формулой (11.31).*

Тогда существует единственная функция $\Psi(\lambda, x, y)$ с аналитическими свойствами 1)-3) Теоремы 11.1. Эта функция удовлетворяет при всех λ уравнению

$$[L_0 + u_1(x,y)]\Psi(\lambda, x, y) = 0$$

где $u_1(x,y)$ – гладкий неособый убывающий при $x^2 + y^2 \to \infty$ потенциал. Отметим, что условие малости нормы на $T(\lambda)$ мы не

накладываем.

2) *Если L_0 – оператор Шредингера, то $L = L_0 + u_1(x,y)$– строго положительный опреатор, т.е. для любой вещественной функции из класса Шварца $\phi(x,y)$*

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \phi(x,y) L\phi(x,y)dxdy > \mathrm{c}_0 \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \phi(x,y)\phi(x,y)dxdy,$$

где $c_0 > 0$ – некоторая не зависящая от $\phi(x,y)$ константа.

3) *Пусть $T(\lambda)$ убывает при $\lambda \to \infty$ ($\lambda \to \infty_{1,2}$ соответственно) быстрее любой степени. Тогда соответствующий потенциал $u_1(x,y)$ будет бесконечно дифференцируемым.*

Будем искать решение в виде $\Psi(\lambda,x,y)) = \chi(\lambda,x,y)\Psi_0(\lambda,x,y)$. Тогда на функцию $\chi(\lambda,x,y)$ получаем следующее интегральное уравнение

$$\chi(\lambda,x,y) = 1 + \iint\limits_{\lambda'} \omega_{D(x,y)}(\lambda,\lambda') \wedge \tilde{T}(\lambda',x,y)\chi(\tau(\lambda'),x,y), \qquad (11.36)$$

где $\tilde{T}(\lambda,x,y) = \Psi_0^{-1}(\lambda,x,y)T(\lambda)\Psi_0(\tau(\lambda),x,y)$, $D(x,y) = \gamma_1(x,y) + \ldots + \gamma_g(x,y)$ – дивизор нулей функции $\Psi_0(\lambda,x,y)$, форма $\omega_{D(x,y)}(\lambda,\lambda')$ – мероморфный аналог ядра Коши на Γ ([117], см. также [143]). Она однозначно определяется следующими свойствами:

1. $\omega_{D(x,y)}(\lambda,\lambda')$ – мероморфная функция по λ и мероморфный дифференциал по λ'.

2. При фиксированном λ' $\omega_{D(x,y)}(\lambda,\lambda')$ имеет простые полюса по λ в точках $\gamma_j(x,y)$, λ' и нуль первого порядка в точке ∞ или точке ∞_1 для случая параболического оператора или оператора Шредингера соответственно.

3. При фиксированном λ $\omega_{D(x,y)}(\lambda,\lambda')$ имеет простые нули по λ' в точках $\gamma_j(x,y)$, простой полюс в точке λ и точке ∞ или ∞_1 для случая параболического оператора или оператора Шредингера сответственно.

4. Вблизи диагонали $\lambda \to \lambda'$ она с точностью до регулярных членов совпадает со стандартным ядром Коши.

$$\omega_{D(x,y)}(\lambda,\lambda') = \frac{1}{2\pi i(\lambda'-\lambda)}d\lambda' + O(1) \quad \text{при} \quad \lambda \to \lambda'. \tag{11.37}$$

Из теоремы Римана-Роха следует существование и единственность формы $\omega_{D(x,y)}(\lambda,\lambda')$ для дивизора общего положения. Однако для вещественного случая легко проверяется, что не существует голоморфной 1-формы с нулями в во всех точках $\gamma_j(x,y)$ и, следовательно, форма $\omega_{D(x,y)}(\lambda,\lambda')$ неособа при всех x, y.

Лемма 11.5 *1) Пусть функция $\phi(\lambda)$ удовлетворяет уравнению*

$$\bar\partial\phi(\lambda) = \tilde T(\lambda)\phi(\tau(\lambda)), \tag{11.38}$$

и выполнено первое из соотношений (11.35). Тогда функция $\overline{\phi(\tau(\lambda))}$ также удовлетворяет (11.38).

2) Пусть, кроме того мы рассматриваем случай оператора Шредингера, и выполнено второе из соотношений (11.35). Пусть C_1– некоторый контур вокруг точки ∞_1 , $C_2 = \tau(C_1)$. Тогда

$$\oint\limits_{C_1} \Phi(\lambda) = -\oint\limits_{C_2} \Phi(\lambda) \tag{11.39}$$

где

$$\Phi(\lambda) = \psi(\lambda)\psi(\sigma\lambda)d\Omega(\lambda) \tag{11.40}$$

Первое утверждение Леммы сразу следует из (11.11). Для доказательства второго воспользуемся формулой Стокса

$$\oint\limits_{C_1} \Phi(\lambda) + \oint\limits_{C_2} \Phi(\lambda) = -\iint\limits_{\Gamma'} d\Phi(\lambda),$$

где Γ'– кривая Γ, из которой выброшены области, окруженные контурами C_1 и C_2. Поскольку

$$d\Phi(\lambda) = -\frac{1}{2\pi}U(\lambda)\,\mathrm{sgn}\ \ \mathrm{Im}\,\frac{dp_y(\lambda)}{dp_x(\lambda)}\phi(\tau(\lambda))\phi(\sigma(\lambda))\overline{d\Omega(\lambda)}d\Omega(\lambda)-$$

$$-\frac{1}{2\pi}U(\sigma(\lambda))\,\mathrm{sgn}\ \ \mathrm{Im}\,\frac{dp_y(\sigma\lambda)}{dp_x(\sigma\lambda)}\phi(\lambda)\phi(\tau(\sigma(\lambda)))\overline{d\Omega(\sigma(\lambda))}d\Omega(\sigma(\lambda)),$$

(мы воспользовались симметриями (11.11), (11.12)), и форма $\overline{d\Omega(\lambda)}d\Omega(\lambda)$ инвариантна относительно σ и τ, то точки λ и $\sigma(\tau(\lambda))$ взаимно сокращаются. Тем самым, двойной интеграл равен 0.

Убедимся, что уравнение обратной задачи (11.36) не имеет однородных решений. Действительно, если $\psi(\lambda, x_0, y_0)$ – однородное решение при $x = x_0$, $y = y_0$, то $\psi(\lambda, x_0, y_0) \pm \psi(\tau(\lambda), x_0, y_0)$ – обобщенно аналитические функции, имеющие g полюсов в точках $\gamma_j(x, y)$ и как минимум, по одному нулю на каждом из a-овалов. Тем самым они не могут иметь других нулей. В то же время, если мы рассматриваем параболический оператор, и $\psi(\lambda, x_0, y_0)$ – однородное решение, то оно имеет еще один ноль в точке ∞ и мы получили противоречие. Если мы рассматриваем оператор Шредингера, то однородное решение имеет ноль в ∞_1 и, как видно из формулы (11.39), и в точке ∞_2. Тем самым функции $\psi(\lambda, x_0, y_0) \pm \psi(\tau(\lambda), x_0, y_0)$ имеют лишние нули в ∞_1, ∞_2, и мы снова пришли к противоречию. Отсюда следует однозначная разрешимость уравнений обратной задачи при всех (x, y). Кроме того, для случая оператора Шредингера если предэкспонента волновой функции нормирована на 1 в точке ∞_1, то в ∞_2 она равна ± 1, т.е. оператор потенциален. Тем самым $\Psi(\tau(\lambda), x, y) = \pm\overline{\Psi(\lambda, x, y)}$, откуда вытекает вещественность L. Для оператора Шредингера волновая функция на b-овале либо чисто вещественная, либо чисто мнимая и нигде не обращается в 0. По Лемме 8.1 это влечет положительность L.

Доказательство пункта 3) ничем не отличается от быстроубывающего случая.

Теорема 11.3 доказана.

Замечание. Вместо интегрального уравнения на $\chi(\lambda, x, y)$ можно было бы писать уравнение обратной задачи на саму волновую функцию, используя ядро Коши с подходящей асимптотикой на бесконечности (ядро Коши-Бейкера-Ахиезера). Это ядро было введено А.Ю.Орловым и автором в работах [18], [111]. Более подробное обсуждение, включая интегральное представление через волновые функции для случая КП смотри в разделе 14.

12 Несингулярность обратного спектрального преобразования для уравнения Кадомцева-Петвиашвили 2 с "большими" "данными рассеяния" в вещественном случае.

Результаты данного раздела были получены автором и С.П.Новиковым в работе [15].

В разделе 8 была доказана однозначная разрешимость обратной задачи для двумерного потенциального вещественного оператора Шредингера при фиксированной отрицательной энергии. Практически без изменений это доказательство проходит для вещественного параболического оператора.

Теорема 12.1 *1) Пусть данные рассеяния $b(\lambda)$ таковы, что:*

а) $b(\lambda)$ – кусочно-непрерывная функция, ограниченная на всей $\mathbb{C}$ - плоскости.

б) $\iint |b(\lambda)|\,|\lambda|^{\epsilon} d\lambda_R d\lambda_I < 0$ для некоторого $\epsilon > 0$

в) Выполнено условие вещественности

$$b(\bar{\lambda}) = \bar{b}(\lambda)$$

Тогда волновая функция $\Psi(\lambda, x, y)$ *, построенная при решении обратной задачи (2.21), (2.22) неособа при всех* λ, x, y.

2) *Пусть, кроме того, при* $|\lambda_I|(1+|\lambda_R|) \to \infty$ $b(\lambda) \to 0$ *быстрее любой степени* $|\lambda_I|(1+|\lambda_R|)$ *равномерно по* λ_R. *Тогда* $\chi(\lambda, x, y)$ *и* $u(x, y)$ – *гладкие функции переменных* x, y.

Доказательство. Хорошо известно (см. [5], стр.57), что в ограниченной области G на плоскости оператор $\partial_{\bar\lambda}^{-1}$, определяемый (2.26), – компактный оператор из $L^p(G)$ в $\mathbb{C}(G)$ при любом $p > 2$. Разобьем λ - плоскость на две области - внутренность единичного круга D_- и внешнюю область – D_+. В D_+ перейдем к координате $\mu = \frac{1}{\lambda}$. Тогда

$$\partial_{\bar\lambda}\chi(\lambda, x, y) = T(\lambda, x, y)\chi(\bar\lambda, x, y)$$

$$\partial_{\bar\mu}\chi(\frac{1}{\mu}, x, y) = -\frac{1}{\bar\mu^2}T(\frac{1}{\mu}, x, y)\chi(\frac{1}{\bar\mu}, x, y)$$

Здесь мы используем обозначение:

$$T(\lambda, x, y) = e^{-2\lambda_I x - 4\lambda_R\lambda_I y}T(\lambda)$$

Несложно проверяется, что функции $T(\lambda)$ при $|\lambda| < 1$ и $-\frac{1}{\bar\mu^2}T(\frac{1}{\mu})$ при $|\mu| \le 1$ лежат в пространствах $L^{2+\delta}(D_\pm)$ соответственно, где δ – достаточно мало положительное число. Отсюда несложно увидеть, что оператор $\partial_{\bar\lambda}^{-1}T(\lambda, x, y)$ – при всех x, y компактный оператор в пространстве непрерывных функций на λ - плоскости , и для того, чтобы доказать однозначную разрешимость уравнения обратной задачи

$$\chi(\lambda, x, y) = 1 + \partial_{\bar\lambda}^{-1}T(\lambda, x, y)\chi(\bar\lambda, x, y) \tag{12.1}$$

достаточно проверить отсутствие решений у однородного уравнения.

Пусть при каком-либо значении $x = x_0,\ y = y_0$ однородное уравнение

$$\chi(\lambda, x, y) = \partial_{\bar\lambda}^{-1}T(\lambda, x, y)\chi(\bar\lambda, x, y)$$

имеет нетривиальное решение $\chi_0(\lambda, x_0, y_0)$. Тогда $\chi_{1,2}(\lambda, x_0, y_0) = \chi_0(\lambda, x_0, y_0) \pm \bar{\chi}_0(\bar{\lambda}, x_0, y_0)$ уже удовлетворяют уравнениям

$$\partial_{\bar{\lambda}} \chi_{12}(\lambda, x_o, y_0) = \pm T(\lambda, x_o, y_0) \bar{\chi}_{12}(\lambda, x_o, y_0),$$

т.е. $\chi_{12}(\lambda, x_o, y_0)$ – обобщенные аналитические функции, ограниченные на всей λ - плоскости и имеющие как минимум простой ноль при $\lambda \to \infty$. Тогда согласно обобщенной теореме Лиувилля ([5], стр. 165), они равны нулю всюду, а тем самым и $\chi_0(\lambda, x_0, y_0) \equiv 0$.

Пункт 1 доказан.

Для доказательства Пункта 2 вычислим производные $\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} \chi(\lambda, x, y)$ индукцей по $l = m + n$. Пусть при всех m, n таких, что $m + n < l$ производные $\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} \chi(\lambda, x, y)$ уже известны и эти функции ограничены по λ на всей λ - плоскости.

Продифференцируем (12.1) m раз по x и n раз по y.

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} \chi(\lambda, x, y) = \partial_{\bar{\lambda}}^{-1} \sum_{\substack{\tilde{m} \le m \\ \tilde{n} \le n \\ \tilde{m}+\tilde{n} < m+n}} \binom{m}{\tilde{m}} \binom{n}{\tilde{n}} \left(\frac{\partial^{m+n-\tilde{m}-\tilde{n}}}{\partial x^{m-\tilde{m}} \partial y^{n-\tilde{n}}} T(\lambda, x, y) \right) \times$$

$$\times \frac{\partial^{\tilde{m}+\tilde{n}}}{\partial x^{\tilde{m}} \partial y^{\tilde{n}}} \chi(\bar{\lambda}, x, y) + \partial_{\bar{\lambda}}^{-1} T(\lambda, x, y) \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} \chi(\bar{\lambda}, x, y)$$

Мы получили уравнение на $\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} \chi(\lambda, x, y)$, отличающееся от (12.1) только неоднородным членом. При этом свободный член - ограниченная по λ функция, и, следовательно, уравнение однозначно разрешимо и его решения непрерывно зависят от x и y.

Теорема 12.1 доказана.

Замечание. Для уравнения КП1 также можно доказать однозначную разрешимость обратной задачи без предположения малости нормы (см. работу Х.Чжоу [149]), однако используемая при этом техника принципиально отличается от нашей.

13 Несингулярность прямого спектрального преобразования для уравнения Кадомцева-Петвиашвили 2 с "большим" вещественным начальным потенциалом

В данном разделе мы излагаем результаты работы автора [110].

В разделе 2 Главы 1 было построено спектральное преобразование для оператора теплопроводности, входящего в пару Лакса уравнения КП-2:

$$L = \partial_y - \partial_x^2 + u(x,y)$$

в предположени, что $u(x,y)$ удовлетворяет условию "малости нормы"

$$\|u\|_{L^1} + \|u\|_{L^2} < C_0$$

где C_0 – некоторая положительная константа. Естественно поставить вопрос о том, что изменится, если отказаться от этого условия.

Уравнение КП-2 – нелинейное уравнение с дисперсией. Физически естественно ожидать, что если потенциал $u(x,y)$ достаточно мал, то дисперсия будет превалировать над нелинейностью и качественное поведение решений будет похоже на поведение решений линеаризованной системы. Однако было бы неудивительно, если бы качественное поведение системы менялось при больших значениях потенциала. Математически это могло бы проявляться в том, что при больших $u(x,y)$ спектральное преобразование становилось бы сингулярным и нужно было бы вводить дополнительные "дискретные данные рассеяния". Именно такая ситуация возникала в разделе 8 при исследовании двумерного оператора Шредингера при отрицательной энергии.

Несложно убедиться, что для общих комплексных потенциалов сингулярности волновой функции при отдельных значениях спектрального

параметра неизбежно возникают. Однако, как будет показано ниже, если потенциал $u(x,y)$ вещественен и достаточно быстро убывает на бесконечности, то прямое спектральное преобразование неособо для сколь угодно больших $u(x,y)$. С учетом доказанной в разделе 12 Главы 2 несингулярности обратного преобразования рассеяния для вещественного случая мы приходим к выводу, что получающиеся решения КП-2 неособы на всех временах, т.е. отсутствуют эффекты типа коллапса. Фактически мы доказываем, что для вещественного КП-2 случай "большой нормы" ничем не отличается от случая "малой нормы".

Отметим, однако, следующее отличие между техниками, применяемыми в случаях "малой" и "большой нормы". Оценки интегральных операторов, используемые для случая "малой нормы", достаточно универсальны и с небольшими изменениями могут применяться к другим интегральным уравнениям. В то же время, используемая для случая "большой нормы" техника этого раздела опирается на специфические свойства оператора теплопроводности и перенос ее на другие уравнения возможен далеко не всегда. В частности, как показано в разделе 8 Главы 2, прямое преобразование для двумерного оператора Шредингера при фиксированной отрицательной энергии в области "больших норм" сингулярно, и тем самым, аналога техники данного раздела для него не существует.

Целью данного раздела является доказательство следующего результата:

Теорема 13.1 *1) Пусть*

$$L = \partial_y - \partial_x^2 + u(x,y).$$

– оператор теплопроводности, $u(x,y)$ – гладкая вещественная функция, все производные которой экспоненциально убывают на беско-

нечности:

$$\left|\frac{\partial^{m+n}u(x,y)}{\partial x^m \partial y^n}\right| < c_{mn}e^{-\epsilon r} \text{ для всех } m,n \geq 0. \qquad (13.1)$$

где ϵ, c_{mn} *– некоторые положительные константы,* $r = \sqrt{x^2+y^2}$ *– расстояние от начала координат.*

Тогда описанное в разделе 2 Главы 1 прямое спектральное преобразование неособо, т.е. $T(\lambda)$ *определена и несингулярна при всех* $\lambda \in \mathbb{C}$

2) Пусть, кроме того, выполнено условие

$$\int u(x,y)\,dx = 0 \qquad \text{при всех } y \qquad (13.2)$$

Тогда получающийся при решении обратной задачи с данными $T(\lambda)$ *потенциал совпадает с исходным.*

Замечание 1. По-видимому, условие (13.2) не является существенным. Однако, если оно не выполнено, у нас возникают проблемы с доказательством однозначной разрешимости обратной задачи, поэтому сочли целесообразным наложить его.

Замечание 2. По-видимому, условие экспоненциального потенциала является чрезмерно сильным. К сожалению, пока что не удается избавиться от него, хотя, скорее всего, трудности здесь технического, а не принципиального плана. Поэтому там, где это возможно, мы будем накладывать на потенциал одно из более слабых ограничений:

1) $u(x,y)$ убывает вместе со всеми производными быстрее квадрата расстояния:

$$\left|\frac{\partial^{m+n}u(x,y)}{\partial x^m \partial y^n}\right| < \frac{c_{mn}}{(1+r)^{2+\epsilon}} \text{ при всех } m,n \geq 0. \qquad (13.3)$$

где ϵ, c_{mn} – некоторые положительные константы,

2)

$$\left|\frac{\partial^{m+n}u(x,y)}{\partial x^m \partial y^n}\right| < \frac{c^k_{mn}}{(1+r)^{2+k}} \text{ при всех } m,n,k \geq 0. \tag{13.4}$$

где ϵ, c^k_{mn} – некоторые положительные константы,

В данном разделе $u(x,y)$ – всегда вещественная функция: $\bar{u}(x,y) = u(x,y)$

Как и раньше, спектральный параметр будем обозначать λ

$$\lambda_R = \mathrm{Re}\,\lambda, \qquad \lambda_I = \mathrm{Im}\,\lambda$$

В данном разделе мы будем использовать следующие "псевдокомплексные" обозначения:

$$z = x + 2\lambda y, \;\; \bar{z} = x + 2\bar{\lambda} y,$$
$$\partial_z = \frac{1}{4i\lambda_I}\left(\partial_y - 2\bar{\lambda}\partial_x\right), \;\; \partial_{\bar{z}} = \frac{-1}{4i\lambda_I}\left(\partial_y - 2\lambda\partial_x\right). \tag{13.5}$$

Наша задача – доказать, что при всех λ волновая функция $\Psi(\lambda,x,y)$ определена, несингулярна и непрерывно зависит от λ. Как и раньше, мы ищем $\Psi(\lambda,x,y)$ в виде:

$$\Psi(\lambda,x,y) = e^{\lambda x + \lambda^2 y}\chi(\lambda,x,y),$$

где $\chi(\lambda,x,y)$ – решение интегрального уравнения

$$\chi(\lambda,x,y) = 1 - \hat{G}(\lambda)u(x,y)\chi(\lambda,x,y) \tag{13.6}$$

$$\hat{G}(\lambda)f(\lambda,x,y) = \int\int G(\lambda,x-x',y-y')f(\lambda,x',y')dx'dy'.$$

$$G(\lambda,x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int\int \frac{e^{i(px+qy)}dpdq}{p^2+iq-2i\lambda p}. \tag{13.7}$$

Одновременно с $\Psi(\lambda,x,y)$ мы будем строить сопряженную волновую функцию $\Psi^*(\lambda,x,y)$ – решение уравнения

$$\left[-\partial_y - \partial_x^2 + u(x,y)\right]\Psi^*(\lambda,x,y) = 0$$

где

$$\Psi^*(\lambda,x,y)=e^{-\lambda x-\lambda^2 y}\chi^*(\lambda,x,y),$$

$$\chi^*(\lambda,x,y)=1+o(1)\text{ при }x^2+y^2\to\infty,$$

$$\chi^*(\lambda,x,y)=1-\hat{G}^*(\lambda)u(x,y)\chi^*(\lambda,x,y), \tag{13.8}$$

$$G^*(\lambda,x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int\int\frac{e^{i(px+qy)}\,dpdq}{p^2-iq+2i\lambda p}.$$

Пока что мы будем предполагать, что потенциал $u(x,y)$ убывает на бесконечности быстрее квадрата расстояния, т.е. выполнено условие (13.3).

При исследовании разрешимости (13.6), (13.8) мы будем пользоваться альтернативой Фредгольма, однако применять теорему Фредгольма непосредственно к операторам $\hat{G}(\lambda)u(x,y)$, $\hat{G}^*(\lambda)u(x,y)$ нельзя. Поэтому каждый раз мы, не оговаривая особо, будем использовать следующий прием: перепишем уравнения (13.6), (13.8) в следующем виде:

$$\kappa(r)\chi(\lambda,x,y)=\kappa(r)-\kappa(r)\hat{G}(\lambda)u(x,y)\kappa^{-1}(r)\kappa(r)\chi(\lambda,x,y) \tag{13.9}$$

$$\kappa(r)\chi^*(\lambda,x,y)=\kappa(r)-\kappa(r)\hat{G}^*(\lambda)u(x,y)\kappa^{-1}(r)\kappa(r)\chi^*(\lambda,x,y) \tag{13.10}$$

где

$$\kappa(r)=\frac{1}{(1+r)^{1+\frac{\epsilon}{2}}}=\frac{1}{\left(\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)^{1+\frac{\epsilon}{2}}\right.}$$

Функция $\kappa(r)$ лежит в пространстве $L^2(\mathbb{R}^2)$ и несложно проверяется, что $\kappa(r)\hat{G}(\lambda)u(x,y)\kappa^{-1}(r)$, $\kappa(r)\hat{G}^*(\lambda)u(x,y)\kappa^{-1}(r)$ – компактные операторы в $L^2(\mathbb{R}^2)$. С другой стороны, разрешимость (13.6), (13.8) эквивалентна разрешимости (13.9), (13.10) , поэтому при необходимости мы всегда можем перейти от одного представления к другому.

Из фредгольмовости (13.9), (13.10) сразу же следует, что если однородная часть уравнения (13.6)

$$\chi(\lambda_0,x,y)=-\hat{G}(\lambda)\chi(\lambda_0,x,y) \tag{13.11}$$

не имеет ненулевых решений, то уравнение (13.6) разрешимо при всех λ, данные рассеяния несингулярны и для таких потенциалов верна Теорема 13.1. Тем самым, если однородное уравнение (13.11) не имеет нетривиальных решений, то все доказано.

13.1 Однородные решения интегрального уравнения прямой задачи рассеяния.

Целью данного пункта является исследование свойств решений (13.11) в предположении, что они существуют. В этом пункте мы будем считать, что потенциал $u(x,y)$ убывает на бесконечности быстрее квадрата расстояния (13.3) .

Во-первых, сразу же отметим, что достаточно ограничиться областью $\lambda_I \neq 0$. Действительно, если $\lambda_I = 0$, то при $y < 0$ $\hat{G}(\lambda) = 0$ (Это видно, например, из (2.7)). Тем самым уравнение прямой задачи (13.6) – уравнение Вольтерра, которое, как известно, не имеет однородных решений.

Пусть $\chi_0(\lambda_0, x, y)$ – решение однородного уравнения (13.11). Тогда

$$\Psi_0(\lambda_0, x, y) \;=\; e^{\lambda_0 x + \lambda_0^2 y}\chi_0(\lambda_0, x, y)$$

удовлетворяет уравнению:

$$L\Psi_0(\lambda_0, x, y) = 0 \tag{13.12}$$

с вещественными коэффициентами. Тогда $\operatorname{Re}\Psi_0(\lambda_0, x, y)$, $\operatorname{Im}\Psi_0(\lambda_0, x, y)$ – также решения (13.11) и функции

$$e^{-\lambda_0 x - \lambda_0^2 y}\operatorname{Re}\Psi_0(\lambda_0, x, y), \quad e^{-\lambda_0 x - \lambda_0^2 y}\operatorname{Im}\Psi_0(\lambda_0, x, y)$$

– решения однородного интегрального уравнения (13.11). Поэтому мы можем принять следующее соглашение:

Базисные решения (13.11) $\chi_{0j}(\lambda_0, x, y)$ мы будем выбирать так, чтобы функции $\Psi_{0j}(\lambda_0, x, y) = e^{\lambda_0 x + \lambda_0^2 y}\chi_{0j}(\lambda_0, x, y)$ были вещественными.

Лемма 13.1 *При* $\operatorname{Im}\lambda \neq 0, \quad x^2+y^2 \to \infty$ *функция Грина* $G(\lambda,x,y)$ *имеет следующую асимптотику:*

$$G(\lambda,x,y) = g(\lambda,x,y) + \bar{g}(\lambda,x,y)e^{-2i\lambda_I x - 4i\lambda_I\lambda_R y},$$

где $g(\lambda,x,y)$ *– асимптотический ряд, задаваемый формулой*

$$g(\lambda,x,y) = \left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{i}{4\lambda_I}\left(\partial_{\bar{z}} + 2\partial_z + \partial_{\bar{z}}^{-1}\partial_z^2\right)\right]^k\right\}\frac{i\operatorname{sgn}\lambda_I}{2\pi z} \tag{13.13}$$

Оператор $\partial_{\bar{z}}^{-1}\partial_z^2$ *понимается в следующем смысле:*

$$\partial_{\bar{z}}^{-1}\partial_z^2\frac{\bar{z}^m}{z^n} = \frac{n(n+1)}{m+1}\frac{\bar{z}^{m+1}}{z^{n+2}}.$$

(определение $z,\ \bar{z},\ \partial_z,\ \partial_{\bar{z}}$ *– см. (13.5)*

Доказательство. $G(\lambda,x,y)$ – функция Грина оператора

$$L_0(\lambda) = \partial_y - \partial_x^2 - 2\lambda\partial_x = -4i\lambda_I\partial_{\bar{z}} - \left(\partial_z + \partial_{\bar{z}}\right)^2. \tag{13.14}$$

Для вычисления асимптотики используется стандартный прием, состоящий в том, что выражение (13.7) многократно интегрируют по частям, при этом асимптотика "садится" на особенности подинтегрального выражения. Как мы уже отмечали, знаменатель (13.7) имеет два нуля – $p_x = p_y = 0$ и $p_x = -2\lambda_I,\ \ p_y = -4\lambda_R\lambda_I$. Вычислим вклад в асимптотику точки $p_x = p_y = 0$, вклад второго нуля учтем, пользуясь симметрией пункта 3 Леммы 2.1.

Введем новые переменные в импульсном пространстве:

$$p = \frac{1}{4i\lambda_I}(2\lambda p_x - p_y)$$

$$\bar{p} = -\frac{1}{4i\lambda_I}(2\bar{\lambda}p_x - p_y)$$

$$p = p_R + ip_I, \qquad p_x = p + \bar{p}, \qquad p_y = 2\bar{\lambda}p + 2\lambda\bar{p}$$

$$p_x x + p_y y = p\bar{z} + \bar{p}z$$

$$|dp_x dp_y| = 8|\lambda_I||dp_R dp_I|$$

В новых переменных функция Грина записывается как

$$G(\lambda, z) = \frac{2|\lambda_I|}{\pi^2} \iint \frac{e^{i(p\bar{z}+\bar{p}z)} dp_R dp_I}{4\lambda_I p + (p+\bar{p})^2} \tag{13.15}$$

Обозначим $g(\lambda, z) = g(\lambda, x, y)$ – асимптотическое разложение интеграла по окрестности 0

$$g(\lambda, z) \sim \frac{2|\lambda_I|}{\pi^2} \iint\limits_{U(0)} \frac{e^{i(p\bar{z}+\bar{p}z)} dp_R dp_I}{4\lambda_I p + (p+\bar{p})^2} \tag{13.16}$$

Вблизи точки $p_x = p_y = 0$ подинтегральное выражение перепишем в виде ряда:

$$g(\lambda, z) \sim \frac{2|\lambda_I|}{4\lambda_I \pi^2} \iint\limits_{U(0)} \frac{1}{p} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{-1}{4\lambda_I}\left(p + 2\bar{p} + \frac{\bar{p}^2}{p}\right)\right]^k\right] e^{i(p\bar{z}+\bar{p}z)} dp_R dp_I \sim$$

$$\sim \frac{\operatorname{sgn} \lambda_I}{2\pi^2} \left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{i}{4\lambda_I}(\partial_{\bar{z}} + 2\partial_z + \partial_{\bar{z}}^{-1}\partial_z^2)\right]^k\right\} \times$$

$$\times \iint \frac{e^{i(p\bar{z}+\bar{p}z)}}{p} dp_R dp_I =$$

$$= \frac{i \operatorname{sgn} \lambda_I}{2\pi} \left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{i}{4\lambda_I}(\partial_{\bar{z}} + 2\partial_z + \partial_{\bar{z}}^{-1}\partial_z^2)\right]^k\right\} \frac{1}{z}$$

Лемма 13.1 доказана.

В дальнейшем нам понадобятся следующие формальные степенные ряды по z, $\bar{z}$:

$$\phi_k(\lambda, x, y) = \left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{i}{4\lambda_I}\left(\partial_{\bar{z}} + 2\partial_z + \partial_{\bar{z}}^{-1}\partial_z^2\right)\right]^k\right\} z^k,$$

$$\check{\phi}_k(\lambda, x, y) = e^{-2i\lambda_I x - 4i\lambda_I \lambda_R y} \bar{\phi}_k(\lambda, x, y),$$

$$\phi_k^*(\lambda, x, y) = \phi_k(\lambda, -x, -y), \ \check{\phi}_k^*(\lambda, x, y) = \check{\phi}_k(\lambda, -x, -y).$$

Лемма 13.2 *Пусть $k \geq 0$. Тогда функции $\phi_k(\lambda, x, y)$ – полиномы от z, $\bar{z}$ и, тем самым, полиномы от x, y. Эти полиномы удовлетворяют соотношениям:*

$$L_0(\lambda)\phi_k(\lambda, x, y) = L_0(\lambda)\check{\phi}_k(\lambda, x, y) = 0,$$

$$L_0^*(\lambda)\phi_k^*(\lambda, x, y) = L_0^*(\lambda)\check{\phi}_k^*(\lambda, x, y) = 0.$$

где $L_0^*(\lambda)$ – оператор, формально сопряженный к оператору $L_0(\lambda)$, определенному (13.14)

$$L_0^*(\lambda) = -\partial_y - \partial_x^2 + 2\lambda\partial_x = 4i\lambda_I\partial_{\bar{z}} - (\partial_z + \partial_{\bar{z}})^2 \qquad (13.17)$$

Доказательство. Полиномиальность $\phi_k(\lambda, x, y)$ вытекает из того, что оператор $(\partial_{\bar{z}} + 2\partial_z + \partial_{\bar{z}}^{-1}\partial_z^2)$ действуя на многочленах от $z, \bar{z}$ переводит их снова в многочлены и понижает их степень на 1. Тем самым только первые k членов ряда при $k > 0$ дают ненулевой вклад.

На уровне формального тождества в рядах

$$L_0\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{i}{4\lambda_I}(\partial_{\bar{z}} + 2\partial_z + \partial_{\bar{z}}^{-1}\partial_z^2)\right]^k\right\} = -4i\lambda_I\partial_{\bar{z}},$$

т.е.

$$L_0(\lambda)\phi_k(\lambda, x, y) = -4i\lambda_I\partial_{\bar{z}}z^k = 0.$$

Поскольку при вычислении $L_0(\lambda)\phi_k(\lambda, x, y)$ только конечное число членов ряда действует нетривиально, формальное вычисление оказывается достаточным. Остальные три соотношения проверяются аналогично.

Несложно также проверить, что $\phi_0(\lambda, x, y), \ldots, \phi_k(\lambda, x, y)$ дают полный базис решений уравнения $L_0(\lambda)\phi(\lambda, x, y) = 0$ в пространстве многочленов степени не выше k.

Докажем теперь основную Лемму этого пункта.

Лемма 13.3 *1) Пусть* $\chi_0(\lambda_0, x, y)$ *– ненулевое решение однородного интегрального уравнения (13.11) такое, что*

$$\Psi_{0j}(\lambda_0, x, y) = e^{\lambda_0 x + \lambda_0^2 y}\chi_{0j}(\lambda_0, x, y)$$

– вещественно. Тогда возможны два случая:

а) $\chi_0(\lambda_0, x, y)$ *убывает на бесконечности быстрее любой степени* $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

б) При $x^2 + y^2 \to \infty$ *функция* $\chi_0(\lambda_0, x, y)$ *имеет асимптотику*

$$\chi_0(\lambda_0, x, y) = cz^{-n} + e^{-2i\lambda_I x - 4i\lambda_I\lambda_R y}\bar{c}\bar{z}^{-n} + o(z^{-n}),\ n > 0.$$

2) Пусть $\chi_0(\lambda_0, x, y) = O(z^{-n-2})$. *Тогда для* $k = 0, ..., n$ *выполнены следующие соотношения ортогональности:*

$$\int\int \phi_k^*(\lambda, x, y)u(x, y)\chi_0(\lambda_0, x, y)dxdy =$$

$$= \int\int \check{\phi}_k^*(\lambda, x, y)u(x, y)\chi_0(\lambda_0, x, y)dxdy = 0. \qquad (13.18)$$

Доказательство. Подставим в правую часть уравнения (13.11) асимптотический ряд для функции Грина (13.13). Мы получили некоторый формальный ряд для $\chi_0(\lambda_0, x, y)$ по одночленам вида $\bar{z}^m/z^n$, $z^m/\bar{z}^n\, e^{-ri\lambda_I x - 4i\lambda_I\lambda_R y}$, причем $n > 2m \geq 0$. Коэффициенты при этих одночленах будут интегралами вида:

$$\iint dxdy\, u(x, y)\, \chi_0(\lambda_0, x, y)\, p_{mn}(x, y)$$

где $p_{mn}(x, y)$ – некоторые многочлены. Конечно же, часть из этих интегралов может расходиться, и, начиная с некоторого порядка получающееся разложение перестает работать. Однако в первом неисчезающем порядке этот интеграл сходится и дает главный порядок в асимптотике. Количество следующих членов в асимптотике, которые мы можем

вычислить, зависит от скорости убывания $u(x,y)$ на бесконечности, однако убывания быстрее квадрата расстояния хватает для того, чтобы определить главный порядок.

Предположим теперь, что хотя бы один член в асимптотике отличен от 0. Поскольку $u(x,y) = o(1/z^2)$

$$L_0(\lambda_0)\chi_0(\lambda_0,x,y) = -4i\lambda_{0I}\partial_{\bar z} - (\partial_z^2 + \partial_{\bar z}^2)\chi_0(\lambda_0,x,y) = o(z^{-2})\chi_0(\lambda_0,x,y)$$

В главном порядке $\chi_0(\lambda_0,x,y)$ имеет вид:

$$\chi_0(\lambda_0,x,y) = h(z,\bar z) + \bar h(z,\bar z)e^{-2i\lambda_{0I}x - 4i\lambda_{0I}\lambda_{0R}y}$$

где $h(z,\bar z)$ – некоторый многочлен от $\bar z^m/z^{m+k}$ (мы воспользовались здесь вещественностью $\Psi_0(\lambda_0,x,y)$). Члены с экспонентой и без нее не сокращаются друг с другом. Поэтому

$$L_0(\lambda_0)h(x,y) = o(1/z^2)h(x,y), \quad \text{т.е.}$$

$$\partial_{\bar z}h(x,y) = o(1/z^2)h(x,y), \quad \text{т.е.}$$

рациональная функция $h(x,y)$ голоморфна по z:

$$h(x,y) = cz^{-k}.$$

Часть 1 Леммы 13.3 доказана.

Пусть $\kappa(\lambda_0,x,y)$ – одна из функций $\phi_k^*(\lambda,x,y)$, $\check\phi_k^*(\lambda_0,x,y)$, $0 \le k \le n$. По определению

$$I = \iint \kappa(\lambda_0,x,y)u(x,y)\chi_0(\lambda_0,x,y)dxdy =$$

$$= \iint \kappa(\lambda_0,x,y)L_0(\lambda_0)\chi_0(\lambda_0,x,y)dxdy$$

Интегрируя по частям, получаем

$$I = -\iint L_0^*(\lambda_0)\chi_0(\lambda_0,x,y)\kappa(\lambda_0,x,y)dxdy + \text{граничные члены}$$

Если $\chi_0(\lambda_0, x, y) = O(z^{-n-2})$, то граничные члены отсутствуют. Поскольку $\kappa(\lambda_0, x, y)$ – собственная функция $L_0^*(\lambda_0)$, получаем, что $I = 0$.

Лемма 13.3 доказана.

Обсудим теперь геометрию нулей собственных функций параболического оператора.

Лемма 13.4 *Пусть $\Psi(x, y)$ – произвольное гладкое вещественное решение уравнения теплопроводности*

$$[\partial_y - \partial_x^2 + u(x, y)]\Psi(x, y) = 0$$

определенное на всей x, y - плоскости (в данной лемме предполагаем, что $u(x, y)$, $\Psi(x, y)$ – гладкие вещественные функции на $\mathbb{R}^2$, однако не накладываем никаких ограничений на их поведение на бесконечности).

Обозначим D дополнение к множеству нулей функции $\Psi(x, y)$. D – открытое множество, $D = \bigcup\limits_j D_j$, где D_j – компоненты линейной связности.

Пусть компонента D_j ограничена в x направлении, т.е. пересечение D_j с любой полосой $y_1 \le y \le y_2$, $y_1 > -\infty$, $y_2 < \infty$ – ограниченное множество.

Тогда D_j неограничена снизу в y-направлении и, более того, существует путь $\gamma : [0, \infty] \to D_j$, $t \to (x(t), y(t))$ такой, что

$$\frac{\partial y(t)}{\partial t} < 0 \qquad \textit{при всех } x$$

$$y(t) \to -\infty \qquad \textit{при } t \to +\infty$$

Доказательство. Рассмотрим следующую функцию:

$$J(y) = \int\limits_{\mathcal{L}(y)} \frac{1}{2}\Psi^2(x, y)dx$$

где $\mathcal{L}(y)$ пересечение области D_j с прямой $y = \text{const}$.

Функция $\Psi^2(x,y)$ обращается в 0 на границе области D_j. Поэтому

$$\frac{\partial J(y)}{\partial y} = \int\limits_{\mathcal{L}(y)} \Psi(x,y)\partial_y\Psi(x,y)dx$$

используя уравнение теплопроводности, получаем:

$$\frac{\partial J(y)}{\partial y} = -\int\limits_{\mathcal{L}(y)} u(x,y)\Psi^2(x,y)dx + \int\limits_{\mathcal{L}(y)} \Psi(x,y)\partial_x^2\Psi(x,y)dx.$$

Поскольку функция $\Psi^2(x,y)$ обращается в 0 на границе области D_j, можно перебросить одну производную:

$$\frac{\partial J(y)}{\partial y} = -\int\limits_{\mathcal{L}(y)} u(x,y)\Psi^2(x,y)dx - \int\limits_{\mathcal{L}(y)} (\partial_x\Psi(x,y))^2dx < 2J(y)\max_{x\in\mathcal{L}(y)}|u(x,y)|.$$

откуда следует, что для любого $y < y_0$ такого, что $J(y_0) > 0$ мы получаем следующую оценку:

$$J(y) > e^{c_{y,y_0}(y-y_0)}J(y_0) > 0, \quad \text{где} \quad c_{y,y_0} = 2\max_{x\in\mathcal{L}(\tilde{y}),y\le\tilde{y}\le y_0}|u(x,\tilde{y})|.$$

Тем самым, если $\mathcal{L}(y_0)$ непусто, то непусто и множество $\mathcal{L}(y)$ при $y < y_0$.

Лемма 13.4 доказана.

Примечание. Утверждение Леммы 13.4 хорошо известно специалистам, однако автору не удалось найти ссылок на ее доказательство, поэтому мы сочли целесообразным привести его здесь.

Теперь все готово для того, чтобы доказать следующее утверждение.

Теорема 13.2 *Пусть $\chi_0(\lambda_0,x,y)$ – ненулевое решение однородного уравнения (13.11) с гладким вещественным потенциалом $u(x,y)$, убывающим быстрее квадрата расстояния от нуля (условие (13.3)). Тогда*

1) $\chi_0(\lambda_0,x,y)$ убывает на бесконечности быстрее любой степени z, (т.е. случай б) Леммы 13.3 никогда не реализуется)

2) Функция $u(x,y)\chi_0(\lambda_0,x,y)$ *ортогональна всем функциям* $\phi_k^*(\lambda,x,y)$, $\check{\phi}_k^*(\lambda,x,y)$ *(т.е. соотношения (13.18) выполнены при всех* $k>0$*).*

Доказательство. Из Леммы 13.3 видно, что достаточно проверить пункт 1.

Рассмотрим функции

$$\tilde{\chi}_0(\lambda_0,x,y)=e^{i\lambda_{0I}x+2i\lambda_{0I}\lambda_R y}\chi_0(\lambda_0,x,y)$$

$$\Psi_0(\lambda_0,x,y)=e^{\lambda_0 x+\lambda_0^2 y}\chi_0(\lambda_0,x,y)$$

Как мы уже объясняли, без ограничения общности можно считать их вещественными. Нули $\chi_0(\lambda_0,x,y)$,$\tilde{\chi}_0(\lambda_0,x,y)$,$\Psi_0(\lambda_0,x,y)$ совпадают, при этом $\Psi_0(\lambda_0,x,y)$ – глобальное вещественное решение уравнения теплопроводности.

Пусть $\chi_0(\lambda_0,x,y)$ убывает не быстрее какой-нибудь степени z. Тогда по Лемме 13.3

$$\tilde{\chi}_0(\lambda_0,x,y)=e^{i\lambda_{0I}x+2i\lambda_{0I}\lambda)Ry}cz^{-n}+e^{-i\lambda_{0I}x-2i\lambda_{0I}\lambda)Ry}\bar{c}\bar{z}^{-n}+o(z^{-n}) \qquad (13.19)$$

Легко проверяется, что эта аппроксимация верна и для первой производной $\tilde{\chi}_0(\lambda_0,x,y)$, поэтому она позволяет приближенно определить положение нулей $\Psi_0(\lambda_0,x,y)$ вдали от начала координат.

Нарисуем нули $\Psi_0(\lambda_0,x,y)$ вне достаточно большого круга C

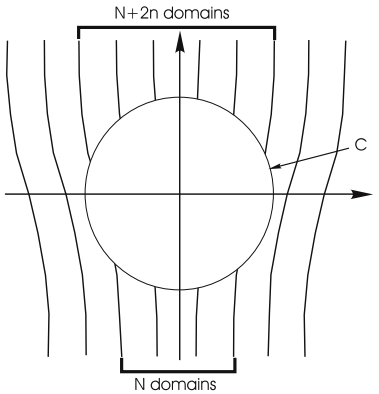

Рис. 13.1.

Рассмотрим набор областей D_j, пересекающих круг C. Элементарный анализ показывает, что если число таких областей, приходящих из $y = -\infty$ равно N, то число таких областей, приходящих из $y = +\infty$ равно $N + 2n$. Тем самым, хотя бы одна из областей, приходящих из $y = +\infty$, исчезает при $y = -\infty$. Но, согласно Лемме 13.4 это невозможно. Тем самым, предположив, что $\chi_0(\lambda_0, x, y)$ убывает не быстрее некоторой степени z, мы пришли к противоречию.

Теорема 13.2 доказана.

13.2 Регулярность прямого спектрального преобразования для параболического оператора.

Начиная с данного момента мы будем предполагать, что $u(x, y)$ убывает вместе со всеми производными быстрее любой степени z (лежит в классе Шварца, условие (13.4)).

Назовем точку λ регулярной, если однородное интегральное уравнение (13.11) не имеет ненулевых решений и иррегулярной, если ненулевые решения существуют.

Цель данного пункта – доказательство существования и непрерывности волновой функции в иррегулярных точках (если таковые есть). Отметим, что вопрос о существрвании иррегулярных точек до сих пор остается открытым.

Сперва докажем, что при любом λ существует хотя бы одно решение уравнения (13.11).

Теорема 13.3 *Пусть $u(x, y)$ – вещественный гладкий потенциал, убывающий вместе с производными на бесконечности быстрее любой степени расстояния, $a_0, ..., a_n$, $b_0, ..., b_n$ – произвольные константы. Тогда:*

1) при всех λ следующее интегральное уравнение

$$\chi(\lambda,x,y)=\sum_{k=0}^{n}(a_k\phi_k(\lambda,x,y)+b_k\check{\phi}_k(\lambda,x,y))-\hat{G}(\lambda)u(x,y)\chi(\lambda,x,y) \tag{13.20}$$

имеет хотя бы одно решение.

2) При $z\to\infty$ асимптотика решений имеет вид:

$$\chi(\lambda,x,y)=\sum_{k=0}^{n}(a_k\phi_k(\lambda,x,y)+b_k\check{\phi}_k(\lambda,x,y))$$

3) Коэффициенты a_k,b_k с $k<0$ однозначно определяются коэффициентами a_k,b_k с $k\geq$. Тем самым, даже если решение не единственно, то его асимптотика полностью определяется правой частью уравнения (13.20)

Доказательство. Если λ – регулярная точка, то утверждение Теоремы заведомо верно. Если λ – иррегулярная точка, то уравнение (13.20) имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда его правая часть ортогональна ядру сопряженного уравнения (на самом деле нужно было бы, как указано в начале раздела перейти к уравнениям типа $\kappa(\lambda)\hat{G}(\lambda)u(x,y)\kappa^{-1}(\lambda)$, однако это, ничего не меняя по сути, удлинило бы доказательство, поэтому мы не будем этого делать).

Уравнение, сопряженное к однородной части (13.20), имеет вид:

$$f(\lambda,x,y)=-u(x,y)\hat{G}^*(\lambda)f(\lambda,x,y) \tag{13.21}$$

(мы воспользовались здесь тем, что $(AB)^*=B^*A^*$.

Его базис решений имеет вид: $u(x,y)\chi_1^*(\lambda,x,y),\ \ldots,\ u(x,y)\chi_k^*(\lambda,x,y)$ где $\chi_1^*(\lambda,x,y),\ \ldots,\ \chi_k^*(\lambda,x,y)$ базис решений однородной части (13.8)

$$\chi^*(\lambda,x,y)=-\hat{G}^*(\lambda)u(x,y)\chi^*(\lambda,x,y). \tag{13.22}$$

Доказательство Теоремы 13.2 полностью проходит и для решений (13.22). Тем самым мы имеем следующие двойственные соотношения ортогональности:

$$\int\int \phi_k(\lambda,x,y)u(x,y)\chi_k^*(\lambda,x,y)dxdy =$$

$$\int\int \check{\phi}_k(\lambda,x,y)u(x,y)\chi_k^*(\lambda,x,y)dxdy = 0,$$

которые в точности означают ортогональность правой части (13.20) ядру сопряженного оператора.

Пункт 1 доказан.

Для вычисления асимптотики решения при $x^2+y^2\to\infty$ подставим в (13.20) асимптотическое разложение функции Грина (13.13). Поскольку $u(x,y)$ убывает быстрее любой степени расстояния, то в отличие той ситуации, в которой мы были при доказательстве Леммы 13.1, подстановка для функции Грина дает нам полный асимптотический ряд.

Поскольку $u(x,y)=o(z^{-N})$ для всех N, то на уровне рядов

$$L_0(\lambda)\chi(\lambda,x,y)=0.$$

Как и при доказательстве Леммы 13.1, представим асимптотику $\chi(\lambda,x,y)$ в виде:

$$\chi(\lambda,x,y)=h_1(z)+e^{-2i\lambda_I x-4\lambda_I\lambda_R y}h_2(z),$$

где $h_1(z)$, $h_2(z)$ – ряды Лорана по $z,\bar{z}$. Легко видеть, что

$$L_0(\lambda)h_1(z)=L_0(\lambda)e^{-2i\lambda_I x-4\lambda_I\lambda_R y}h_2(z)=0.$$

Тейлоровская часть $h_1(z)$ равна

$$\sum_{k=0}^{n}a_k\phi_k(\lambda,x,y).$$

Вычтем из $h_1(z)$ тейлоровскую часть. Остаток начинается с какой-то степени m:

$$h_1^1(z) = h_1(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k(\lambda, x, y) = \sum_{j=0}^{m} \alpha_m \frac{\bar{z}^j}{z^{j+m}} + O(\frac{1}{z^{m+1}})$$

Поскольку $L_0(\lambda)h_1^1(z) = 0$, то все α_m, кроме α_0, равны 0 и

$$h_1^1(m) = \alpha_0 \phi_{-k}(\lambda, x, y) + O(\frac{1}{z^{m+1}}).$$

Повторяя эту процедуру, получаем асимптотику во всех порядках.

Пункт 2 доказан.

Пункт 3 сразу же следует из утверждения Теоремы 13.2 о том, что однородные решения убывают быстрее любой степени z.

Теорема 13.3 доказана.

Мы доказали, что при всех λ существует волновая функция, однако этого недостаточно, поскольку нам необходимо построить непрерывно зависящее от λ решение. Следующий шаг – доказательство того, что в окрестности любой иррегулярной точки λ_0 существует решение (2.2) в виде формального ряда по переменным $(\lambda - \lambda_0)$, $(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0)$:

$$\Psi(\lambda, x, y) = e^{\lambda_0 x + \lambda_0^2 y} \sum_{m,n \geq 0} (\lambda - \lambda_0)^m (\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0)^n \psi_{mn}(x, y), \qquad (13.23)$$

где функции $\psi_{mn}(x, y)$ таковы, что

1) Все $\psi_{mn}(x, y)$ удовлетворяют уравнению:

$$(L_0(\lambda_0) + u(x, y))\psi_{mn}(x, y) = 0$$

2) $\psi_{mn}(x, y)$ – гладкие функции x, y и при $z \to \infty$ имеют следующую асимптотику:

$$\psi_{mn}(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{\max(m,n)} c_k^{mn} \phi_k(\lambda_0, x, y) + \sum_{k=-\infty}^{\max(m,n)} d_k^{mn} \check{\phi}_k(\lambda_0, x, y) \qquad (13.24)$$

3) Во всех порядках по $(\lambda-\lambda_0)$, $(\bar\lambda-\bar\lambda_0)$ $\chi(\lambda,x,y)=1+o(1)$ при $z\to\infty$

Последнее условие требует некоторого разъяснения. Подставляя (13.24) в (13.23), получаем:

$$\Psi(\lambda,x,y)=e^{\lambda_0 x+\lambda_0^2 y}\Phi_1(\lambda,x,y)+e^{\bar\lambda_0 x+\bar\lambda_0^2 y}\Phi_2(\lambda,x,y)$$

где

$$\Phi_1(\lambda,x,y)=\sum_{m,n\ge 0}\sum_{k=-\infty}^{\max(m,n)}c_k^{mn}(\lambda-\lambda_0)^m(\bar\lambda-\bar\lambda_0)^n\phi_k(\lambda_0,x,y)$$

$$\Phi_2(\lambda,x,y)=\sum_{m,n\ge 0}\sum_{k=-\infty}^{\max(m,n)}d_k^{mn}(\lambda-\lambda_0)^m(\bar\lambda-\bar\lambda_0)^n\bar\phi_k(\lambda_0,x,y)$$

Введем следующие функции:

$$\begin{aligned}\Xi(\lambda,x,y)&=e^{(\lambda_0-\lambda)x+(\lambda_0^2-\lambda^2)y}\Phi_1(\lambda,x,y),\\ \check\Xi(\lambda,x,y)&=e^{(\bar\lambda_0-\bar\lambda)x+(\bar\lambda_0^2-\bar\lambda^2)y}\Phi_2(\lambda,x,y)\end{aligned}\tag{13.25}$$

Очевидно, что на уровне рядов

$$\chi(\lambda,x,y)=\Xi(\lambda,x,y)+e^{(\bar\lambda-\lambda)x+(\bar\lambda-\lambda^2)y}\check\Xi(\lambda,x,y).$$

Разлагая экспоненты в (13.23), в ряды по $(\lambda-\lambda_0)$, $(\bar\lambda-\bar\lambda_0)$, получаем формальное разложение для $\Xi(\lambda,x,y)$, $\check\Xi(\lambda,x,y)$ следующего вида:

$$\begin{aligned}\Xi(\lambda,x,y)&=\sum_{m,n\ge 0}(\lambda-\lambda_0)^m(\bar\lambda-\bar\lambda_0)^n\xi_{mn}(x,y)\\ \check\Xi(\lambda,x,y)&=\sum_{m,n\ge 0}(\lambda-\lambda_0)^m(\bar\lambda-\bar\lambda_0)^n\check\xi_{mn}(x,y)\end{aligned}\tag{13.26}$$

Условие 3) мы будем понимать следующим образом: для лорановских рядов по $z,\bar z$, $\xi_{mn}(x,y)$, $\check\xi_{mn}(x,y)$ выполнено следующее условие на бесконечности:

$$\xi_{mn}(x,y)=\delta_{m0}\delta_{n0}+o(1),\qquad \check\xi_{mn}(x,y)=o(1)\quad\text{при } z\to\infty.$$

Теорема 13.4 *Пусть $u(x,y)$ – гладкий вещественный потенциал, убывающий на бесконечности быстрее любой степени z, $\lambda = \lambda_0$ – иррегулярная точка. Тогда:*

1) *Уравнение прямой задачи рассеяния (2.2) имеет одно формальное решение вида (13.23) со свойствами 1)-3).*

2) *Все функции $\Psi_{mn}(x,y)$ определяются однозначно с точностью до добавления произвольных решений однородного уравнения.*

3) *Коэффициенты асимптотического разложения решений на бесконечности c_k^{mn}, d_k^{mn} однозначно фиксируются свойствами 1)-3) (т.е. добавление решений однородного уравнения не меняет их)*

4) *По решениям уравнения (2.2) в виде формального ряда по $(\lambda - \lambda_0)$, $(\bar\lambda - \bar\lambda_0)$ можно определить данные рассеяния $b(\lambda)$, $T(\lambda)$ пользуясь формулами (2.16), (2.15). Тогда $b(\lambda)$, $T(\lambda)$ оказываются однозначно определенными рядами Тейлора по $(\lambda-\lambda_0)$, $(\bar\lambda-\bar\lambda_0)$ (т.е. добавление решений однородных уравнений не влияет на них).*

Доказательство. Для начала отметим, что если c_k^{mn}, d_k^{mn} – произвольные константы такие, что $c_k^{mn} = d_k^{mn}$ при $k > \max(m,n)$, то $\Xi(\lambda,x,y)$, $\check\Xi(\lambda,x,y)$ – корректно определенные формальные ряды по $(\lambda-\lambda_0)$, $(\bar\lambda-\bar\lambda_0)$ и они удовлетворяют следующим уравнениям:

$$
\begin{gathered}
[L_0(\lambda_0) - 2(\lambda-\lambda_0)\partial_x]\Xi(\lambda,x,y) = 0, \\
[L_0(\bar\lambda_0) - 2(\bar\lambda-\bar\lambda_0)\partial_x]\check\Xi(\lambda,x,y) = 0.
\end{gathered}
\tag{13.27}
$$

(напомним, что по определению, $\Xi(\lambda,x,y)$, $\check\Xi(\lambda,x,y)$ – формальные ряды Лорана по $z,\bar z$ в точке $z=\infty$). По Теореме 13.3 если мы произвольно зафиксируем коэффициенты c_k^{mn} с $0 \le k \le \max(m,n)$, то по ним однозначно вычисляются коэффициенты c_k^{mn} при $k<0$. Тем самым, мы

приходим к следующей задаче: подобрать такие коэффициенты c_k^{mn}, d_k^{mn}, $k \geq 0$, чтобы были выполнены свойства 1)-3). Убедимся, что это всегда можно сделать, и при том однозначно. Сама же волновая функция будет определяться в каждом порядке однозначно с точностью до прибавления решений однородного уравнения, однако, поскольку эти решения убывают быстрее любой степени z, на асимптотические по z решения эта добавка никак не влияет.

Константы c_k^{mn}, d_k^{mn} будем подбирать индукцией по $l = m+n$. Полагая $\lambda = \lambda_0$ получаем $c_0^{00} = 1$, $d_0^{00} = 0$. Согласно (13.27)

$$L_0(\lambda_0)\xi^{mn}(x,y) - 2\partial_x \xi^{m-1\,n}(x,y) = 0.$$

По предположению индукции

$$\partial_x \xi^{m-1\,n}(x,y) = o(1) \text{ as } z \to \infty,$$

поэтому

$$L_0(\lambda_0)\xi^{mn}(x,y) = o(1),$$

Несложно проверяется, что $\xi^{mn}(x,y) = O(z^{\max(m,n)})$. Отсюда видно, что для любых c_k^{mn}

$$\xi^{mn}(x,y) = \sum_{k=0}^{\max(m,n)} v_k^{mn}\phi_k(\lambda_0,x,y) + o(1).$$

где V_k^{mn} – некоторые константы, зависящие от c_k^{mn}

С другой стороны,

$$\xi^{mn}(x,y) = F(\lambda,x,y,c_k^{\tilde{m}\tilde{n}},d_k^{\tilde{m}\tilde{n}}) + \sum_{k=0}^{\max(m,n)} c_k^{mn}\phi_k(\lambda_0,x,y) + o(1),$$

Здесь $F(\lambda,x,y,c_k^{\tilde{m}\tilde{n}},d_k^{\tilde{m}\tilde{n}})$ – некоторая функция, линейно зависящая от $c_k^{\tilde{m}\tilde{n}}$, $d_k^{\tilde{m}\tilde{n}}$, $k \geq 0$, причем $\tilde{m}+\tilde{n} < l$

Тем самым, если мы знаем c_k^{mn}, d_k^{mn}, при всех $m+n < l$, то по ним однозначно находятся и c_k^{mn} с $m+n = l$. Аналогичный анализ $\check{\Xi}(\lambda,x,y)$ дает нам коэффициенты d_k^{mn} с $m+n = l$.

Пункты 1) - 3) доказаны.

Как мы отмечали в разделе 2 Главы 1, данные рассеяния задаются либо интегральными формулами (2.16), (2.15), либо асимптотической формулой (2.17) (перейти от одной формулы к другой можно интегрированием по частям). Тем самым, если мы знаем разложение $\Psi(\lambda, x, y)$ при больших z

$$\Psi(\lambda, x, y) = e^{\lambda x + \lambda^2 y}\left[1 + c_{-1}z^{-1} + \ldots\right] + e^{\bar{\lambda} x + \bar{\lambda}^2 y}\left[d_{-1}\bar{z}^{-1} + \ldots\right],$$

то мы знаем и

$$T(\lambda) = d_{-1}(\lambda), b(\lambda) = -2\pi i \operatorname{sgn} \lambda_I d_{-1}(\lambda).$$

Поскольку асимптотика $\Psi(\lambda, x, y)$ нам известна, (как формальный ряд по $(\lambda - \lambda_0)$, $(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0)$) и не меняется при добавлении решений однородного уравнения, то полностью определены данные $b(\lambda)$, $T(\lambda)$ (как формальные ряды по $(\lambda - \lambda_0)$, $(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0)$)

Теорема 13.4 доказана.

К сожалению, полученные результаты еще не позволяют сделать вывод об отсутствии особенностей у волновой функции параболического оператора, поскольку из отсутствия особенностей решений в виде формальных рядов нельзя сделать вывода об отсутствии особенностей функции (в случае, когда функция есть отношение двух гладких функций с нулями бесконечного порядка, формальные ряды не несут никакой информации о характере особенности). Поэтому при доказательстве Теоремы 13.1 мы ограничиваемся операторами с экспоненциально убывающими на бесконечности потенциалами (13.1) . В этом случае волновая функция $\Psi(\lambda, x, y)$ и, следовательно, "данные рассеяния" $b(\lambda)$ в окрестности регулярной точки – аналитические функции двух вещественных переменных λ_R, λ_I, а в окрестности иррегулярной точки – отношение пары аналитических функций. Для уравнений с аналитически зависящими от λ_R, λ_I коэффициентами разрешимость в виде рядов по $(\lambda - \lambda_0)$,

$(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0))$ во всех порядках уже гарантирует несингулярность решений. Тем самым Пункт 1 основной Теоремы 13.1 раздела доказан.

Если к тому же выполнены предположения Пункта 2, то обратная задача однозначно разрешима (см. раздел 12 Главы 2).

Поскольку одно из решений обратной задачи – построенная нами при решении прямой задачи волновая функция $\Psi(\lambda, x, y)$, то именно ее мы получим, решая обратную задачу.

Теорема 13.1 доказана.

13.3 Задача Коши для уравнения Кадомцева-Петвиашвили 2 в классе быстроубывающих на бесконечности потенциалов.

Изложенные выше результаты совместно с результатами раздела 12 Главы 2 позволяют легко доказать следующую Теорему, которая является одним из основных результатов данной диссертации.

Теорема 13.5 *Пусть $U(x, y)$ – произвольная гладкая вещественная функция, такая, что:*

1) все производные которой экспоненциально убывают на бесконечности:

$$\left|\frac{\partial^{m+n} u(x,y)}{\partial x^m \partial y^n}\right| < c_{mn} e^{-\epsilon r} \text{ для всех } m, n \geq 0.$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, ϵ, c_{mn} – положительные константы,

2)

$$\int u(x,y)\, dx = 0 \qquad \text{при всех } y$$

Тогда спектральное преобразование дает нам решение задачи Коши для уравнения Кадомцева-Петвиашвили 2 с начальным условием:

$$u(x,y,t)\Big|_{t=0} = U(x,y),$$

причем решение $u(x, y, t)$ неособо при всех t.

Действительно, согласно Теореме 13.1, функции $U(x,y)$ соответствуют несингулярные "данные рассеяния" $T(\lambda,0)$. С учетом результатов Леммы 2.6 и их динамики в силу КП-2

$$T(\lambda,0) = e^{4(\bar{\lambda}^3-\lambda^3)t}T(\lambda,0)$$

мы видим, что при всех t "данные рассеяния" удовлетворяют требованиям Теоремы 12.1 и, тем самым, при всех t $u(x,y,t)$ неособа.

Интересно сопоставить Теорему 13.5 с результатом работы Бургеня [91], в которой показана однозначная разрешимость задачи Коши для КП-2 в классе периодических потенциалов и несингулярность решений при всех t. Работа Бургеня не использует представление Лакса и преобразование рассеяния, его техника основана на доказательстве оценок для коэффициентов Фурье решения.

Глава III

Неизоспектральные симметрии интегрируемых уравнений.

Интегрирование уравнения КП, как и большинства других известных в настоящее время солитонных уравнений, включая уравнения КдФ и Веселова-Новикова, основано на свойстве изоспектральности: потоки, входящие в иерархию КП сохраняют спектр вспомогательного линейного оператора L. Однако существуют интересные примеры интегрируемых систем, для которых это свойство не выполнено. Впервые такие уравнения были рассмотрены в работе Ф.Калоджеро и А.Дегасперис [92]. Один из наиболее интересных с физической точки зрения примеров – уравнения Эрнста (осесимметричные редукции стационарных уравнений Эйнштейна) – В.А.Белинский, В.Е.Захаров [1], Д.Майсон [126], [127], по поводу структуры решений см. также работу А.П.Веселова [6]. Другие примеры неизоспектральных интегрируемых уравнений обсуждались в работе С.П.Бурцева, В.Е.Захарова, А.В.Михайлова [4].

Неизоспектральные уравнения естественно возникают в задаче построения дополнительных симметрий изоспектральных уравнений. Именно эту ситуацию мы обсуждаем в данной главе.

14 Действие неизоспектральных симметрий на конечнозонных решениях уравнения Кадомцева-Петвиашвили.

14.1 Неизоспектральные симметрии КдФ и КП.

Хорошо известно, что кроме симметрий, порождаемых высшими КдФ, уравнение КдФ инвариантно относительно преобразований Галилея и масштабных преобразований, генераторы которых записываются как

$$\partial u/\partial\beta_{-1} = 3tu_x - 2 \qquad \text{– преобразование Галилея,} \tag{14.1}$$

$$\partial u/\partial\beta_0 = 3t(\frac{1}{4}u_{xxx} - \frac{3}{2}uu_x) + xu_x + 2u \qquad \text{– масштабное преобразование,} \tag{14.2}$$

причем (14.2) получается из (14.1) действием рекурсионного оператора (4.8). Эти симметрии неизоспектральны. Как показали Н.Х.Ибрагимов и А.Б.Шабат [38], повторное применение рекурсионного оператора дает нам новые симметрии КдФ, которые уже оказываются нелокальными.

$$\frac{\partial u}{\partial\beta_m} = \frac{d}{dx}\Lambda^{m+1}\cdot(3tu - 2x). \tag{14.3}$$

Первая из них имеет вид:

$$\partial u/\partial\beta_2 =$$

$$= 3t(\frac{1}{16}u^{\mathrm{v}} - \frac{5}{8}uu_{xxx} - \frac{5}{4}u_xu_{xx} + \frac{15}{8}u^2u_x) + x(\frac{1}{4}u_{xxx} - \frac{3}{2}uu_x) + u_{xx} - 2u^2 - \frac{1}{2}u_x\partial_x^{-1}u. \tag{14.4}$$

Отметим, что выписанные выше симметрии явно зависят от координат и времен.

Дальнейшее развитие теория неизоспектральных симметрий КдФ получила в работах Чена, Ли, Лина [93], А.Ю.Орлова и Е.И.Шульмана [139]. Важное наблюдение [139] состояло в том, что что коммутаторы

дополнительных симметрий совпадают с коммутаторами конформной алгебры двумерных теорий (алгебры векторных полей на окружности). Неизоспектральные симметрии уравнения КП были построены в работах Чена, Ли, Лина [93], Ф.Шварца [146], Б.Фуксштайнера и В.Овела [106], А.Ю.Орлова и Е.И.Шульмана [137], [140]. Интерпретация этих симметрий в терминах рекурсионного оператора была предложена А.Фокасом и П.М.Сантини [100], [101]. Для построения дополнительных симметрий в работах [65], [139], [140] была использована инфинитезимальная версия метода одевания Захарова-Шабата. Наиболее широкая алгебра симметрий КП , включающая в себя все известные семейства, построена в работе А.Ю.Орлова и П.Винтерница [141].

Мы будем работать со следующим представлением для симметрий КП, предложенным в [140], :

$$\partial\chi/\partial\beta_{mn} = -2\partial_x \operatorname{res}_{\lambda=\infty} (\lambda^m((\partial/\partial\lambda)^n w(\lambda,\vec{t}))w^*(\lambda,\vec{t})), \tag{14.5}$$

где $w(\lambda,t)$ и $w^*(\lambda,\vec{t})$ волновые функции операторов L и L^* соответственно

$$(\partial_y - \partial_x^2 + u(\vec{t}))w(\lambda,\vec{t}) = 0,\ (\partial_y + \partial_x^2 + u(\vec{t}))w^*(\lambda,\vec{t}) = 0 \tag{14.6}$$

с асимптотикой при $\lambda \to \infty$:

$$\begin{gathered} w(\lambda,\vec{t}) = (1 + \sum w_n(\vec{t})\lambda^{-n}))\exp\sum t_n\lambda^n, \\ w^*(\lambda,\vec{t}) = (1 + \sum w_n^*(\vec{t})\lambda^{-n})\exp(-\sum t_n\lambda^n), \end{gathered} \tag{14.7}$$

res обозначает коэффициент при $1/\lambda$ в асимптотическом разложении при $\lambda \to \infty$, m пробегает все целые числа, n – все неотрицательные целые числа, β_{mn} – соответствующие времена.

Потоки с $n = 0$ коммутируют со всей алгеброй симметрий (14.7). Подалгебра потоков по временам β_{mn} с $n > 0$ имеет те же коммутационные соотношения, что и алгебра дифференциальных операторов вида $\lambda^m(\partial/\partial\lambda)^n$.

Коэффициенты разложения волновых функций в окрестности бесконечности $w_n(\lambda,\vec{t})$, $w_n^*(\lambda,\vec{t})$ можно рассматривать как нелокальные функционалы от потенциала $u(\vec{t})$, и тогда потоки (14.5) становятся явно зависящими от координат и времен эволюционными уравнениями. Однако при этом сразу возникает проблема фиксации констант интегрирования. При работе с конечнозонными потенциалами мы будем фиксировать эти константы, полагая, что $w(\lambda,\vec{t})$, $w^*(\lambda,\vec{t})$ – функция Бейкера-Ахиезера и двойственная к ней соответственно.

При $n=0$ мы получаем обычную (коммутативную) иерархию КП (см. раздел 5), $\beta_{mo}=t_m$. При $n=1$ мы получаем конформные симметрии. При $n>1$ симметрии общего положения уже не сохраняют конечнозонную структуру решений (это легко проверяется в линейном приближении). Поэтому в данной работе мы ограничимся исследованием случая $n=1$.

14.2 Тензорная функция Бейкера-Ахиезера.

Мы будем работать с обобщеным вариантом конструкции Кричевера конечнозонных решений КП (см. раздел 5). Его отличие от первоначальной версии состоит в следующем.

Во-первых, действуя по аналогии с работами И.М.Кричевера и С.П.Новикова [47]- [49] мы введем в иерархию Кадомцева-Петвиашвили дополнительное дискретное время t_0. Для этого, также, как и в [47]- [49], мы будем рассматривать алгебраические кривые с парой отмеченных точек P_0 и ∞ (асимметрия в обозначениях связана с тем, что в наши конструкции эти точки входят неравноправно) и фиксированым локальным параметром $z=1/\lambda$ в окрестности ∞.

Во-вторых, также, как и в [47], мы будем рассматривать тензорные функции Бейкера-Ахиезера. Отметим, что до тех пор, пока мы работаем с изоспектральными симметриями, отличие скалярных функций

Бейкера-Ахиезера от тензорных не принципиально, поскольку их можно отождествить умножением на постоянный мероморфный тензор. Однако, как только мы начинаем деформировать спектральную кривую, это различие проявляет себя, и, в частности, мы получаем зависящий от тензорного веса центральный заряд при действии симметрий на τ-функцию.

Пусть Γ – алгебраическая кривая рода g с парой отмеченных точек P_0 и ∞ и локальным параметром $z = 1/\lambda$ в окрестности ∞. Пусть $D = \sum n_m \gamma_m$ дивизор общего положения степени $(2j-1)(g-1)$. Тогда ему соответствует оснащенное голоморфное расслоение $\mathbb{B}_j(t_0, \vec{t}, D)$, локальные голоморфные сечения которого – мероморфные на $\Gamma \backslash \infty$ j-формы $f(\gamma)$ такие, что

1) В точке γ_m $f(\gamma)$ имеет ноль порядка не ниже n_m если $n_m \geq 0$ и полюс порядка не выше $-n_m$ если $n_m < 0$;

2) В точке P_0 $f(\gamma)$ имеет ноль порядка не ниже $t_0 - 1$ если $t_0 \geq 1$ и полюс порядка не выше $1 - t_0$ если $t_0 < 1$;

3) Функция $f(z)(z)^{t_0}(dz)^{-j} \exp(-\sum z^{-m} t_m)$ регулярна в точке ∞.

Степень дивизора подобрана так, чтобы индекс $\bar{\partial}_j$ на расслоении $\mathbb{B}_j(t_0, \vec{t}, D)$ равнялся 0, т.е. для дивизора общего положения произвольно задавая полюсную особенность $f_0(z)$ в точке ∞ мы однозначно определяем сечение f , голоморфное вне этой точки такое, что $f - f_0$ регулярно в ∞. При $\vec{t} = 0$, $t_0 = 1$ мы будем писать $\mathbb{B}_j$ вместо $\mathbb{B}_j(t_0, \vec{t}, D)$.

По определению, расслоение, сопряженное к $\mathbb{B}_j(t_0, \vec{t}, D)$ – это расслоение $1 - j$ дифференциалов $\mathbb{B}_j^*(t_0, \vec{t}, D) = \mathbb{B}_{1-j}(2 - t_0, -\vec{t}, -D)$

Тогда j-дифференциал Бейкера-Ахиезера $\psi_j(\gamma, t_0, \vec{t})$ и сопряженный к нему $(1 - j)$-дифференциал $\psi_j^*(\gamma, t_0, \vec{t})$ определяются как мероморфные сечения $\mathbb{B}_j(t_0, \vec{t}, D)$ и $\mathbb{B}_j^*(t_0, \vec{t}, D)$, соответственно, не имеющие других особенностей, кроме полюса первого порядка в ∞, т.е.

при $\gamma \to \infty$:

$$\psi_j(\gamma, t_0, \vec{t}) = z^{-t_0}(dz)^j \exp\left(\sum_{k\geq 1} z^{-k} t_k\right)(1 + O(z)),$$

$$\psi_j^*(\gamma, t_0, \vec{t}) = z^{t_0-2}(dz)^{1-j} \exp\left(-\sum_{k\geq 1} z^{-k} t_k\right)(1 + O(z)); \tag{14.8}$$

при $\gamma \to P_0$

$$\psi_j(\gamma, t_0, \vec{t}) \sim \varphi(t_0, \vec{t}) z_-^{t_0-1}(dz_-)^j,$$

$$\psi_j^*(\gamma, t_0, \vec{t}) \sim \varphi^*(t_0, \vec{t}) z_-^{1-t_0}(dz_-)^{1-j}, \tag{14.9}$$

где z_- – некоторый локальный параметр в точке P_0. (Напомним, что мероморфные сечения расслоения отвечают 1-формам с существенной особенностью).

Приведем для справки явную формулу для $\psi_j(\gamma, t_0, \vec{t})$:

$$\psi_j(\gamma, t_0, \vec{t}) = \eta(\gamma)\psi_{1/2}(\gamma, t_0, \vec{t}), \quad \text{где} \tag{14.10}$$

$$\eta(\gamma) = \left[\frac{\theta(\vec{A}(\gamma) - \vec{K})}{\theta^{(g)}(-\vec{K})E(\gamma, \infty)\sqrt{dz(\infty)}}\right]^{2j-1} \prod_k \left[\frac{E(\gamma, \gamma_k)}{E(\gamma, \infty)E(\infty, \gamma_k)dz(\infty)}\right]^{n_k},$$

$$\psi_{1/2}(\gamma, t_0, \vec{t}) = \left[\frac{E(\gamma, P_0)}{E(\gamma, \infty)E(\infty, P_0)dz(\infty)}\right]^{t_0-1} \frac{\theta(\vec{A}(\gamma) + \vec{\xi})}{\theta(\vec{\xi})E(\gamma, \infty)\sqrt{dz(\infty)}} \cdot$$

$$\cdot \exp\left(\int^{\gamma} \sum_{k\geq 1} \Omega_k t_k\right),$$

$$\theta^{(g)}(-\vec{K}) = \frac{1}{g!}\frac{d^g}{dz^g}\,\theta(\vec{A}(z) - \vec{K})\Big|_{z=0},$$

$$\vec{\xi} = (2j-1)\vec{K} + \sum n_k \vec{A}(\gamma_k) + (t_0 - 1)\vec{U}_0 + \sum_{k\geq 1} \vec{t}_k \vec{U}_k - \vec{\zeta},$$

где $E(\gamma, \gamma')$ – Прим-форма, $\vec{K}$ – вектор римановых констант (см. раздел 3) , $\vec{U}_0 = \vec{A}(P_0)$, $\vec{A}$ – преобразование Абеля (3.29) с начальной точкой

∞, $\vec{\zeta} = 0$, θ-функция Римана задается формулой (3.31). Константы интегрирования в (14.10) фиксируются условием $\int^\gamma \Omega_k = 1/z^k + o(1)$. При $\gamma \to \infty$, $\eta(\gamma) \sim (dz)^{j-1/2}$.

Полагая $\vec{\zeta} \neq 0$ в (14.10) получаем функцию Бейкера-Ахиезера с ненулевыми характеристиками: $\psi_j(\gamma + a_k, t_0, \vec{t}) = \psi_j(\gamma, t_0, \vec{t})$, $\psi_j(\gamma + b_k, t_0, \vec{t}) = \psi_j(\gamma, t_0, \vec{t}) \cdot \exp(2\pi i \zeta_k)$ где a_k and b_k – базисные циклы.

Кроме целых j можно рассматривать и полуцелые $j \in \mathbb{Z}/2$. Интересен случай $j = 1/2$, когда дивизор вообще отсутствует и функции Бейкера-Ахиезера параметризуются вектором характеристик $\vec{\zeta}$ (случай спинорных функций Бейкера-Ахиезера играл выделенную роль в работе [49]). Отметим, что в отличие от [47]- [49] мы не предполагаем, что дивизор сосредоточен в точках P_0 и ∞.

14.3 Деформации римановых поверхностей и задача Римана.

Нам понадобится следующая (слегка адаптированная к нашей задаче) геометрическая конструкция из книги М.Шиффера и Д.К.Спенсера [83]. Рассмотрим пространство троек (Γ, ∞, z), где Γ – гладкая алгебраическая кривая, ∞ – отмеченная точка на ней и z – локальный параметр в окрестности этой точки. Пусть S – некоторый малый контур, окружающий точку ∞, $U(S)$ – трубчатая окрестность S. Тогда каждое голоморфное векторное поле на $U(S)$ порождает инфинитезимальный сдвиг на пространстве троек (Γ, ∞, z).

Пусть $v = \tilde{v}(z)d/dz$ – голоморфное векторное поле в области $U(S)$, $\exp(\beta v)\gamma_-$ обозначает сдвиг точки γ_- вдоль поля v за время β.

Чтобы задать деформацию, представим Γ как результат склейки двух частей Γ_+ и Γ_-, где Γ_+ получается из Γ выбрасыванием малой окрестности ∞, Γ_- – несколько большая окрестность ∞ и выполнено: $U(S) = \Gamma_+ \bigcap \Gamma_-$. Тогда продеформированная кривая Γ'_β получается как результат склейки тех же частей Γ_+ и Γ_-, но по измененному

правилу. Если кривая Γ получалась приклейкой $\gamma_+ \to \gamma_-$, $\gamma_+ \in \Gamma_+$, $\gamma_- \in \Gamma_-$, то для получения кривой Γ'_β точку γ_+ будем приклеивать к точке $\exp(\beta v)\gamma_-$. Поскольку старая и новая кривая состоят из одних и тех же частей, то тождественное отображение $\Gamma_+ \to \Gamma_+$, $\Gamma_- \to \Gamma_-$ задает естественное отображение $E : \Gamma'_\beta \to \Gamma$ с разрывом на контуре S, выделенная точка и локальный параметр переносятся этим отображением. Если на Γ был задан некоторый набор точек вне окрестности ∞, он также естественно переносится на продеформированную кривую.

В случае бесконечно малой деформации ($\beta << 1$) кривой с локально гладким j-тензором Δ на ней новый j-тензор Δ' на поверхности Γ' удобно интерпретировать как тензор на Γ с разрывом на контуре S таким, что выполнено соотношение

$$\Delta'_+ - \Delta'_- = \beta(L_v\Delta + o(1)), \tag{14.11}$$

где Δ'_+ и Δ'_- – граничные значения Δ' на S, L_v – производная Ли, и Δ - форма на контуре до деформации. Тем самым вычисление вариации тензорного поля свелось к решению задачи Римана.

14.4 Ядро Коши-Бейкера-Ахиезера.

Мы свели вычисление варици тензорного поля к решению задачи Римана. При этом будем предполагать, что индекс этой задачи равен 0. Как известно, решение задачи Римана дается формулой

$$\Delta'(\gamma) = \Delta(\gamma) + \oint_S \omega(\gamma, \gamma')\beta L_v\Delta(\gamma'), \tag{14.12}$$

где $\omega(\gamma, \gamma')$ – подходящее ядро Коши. В частности, таким способом несложно доказывается формула из книги [83] для вариации матрицы Римана при описанной выше деформации

$$\frac{\partial B_{mn}}{\partial \beta} = \oint_S \tilde{v}(z)\tilde{w}_m(z)\tilde{w}_n(z)dz, \tag{14.13}$$

где $\tilde{w}_m(z)dz$, $m = 1, \ldots, g$ – базис голоморфных 1-форм.

Для вычисления вариаций функции Бейкера-Ахиезера, отвечающей расслоениию $\mathbb{B}_j(t_0, \vec{t}, D)$, при деформациях спектральной кривой нам понадобится следующее ядро $\omega_j(\lambda, \mu, t_0, \vec{t})$, введенное А.Ю.Орловым и автором в работе [111], которое мы будем называть **ядром Коши-Бейкера-Ахиезера**. Оно однозначно определяется следующими свойствами.

1) $\omega_j(\lambda, \mu, t_0, \vec{t})$ – j-форма по переменной λ и $(1-j)$-форма по переменной μ.

2) При фиксированном μ ядро $\omega_j(\lambda, \mu, t_0, \vec{t})$, рассматриваемое как функция λ – мероморфное сечение расслоения $\mathbb{B}_j(t_0, \vec{t}, D)$ с единственным полюсом в точке $\lambda = \mu$.

3) При фиксированном λ ядро $\omega_j(\lambda, \mu, t_0, \vec{t})$, рассматриваемое как функция μ – мероморфное сечение расслоения $\mathbb{B}^*_j(t_0, \vec{t}, D) = \mathbb{B}_{1-j}(2 - t_0, -\vec{t}, -D)$ с единственным полюсом в точке $\mu = \lambda$.

4) При $\lambda \to \mu$

$$\omega_j(\lambda, \mu, t_0, \vec{t}) = \frac{1}{2\pi i} \frac{(d\lambda)^j (d\mu)^{1-j}}{\mu - \lambda} + O(1) \tag{14.14}$$

Существование и единственность такого ядра для дивизоров общего положения доказывается достаточно стандартным подсчетом размерностей в духе работ [117], [143]. Оказывается, что оно может быть задано простой явной формулой.

Лемма 14.1 *Ядро Коши-Бейкера-Ахиезера, построенное по расслоению* $\mathbb{B}_j(t_0, \vec{t}, D)$ *записывается как*

$$\omega_j(\lambda, \mu, t_0, x, y, t, \ldots) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mp\infty}^{x} \psi_j(\lambda, t_0, x', y, t, \ldots) \psi^*_j(\mu, t_0, x', y, t, \ldots) dx', \tag{14.15}$$

где предел интегрирования выбирается из условия сходимости интеграла.

Замечание. Если $\mathrm{Im}p_x(\lambda) \neq \mathrm{Im}p_x(\mu)$ (определение функций квазиимпульса смотри в разделе 11), то предел интегрирования в (14.15) фиксируется однозначно. На линии $\mathrm{Im}\, p_x(\lambda) = \mathrm{Im}\, p_x(\mu)$ происходит "переброс" предела интегрирования, и корректность определения в этом случае обеспечивается соотношением ортогональности

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_j(\lambda, t_0, x', y, t, \ldots)\psi_j^*(\mu, t_0, x', y, t, \ldots)dx' = 0 \text{ при } \mathrm{Im}\, p_x(\lambda) = \mathrm{Im}\, p_x(\mu), \quad \lambda \neq \mu. \tag{14.16}$$

(Его доказательство приведено, например, в [112] см. формулу (3.1.7)).

Доказательство Леммы 14.1. Рассмотрим производную по x формы $\omega_j(\lambda, \mu, t_0, x, y, t, \ldots)$. Непосредственно из определения видно, что при фиксированном μ эта j-форма по λ – мероморфное сечение расслоения $\mathbb{B}_j(t_0, \vec{t}, D)$ с единственным полюсом 1 порядка в ∞, а при фиксированном λ – мероморфное сечение двойственного расслоения, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial x}\omega_j(\lambda, \mu, t_0, x, y, t, \ldots) = c\psi_j(\lambda, t_0, x, y, t, \ldots)\psi_j^*(\mu, t_0, x, y, t, \ldots) \tag{14.17}$$

где c – некоторая константа. Устремляя одновременно λ и μ к ∞ получаем, что $c = 1$. При $\mathrm{Im}p_x(\lambda) \neq \mathrm{Im}p_x(\mu)$ константа интегрирования фиксируется убыванием на бесконечности в одном из направлений, на линию $\mathrm{Im}p_x(\lambda) = \mathrm{Im}p_x(\mu)$ формула продолжается по непрерывности.

Замечание. Представление для ядра Коши на римановой поверхности, аналогичное (14.15) было впервые получено в [48]. В наших обозначениях оно отвечает случаю, когда $\vec{t} = 0$, а суммирование ведется по дискретной переменной t_0. Действительно, легко проверяется, что $\psi_j(\gamma, t_0 + 1, \vec{t}) = (\partial/\partial t_1 - v_j(t_0, \vec{t}))\psi_j(\gamma, t_0, \vec{t})$ и $\psi_j^*(\gamma, t_0, \vec{t}) = (\partial/\partial t_1 + v_j(t_0, \vec{t}))\psi_j^*(\gamma, t_0 + 1, \vec{t}), v_j(t_0, \vec{t}) = \partial/\partial t_1 \ln(\varphi(t_0, \vec{t}))$.

Тем самым, мы получаем следующее представление для ядра Коши-Бейкера-Ахиезера

$$\omega_j(\gamma, \gamma', t_0, \vec{t}) = \frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{-\infty}^{t_0} \text{ или } \sum_{t_0+1}^{+\infty}\right)\psi_j(\gamma, t_0' - 1, \vec{t})\psi_j^*(\gamma', t_0', \vec{t}). \tag{14.18}$$

Нам также понадобится ядро Коши на $\Gamma = \mathbb{CP}^1$, $P_0 = 0$, которое мы будем называть "вакуумным" ядром.

$$\omega_j^0(z, z', t_0, \vec{t}) = (z/z')^{1-t_0}(z'-z)^{-1}(dz)^j(dz')^{1-j}/2\pi i. \tag{14.19}$$

14.5 Деформации спектральных кривых и дополнительные симметрии КП.

Теперь мы уже можем доказать основную теорему раздела.

Теорема 14.1 *Пусть* Γ *– алгебраическая кривая рода* g *с парой отмеченных точек* ∞ *и* P_0*, локальным параметром* $z = 1/\lambda$ *в окрестности* ∞ *и контуром* S*, окружающим точку* ∞*. Пусть* $D = \sum n_m\gamma_m$ *дивизор общего положения степени* $(2j-1)(g-1)$*. Пусть в окрестности контура* S *задано голоморфное векторное поле* v*. Рассмотрим деформацию спектральных данных, порождаемую полем* v *при помощи конструкции Шиффера-Спенсера (см. пункт 14.3). Тогда вариации соответствующего решения уравнения КП и функции Бейкера-Ахиезера равны соответственно:*

$$\partial\chi(t_0, \vec{t})/\partial\beta = 2\partial_x \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\mu\in S} (L_v\psi_j(t_0, \vec{t}))\psi_j^*(t_0, \vec{t}), \tag{14.20}$$

$$\partial\psi_j(\lambda, t_0, \vec{t})/\partial\beta = \oint\limits_{\mu\in S} (L_v\psi_j(\mu, t_0, \vec{t}))\omega_j(\lambda, \mu, t_0, \vec{t}), \tag{14.21}$$

где L_v *– производная Ли вдоль поля* v*, ориентация на контуре* S *выбрана так, чтобы точка* ∞ *лежала вне него. В формуле (14.21) отождествление точек исходной и продеформированоой поверхности производится при помощи отображения* E *пункта 14.3.*

Доказательство. Формула (14.21) непосредственно следует из (14.11), (14.12). Разлагая (14.15) при $\lambda \to \infty$ получаем

$$\omega_j(z, \mu, t_0, x, y, t, \ldots) \sim \frac{1}{2\pi i\lambda}\psi_j(\lambda, t_0, x, y, t, \ldots)\psi_j^*(\mu, t_0, x, y, t, \ldots). \tag{14.22}$$

Учитывая (2.29), получаем (14.20), что и завершает доказательство.

Формула (14.20) в точности совпадает с (14.5) (разница в знаке обусловлена различем в нормировках сопряженной функции. Тем самым мы доказали, что симметрии, задаваемые конструкцией Шиффера-Спенсера, в точности совпадают с дополнительными симметриями КП, определенными ранее.

Формула (14.21) дает нам решение задачи Кричевера-Новикова о вычислении действия алгебры векторных полей на функцию Бейкера-Ахиезера [47].

Замечание. Доказательство формулы (14.15), приведенное выше, легко переносится на случай $\bar\partial$-проблемы и убывающих потенциалов на конечнозонном фоне. Тем самым мы получаем удобный инструмент для вычислений в теории возмущений.

Замечание. Вариация ψ_j с помощью ядра (14.15) дает нам аналитическую интерпретацию инфинитезимального метода одевания Захарова-Шабата, причем этот подход работает как в убывающем на бесконечности, так и в конечнозонном случае.

Теорема 14.2 *Коммутатор потоков (14.20), а также (14.21) совпадает с коммутатором векторных полей v, если выполнены следующие естественные предположения:*

1) *Спектральный параметр $\lambda = 1/z$, точка P_0 и дивизор D переносятся отображением E, описанным в пункте 14.3.*

2) *Существенная особеннось волновой функции ψ_j и сопряженной к ней ψ_j^* остаются неизменными при действии полей v и задаются формулой (14.8).*

3) *При сравнении волновых функций на различных поверхностях связность задается отображением E пункта 14.3.*

4) *Поля v считаются независимыми от β функциями переменной z.*

Доказательство следует непосредственно из геометрической конструкции.

В заключение вычислим действие неизоспектральных симметрий на конечнозонных решениях КдФ. Алгебра деформаций, сохраняющих гиперэллиптическую структуру, порождается элементами $L_j = l_{2j} = 2(-1)^j E^{j+1}$, $j \geq -1$. В данном случае конструкция Шиффера-Спенсера означает, что бесконечно удаленная точка гиперэлиптической спектральной кривой и локальный параметр в бесконечности остаются на месте, а конечная часть, включая дивизор и точки ветвления, сдвигаются векторным полем на накрываемой плоскости $\mathbb{C}$, т.е. мы имеем следующее преобразование спектральных данных:

$$\frac{\partial E_s}{\partial \beta_j} = 2(-1)^j E_s^{j+1}, \frac{\partial \gamma_s}{\partial \beta_j} = 2(-1)^j \gamma_s^{j+1}. \tag{14.23}$$

При $j = -1$ мы имеем сдвиг потенциала на константу, что в точности отвечает отвечает преобразованию Галилея. Основное свойство рекурсионного оператора – соотношение

$$\partial_x(\Lambda - 4E)(\psi_1(E,x)\psi_2(E,x)) = 0, \tag{14.24}$$

где $\psi_1(E,x)$ $\psi_2(E,x)$ – собственные фукции оператора Шредингера

$$[\partial_x^2 + u(x)]\psi_{1,2}(E,x) = E\psi_{1,2}(E,x).$$

Следовательно, опрератор $\left(\frac{-\Lambda}{4}\right)$ действует на произведение $\psi(\vec{t})\psi^*(\vec{t})$ умножением на $-E$, и векторному полю $L_j = 2(-1)^j E^{j+1}$ отвечает j-ый поток (14.3), что и завершает вычисление для КдФ.

14.6 Грассманнианы и пространства флагов.

До сих пор мы вычисляли действие неизоспектральных симметрий на решениях уравнения КП и волновых функциях. При этом мы получали

действие аглгебры векторных полей на окружности (алгебры Вирасоро с нулевым центральным зарядом). Вычислим теперь действие этих симметрий на τ-функцию КП.

Понятие τ-функции было введено в работах Киотской группы (см. работы [102], [94] и ссылки в них). Мы будем использовать определение τ-функции, предложенное в работе Г.Сигала и Дж.Вилсона [147], со следующими модификациями.

Во-первых, функция Бейкера-Ахизера у нас будет тензором по спектральному параметру произвольного целого или полуцелого веса. Такие грассманнианы появлялись, в частности, в работе [82].

Во-вторых, у нас волновая функция зависит от дополнительного дискретного парарметра t_0, поэтому вместо точки грассманниана мы будем иметь элемент бесконечномерного **пространства флагов**.

Пусть S достаточно малый контур в окрестности ∞, не содержащий точек дивизора внутри, $z = 1/\lambda$, как и ранее – локальный параметр в окрестности ∞. Обозначим $H = \mathcal{L}^2(S)$ пространство квадратично интегрируемых j-форм на S. При каждом t_0 мы имееем естественное разложение

$$H = H_+(t_0) \oplus H_-(t_0),$$

где $H_+(t_0)$ и $H_-(t_0)$ обозначают подпространства, порожденные базисными элементами $z^i(dz)^j$ с $i < -t_0$ с $i \geq -t_0$, соотвественно. Пространство флагов Fl_j определяется как множество стратифицированных семейств подпространств $W = \{W(t_0)\}$ таких, что $W(t_0) \subset W(t_0 + 1)$ для всех t_0, все ортогональные проекции $P_+(t_0) : W(t_0) \to H_+(t_0)$ – фредгольмовы операторы индекса 0, все проекции $P_-(t_0) : W(t_0) \to H_-(t_0)$ – компактные операторы. Каждое из подпространств $W(t_0)$ является элементом соответствующего грассманниана. Пусть $w = \{e_k\}$ – такой базис в H, что $w(t_0) = \{e_k \mid k < -t_0\}$ – базис в $W(t_0)$ при всех t_0.

Обозначим $w_+(t_0) = P_+(t_0)w(t_0), w_-(t_0) = P_-(t_0)w(t_0)$, и $A(t_0) =$

$P_-(t_0)P_+^{-1}(t_0)$. Оператор w удобно записывать в виде блочной матрицы, столбцы которой соответствуют лорановским разложениям элементов e_k:

$$w = \begin{bmatrix} w_+ \\ w_- \end{bmatrix}, \ A(t_0) = w_-(t_0)(w_+(t_0))^{-1}. \tag{14.25}$$

По заданной функции Бейкера-Ахиезера $\psi_j(\gamma, t_0, \vec{t})$ соответствующее подпространство $W(t_0)$ определяется как множество элементов $f(\gamma) \in H$, подолжающихся до голоморфных сечений расслоения $\mathbb{B}_j(t_0, \vec{t}, D)$, над областью Γ_+. Тем самым $\psi_j(\gamma, t_0, \vec{t})$, рассматриваемая при всех t_0, порождает элемент пространства флагов. Наоборот, если известно, что точка пространства флагов построена по функции Бейкера-Ахиезера, то эта функция однозначно (для времен общего положения) восстанавливается как единственная функция z, лежащая в $W(t_0)$ при при заданном t_0 и имеющая асимптотику на бесконечности (14.8).

Пусть теперь $W \in \mathrm{Fl}_j$, $W = \{W(t_0)\}$, и g – некоторый оператор на пространстве H из группы $GL(\infty)$. Тогда g естественно действует на пространстве флагов: $g^{-1}W = \{g^{-1}W(t_0)\} \in \mathrm{Fl}_j$, где пространство $g^{-1}W(t_0)$ порождается j-формами $gf(z)$ такими, что $f(z) \in W(t_0)$. Непрерывные функции переменной z на контуре S действуют на элементах H (которые, по определению, есть просто j-тензоры на S) обычным умножением, векторные поля на S – дифференциированием Ли вдоль этих полей. Введем также следующее обозначение $W(\vec{t}) = \exp(-\sum z^{-k}t_k)W$. (Заметим, что зависимость расслоения $\mathbb{B}_j(t_0, \vec{t}, D)$ от $\vec{t}$ порождает тривиальную динамику на пространстве флагов.)

Зафиксируем некоторое t_0. Пусть

$$g^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

– некоторое линейное преобразование H, блочное разложение g^{-1} отвечает разложению H в прямую сумму $H = H_+(t_0) \oplus H_-(t_0)$, $a = (g^{-1})_{++}$,

$b = (g^{-1})_{+-}$, $c = (g^{-1})_{-+}$, $d = (g^{-1})_{--}$). Тогда τ-функция $\tau_W(t_0, g)$ определяется формулой:

$$\tau_W(t_0, g) = (\det(1 + a^{-1}bA))\tau_W(t_0, 1),\ \tau_j(t_0, \vec{t}) = \tau_W(t_0, \exp(\sum z^{-k}t_k)). \tag{14.26}$$

Не существует естественного выбора для константы $\tau_W(1)$ (для краткости там, где это не существенно, мы будем опускать зависимость от t_0 в формулах) и τ_W определена с точностью до постоянного множителя. Это является следствием ненулевой кривизны детерминантного расслоения. Можно "руками" положить $\tau_W(1) = 1$ как в [147], однако более естественно считать, что при деформациях римановой поверхности эта константа меняется в соответствии с (14.26).

Для произведения пары операторов имеет место закон композиции

$$\tau_W(g \cdot g_1) = \tau_W(g) \cdot \tau_{(g^{-1}W)}(g_1)/\tau_{(g^{-1}W)}(1) \cdot \rho(g, g_1), \tag{14.27}$$

где коцикл $\rho(g, g_1)$ определяется формулой

$$\rho(g, g_1) = \det\{g_{++}(g_1)_{++}(gg_1)^{-1}_{++}\}. \tag{14.28}$$

Как мы уже отмечали, точка пространства флагов фактически задается набором операторов $A_j(t_0)$ (14.25). Оказывается, что эти операторы явно выписывются в терминах ядра Коши

$$A_j(t_0)f(\lambda) = \oint\limits_{\mu \in S} (\omega_j(\lambda, \mu, t_0, \vec{0}) - \omega_j^0(\lambda, \mu, t_0, \vec{0}))f(\mu) \tag{14.29}$$

где $f(\lambda)$ – некоторый элемент H, $\omega_j^0(z, z', t_0, \vec{t})$ – вакуумное ядро Коши (14.19), ориентация на S выбрана так, что мы обходим его по часовой стрелке, если смотреть со стороны бесконечности. Действительно, оператор (14.29) проектирует $H_-(t_0)$ в 0, а каждому элементу $f_+ \in H_+(t_0)$ ставит в соответствие элемент $f_- \in H_-(t_0)$, такой, что $f_+ + f_- \in W(t_0)$, а это в точности и есть оператор $A_j(t_0)$.

Для "подкрученного" пространства флагов $W(\vec{t})$ формула для $A_j(t_0,\vec{t})$ приобретает вид

$$A_j(t_0,\vec{t})f(\lambda)=\oint \exp(-\sum(\lambda^n-\mu^n)t_n)(\omega_j(\lambda,\mu,t_0,\vec{t})-\omega_j^0(\lambda,\mu,t_0,\vec{t}))f(\mu). \tag{14.30}$$

Операторы (14.29), (14.30) компактны, поскольку это интегральные операторы с гладким ядром.

Введем понятие вершинного оператора. Пусть точки z, u лежат в окрестности точки ∞. Положим

$$X_j(z)=\exp(\sum z^{-m}t_m-t_0\ln z)\cdot\exp(-\sum z^n n^{-1}\partial/\partial t_n-\partial/\partial t_0)(dz)^j$$

$$X_j^*(z)=\exp(t_0\ln z-\sum z^{-m}t_m)\cdot\exp(\sum z^n n^{-1}\partial/\partial t_n+\partial/\partial t_0)(dz)^{1-j}$$

Операторы $X_j(z)$, $X_j^*(u)$ коммутируют как свободные фермионные поля на сфере:

$$X_j(z)X_j^*(u)+X_j^*(u)X_j(z)=-\delta(z-u)du,$$

$$X_j(z)X_j(u)+X_j(u)X_j(z)=0,$$

$$X_j^*(z)X_j^*(u)+X_j^*(u)X_j^*(z)=0,$$

Для нас важны следующие свойства вершинного опреатора:

1) С их помощью волновая функция выражается через τ-функцию (см., например, [94]).

$$\psi_j(\lambda,t_0,\vec{t})=X_j(\lambda)\tau_j(t_0+1,\vec{t})/\tau_j(t_0,\vec{t}),$$

$$\psi_j^*(\lambda,t_0,\vec{t})=X_j^*(\lambda)\tau_j(t_0-1,\vec{t})/\tau_j(t_0,\vec{t}). \tag{14.31}$$

2) Формула, аналогичная (14.31), имеет место и для ядра Коши-Бейкера-Ахиезера.

$$X_j(z)X_j^*(u)\cdot\tau_j(t_0,\vec{t})=-2\pi i\omega_j(z,u,t_0,\vec{t})\tau_j(t_0,\vec{t}). \tag{14.32}$$

Ее доказательство следует из соотношения

$$X_j(\lambda)X_j^*(\mu)\cdot\tau_W(g) = -2\pi i\omega_j^0(\lambda,\mu,t_0,\vec{t})\cdot\tau_W(g(1-k/\lambda)/(1-k/\mu)),$$

где $g = \exp\sum k^m t_m$, композиционой формулы (14.27), явной формулы для опреоратора A (14.29) и следующего наблюдения: если g_1 – оператор умножения на функцию $(1-k/\lambda)/(1-k/\mu)$ то произведение блоков $a^{-1}b$, входящее в формулу (14.26) – оператор ранга 1, поэтому $\det(1+a^{-1}bA) = 1+\mathrm{tr}(a^{-1}bA)$

3) Действие как изоспектральных, так и неизоспектральных симметрий на τ-функцию как коэффициенты разложений вблизи диагонали следующего оператора (см. [138]):

$$:X_j(z)X_j^*(u):=$$

$$=\exp\left(\sum(z^{-m}-u^{-m})t_m - t_0\left(\ln\frac{z}{u}\right)\right)(dz)^j(du)^{1-j}\exp\left(-\sum\left(\frac{z^n}{n}-\frac{u^n}{n}\right)\frac{\partial}{\partial t_n}\right).$$

Действие деформаций Шиффера-Спенсера вычисляется по формуле (14.29)

$$\partial\ln\tau_j(t_0,\vec{t})/\partial\beta = \oint_S L_v(\lambda)\omega_j^{\mathrm{reg}}(\lambda,\mu,t_0,\vec{t})\mid_{\lambda=\mu}, \qquad (14.33)$$

где

$$\omega_j^{\mathrm{reg}}(\lambda,\mu,t_0,\vec{t}) = \omega_j(\lambda,\mu,t_0,\vec{t}) - \omega_j^0(\lambda,\mu,t_0,\vec{t}).$$

Сопоставляя (14.32) с (14.33) и подбирая подходящую линейную комбинацию операторов $:X_j(z)X_j^*(u):$ по аналогии с работой [138]) получаем

$$\partial\tau_j(t_0,\vec{t})/\partial\beta_m = L_m^j\tau_j(t_0,\vec{t}) \qquad (14.34)$$

где время β_m отвечает симметрии, порождаемой векторным полем $v = \lambda^{m+1}d/d\lambda$,

$$L_m^j = \sum(kt_k\partial_{k+m} + \frac{1}{2}(\partial_k\partial_{m-k})) + (t_0 - 2j + (j-\frac{1}{2})(m+1))\partial_m,\ m>0,$$

$$L_0^j = \sum kt_k\partial_k + \frac{1}{2}(t_0 - 2j)^2 + (j - 1/2)(t_0 - 2j), \tag{14.35}$$

$$L_m^j = \sum(kt_k\partial_{k+m} + \frac{1}{2}k(m-k)t_{-k}t_{k-m}) - m(t_0 - 2j + (j - \frac{1}{2})(m+1))t_{-m},\ m < 0.$$

Здесь $\partial_k = \partial/\partial t_k$ и все индексы считаются положительными.

Операторов L_m^j образуют алгебру Вирасоро с центральным зарядом $c_j = 6j^2 - 6j + 1$. Формулы (14.35) называются формулами Шугавары и они дают явную реализацию действия алгебры Вирасоро на полубесконечных формах, использованного в работах Б.Л.Фейгина, Д.Б.Фукса [75], А.А.Бейлинсона и В.В.Шехтмана [88], М.Л.Концевича [41].

Вычислим теперь алгебро-геометрическую τ-функцию для пространства флагов j-форм в явном виде. Для грассманнианов с $j = 0$ алгебро-геометрическая τ-функция обсуждалась в ряде работ, включая [102], [147].

До сих пор τ-функция была определена с точностью до умножения на произвольную функцию дискретной переменной t_0. Чтобы убрать эту неопределенность, наложим следующее дополнительное условие

$$\tau_j(t_0 + 1, \vec{t})/\tau_j(t_0, \vec{t}) = \varphi(t_0, \vec{t}), \tag{14.36}$$

$\varphi(t_0, \vec{t})$ определяется формулой (14.9). Аналогичное условие на вакуумное среднее использовалось в работе И.М.Кричевера и С.П.Новикова [49].

Воспользуемся формулами (14.31). Сопоставляя с (14.10) получаем

$$\tau_j(t_0 + 1, \vec{t}) =$$

$$= \exp\left\{\tfrac{1}{2}\left(\textstyle\sum_1^\infty Q_{ik}t_it_k + g_2t_0^2 + 2t_0\sum_1^\infty(Q_{0k} - q_{0k})t_k\right) + \sum_1^\infty h_kt_k + g_1t_0 + g_0\right\}\cdot$$

$$\cdot\theta\left\{(2j-1)\vec{K} + \sum n_k\vec{A}(\gamma_k) + t_0\vec{U}_0 + \textstyle\sum_{k\geq 1} t_k\vec{U}_k - \vec{\zeta} \mid B_{mn}\right\}, \tag{14.37}$$

где члены $Q_{0k} - q_{0k}$ and h_k определяются как коэффициенты в разложениях функций

$$\ln\{(zE(z,P_0)/(E(z,\infty)E(\infty,P_0)dz(\infty))\} = -\sum(Q_{0k} - q_{0k})z^k/k,$$

и

$$\ln\eta = -\sum h_k z^k/k$$

соответственно. Члены g_2, g_1 определяются формулой (14.36), g_0 – произвольная константа до тех пор пока мы не вариируем Γ.

Замечание. Можно выбрать локальные парметры в точках ∞ и P_0 так, чтобы $g_1 = g_2 = 0$. При $j = 1/2$ $g_1 \equiv 0$ и один из двух локальных парметров можно выбрать произвольно.

14.7 Вариации геометрических объектов.

Построенная выше τ- функция $\tau(t_0, \vec{t}|\mathcal{G})$ зависит от двух групп переменных – времен t_0, $\vec{t}$ и "данных рассеяния" $\mathcal{G}$ – алгебраической кривой Γ, пары отмеченных точек ∞, P_0, локального параметра z в окрестности ∞, базиса циклов на Γ. По этим данным вычисляются матрица Римана B_{mn}, коэффициенты Q_{ik}, $\vec{U}_k$, $\vec{\zeta}$, h_k, g_2, g_1, g_0

Мы можем вычислить вариацию τ-функции двумя способами. С одной стороны, деформируя данные рассеяния с помощью конструкции Шиффера-Спенсера, мы дифференциируем по группе аргументов $\mathcal{G}$, не трогая при этом времена t_0, $\vec{t}$. С другой стороны, мы можем вычислить вариацию τ-функции с помощью формул (14.35), при этом мы дифференциируем по переменным $\vec{t}$, не трогая аргументы $\mathcal{G}$. Согласно результатам данного раздела, эти вариации совпадают.

Приравнивая эти вариации и пользуясь (14.37), а также уравнением теплопроводности на θ-функцию Римана, получаем следующий набор соотношений (для определенности ограничимся случаем 1/2-форм, т.е. $j = 1/2$).

При $n > 0$:

$$\partial g_0/\partial\beta_n = \sum_1^{n-1} Q_{m,n-m}/2, \tag{14.38}$$

$$\partial Q_{mk}/\partial\beta_n = mQ_{n+m,k} + kQ_{m,n+k} + \sum_1^{n-1} Q_{l,m}Q_{n-l,k}, \tag{14.39}$$

$$\partial\vec{\zeta}/\partial\beta_n = 0, \tag{14.40}$$

$$\partial\vec{U}_k/\partial\beta_n = k\vec{U}_{n+k} + \sum_1^{n-1} \vec{U}_m Q_{n-m,k}, \tag{14.41}$$

$$\partial\vec{U}_0/\partial\beta_n = \vec{U}_n + \sum_1^{n-1} (Q_{0,n-m} - q_{0,n-m})\vec{U}_m, \tag{14.42}$$

$$\partial(Q_{0,k} - q_{0,k})/\partial\beta_n = Q_{kn} + k(Q_{0,k+n} - q_{0,k+n}) + \sum (Q_{0,l} - q_{0,l})Q_{k,n-l}, \tag{14.43}$$

$$\partial g_2/\partial\beta_n = \sum (Q_{0,k} - q_{0,k})(Q_{0,n-k} - q_{0,n-k}) + 2(Q_{0,n} - q_{0,n}), \tag{14.44}$$

$$\partial B_{kl}/\partial\beta_n = 2\pi i \sum_1^{n-1} (\vec{U}_m)_k (\vec{U}_{n-m})_l. \tag{14.45}$$

При $n = 0$:

$$\partial Q_{mn}/\partial\beta_0 = (m+n)Q_{mn}, \tag{14.46}$$

$$\partial\vec{U}_k/\partial\beta_0 = k\vec{U}_k, \tag{14.47}$$

$$\partial(Q_{0,k} - q_{0,k})/\partial\beta_0 = k(Q_{0,k} - q_{0,k}), \tag{14.48}$$

$$\partial g_2/\partial\beta_0 = 1. \tag{14.49}$$

Остальные производные равны 0. При $n < 0$

$$\partial Q_{kl}/\partial\beta_n = kl\delta_{k+n+l,0} + k\vartheta(k+n)Q_{n+k,l} + l\vartheta(l+n)Q_{k,n+l} \tag{14.50}$$

$$\partial\vec{U}_k/\partial\beta_n = k\vec{U}_{n+k}\vartheta(k+n) \tag{14.51}$$

$$\partial(Q_{0,k} - q_{0,k})/\partial\beta_n = k\delta_{k+n,0} + k(Q_{0,k+n} - q_{0,k+n})\vartheta(k+n) \tag{14.52}$$

Остальные производные равны 0. Здесь $\vartheta(k) = 1$ при $n > 0$, и $= 0$ при $n \le 0$.

Мы видим, что в формулы (14.37), (14.34), (14.35) в неявной форме содержат в себе большой набор соотношений для вариаций геометрических объектов при деформациях спектральной кривой.

15 Неизоспектральные симметрии уравнений Уизема .

Основные результаты этого параграфа были получены автором в работах [113], [114].

В предыдущем разделе мы построили действие "положительной половины" алгебры векорных полей на окружности (алгебры полиномиальных векторных полей на прямой) на конечнозонных решениях уравнения Кортевега- де Фриза (КдФ). В этом разделе мы покажем, что построенное действие наследуется при усреднении уравнения Кортевега-де Фриза и построим действие этой алгебры на уравнениях Уизема.

15.1 Уравнения Уизема для КдФ.

В этом разделе мы будем работать с уравнением Кортевега- де Фриза в следующей нормировке:

$$u_t = \frac{1}{4}u_{xxx} - \frac{3}{2}uu_x. \tag{15.1}$$

Для начала напомним классическую процедуру усреднения для однофазных решений (подробности смотри в книге Уизема [71]). Уравнение (15.1) обладает трехпараметрическим семейством решений типа бегущей волны

$$u(x,t) = 2\wp(x - vt|g_2, g_3) - v/6. \tag{15.2}$$

где $\wp(x, |g_2, g_3)$ — $\wp$ - функция Вейерштрасса. Естественно попытаться построить асимптотические решения КдФ следущего вида:

$$u(x,t) = 2\wp(x - v(X,T)t + \phi(X,T)|g_2(X,T), g_3(X,T)) - v(X,T)/6 + \epsilon u_1, \tag{15.3}$$

где $X = \epsilon x$, $T = \epsilon t$, ϵ – некоторый малый параметр (X и T называют медленными переменными). Потребуем, чтобы поправочный член u_1 был ограниченной функцией в достаточно большой области $x \sim 1/\epsilon, t \sim 1/\epsilon$.

Тогда оказывается (см. [71]) что функции $g_2(X,T)$, $g_3(X,T)$, $v(X,T)$ удовлетворяют следующим уравнениям гидродинамического типа:

$$\frac{\partial}{\partial T}\begin{pmatrix} g_2(X,T) \\ g_3(X,T) \\ v(X,T) \end{pmatrix} = \hat{V}(g_2,g_3,v)\cdot\frac{\partial}{\partial X}\begin{pmatrix} g_2(X,T) \\ g_3(X,T) \\ v(X,T) \end{pmatrix} \tag{15.4}$$

где элементы матрицы $\hat{V}(g_2,g_3,v)$ выражаются через g_2, g_3, v в терминах полных эллиптических интегралов.

Важным свойством усредненного уравнения КдФ (15.4) (эту систему называют также уравнениями Уизема) является его диагонализуемость (возможность приведения к инвариантам Римана)

$$\frac{\partial}{\partial T}\begin{pmatrix} r_1(X,T) \\ r_2(X,T) \\ r_3(X,T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(\vec{r}) & 0 & 0 \\ 0 & v_2(\vec{r}) & 0 \\ 0 & 0 & v_3(\vec{r}) \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial X}\begin{pmatrix} r_1(X,T) \\ r_2(X,T) \\ r_3(X,T) \end{pmatrix}. \tag{15.5}$$

Отметим что для систем более чем с двумя компонентами диагонализуемость – достаточно нетривиальное свойство (согласно теореме Царева [77] для гамильтоновых систем диагонализуемость сразу же влечет интегрируемость). Причина в том, что матрицу системы нужно диагонализовать не в точке, а сразу в целой области в g_2, g_3, v – пространстве, и в размерности больше 2 для системы общего положения возникли бы дифференциально- геометрические препятствия.

Диагонализующая замена пременных (см. [71]) устроена следующим образом : инварианты Римана r_i, $i=1,2,3$ – корни многочлена $R(\lambda) = 4(\lambda+v/6)^3 - g_2(\lambda+v/6) - g_3$, $r_1 \le r_2 \le r_3$. В координатах r_i матрица $\hat{V}$ записывается следующим образом:

$$v_1(\vec{r}) = \frac{r_1+r_2+r_3}{3} - \frac{2}{3}(r_2-r_1)\frac{K(s)}{K(s)-E(s)}$$

$$v_2(\vec{r}) = \frac{r_1+r_2+r_3}{3} - \frac{2}{3}(r_2-r_1)\frac{(1-s^2)K(s)}{E(s)-(1-s^2)K(s)} \tag{15.6}$$

$$v_3(\vec{r}) = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3} + \frac{2}{3}(r_3 - r_1)\frac{(1-s^2)K(s)}{E(s)}$$

где $s^2 = (r_2 - r_1)/(r_3 - r_1)$, $E(s)$, $K(s)$ – полные эллиптические интегралы.

Процедура усреднения может рассматриваться как нелинейный аналог метода ВКБ. Для интегрируемых систем ее можно проводить и на многофазных решениях (которые могут рассматриваться как нелинейная суперпозиция решений типа бегущей волны). Для $1+1$ систем эта процедура была предложена в работах Флашки, Фореста, Мак-Лафлина [98], [104], [105] и Лакса, Левермора [125]. Вопрос о построении квазиклассических решений интегрируемых уравнений был исследован в работах С.Ю.Доброхотова и В.П.Маслова [19], [20], [21].

Как правило, усредненные системы наследуют существенные свойства исходных уравнений. В частности, для уравнений Уизема, получающихся усреднением многозонных решений КдВ, известно, что они:

1. Гамильтоновы (Б.А.Дубровин, С.П.Новиков [30], [31]. При этом возникает очень интересная во многих отношениях пуассонова структра, подробно исследованная С.П.Новиковым и учеными его школы (см. обзор [60]).

2. Они приводятся к диагональному виду (Флашка, Форест, Мак-Лафлин [98]). Как мы уже отмечали, для систем с более чем двумя компонентами существование инвариантов Римана совершенно нетривиально.

3. Эти системы обладают бесконечным набором законов сохранения, порождающих бесконечномерную коммутативную алгебру симметрий.

4. Эти уравнения могут быть проинтегрированы с помощью обобщенного преобразования годографа ([77], [78]). На самом деле С.П.Царев

показал, что любая гамильтонова $1+1$ система гидродинамического типа, допускающая инварианты Римана, интегрируема. Алгебро-геометрическая интерпретация процедуры интегрирования при помощи обобщенного преобразования годографа была предложена И.М.Кричевером [44].

В разделе 14 мы вычислили действие алгебры полиномиальных векторных полей на прямой (т.е. алгебры, порожденной элементами $l_i = \lambda^{i+1}\partial_\lambda$, $i \geq -1$) на конечнозонных решениях уравнения КдФ. Наша задача — убедиться, что это действие также наследуется при усреднении.

Одна из причин нашего интереса к данной задаче состоит в следующем:

В конце 80-х годов стало ясно, что нелинейные интегрируемые уравнения тесно связаны с конформными теориями поля. В частности, τ-функция уравнения КП совпадает с детерминантом $\bar{\partial}$-оператора, действующего в подходящем расслоении (см., например, [111]). Другой пример – одноматричная модель, статистическая сумма которой в двойном масштабном пределе совпадает с τ-функцией специального решения КдФ, выделяемого наложением условия [108]

$$l_{-1}u = 0. \tag{15.7}$$

При исследовании такого рода связей важно знать действие алгебры Вирасоро на решениях. Важные результаты, описыающие связь для двумерных топологических моделей теории поля с уравнениями Уизема были получены Б.А.Дубровиным [96] и И.М.Кричевером [120], [121], [122]. При этом решения, отвечающие топологическим моделям, инвариантны относительно действия части алгебры Вирасоро [120], [121]. В [122] было, в частности, вычислено действие алгебры Вирасоро на τ-функции уравнений Уизема для КП. В данном разделе мы вычисляем действие этих деформаций на решениях усредненного КдФ.

15.2 Дифференциалы на гиперэллиптических римановых поверхностях.

Поскольку в данном разделе мы изучаем усредненное уравнение КдФ, то слова "риманова поверхность" в данном разделе всегда будут означать гиперэллиптическую риманову поверхность рода g с вещественными точками ветвления $E_1,\dots,E_{2g+1},\infty$ и локальным параметром z в окрестности бесконечности $z = 1/\sqrt{-E}$, $\lambda = 1/z$. Канонический базис циклов мы выберем такой же, как и в разделе 3, при этом мы будем предполагать, что координата на E-плоскости точки E_0 остается постоянной, если сама поверхность Γ деформируется.

Нам понадобятся следующие 1-формы на Γ:

1. Канонический базис голоморфных дифференциалов $\omega_1, \dots, \omega_g$.

2. Мероморфные дифференциалы Ω_k , $k = 2j+1$ с одним полюсом порядка $k+1$ на бесконечности и нулевыми a-периодами:

$$\Omega_k = d(\lambda^k) + O(1) \quad \oint_{a_i} \Omega_k = 0. \tag{15.8}$$

   (При четном k Ω_k – дифференциалы мероморфных функции и порождаемая ими динамика тривиальна).

3. Многозначные дифференциалы ω_k^i, σ_k^i такие, что

$$\Delta_{a_j}\omega_k^i = \delta_{ij} d(E^k),\ \Delta_{b_j}\omega_k^i = 0, \tag{15.9}$$

$$\Delta_{b_j}\sigma_k^i = -\delta_{ij} d(E^k),\ \Delta_{a_j}\sigma_k^i = 0, \tag{15.10}$$

$$\oint_{a_j} \omega_k^i = \oint_{a_j} \sigma_k^i = 0. \tag{15.11}$$

   ЗдесьΔ_{a_i} и Δ_{b_i} – приращение дифференциалов при обходе вдоль циклов a_i и b_i соответственно. Мы введем следующие обозначения:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{b_j} \omega_k^i = (U_k^i)_j,\ \frac{1}{2\pi i}\oint_{b_j} \sigma_k^i = (V_k^i)_j \tag{15.12}$$

$$\omega_k^i = \sum_{m\geq 1} Q_{km}^i \lambda^{-m-1} d\lambda,\ \sigma_k^i = \sum_{m\geq 1} R_{km}^i \lambda^{-m-1} d\lambda, \tag{15.13}$$

Нам также понадобится следующее скалаярное произведение на пространстве дифференциалов, введенное в [95], и обобщенное в [122], [96]:

Пусть Ω_1, Ω_2 – некоторые линейные комбинации дифференциалов, перечисленных в пунктах 1-3. Тогда положим:

$$V_{\Omega_1\Omega_2} = -\mathrm{res}\ (d^{-1}\Omega_1)_+\Omega_2 + \frac{1}{2\pi i}\sum_k \oint_{a_k} \Omega_1 \oint_{b_k} \Omega_2 -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\sum_k \oint_{a_k} (d^{-1}\Delta_{b_k}\Omega_1)\Omega_2 + \frac{1}{2\pi i}\sum_k \oint_{b_k} (d^{-1}\Delta_{a_k}\Omega_1)\Omega_2. \tag{15.14}$$

Вычет в формуле (15.14) , берется в точке ∞. Скобки $(\ \ )_+$ обозначают сингулярную часть функции в точке ∞, $\lambda = 1/z$.

$$\left(\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} a_m \lambda^m\right)_+ = \sum_{m=1}^{m=+\infty} a_m \lambda^m \tag{15.15}$$

Из билинейных соотношений Римана (3.27) вытекает симметрия этого скалярного произведения:

$$V_{\Omega_1\Omega_2} = V_{\Omega_2\Omega_1}. \tag{15.16}$$

Прямое вычисление показывает, что

$$V_{\Omega_k\Omega_l} = Q_{kl} = Q_{lk}$$

$$V_{\omega_k\Omega_l} = (U_l)_k$$

$$V_{\omega_k^\alpha\Omega_l} = Q_{kl}^\alpha = \frac{1}{2\pi i}\oint_{b_\alpha} (E^k - E_0^k)\Omega_l$$

$$V_{\sigma_k^\alpha\Omega_l} = R_{kl}^\alpha = \frac{1}{2\pi i}\oint_{a_\alpha} (E^k - E_0^k)\Omega_l$$

$$V_{\omega_k\omega_l} = \frac{1}{2\pi i} B_{kl}$$

$$V_{\omega_k\omega_l^\alpha} = \frac{1}{2\pi i}(U_l^\alpha)_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{b_\alpha} (E^l - E_0^l)\omega_k \tag{15.17}$$

$$V_{\omega_k\sigma_l^\alpha} = \frac{1}{2\pi i}(V_l^\alpha)_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{a_\alpha}(E^l - E_0^l)\omega_k$$

$$V_{\omega_k^\alpha\omega_l^\beta} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{b_\alpha}(E^k - E_0^k)\omega_l^\beta$$

$$V_{\omega_k^\alpha\sigma_l^\beta} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{b_\alpha}(E^k - E_0^k)\sigma_l^\beta$$

$$V_{\sigma_k^\alpha\sigma_l^\beta} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{a_\alpha}(E^k - E_0^k)\sigma_l^\beta$$

Отметим следующее важное свойство скалярного произведения $V_{\Omega_1\Omega_2}$:

Лемма 15.1 *Если* Γ *– гиперэллиптическая кривая с точками ветвления* ∞, E_1, ..., E_{2g+1}, *то скалярные произведения* $V_{\Omega_k\Omega_l}$, $V_{\omega_k\Omega_l}$, $V_{\omega_k^\alpha\Omega_l}$, $V_{\sigma_k^\alpha\Omega_l}$, $V_{\omega_k\omega_l}$, $V_{\omega_k\omega_l^\alpha}$, $V_{\omega_k\sigma_l^\alpha}$ *выражаются через координаты точек ветвления* E_1, ..., E_{2g+1} *и точки нормировки* E_0 *в терминах гиперэллиптические интегралов (эллиптических интегралов* $g = 1$*).*

Доказательство. Воспользуемся представлением (3.6) , (3.13) раздела 3. Как мы уже отмечали, коээфициенты в формулах (3.6) , (3.13) выражаются через гиперэллиптические интегралы. Коээфициенты разложений на ∞ для ω_k, Ω_k рационально выражаются через A_{kl}, C_{kl}, E_j. Интегралы

$$\oint(E^k - E_0^k)\omega_l, \quad \oint(E^k - E_0^k)\Omega_l$$

также гиперэллиптичны. Лемма доказана.

Нам понадобятся следующие формулы для вариации дифференциалов по положению точек ветвления. Как и разделе 14 мы будем использовать две связности на пространстве гиперэллиптических римановых поверхностей. Пусть $v = P(E)\partial_E$ – полиномиальное векторное поле на E-плоскости. Ему соответствует однопараметрическое семейство сдвигов точек ветвления

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}E_j = P(E_j). \tag{15.18}$$

Определим производные 1-формы $\omega(E,\alpha)$ заданной на семействе поверхностей $\Gamma(\alpha)$ формулами

$$\partial_\alpha \omega(E,\alpha) = \left.\frac{\partial \omega(E,\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{E=\text{const}} \tag{15.19}$$

и

$$D_\alpha \omega(E,\alpha) = \left.\frac{\partial \omega(E,\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{E=\text{const}} + L_v \omega(E,\alpha), \tag{15.20}$$

Так же, как и в разделе 14 при вычислении вариаций 1-форм мы пользуемся тем, что если ω – одна из форм ω_k, Ω_{2n+1}, ω_k^i, σ_k^i, то $\partial_\alpha \omega$, – неособая форма в окрестности бесконечности, а $D_\alpha \omega$ неособа на конечной части Γ и имеет нулевые a-периоды и, тем самым, вычисление $D_\alpha \omega$ сводится к решению задачи о нахождении линейной комбинации форм Ω_{2n+1}, ω_k^i, σ_k^i, с той же особенностью на бесконечности и теми же приращениями при обходе по циклам, что и у $L_v \omega(E,\alpha)$. Несложное вычисление приводит к следующему ответу:

Лемма 15.2 *Пусть вариация гиперэллиптической римановой поверхности* Γ *порождается полем* $L_n = l_{2n} = \lambda^{2n+1}\partial_\lambda = 2(-1)^n E^{n+1}\partial_E$ *где* $n \geq -1$ *и, следовательно, отвечает сдвигу точек ветвления:*

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} E_j = 2(-1)^n E_j^{n+1}. \tag{15.21}$$

Тогда соответствующие вариации базисных дифференциалов имеют вид:

$$D_\alpha \Omega_{2l+1} = k\Omega_{2n+2l+1} + \sum_{m=1,3,\ldots,2n-1} Q_{2l+1\,m}\Omega_{2n-m}, \tag{15.22}$$

$$D_\alpha \omega_k = \sum_{m=1,3,\ldots,2n-1} (U_m)_k \Omega_{2n-m}, \tag{15.23}$$

$$D_\alpha \omega_k^\beta = 2(-1)^n k\omega_{n+k}^\beta + \sum_{m=1,3,\ldots,2n-1} Q_{km}^\beta \Omega_{2n-m}, \tag{15.24}$$

$$D_\alpha \sigma_k^\beta = 2(-1)^n k\sigma_{n+k}^\beta + \sum_{m=1,3,\ldots,2n-1} R_{km}^\beta \Omega_{2n-m}, \tag{15.25}$$

15.3 Неизоспектральные симметрии иерархии Уизема для КдФ.

Напомним определение усредненных уранений КдФ (уравнений Уизема) для g-зонного случая ([98], [125]. Поскольку мы нигде прямо не используем процедуру усреднения, мы не будем воспроизводить ее здесь, а сразу приведем окончательный ответ.

Как мы уже отмечали, конечнозонные решения КдФ параметризуются конечными точками ветвления $E_1, \ldots, E_{2g+1}$ спектральной кривой Γ и дивизором $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ на Γ. При этом точки ветвления – интегралы движения и положение дивизора определяет фазы решения.

При переходе к решениям типа нелинейной суперпозиции слабо модулированных волн точки ветвления перестают быть константами и становятся медленно меняющимися функциями координаты и времен $E_k = E_k(X, T, T_5, \ldots)$ где $X = \epsilon x$, $T = \epsilon t$, $T_5 = \epsilon t_5$, $\ldots$, $\epsilon \ll 1$. Функции X, T, T_5, $\ldots$ называются медленными временами.

Для усреднения пригоден любой полный набор интегралов движения, однако, как показывают прямые вычисления для $g = 1$ (см. [71]), в переменных E_k система приобретает простейший вид, поэтому естественно использовать их и при усреднении решений больших родов. Найденное Флашкой, Форестом, Мак-Лафлиным [98] представление усредненных уравнений имеет вид

$$\frac{\partial E_k}{\partial T_{2n+1}} = w_k^{2n+1}(E_1, \ldots, E_{2g+1}) \frac{\partial E_k}{\partial X}, \tag{15.26}$$

где

$$w_k^{2n+1}(E_1, \ldots, E_{2g+1}) = \frac{\Omega_{2n+1}(E_k)}{\Omega_1(E_k)}, \tag{15.27}$$

Ω_k – дифферецнциалы 2 рода, определенные (3.7) Мы видим, что уравнения (15.26) записаны сразу в дигональной форме (в инвариантах Римана).

Мы убедились, что усредненные уравнения наследуют симметрии, порождаемые высшими КдФ. Однако если для исходного КдФ гамильто-

нианы высших КдФ давали полный базис законов сохранения, то после усреднения это уже не так. Как показал С.П.Царев [77], [78], усредненных высших КдФ уже не хватает для интегрирования уравнений Уизема. К счастью, нас выручает то обстоятельство, что после усреднения симметрия уравнений возрастает. В частности, уравнения Уизема инвариантны относительно масштабного преобразования $X \to \alpha X$, $T \to \alpha T$, которому не отвечает никакой симметрии КдФ.

Полная иерархия уравнений Уизема, построенная С.П.Царевым [78] для $g = 1$ и Б.А.Дубровиным [96] для всех g, содержит $2g + 1$ бесконечное семейство потоков и одно конечное, где g – число фаз. Одно из этих семейств отвечает усредненным высшим КдФ, остальные $2g$ и конечное семейство не имеют непосредственных аналогов в теории КдФ и записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_k}{\partial T_n^{a_i}} &= \frac{\omega_n^i(E_k)}{\Omega_1(E_k)} \frac{\partial E_k}{\partial X}, \\
\frac{\partial E_k}{\partial T_n^{b_i}} &= \frac{\sigma_n^i(E_k)}{\Omega_1(E_k)} \frac{\partial E_k}{\partial X}, \\
\frac{\partial E_k}{\partial T_i^H} &= \frac{\omega_i(E_k)}{\Omega_1(E_k)} \frac{\partial E_k}{\partial X},
\end{aligned} \tag{15.28}$$

где $i = 1, \ldots, g$, $n = 1, 2, \ldots$. Далее мы будем использовать следующие обозначения

$$w_k^{a_i n} = \frac{\omega_n^{a_i}(E_k)}{\Omega_1(E_k)}, w_k^{b_i n} = \frac{\omega_n^{b_i}(E_k)}{\Omega_1(E_k)}, w_k^{Hn} = \frac{\omega_i(E_k)}{\Omega_1(E_k)}. \tag{15.29}$$

В этих обозначениях уравнения (15.28) имеют вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_k}{\partial T_n^{a_i}} &= w_k^{a_i n}(E_1, \ldots, E_{2g+1}) \frac{\partial E_k}{\partial X}, \\
\frac{\partial E_k}{\partial T_n^{b_i}} &= w_k^{b_i n}(E_1, \ldots, E_{2g+1}) \frac{\partial E_k}{\partial X},
\end{aligned} \tag{15.30}$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial T_i^H} = w_k^{Hn}(E_1, \ldots, E_{2g+1}) \quad \frac{\partial E_k}{\partial X},$$

У нас определены 4 семейства базисных дифференциалов Ω_k, ω_i, ω_k^i, σ_k^i, каждому из этих дифференциалов соответствует одно из уравнений (15.26), (15.30). Для упрощения дальнейших формул объединим эти семейства в одно, его члены будем нумеровать индексом β и, чтобы подчеркнуть, что мы рассматриваем сразу полную иерархию, писать сверху букву F (от слова Full). В этих обозначениях Ω_β^F – базисный дифференциал, принадлежащий любому из перечисленных четырех семейств, $w_s^{F\beta}$ – матрица скоростей для соответствующего потока, T_β^F – время отвечающее этому потоку. Пусть также

$$Q_{\beta\gamma}^F = V_{\Omega_\beta^F \Omega_\gamma^F} \tag{15.31}$$

где $V_{\Omega_\beta^F \Omega_\gamma^F}$ – скалярное произведение на пространтстве 1-форм (15.14).

Напомним важнейшие свойства описанной полной иерархии Уизема.

Для начала убедимся, что она допускает следующее представление (см. [98], [96])

Лемма 15.3 *Потоки (15.26), (15.30) допускают следующее эквивалентное представление:*

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial T_\beta^F} = \frac{\partial \Omega_\beta^F}{\partial X}. \tag{15.32}$$

напомним, что в этом разделе производная $\frac{\partial}{\partial T_\beta^F}$ формы, заданной на зависящем от ∂T_β^F семействе гиперэллиптических кривых означет производную при постоянном E

$$\frac{\partial}{\partial T_\beta^F} = \left.\frac{\partial}{\partial T_\beta^F}\right|_{E=const}.$$

Доказательство. Несложно убедиться, что дифференциалы в обеих частях (15.32) имеют следующие аналитические свойства:

1. Они однозначны и мероморфны на Г.
2. Их интегралы по a_j-циклам равны 0.
3. Они имеют полюса второго порядка в точках $E_1, \ldots, E_{2g+1}$ с нулевыми вычетами.
4. Пусть $z = \sqrt{E - E_k}$ – локальный параметр в точке E_k. Тогда $\Omega^F_\beta(z)/2z^2 \frac{\partial E_k}{\partial X}$.

Свойства 1-4 полностью определяют мероморфный дифференциал, поэтому правая часть равна левой.

Лемма доказана.

Следующий шаг – проверка коммутативности полной иерархии Уизема.

Лемма 15.4 *(см. [98], [96]) Все симметрии (15.26), (15.30) попарно коммутируют.*

Доказательство. Повторяя один к одному рассуждение предыдущей Леммы получаем, что

$$\partial\Omega^F_\beta/\partial T^F_\gamma = \partial\Omega^F_\gamma/\partial T^F_\beta. \tag{15.33}$$

Отсюда видно, что

$$\frac{\partial}{\partial T^F_\beta}\frac{\partial}{\partial T^F_\gamma}\Omega_1 = \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial\Omega^F_\gamma}{\partial T^F_\beta} = \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial\Omega^F_\beta}{\partial T^F_\gamma} = \frac{\partial}{\partial T^F_\gamma}\frac{\partial}{\partial T^F_\beta}\Omega_1.$$

что в точности и означает коммутативность потоков с временами T^F_β, T^F_γ.

Пусть задан некоторый набор начальных данных задачи Коши $E_j(X)$. Поскольку динамика по всем временам T^F_β совместна, мы можем (по

крайней мере локально) построить по этим данным решение полной иерархии $E_j(\vec{T}^F)$. Тогда наша риманова поверхность, базисные дифференциалы на ней и их попарные скалярные произведения $Q^F_{\beta\gamma} = V_{\Omega^F_\beta \Omega^F_\gamma}$ становятся функциями полного набора времен T^F_β. Проверим следующее свойство этих скалярных произведений:

Лемма 15.5 *(см. [96], [122]) Частные производные функций $Q^F_{\beta\gamma}(\vec{T}^F)$ по временам T^F_β связаны следующими соотношениями:*

$$\frac{\partial Q^F_{\beta\gamma}(\vec{T}^F)}{\partial T^F_\delta} = \frac{\partial Q^F_{\beta\delta}(\vec{T}^F)}{\partial T^F_\gamma}. \tag{15.34}$$

и, следовательно, мы можем определить следующие новые функции, нелокально зависящие от решений

$$Q^F_\beta(\vec{T}^F) = \int_{\vec{0}}^{\vec{T}^F} \sum_\gamma Q^F_{\beta\gamma} dT^F_\gamma . \tag{15.35}$$

Доказательство. Из формул (15.17) видно, что $\frac{\partial Q^F_{\beta\gamma}(\vec{T}^F)}{\partial T^F_\delta}$ выражается через коэффициенты разложения в бесконечности или интегралы по периодам с некоторым не зависящим от $\vec{T}^F$ весом от дифференциала $\partial\Omega^F_\beta/\partial T^F_\gamma$ и аналогичные формулы имеют место для $\frac{\partial Q^F_{\beta\gamma}(\vec{T}^F)}{\partial T^F_\beta}$. Но производные дифференциалов равны по Лемме 15.3, откуда следует равенство производных $Q^F_{\beta\gamma}(\vec{T}^F)$.

Нелокальность $Q^F_\beta(T^F)$ означает, что для вычисления значений этих функций в точке T^F_0 по известному решению $E_j(\vec{T}^F)$ нужно знать значение этого решения не только в точке T^F_0, но в в цеой области (как минимум, на некоторой кривой, соединяющем T^F_0 с нулем). Напротив, все частные производные $Q^F_\beta(T^F)$ выражаются чезез значения $E_j(\vec{T}^F)$ и их производных в этой же точке, т.е. они локальны.

Вычислим теперь вариации скоростей $w^{F\beta}_s$ при сдвигах точек ветвления базисными векторными полями.

Лемма 15.6 *Рассмотрим сдвиг точек ветвления E_s кривой Γ вдоль базисного векторного поля $l_{2k} = 2(-1)^k E_{k+1}\partial_E$*

$$\frac{\partial E_s}{\partial \tau_{2n}} = 2(-1)^n E_s^{n+1}, \quad s = 0, 1, \ldots, 2g+1. \tag{15.36}$$

Тогда вариацию матрицы скоростей можно представить в следующем виде

$$\frac{\partial w_s^{2k+1}}{\partial \alpha_{2n}} = (2k+1)w_s^{2k+2n+1} - w_s^{2n+1}w_s^{2k+1} + \tag{15.37}$$

$$+ \sum_{m=0}^{n-1} w_s^{2n-2m-1}\left(\frac{\partial}{\partial T_{2k+1}} - w_s^{2k+1}\frac{\partial}{\partial X}\right)Q_{2m+1},$$

$$\frac{\partial w_s^{Hk}}{\partial \alpha_{2n}} = -w_s^{2n+1}w_s^{Hk} + \sum_{m=0}^{n-1} w_s^{2n-2m-1}\left(\frac{\partial}{\partial T_k^H} - w_s^{Hk}\frac{\partial}{\partial X}\right)Q_{2m+1}, \tag{15.38}$$

$$\frac{\partial w_s^{a_ik}}{\partial \alpha_{2n}} = 2(-1)^n k w_s^{a_ik+n} - w_s^{2n+1}w_s^{a_ik} + \sum_{m=0}^{n-1} w_s^{2n-2m-1}\left(\frac{\partial}{\partial T_k^{a_i}} - w_s^{a_ik}\frac{\partial}{\partial X}\right)Q_{2m+1}, \tag{15.39}$$

$$\frac{\partial w_s^{b_ik}}{\partial \alpha_{2n}} = 2(-1)^n k w_s^{b_ik+n} - w_s^{2n+1}w_s^{b_ik} + \sum_{m=0}^{n-1} w_s^{2n-2m-1}\left(\frac{\partial}{\partial T_k^{b_i}} - w_s^{b_ik}\frac{\partial}{\partial X}\right)Q_{2m+1}. \tag{15.40}$$

Здесь Q_j означают функцию Q_β^F для случая, когда индекс β пробегает первое из четырех семейств базисных дифференциалов (нумерует усредненные высшие КдФ). При этом мы считаем, что у нас задано некоторое решение полной иерархии Уизема, принимающее значения E_s при некотором $\vec{T}^F = \vec{T}_0^F$ и все производные по X, T_β^F вычислены в этой точке. Поскольку первые производные Q_β^F зависят от значения решения в данной точке, но не от его производных, правая часть формул (15.37)-(15.40) в действительности не зависит от выбора решения.

Доказатетьство. По определению

$$\frac{\partial w_s^{F_\beta}}{\partial \alpha_{2n}} = \frac{\partial}{\partial \alpha_{2n}}\frac{\Omega_\beta^F(E_s)}{\Omega_1(E_s)} = \frac{D_{\alpha_{2n}}\Omega_\beta^F(E_s)}{\Omega_1(E_s)} - \frac{\Omega_\beta^F(E_s)}{\Omega_1(E_s)}\frac{D_{\alpha_{2n}}\Omega_1(E_s)}{\Omega_1(E_s)} \tag{15.41}$$

где $D_{\alpha_{2n}}$ – тот же оператор, что и в Лемме 15.2. Тем самым

$$\frac{\partial w_s^{F_\beta}}{\partial \alpha_{2n}} = \frac{D_{\alpha_{2n}}\Omega_\beta^F(E_s)}{\Omega_1(E_s)} - w_s^{F_\beta}\frac{D_{\alpha_{2n}}\Omega_1(E_s)}{\Omega_1(E_s)} \tag{15.42}$$

Согласно формуле (15.22)

$$D_{\alpha_{2n}}\Omega_1 = \Omega_{2n+1} + \sum_{m=0}^{n-1} Q_{1\,2m+1}\Omega_{2n-2m-1}, \tag{15.43}$$

и, следовательно,

$$\frac{D_{\alpha_{2n}}\Omega_1(E_s)}{\Omega_1(E_s)} = \frac{\Omega_{2n+1}(E_s)}{\Omega_1(E_s)} + \sum_{m=0}^{n-1} Q_{1\,2m+1}\frac{\Omega_{2n-2m-1}(E_s)}{\Omega_1(E_s)}, \tag{15.44}$$

откуда видно, что

$$\frac{D_{\alpha_{2n}}\Omega_1(E_s)}{\Omega_1(E_s)} = w_s^{2n+1} + \sum_{m=0}^{n-1} Q_{1\,2m+1} w_s^{2n-2m-1}. \tag{15.45}$$

Аналогично проверяется, что

$$\frac{D_{\alpha_{2n}}\Omega_{2k+1}(E_s)}{\Omega_1(E_s)} = (2k+1)w_s^{2n+2k+1} + \sum_{m=0}^{n-1} Q_{2k+1\,2m+1} w_s^{2n-2m-1}. \tag{15.46}$$

$$\frac{D_{\alpha_{2n}}\omega_k(E_s)}{\Omega_1(E_s)} = \sum_{m=0}^{n-1} V_{\omega_k\Omega_{2m+1}} w_s^{2n-2s-1}. \tag{15.47}$$

$$\frac{D_{\alpha_{2n}}\omega_k^i(E_s)}{\Omega_1(E_s)} = 2(-1)^n w_s^{a_i\,k+n} + \sum_{m=0}^{n-1} V_{\omega_k^i\Omega_{2m+1}} w_s^{2n-2s-1}. \tag{15.48}$$

$$\frac{D_{\alpha_{2n}}\sigma_k^i(E_s)}{\Omega_1(E_s)} = 2(-1)^n w_s^{b_i\,k+n} + \sum_{m=0}^{n-1} V_{\sigma_k^i\Omega_{2m+1}} w_s^{2n-2s-1}. \tag{15.49}$$

Сопоставляя (15.45)-(15.45) с определением Q_{2j+1} получем (15.37)-(15.40). Лемма доказана.

Теперь мы готовы к тому, чтобы начать построение аналогов неизоспектральных симметрий КдФ на иерархии Уизема. В разделе 14 мы вычислили действие этих симметрий на конечнозонных решениях КдФ,

которые отвечают константным решениям Уизема и получили следующий ответ:

$$\frac{\partial E_s}{\partial \alpha_{2n}} = 2(-1)^n E_s^n. \tag{15.50}$$

Кроме того, мы знаем, что эти симметрии явно зависят от координаты и времен, и нелокальны. С учетом этого попробуем построить симметрии следующего вида:

$$\frac{\partial E_s}{\partial \tau} = R(E_s) + \left(\sum_\beta f_\beta(\vec{T}^F)[\vec{E}(\vec{T}^F)] w_s^{F_\beta}(\vec{E}) \right) \frac{\partial E_s}{\partial X}, \tag{15.51}$$

Действие (15.51) задается на пространстве вектор-функций

$$\vec{E}(\vec{T}^F) = \begin{pmatrix} E_1(\vec{T}^F) \\ \vdots \\ E_{2g+1}(\vec{T}^F) \end{pmatrix}$$

бесконечного набора переменных $\vec{T}^F$, R(E) некоторый многочлен от E с постоянными коэффициентами, $f_\beta(\vec{T}^F)[\vec{E}(\vec{T}^F)]$ функции переменных T_β^F, как-то строящиеся по потенциалу $\vec{E}(\vec{T}^F)$ (возможно нелокальным образом).

Найдем необходимые и достаточные условия того, чтобы действие (15.51) переводило решения в решения.

Лемма 15.7 *Поток (15.51) переводит решения уравнения*

$$\frac{\partial E_s}{\partial T_\gamma^F} = w_s^{F_\gamma} \frac{\partial E_s}{\partial X}. \tag{15.52}$$

снова в решения тогда и только тогда, когда выполены следующие условия совместности:

$$\frac{\partial w_s^{F_\gamma}}{\partial \alpha} = \sum_\beta w_s^{F_\beta} \left[\left(\frac{\partial}{\partial T_\gamma^F} - w_s^{F_\gamma} \frac{\partial}{\partial X} \right) f_\beta(\vec{T}) \right] \tag{15.53}$$

где $\partial w_s^{F_\gamma}/\partial\alpha$ обозначает вариацию скоростей по следующему сдвигу точек ветвления:

$$\frac{\partial E_s}{\partial\alpha} = R(E_s). \tag{15.54}$$

Доказательство. Вычислим смешанные призводные E_j по τ и T_γ^F. При этом, проводя вычисление, мы будем подразумевать суммирование по повторяющимся индексам:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial E_s}{\partial T_\gamma^F} = \left[R(E_q) + f_\beta(\vec{T}^F)w_q^{F_\beta}(\vec{E})\frac{\partial E_q}{\partial X}\right]\frac{\partial w_s^{F_\gamma}(\vec{E})}{\partial E_q}\frac{\partial E_s}{\partial X}+$$

$$+w_s^{F_\gamma}(\vec{E})\frac{\partial}{\partial X}\left[R(E_s) + f_\beta(\vec{T}^F)w_s^{F_\beta}(\vec{E})\frac{\partial E_s}{\partial X}\right] =$$

$$= R(E_q)\frac{\partial w_s^{F_\gamma}(\vec{E})}{\partial E_q}\frac{\partial E_s}{\partial X} + f_\beta(\vec{T}^F)w_q^{F_\beta}(\vec{E})\frac{\partial w_s^{F_\gamma}(\vec{E})}{\partial E_q}\frac{\partial E_q}{\partial X}\frac{\partial E_s}{\partial X}+$$

$$+R'(E_s)w_s^{F_\gamma}(\vec{E})\frac{\partial E_s}{\partial X} + \left(\frac{\partial}{\partial X}f_\beta(\vec{T}^F)\right)w_s^{F_\beta}(\vec{E})w_s^{F_\gamma}(\vec{E})\frac{\partial E_s}{\partial X}+$$

$$+f_\beta(\vec{T}^F)\frac{\partial w_s^{F_\beta}(\vec{E})}{\partial E_q}w_s^{F_\gamma}(\vec{E})\frac{\partial E_q}{\partial X}\frac{\partial E_s}{\partial X} + f_\beta(\vec{T}^F)w_s^{F_\beta}(\vec{E})w_s^{F_\gamma}(\vec{E})\frac{\partial^2 E_s}{\partial X^2}.$$

$$\frac{\partial}{\partial T_\gamma^F}\frac{\partial E_s}{\partial\tau} = R'(E_s)w_s^{F_\gamma}(\vec{E})\frac{\partial E_s}{\partial X} + \left(\frac{\partial}{\partial T_\gamma^F}f_\beta(\vec{T}^F)\right)w_s^{F_\beta}(\vec{E})\frac{\partial E_s}{\partial X}+$$

$$+f_\beta(\vec{T}^F)\frac{\partial w_s^{F_\beta}(\vec{E})}{\partial E_q}w_q^{F_\gamma}(\vec{E})\frac{\partial E_q}{\partial X}\frac{\partial E_s}{\partial X} + f_\beta(\vec{T}^F)w_s^{F_\beta}(\vec{E})\frac{\partial}{\partial X}\left[w_s^{F_\gamma}(\vec{E})\frac{\partial E_s}{\partial X}\right] =$$

$$= R'(E_s)w_s^{F_\gamma}(\vec{E})\frac{\partial E_s}{\partial X} + \left(\frac{\partial}{\partial T_\gamma^F}f_\beta(\vec{T}^F)\right)w_s^{F_\beta}(\vec{E})\frac{\partial E_s}{\partial X}+$$

$$+f_\beta(\vec{T}^F)\frac{\partial w_s^{F_\beta}(\vec{E})}{\partial E_q}w_q^{F_\gamma}(\vec{E})\frac{\partial E_q}{\partial X}\frac{\partial E_s}{\partial X} + f_\beta(\vec{T}^F)w_s^{F_\beta}(\vec{E})\frac{\partial w_s^{F_\gamma}(\vec{E})}{\partial E_q}\frac{\partial E_q}{\partial X}\frac{\partial E_s}{\partial X}+$$

$$+f_\beta(\vec{T}^F)w_s^{F_\beta}(\vec{E})w_s^{F_\gamma}(\vec{E})\frac{\partial^2 E_s}{\partial X^2}$$

группируя подобные, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial E_s}{\partial T^F_\gamma}-\frac{\partial}{\partial T^F_\gamma}\frac{\partial E_s}{\partial\tau}=$$

$$=\left[R(E_q)\frac{\partial w_s^{F_\gamma}(\vec{E})}{\partial E_q}+\left(\frac{\partial}{\partial X}f_\beta(\vec{T}^F)\right)w_s^{F_\beta}(\vec{E})w_s^{F_\gamma}(\vec{E})-\left(\frac{\partial}{\partial T^F_\gamma}f_\beta(\vec{T}^F)\right)w_s^{F_\beta}(\vec{E})\right]\times$$

$$\times\frac{\partial E_s}{\partial X}+\left[w_q^{F_\beta}(\vec{E})\frac{\partial w_s^{F_\gamma}(\vec{E})}{\partial E_q}+\frac{\partial w_s^{F_\beta}(\vec{E})}{\partial E_q}w_s^{F_\gamma}(\vec{E})-\frac{\partial w_s^{F_\beta}(\vec{E})}{\partial E_q}w_q^{F_\gamma}(\vec{E})-\right.$$

$$\left.-\,w_s^{F_\beta}(\vec{E})\frac{\partial w_s^{F_\gamma}(\vec{E})}{\partial E_q}\right]f_\beta(\vec{T}^F)\frac{\partial E_q}{\partial X}\frac{\partial E_s}{\partial X}.$$

Убедимся, что коэффициент при $f_\beta(\vec{T}^F)\frac{\partial E_q}{\partial X}\frac{\partial E_s}{\partial X}$ равен 0. Действительно, согласно работе С.П.Царева [77] коммутативность потоков по временам T^F_β, T^F_γ эквивалентна следующему соотношению на производные скоростей

$$\frac{\partial w_s^{F_\beta}(\vec{E})/\partial E_q}{(w_q^{F_\beta}(\vec{E})-w_s^{F_\beta}(\vec{E}))}=\frac{\partial w_s^{F_\gamma}(\vec{E})/\partial E_q}{(w_q^{F_\gamma}(\vec{E})-w_s^{F_\gamma}(\vec{E}))}\qquad(15.55)$$

которое в точности означает равенство 0 этого коэффициента. Тем самым поток (15.51) перводит решения в решения тогда и только тогда, когда равен 0 коэффициент при $\frac{\partial E_s}{\partial X}$, что и доказывает Лемму.

Теперь нам остается подобрать коэффициенты $f_\beta(\vec{T}^F)$ так, чтобы условия Леммы 15.7, были выполнены для всех времен полной иерархии Уизема. Оказывется, что это несложно сделать. Сформулируем основной результат раздела:

Теорема 15.1 *Потоки вида*

$$\frac{\partial E_s}{\partial\tau_{2n}}=2(-1)^nE_s^{n+1}+\left\{\sum_{k\geq0}(2k+1)T_{2k+1}w_s^{2k+2n+1}\right\}\frac{\partial E_s}{\partial X}+$$

$$+\left\{2(-1)^n\sum_{k\geq0}k(T_k^{a_i}w_s^{a_i\,k+n}+T_k^{b_i}w_s^{b_i\,k+n})+\sum_{0\leq k<n}Q_{2k+1}w_s^{2n-2k-1}\right\}\cdot\frac{\partial E_s}{\partial X}.\qquad(15.56)$$

переводят решения уравнений Уизема в решения. Входящие в эти потоки функции Q_j были определены в Лемме 15.5. Эти функции нелокально зависят от решений $\vec{E}(\vec{T}^F)$, однако их производные по временам полной иерархии Уизема уже локально выражаются через точки ветвления E_s и точку нормировки E_0 в терминах гиперэллиптических интегралов.

Для доказательства достаточно заметить, что подставляя в правую часть формулы (15.53) функции $f_\beta(\vec{T}^F)$ из (15.53) мы получаем в точности выражения для вариаций скоростей (15.22)-(15.22), что согласно Лемме 15.7 необходимо и достаточно, чтобы решения переходили в решения.

В заключение отметим, что при вычислении действия построенных симметрий на решениях Уизема потоки (15.56)можно записывать в следующем виде:

$$\frac{\partial E_s}{\partial \tau_{2n}} = 2(-1)^n E_s^{n+1} + \sum_{k\geq 0}(2k+1)T_{2k+1}\frac{\partial E_s}{\partial T_{2k+2n+1}} +$$

$$+ 2(-1)^n \sum_{k\geq 0} k\left(T_k^{a_i}\frac{\partial E_s}{\partial T_{k+n}^{a_i}} + T_k^{b_i}\frac{\partial E_s}{\partial T_{k+n}^{b_i}}\right) + \sum_{0\leq k<n} Q_{2k+1}\frac{\partial E_s}{\partial T_{2n-2k-1}}. \quad (15.57)$$

16 Построение строго периодических конечнозонных решений интегрируемых уравнений методом изопериодических деформаций.

Основные результаты этого раздела были получены автором совместно с Мартином Шмидтом из Свободного Университета Берлина в работе [115].

При решении периодической задачи для солитонных уравнений мы сталкиваемся со следующей проблемой. Прямое спектральное преобразование хорошо определено для периодических по пространственным

переменным потенциалов, но попытки обобщить его на квазипериодические потенциалы сталкиваются с серьезными трудностями. Эти трудности носят, по-видимому принципиальный, а не технический характер. На это указывает, например, работа Е.И.Динабурга и Я.Г.Синая [22], в которой было установлено, что спектр оператора Шредингера с квазипериодическим потенциалом может иметь структуру канторова множества, и, следовательно, с ним нельзя проассоциировать разумную риманову поверхность. С другой стороны, спектральным кривым общего вида отвечают, как правило, почти периодические потенциалы. (В данном разделе под почти периодической функцией одной переменной мы понимаем функцию, получаемую ограничением гладкой периодической функции n переменных на прямолинейную обмотку тора).

Естественно поставить вопрос о характеризации спектральных кривых, отвечающих чисто периодическим потенциалам. Несложно убедиться, что условия периодичности выделяют трансцендентное подмногообразие в пространстве модулей римановых поверхностей. Для вещественного уравнения КдФ описание этого многообразия было получено В.А.Марченко и И.В.Островским в работе [56]. Полученный ими ответ состоит в следующем: спектральная кривая с вещественными точками ветвления $E_1,\ldots,E_{2g+1}, \infty$ порождает периодические по x решения КдФ тогда и только тогда, когда существует конформное отображение верхней полуплоскости

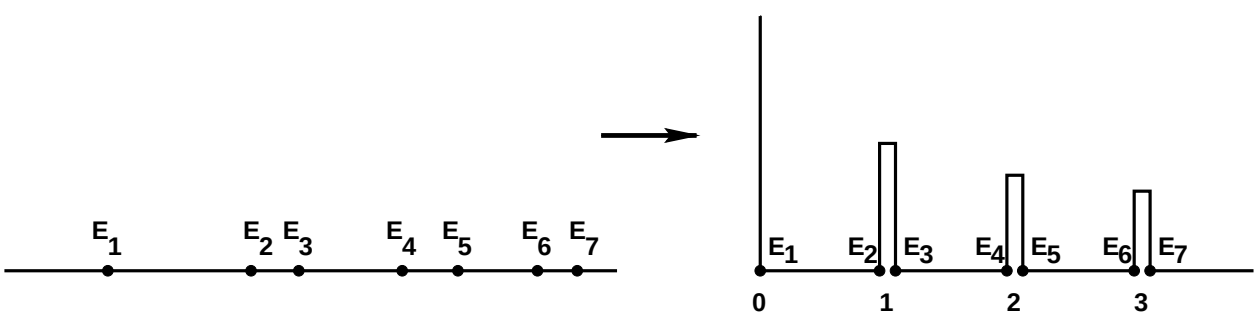

Рис 16-1.

на область, получающуюся из четверти плоскости выбрасыванием вертикальных отрезков, восстановленных из точек 1, 2,. . . , g (гребенку) такое, что точки E_1,. . . ,E_{2g+1} переходят при отображении границы в основания отрезков. (Для наглядности разрезы на рисунке изображены широкими, действительная ширина их равна 0).

Конформные отображения – достаточно сложный с вычислительной точки зрения объект сам по себе. Поэтому мы в работе [115] мы предложили другой способ описания многообразия спектральных кривых, отвечающих периодическим решениям. Он основан на том, что на этом достаточно сложном многобразии действует группа симметрий, задаваемых некоторыми обыкновенными дифференциальными уравнениями. Эти уравнения (мы будем называть их уравнениями изопериодических деформаций) уже возникали работах И.М.Кричевера [122], Н.М.Ерколани, Г.Фореста, Д.МакЛафлина и А.Синха [97]. Однако возможность их применения к задаче выделения периодических решений не обсуждалась, и, кроме того, сами уравнения были выписаны с трансцендентной правой частью. Мы покажем, что, по крайней мере в рассматриваемых нами случаях, расширяя фазовое пространство, уравнения можно сильно упростить, и их правая часть становится рациональной.

Мы предлагаем строить периодические решения следующим образом. Сперва строим какое-либо подходящее “затравочное” решение, и далее, применяя изопериодические деформации, движемся по пространству кривых, порождающих решения с тем же периодом. В качестве “затравочного” решения можно, например, брать малые возмущения постоянных решений и решать спектральную задачу в линейном приближении. Данный алгоритм реализован авторами в виде компьютерной программы и показал высокую численную эффективность.

Представление для уравнений изопериодических деформаций напоминают представления уравнений Уизема. Как мы уже отмечали, урав-

нения Уизема гамильтоновы, причем скобки Пуассона, построенные Б.АДубровиным и С.П.Новиковым, выписываются в терминах некоторой плоской метрики на пространстве полей. Оказывается, что для уравнений изопериодических деформаций более естественно не гамильтоново, а градиентное представление в той же метрике которая входит в гамильтонов формализм уравнений Уизема. Одна из причин, почему градиентные системы рассматриваются реже гамильтоновых состоит в том, что "гамильтонианы" градиентных систем не являются сохраняющимися величинами. Однако в случае уравнений изопериодических деформаций метрика сильно индефинитна (число положительных квадратов отличается от числа отрицательных не более чем на 1) , и дифференциалы всех "гамильтонианов" лежат в световом конусе. Благодаря этому "гамильтонианы" являются законами сохранения для всей иерархии, и данная градиентная система оказывается очень похожей на гамильтонову. Эта система интегрируема, поскольку она линеаризуется явной заменой переменных.

Для определенности мы будем рассматривать два основных примера – уравнение Кортевега - де Фриза и Нелинейное уравнение Шредингера.

16.1 Условия периодичности в терминах дифференциала квазиимпульса.

Напомним, как спектральные кривые, отвечающие чисто периодическим решениям, описываются в терминах дифференциала квазиимпульса (см., например, [56]). Сперва обсудим случай уравнения КдФ, вспомогательный линейный оператор для которого – одномерный оператор Шредингера. Как мы уже упоминали, блоховские решения одномерного оператора Шредингера $\Psi(\lambda, x)$

$$L = -\partial_x^2 + u(x).$$

с периодическим потенциалом $u(x)$ (далее в этом разделе мы будем считать что период равен 1: $u(x+1) = u(x)$) определяются как решения уравнения

$$L\Psi(\lambda, x) = \lambda\Psi(\lambda, x)$$

с условием периодичности

$$\Psi(\lambda, x+1) = \mu\Psi(\lambda, x). \tag{16.1}$$

(В этом разделе мы будем обозначать энергию в операторе Шредингера λ). Блоховская функция мероморфна на спектральной кривой Γ, которая в конечнозонном случае – алгебраическая кривая с точками ветвления $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2g+1}, \infty$. Многозначная функция $p(\lambda) = \frac{1}{i}\ln(\mu)$ называется квазиимпульсом. Ее дифференциал dp уже однозначен на Γ и полностью определяется следующими свойствами:

1) Дифференциал dp мероморфен на Γ с единственным полюсом второго порядка в точке ∞ и асимптотикой $dp \sim \frac{d\lambda}{2\sqrt{\lambda}}$.

2) Все периоды dp – целые кратные 2π:

$$\oint_{c_n} dp = 2\pi k_n,\ k_n \in \mathbb{Z} \tag{16.2}$$

где c_n – любой замкнутый контур на Γ.

Пусть теперь Γ – произвольная гиперэллиптическая кривая с точками ветвления $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2g+1}, \infty$. Тогда несложно увидеть, что базисные частоты соответствующих решений равны периодам дифференциала dp, определяемого в этом случае свойствами 1) и

$2'$) Все периоды dp вещественны:

$$\oint_{c_n} dp = 2\pi k_n,\ k_n \in \mathbb{R} \tag{16.3}$$

где c_n – любой замкнутый контур на Γ.

Постоенный таким образом дифференциал dp естественно называть дифференциалом квазиимпульса на Г.

Потенциал $u(x)$ построенный по кривой Г. периодичен с периодом P_* тогда и только тогда, когда для всех n

$$P_* k_n \in \mathbb{Z}. \tag{16.4}$$

Тем самым мы получаем следующее описание римановых поверхностей отвечающих чисто периодическим потенциалам (все потенциалы, отвечающие даной спектральной кривой, либо одновременно периодичны, либо одновременно непериодичны):

Существует дифференциал dp со свойствами 1) и 2).

Наша цель – изучение деформаций римановых поверхностей, сохраняющих все периоды dp. Поскольку они меняют спектральную кривую, они неизоспектральны. Они сохряняют полный набор квазипериодов решения, поэтому мы будем называть их изопериодическими.

В случае, когда потенциал $u(x)$ вещественен, условие $2'$) эквивалентно следующему:

$2''$) Все a-периоды dp равны 0:

$$\oint_{a_n} dp = 0, \tag{16.5}$$

где $a_1, \ldots, a_g$ – базисные a-циклы.

В этом случае на кривой Г определена антиголоморфная инволюция $\Psi(\lambda, x) \to \bar{\Psi}(\lambda, x)$ $p \to -\bar{p}$. Ее вещественные овалы лежат над отрезками $[-\infty, \lambda_1]$, $[\lambda_2, \lambda_3]$, $[\lambda_{2g}, \lambda_{2g+1}]$, и a-циклы совпадают с вещественными овалами, не проходящими через бесконечность. При продолжении на комплексный случай эта нормировка уже не инвариантна.

Для Нелинейного уравнения Шредингера (НУШ)

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2} + 2\kappa |q(x,t)|^2 q(x,t) = 0, \quad \kappa = \pm 1, \tag{16.6}$$

вспомогательная линейная задача имеет вид

$$L\Psi = 0,\ L = \partial_x - \begin{bmatrix} i\lambda & iq(x,t) \\ i\kappa\bar{q}(x,t) & -i\lambda \end{bmatrix},\ \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}. \tag{16.7}$$

Случай $\kappa = 1$ называется самофокусирующим, $\kappa = -1$ – дефокусирующим.

Пусть функция $q(x)$ периодична с периодом 1: $q(x+1) = q(x)$. Блоховская функция $\Psi(x,\lambda)$ определяется как решение уравнения (16.7) с условием периодичности

$$\Psi(x+1,\lambda) = \exp[ip(\lambda)]\Psi(x,\lambda). \tag{16.8}$$

Как и для случая КдФ спектральная кривая Γ гиперэллиптична над λ-плоскостью, однако бесконечность – уже не точка ветвления. В конечнозоном случае Γ имеет четное число конечных точек $\lambda_1,\ldots,\lambda_{2g+2}$ ветвления, где g – род Γ. Над точкой ∞ λ-плоскости лежат две точки Γ, которые мы обозначим ∞_1, ∞_2. Для дефокусирующего НУШ все точки ветвления вещественны и в качестве a-циклов можно выбрать все лакуны в спектре кроме первой, что фиксирует и выбор b-циклов. В случае НУШ с самофокусировкой все точки ветвления лежат в комплексной области и инвариантны относительно комплексного сопряжения $\lambda \to \bar{\lambda}$. В этом случае естественный выбор a-циклов возможен для достаточно малых потенциалов, однако для больших потенциалов "наиболее естественный" базис циклов указать не удается.

Функция $p(\lambda)$ – многозначная локально голоморфная функция на Γ. Ее дифференциал dp полностью характеризуется следующими свойствами:

1) $dp(\lambda)$ голоморфна на $\Gamma \setminus (\infty_1 \cup \infty_2)$.

2) $dp(\lambda) = \pm d\lambda + o(1)$ при $\lambda \to \infty_{1,2}$.

3) $\operatorname{Im} \oint_c dp = 0$ для любого замкнутого цикла c.

4) Вычеты dp в бесконечно удаленных точках равны 0.

Для дефокусирующего НУШ условие 3) эквивалентно следующему

3′) $\oint_{a_k} dp = 0 \quad k = 1, \ldots, g.$

Мы получаем следующий критерий периодичности решений НУШ. Пусть Γ – алгебраическая гиперэллиптическая кривая без ветвления на ∞. На ней существует единственный голоморфный дифференциал dp со свойствами 1)-4) (дифференциал квазиимпульса). Потенциал $q(x,t)$ построенный по Γ периодичен по x с периодом P_* тогда и только тогда, когда

$$P_* k^j \in 2\pi\mathbb{Z} \tag{16.9}$$

где

$$k^j = \oint_{a_j} dp, \;\; k^{g+j} = \oint_{b_j} dp, \;\; k^{2g+1} = \lim_{\substack{\gamma_1 \to \infty_1 \\ \gamma_2 \to \infty_2}} \left[\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} dp - \lambda(\gamma_1) - \lambda(\gamma_2) \right]. \tag{16.10}$$

В последней формуле интеграл берется по любому пути, соединяющему точки ∞_1 и ∞_2.

16.2 Деформации, сохраняющие периоды дифференциала квазиимпульса.

Напомним следующую конструкцию, играющую важную роль в работах [122], [97], [145], а именно, покажем что деформации спектральной кривой Γ, сохраняющие периоды дифференциала квазиимпулься, описываются 1-формами на Γ (более точно аналитические свойства перечислены ниже).

В случае $1+1$ систем на спектральной кривой Γ, отвечающей периодическому потенциалу, определена пара функций – функция энергии

λ и экспонента квазиимпульса $\mu = e^{ip}$. Эти функции задают трансцендентное отображение $\Gamma \to \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus 0)$. Если мы вариируем потенциал с сохранением периода, то образ Γ в $\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus 0)$ также сдвигается.

Нам понадобится следующая несложная дифференциально-геометрическая конструкция, используемая, в частности, в [44]. Пусть у нас задана неособая гиперповерхность M в пространстве $\mathbb{R}^n$ с координатами $x^1,\ldots, x^n$ и формой объема $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$. Вариацией M назовем бесконечно близкую ней гиперповерхность M', причем никакого выделенного соответствия между точками M и M' мы не фиксируем. Поставим в соответствие каждой вариации $n-1$-форму на M.

Пусть у нас выбрана некоторая связность, т.е. правило переноса точек при вариирование гиперповерхности. Тогда вариация задается векторным полем $\delta\vec{x}$ на M. Поставим ему в соответствие следующую форму

$$\omega = \delta x^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n + dx^1 \wedge \delta x^2 \wedge \ldots \wedge dx^n + dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge \delta x^n \quad (16.11)$$

Легко проверяется, что получившаяся форма не зависит от выбора связности и, тем самым, корректно определена. С другой стороны, если задана произвольная $n-1$-форма на M, то, пользуясь формулой (16.11), мы ставим ей в соответствие векторное поле $\delta\vec{x}$, определенное однозначно с точностью до прибавления произвольного касательного поля. Тем самым локальные вариации M находятся во взаимно-однозначном соответствии с $n-1$-формами на M.

В случае спектральной кривой Γ вариации описываются 1-формой

$$\omega = \delta p d\lambda - \delta\lambda dp. \quad (16.12)$$

При этом постоянство периодов dp при вариации Γ в точности эквивалентно однозначности ω на Γ. Для НУШ эта конструкция подробно обсуждалась в [145].

Для гиперэлиптических кривых можно выбрать связность, отождествляя на разных кривых точки с одинаковыми λ (оператор $\partial\alpha$ в формуле

(15.19) раздела 15). Тогда уравнения деформаций приобретают вид

$$\delta p d\lambda = \omega. \tag{16.13}$$

Обсудим, какой дожна быть форма ω, чтобы формула (16.13) действительно задавала вариацию неособой гиперэллиптической кривой Γ, сохраняющую периоды dp.

1) Форма ω должна быть локально голоморфной вне точек ветвления и бесконенчно удаленных точек, поскольку она получается дифференцииированием локально голоморфного объекта по параметру и вне перечисленных точек связность несингулярна.

2) Форма ω должна быть однозначной на Γ, поскольку если периоды p не меняются при вариировании, то δp – уже однозначная функция на Γ.

3) Форма ω голоморфна на Γ вне бесконечно удадаленных точек. Действительно, при сдвиге точек ветвления у вариации δp при постоянном λ возникает полюс первого порядка в точках ветвления. Однако $d\lambda$ имеет в этих точках нуль первого порядка, что и дает несингулярность ω в этих точках.

4) a) Для уравнения КдФ имеем одну точку ∞, в ней δp имеет нуль как минимум первого порядка, а $d\lambda$ – полюс третьего порядка. Поэтому ω может иметь полюс не выше второго порядка.

   b) Для уравнения КдФ имеем две точки ∞_1, ∞_2, в них δp имеет нули как минимум певого порядка, а $d\lambda$ – полюса второго порядка. Поэтому ω может иметь полюса не выше первого порядка в этих точках.

Определение. Назовем мероморфную 1-форму на гиперэллиптической кривой слабо сингулярной, если она голоморфна вне бесконечности

и имеет не более чем полюс второго порядка в бесконенчности, если бесконечность – точка ветвления, или не более чем пару полюсов первого порядка в бесконечных точках, если над бесконечностью в λ-плоскости ветвления нет. Мы проверили, что любой сохраняющей периоды dp вариации Γ соответствует слабо сингулярная 1-форма. Верно и обратное.

Лемма 16.1 *Любая слабо сингулярная 1-форма порождает следующую вариацию* Γ*:*

$$\delta\lambda_j = -\frac{\omega(\lambda_j)}{dp(\lambda_j)} \tag{16.14}$$

Эта вариация не меняет периоды dp*. Вариации вида (16.14) образуют полный базис инфинитезимальных изопереодических деформаций.*

Доказательство. В окрестности точки ветвления локальная координата имеет вид $z = \sqrt{\lambda - \lambda_j}$. Пусть t-параметр деформации. Тогда в окрестности $\lambda_j(t)$ имеем разложение

$$p(\lambda, t) = p_0(t) + p_1(t)\sqrt{\lambda - \lambda_j(t)} + p_2(t)(\lambda - \lambda_j(t)) + \dots$$

и

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \left[-\frac{1}{2}\frac{\lambda_j'(t)}{\sqrt{\lambda - \lambda_j(t)}}p_1(t) + O(\lambda)\right] d\lambda = \tag{16.15}$$
$$\left[-\lambda_j'(t)p_1(t) + o(z)\right] dz = -\lambda_j'(t)dp + o(1).$$

Тем самым из (16.13) следует (16.14). Наоборот, пусть сдвиг точек ветвления задан формулой (16.14). Тогда вариация формы δdp определена, а вариация δp однозначно фиксируется условием зануления в точке ∞ для КдФ или в точке ∞_1 для НУШ. При этом форма $\omega + \lambda_j'(t)dp$ имеет нули во всех точках ветвления, и кроме того, полюс не выше второго порядка в бесконечности в случае КдФ, а в случае НУШ – полюса не выше первого и второго порядка в точках ∞_1 и ∞_2 соответственно. Тем самам она равна 0. Поскольку правая часть (16.13) – отнозначная функция на Γ, то однозначна и δp, т.е. все периоды δdp нулевые и вариация изопериодична.

Остается проверить полноту. Пространство гиперэллиптических кривых рода g имеет размерность $2g+1$ для КдФ и $2g+2$ для НУШ. Число условий периодичности – g для КдФ и $g+1$ для НУШ. В обоих случаях эти условия определяют $g+1$-мерные подпространства, но пространство слабо сингулярных 1-форм также $g+1$-мерно. Лемма доказана.

16.3 Явные формулы для уравнений изопериодических деформаций.

Пусть $\tilde{\omega}_1,\ldots,\tilde{\omega}_{g+1}$ – некоторый базис слабо сингулярных 1-форм, определенный на всех гиперэллиптических кривых, лежащих в пространстве модулей в окрестности Γ_0. Тогда они порождают набор потоков на пространстве гиперэллиптических кривых

$$\frac{\partial p}{\partial t_j} = \frac{\tilde{\omega}_j}{d\lambda} \tag{16.16}$$

эквивалентных следущей динамике на точки ветвления:

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial t_j} = -\frac{\tilde{\omega}_j(\lambda_k)}{dp(\lambda_j)} \tag{16.17}$$

Эти уравнения по форме записи напоминают уравнения Уизема, однако это – обыкновенные дифференциальные уравнения, а иерархия Уизема – уравнения в частных производных. Уравнения (16.17) изопериодичны в том смысле, что их интегралами движения являются квазипериоды решений, строящихся по Г, и, в частности, если в начальный момент времени решения периодичны по x, то это свойство сохраняется при всех t_j. Представление (16.17) было использовано в работе Н.М.Ерколани, Г.Фореста, Д.МакЛафлина и А.Синха [97]. при исследовании малых неитнегрируемых возмущений солитонных уравнений. Независимо от [97] аналогичное представление в существенно более общей ситуации было предложено в работе И.М.Кричевера [122] (формула (7.68)) при исследовании топологических моделей теории поля. При этом И.М.Кричевер

рассматривал также и неизопериодические деформации, порождаемые многозначными дифференциалами.

Недостаток представления (16.17) в том, что правая часть уравнений выражается через гиперэллиптические интегралы на Г, что сильно замедляет работу программ при численном счете. Действительно введем следующее обозначение

$$d(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_n) \tag{16.18}$$

где $n = 2g + 1$ для случая КдФ и $n = 2g + 2$ для случая НУШ. Тогда

$$dp = \frac{q(\lambda)}{2\sqrt{d(\lambda)}}d\lambda \tag{16.19}$$

$$q(\lambda) = \lambda^g + q_{g-1}\lambda^{g-1} + \dots + q_1\lambda^1 + q_0, \tag{16.20}$$

для случая КдФ,

$$dp = \frac{q(\lambda)}{\sqrt{d(\lambda)}}d\lambda \tag{16.21}$$

$$q(\lambda) = \lambda^{g+1} + q_g\lambda^g + \dots + q_1\lambda^1 + q_0, \tag{16.22}$$

для случая НУШ, В случае КдФ g комплексных констант определяются $2g$ вещественными условиями равенства 0 мнимых частей интегралов dp по базисным циклам. В случае НУШ добавляется одно дополнительное комплексное условие равенства 0 вычета на бесконечности. Эти интегралы гиперэллиптические.

Слабо сингулярные форма на Г представляется в виде

$$\tilde{\omega} = \frac{f(\lambda)}{2\sqrt{d(\lambda)}}d\lambda \tag{16.23}$$

для КдФ

$$\tilde{\omega} = \frac{f(\lambda)}{\sqrt{d(\lambda)}}d\lambda \tag{16.24}$$

для НУШ, где $f(\lambda)$ – произвольный многочлен степени $g+1$ от λ. Тогда уравнения (16.17) приобретают вид:

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial t_j} = -\frac{f(\lambda_k)}{q(\lambda_j)}. \tag{16.25}$$

Мы видим, что основная проблема при вычислении правой части (16.25) – вычисление коэффициентов многочлена $q(\lambda)$ как функций точек ветвления. Одно из основных наблюдений работы [115] состоит в том, что уравнения (16.25) радикально упрощаются, если ввести дополнительные переменные – нули многочлена $q(\lambda)$.

Рассмотрим сначала случай КдФ.

Обозначим нули многочена $q(\lambda)$ $\alpha_1,\dots,\alpha_g$. Для кривых общего положения они попарно различны и не совпадают ни с одной из точек ветвления. Тогда

$$q(\lambda) = (\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2)\dots(\lambda-\alpha_g). \tag{16.26}$$

и разлагая dp вблизи точек ветвления и нулей $q(\lambda)$ получаем, следующую динамику:

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial t} = -\frac{f(\lambda_k)}{\prod\limits_j (\lambda_k-\alpha_j)}, \tag{16.27}$$

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial t} = -\frac{1}{\prod\limits_{j\neq k}(\alpha_k-\alpha_j)}\left[f'(\alpha_k) - \frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{2g}\frac{1}{\alpha_k-\lambda_j}\right) f(\alpha_k)\right]. \tag{16.28}$$

Если dp – дифференциал квазиимпульса, то нули α_j выражаются через точки ветвления λ_j, однако в уравнениях (16.27), (16.28) их можно считать независимыми переменными. Тогда dp перестает быть дифференциалом квазиимпульса, и эти уравнения описывают потоки на пространстве пар (Γ, dp), где Γ – гиперэллиптическая кривая, dp – некоторый дифференциал на ней с полюсом 2 порядка в бесконечности, причем все периоды dp – интегралы движения системы.

До сих пор мы никак не фиксировали базис слабо сингулярных дифференциалов $\tilde{\omega}_j$. Отметим, что для КдФ в качестве одного из них естественно выбрать сам dp, соотвествующий поток будет порождать сдвиги

$$\lambda_j \to \lambda_j + t, \alpha_j \to \alpha_j + t. \tag{16.29}$$

В качестве остальных элементов базиса можно выбрать голоморфные дифференциалы со стандартной нормировкой:

$$\oint_{a_j} \omega_k = \delta_{jk}. \tag{16.30}$$

Тогда локальные координаты на пространстве кривых, отвечающих периодическим потенциалам, задаются следующим образом:

$$T_j = \oint_{a_j} p(\lambda)d\lambda, \ j = 1, \dots, g \quad T_{g+1} = \sum_{j=1}^{2g+1} \lambda_j - 2\sum_{j=1}^{g} \alpha_j \tag{16.31}$$

Действительно, сравнивая (16.17) и (16.30) видим, что

$$\frac{\partial T_j}{\partial t_k} = \delta_{jk}. \tag{16.32}$$

Аналогичный выбор локальных координат использовался, в частности в [96], [122].

Тем не менее, базис голоморфных дифференциалов с нормировкой (16.30) не оптимален по двум причинам. Во-первых, он зависит от выбора системы циклов, и тем самам, перестает быть каноническим при выходе в комплексную область. Во-вторых, в правых частях уравнений снова возникают гиперэллиптические интегралы.

Поэтому в [115] был использован другой базис голоморфных дифференциалов. Пусть все точки $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \lambda_0, \dots, \lambda_{2g}$ попарно различны. Тогда в качестве базиса голоморфных форм можно выбрать следующий набор:

$$\omega_j = \frac{c_j}{\lambda - \alpha_j} dp, \quad j = 1, \dots, g \tag{16.33}$$

где c_j – пока произвольные комплексные числа.

Тогда уравнения (16.27), (16.28) приобретают вид

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial t_k} = -\frac{c_k}{\lambda_j - \alpha_k}, \quad j = 1, \ldots, 2g+1,$$

$$\frac{\partial \alpha_j}{\partial t_k} = -\frac{c_k}{\alpha_j - \alpha_k}, \quad j = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, g, \tag{16.34}$$

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial t_k} = \sum_{j \neq k} \frac{c_k}{\alpha_j - \alpha_k} - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{2g} \frac{c_k}{\lambda_j - \alpha_k}.$$

Тем самым, мы доказали основной результат раздела:

Уравнения изопериодических деформаций допускают представление с рациональной правой частью.

Потоки, порождаемые дифференциалами (16.33) обладают следующим свойством:

$$\frac{\partial p(\alpha_j)}{\partial t_k} = 0 \quad \text{при} \quad j \neq k. \tag{16.35}$$

Тем самым в качестве локальных координат на пространстве кривых, отвечающих периодическим потенциалам можно использовать значения квазиимпульса в точках, где дифференциал квазиимпульса обращается в 0, т.е. $t_1 = p(\alpha_1), \ldots, t_g = p(\alpha_g)$. Условие

$$\frac{\partial p(\alpha_к)}{\partial t_k} = 1 \tag{16.36}$$

дает нам

$$\frac{\omega_k(\alpha_k)}{d\lambda} = 1,$$

откуда получется следующая нормировка величин c_k

$$c_k^2 = 4 \frac{\Pi_{j=0}^{2g}(\alpha_k - \lambda_j)}{\Pi_{j \neq k}(\alpha_k - \alpha_j)^2}. \tag{16.37}$$

Выбор знака перед c_k зависит от того, на котором из листов мы берем значение квазиимпульса. Как и раньше, координата t_{g+1} определяется

формулой $t_{g+1} = \sum_{j=1}^{2g+1} \lambda_j - 2\sum_{j=1}^{g} \alpha_j$ и не меняется под действием потоков (16.34).

Для вещественного КдФ введенные таким образом координаты совпадают с координатами, использованными В.А.Марченко и И.В.Островским в работе [56] – длинами разрезов. Для систем общего вида аналогичные координаты использовались в [122].

Замечание. Как отметил Г.Бабуджан [85], уравнения (16.34) с $c_i = 1$ возникают в квазиклассическом пределе анзаца Бете для магнетика Годена. Является ли это просто совпадением, или это сходство имеет более глубокие корни – пока не ясно.

Если все точки $\alpha_1,\dots,\alpha_g,\lambda_1,\dots,\lambda_{2g+1}$ попарно различны, то уравнения (16.34) несингулярны. В частности, для вещественного КдФ они всегда неособы.

Суммируя вышесказанное, получаем

Теорема 16.1 *Пусть Γ_0 – гиперэллиптическая риманова поверхность, двулистно накрывающая λ-плоскость с точками ветвления $\lambda_{0\,1},\dots,\lambda_{0\,2g+1},\infty$, точки $\alpha_{0\,1},\dots,\alpha_{0\,g}$ – проекции нулей дифференциала квазиимпульса. Рассмотрим действие потоков (16.34) на пространстве λ_k, α_k. Всевозможные сдвиги точки $\lambda_{0\,k}$, $\alpha_{0\,k}$ под действием потоков (16.34) заметают некоторое подмногообразие в этом пространстве (возможно с особенностями). Тогда ограничение потоков на это подмногообразие обладает следующими свойствами:*

1. *Во всех точках подмногообразия α_k – нули дифференциала квазиимпульса dp на кривой с точками ветвления $\lambda_{0\,1},\dots,\lambda_{0\,2g+1},\infty$.*

2. *Потоки (16.34) сохраняют группу квазичастот по x решений, отвечающих поверхности Γ. В частности многообразие кривых, порождающие чисто периодические по x решения, инвариантно относительно действия этих потоков.*

3. *Если величины c_k нормированы условиями (16.37), то потоки (16.34), отвечающие различным временам t_k, попарно коммутируют.*

4. *Потоки (16.34) вместе со сдвигом (16.29) в точках общего положения линейно независимы и действуют локально транзитивно на многообразии поверхностей рода g, порождающих решения КдФ с фиксированным набором квазичастот по x. В частности это действие локально транзитивно на многообразии кривых рода g, порождающих периодические по x решения с заданным периодом.*

Мы приходим к следующему алгоритму построения периодических решений КдФ (для определенности положим период равным 1 и будем считать среднее от потенциала равным 0).

1. Используя линеаризовнную теорию построим решения, отвечающие раскрытию g бесконечно малых зон. Необходимым и достаточным условием периодичности с периодом 1 является раскрытие зон в точках вида $\pi^2 n^2$, где $n \in \mathbb{Z}$.

2. Интегрируя уравнения (16.34) получим новые спектральные кривые, также порождающие периодические по x решения.

Эту процедуру можно обратить, и, в частности, используя уравнения (16.34), можно закрыть любую из зон для вещественного КдФ. Более того, несложная аналитическая оценка показывает, что таким способом можно закрыть все зоны, кроме конечного числа, не меняя периода решений. Отсюда легко получается альтернативное доказательство теоремы В.А.Марченко-И.В.Островского об аппроксимации произвольного периодического потенциала конечнозонным с тем же периодом.

Обсудим теперь изопериодические деформации Нелинейного уравнения Шредингера.

В этом случае Γ имеет $2g+2$ точки ветвления $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2g+2}$. Степень многочлен $q(\lambda)$, стоящего в числителе выражения для квазиимпульса

равна $g+1$ и, тем самым,

$$q(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)\dots(\lambda - \alpha_{g+1})$$

где $\alpha_1,\dots,\alpha_{g+1}$ – нули $q(\lambda)$.

В качестве базисных слабо сингулярных 1-форм выберем

$$\tilde{\omega}_k = \frac{c_k}{\lambda - \alpha_k} dp \quad \text{где} \quad k = 1, \dots g+1, \tag{16.38}$$

c_k – некоторые комплексные числа. В отличие от случая КдФ, дифференциал dp не слабо сингулярен, сдвиги по спектральному параметру не изопериодичны, и базис (16.38) полон.

В качестве локальных координат снова можно выбрать значения квазиимпульса в стационарных точках:

$$t_1 = p(\alpha_1), \dots, t_{g+1} = p(\alpha_{g+1}). \tag{16.39}$$

Тогда уравнения изопериодических деформаций записываются в следующем виде:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \lambda_j}{\partial t_k} = -\frac{c_k}{\lambda_j - \alpha_k}, \quad j = 1, \dots, 2g+2; \\
\frac{\partial \alpha_j}{\partial t_k} = -\frac{c_k}{\alpha_j - \alpha_k}, \quad j = 1, \dots, k-1, k+1, \dots g+1; \\
\frac{\partial \alpha_k}{\partial t_k} = \sum_{j \neq i} \frac{c_k}{\alpha_j - \alpha_k} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2g+2} \frac{c_k}{\lambda_j - \alpha_k}.
\end{gathered} \tag{16.40}$$

Условие (16.39) дает нам следующую нормировку для c_k:

$$c_k^2 = \frac{\prod_{j=1}^{2g+2}(\alpha_k - \lambda_j)}{\prod_{j \neq k}(\alpha_k - \alpha_j)^2}. \tag{16.41}$$

Потоки (16.40) с нормировкой (16.41) попарно коммутируют.

16.4 Изопериодические деформации как градиентные системы.

Вернемся к уравнениям изопериодических деформаций, записанных в терминах точек ветвления (с трансцендентной правой частью), рассматриваемых на пространстве всех неособых гиперэллиптических кривых (а не только отвечающих периодическим решениям). При этом нули квазиимпульса выражаются через точки ветвления.

Гамильтонов формализм уравнений Уизема ([30]), ([31]), ([60]) записывется в терминах следующей псевдоримановой метрики на пространстве гиперэллиптических кривых [26]:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{N} g_{ii} \, (d\lambda_i)^2 \, ,$$

где

$$g_{ii} = \operatorname{res}\Big|_{\lambda=\lambda_i} \frac{(dp)^2}{d\lambda} \text{ для всех } i = 1, \dots N, \; g_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j. \qquad (16.42)$$

Как указал авторам работы [115] С.П.Новиков, потоки (16.17) градиентны в метрике (16.42). Приведем данное в работе [115] доказательство этого утверждения.

Теорема 16.2 *Пусть ω_j – стандартный базис голоморфных дифференциалов (3.4).Тогда соответствующие потоки допускают представление:*

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial t_j} = g^{kl} \frac{\partial H_j}{\partial \lambda_l}, \qquad (16.43)$$

где

$$H_j = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{b_j} dp, \qquad (16.44)$$

g^{kl} – обратная матрица к метрическому тензору g_{kl} плоской диагональной метрики (16.42).

Изопериодичность потоков в точности означает, что H_j – законы сохранения для всей системы (16.43).

$$\frac{\partial H_j}{\partial t_k} = 0 \quad \textit{для всех} \quad j,k.$$

Представление (16.43) похоже на гамильтоново представление, однако форма g^{kl} симметрична, а не кососимметрична, как в гамильтоновой теории.

В данном примере очень важно, что метрика (16.42) не положительно определена. Если метрика положительно определена, то функция, порождающая поток, не может быть законом сохранения. Однако для потоков (16.43) все пространство порождаемое дифференциалами функций dH_j, $j = 1, \ldots, g$ лежит в "световом конусе" метрики. Поэтому все функции dH_j – законы сохранения системы. Этим система (16.43) напоминает интегрируемую гамильтонову систему.

Замечание. Уравнения (16.43) можно также записать в гамильтоновом виде с теми же самыми "гамильтонианами", однако возникающая при этом кососиимметричная форма представляется менее естественной, чем метрика (16.42).

Замечание. Вводя плоские координаты для (16.42) одновременно линеаризуем систему (16.43). В некоторых точках пространства модулей метрика g_{kk} сингулярна, что означает и сингулярность плоских координат. Особенности возникают в тех точках, где нули квазиимпульса совпадают с точками ветвления.

Доказательство Теоремы 16.2. Следуя работам [96], [122] введем плоские координаты для метрики (16.42).

Пусть

$$H_k = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{b_k} dp, \; t_k = \oint_{a_k} p d\lambda, \; k = 1, \ldots, g.$$

Кроме того в случае КдФ определим дополнительную функцию t_{g+1}:

$$t_{g+1} = \mathrm{res}\Big|_{\infty} \sqrt{\lambda} dp.$$

В случае НУШ определим дополнительную пару функций r, s:

$$r = \lim_{\substack{\gamma_1 \to \infty_1 \\ \gamma_2 \to \infty_2}} \left[\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} dp - \lambda(\gamma_1) - \lambda(\gamma_2) \right],$$

$$s = -\mathrm{res}_{\infty_2} p d\lambda.$$

В точках общего положения введенные функции задают локальную систему координат на пространстве гиперэллиптических кривых. Для случая КдФ метрика (16.42) в этих координатах имеет вид

$$ds^2 = \sum_{k=1}^{g} (dH_k dt_k + dt_k dH_k) + 2dt_{g+1}^2. \tag{16.45}$$

Для случая НУШ метрика (16.42) в этих координатах имеет вид

$$ds^2 = \sum_{k=1}^{g} (dH_k dt_k + dt_k dH_k) + dr ds + ds dr \tag{16.46}$$

Как мы уже отмечали, функции r, s, t_{g+1} – законы сохранения для потоков, порождаемых голоморфными дифференциалами.

Сопоставляя (16.45) , (16.46) и (16.32) завершаем доказательство.

17 Заключение.

В заключение еще раз перечислим полученные в работе результаты.

1. Построено обобщенное преобразование рассеяния для двумерного оператора Шредингера с убывающим на бесконечности потенциалом при фиксированной ненулевой энергии в предположении достаточной малости потенциала по некоторой норме.

2. Показано что при положительной энергии естественно возникают данные рассеяния двух типов – "физические" и "дополнительные". При этом "физические" данные рассеяния находятся во взаимнооднозначном соответствии с амплитудой рассеяния при этой энергии, а "дополнительные" дают параметризацию всех потенциалов с заданной амплитудой рассеяния.

3. Показано, что введенные данные рассеяния образуют полную независимую систему параметров решений.

4. Найдены необходимые и достаточные условия на данные рассеяния, обеспечивающие потенциальность и вещественность отвечающих им операторов Шредингера (аналоги $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ редукций Веселова-Новикова).

5. Построены явные примеры неособых вещественных рациональных потенциалов с нулевой амплитудой рассеяния во всех направлениях ("прозрачных") при одном уровне энергии. Эти потенциалы отвечают рациональным солитонам уравнений Веселова-Новикова.

6. Доказано существование "прозрачных" при одной энергии потенциалов в классе гладких вещественных функций, убывающих на бесконечности быстрее любой степени расстояния.

7. Получено решение задачи Коши для уравнений Веселова-Новикова в классе потенциалов, выходящих на бесконечности на константу.

8. Показано, что обратная задача рассеяния для двумерного оператора Шредингера с вещественным потенциалом при фиксированной отрицательной энергии не требует предположения о малости нормы "данных рассеяния", однако весь спектр построенных операторов лежит выше нашего уровня энергии, и тем самым мы получаем лишь часть потенциалов. Тем самым доказано, что для систем общего вида чистый метод $\bar{\partial}$-проблемы дает лишь часть решений.

9. Получено новое прямое доказательство положительности "конечнозонных при одной энергии" операторов, отвечающих M-кривой.

10. Построено преобразование рассеяния для убывающих на бесконечности потенциалов на фоне конечнозонных. Показано, что при этом возникает $\bar{\partial}$-проблема на спектральной кривой фонового потенциала.

11. Доказана несингулярность преобразования рассеяния для спектральной задачи, линеаризующей уравнение Кадомцева-Петвиашвили 2 для быстро убывающих на бесконечности вещественных потенциалов без условия малости нормы. Тем самым доказана разрешимость задачи Коши для этого уравнения при сколь угодно больших вещественных начальных условиях. Построено преобразование рассеяния для этой спектральной задачи в классе убывающих потенциалов на фоне конечнозонных.

12. Вычислено действие части неизоспектральных симметрий на конечнозонных решениях уравнения Кадомцева-Петвиашвили. Получена простая геометрическая интерпретация соответствующих им деформаций комплексных структур спектральных кривых.

13. Показано, что по крайней мере для не зависящей от y редукции уравнения Кадомцева-Петвиашвили – уравнения Кортевега – де Фриза это действие наследутся усредненными системами.

14. Предложен новый алгоритм построения чисто периодических конечнозонных решений некоторых солитонных уравнений, использующий неизоспектральные деформации.

18 Список литературы

[1] В.А.Белинский, В.Е.Захаров, *Интегрирование уравнений Эйнштейна методом обратной задачи рассеяния и вычисление точных солитонных решений*, ЖЭТФ, **77**, 3 (1979).

[2] Ю.М.Березанский, *О теореме единственности в обратной задаче спектрального анализа для уравнения Шредингера*, Труды ММО, **7**, 3-62 (1958).

[3] Р.Ф.Бикбаев, Р.А.Шарипов, *Временная асимптотика при $t \to \infty$ задачи Коши для уравнения КдФ с конечнозонными граничными условиями*, ТМФ, **78**, 3, 244-252 (1989).

[4] С.П.Бурцев, В.Е.Захаров, А.В.Михайлов, *Метод обратной задачи с переменным спектральным параметром*, ТМФ, **70**, 3, 323–341, (1987).

[5] И.Н.Векуа, *Обобщенные аналитические функции*, М.: Физматгиз, (1980).

[6] А.П.Веселов *Структура аксиально симметричных солитонных решений уравнений Эйнштейна*, ТМФ, **54**, 2, 239–245 (1983).

[7] А.П.Веселов, С.П.Новиков, *Конечнозонные двумерные операторы Шредингера. Потенциальные операторы.*, ДАН СССР, **279**, 4, 784-788 (1984).

[8] А.П.Веселов, С.П.Новиков, *Конечнозонные двумерные операторы Шредингера. Явные формулы и эволюционные уравнения*, ДАН СССР, **279**, 1, 20-24 (1984).

[9] И.М.Гельфанд, Б.М.Левитан, *Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции*, Изв. АН СССР, сер. мат., **15**, 2, 309-360 (1951).

[10] И.М.Гельфанд, Б.М.Левитан, *Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка*, ДАН СССР, **88**, 4, 593-596 (1955).

[11] П.Г.Гриневич, С.В.Манаков, *Обратная задача теории рассеяния для двумерного оператора Шредингера, $\bar{\partial}$-метод и нелинейные уравнения*, Функциональный анализ и его приложения, **20**, 2, 14-24 (1986).

[12] П.Г.Гриневич, Р.Г.Новиков, *Аналоги многосолитонных потенциалов для двумерного оператора Шредингера*, Функциональный анализ и его приложения, **19**, 4, 32-42 (1985).

[13] П.Г.Гриневич, Р.Г.Новиков, *Аналоги многосолитонных потенциалов для двумерного оператора Шредингера и нелокальная задача Римана*, ДАН СССР, **286**, 1, 19-22 (1986).

[14] П.Г.Гриневич, *Рациональные солитоны уравнений Веселова-Новикова – безотражательные при фиксированной энергии двумерные потенциалы*, ТМФ, **69**, 2, 307-310 (1986).

[15] П.Г.Гриневич, С.П.Новиков, *Двумерная "обратная задача рассеяния" для отрицательных энергий и обобщенно-аналитические функции. 1. Энергии ниже основного состояния*, Функциональный анализ и его приложения, **22**, 1, 23-33 (1988).

[16] П.Г.Гриневич, *Быстроубывающие потенциалы на фоне конечнозонных и $\bar{\partial}$-проблема на римановых поверхностях*, Функциональный анализ и его приложения, **23**, 4, 79-80 (1989).

[17] P.G.Grinevich, *Fast decaying potentials on the finite-gap background and the $\bar{\partial}$-problem on the Riemann surfaces*, ТМФ, **99**, 2, 300-308 (1994).

[18] П.Г.Гриневич, А.Ю.Орлов, *Вариации комплексной структуры римановых поверхностей векторными полями на окружности и объекты теории КП. Задача Кричевера-Новикова на функции Бейкера-Ахиезера*, Функциональный анализ и его приложения, **24**, 1, 72-73 (1990).

[19] С.Ю.Доброхотов, *Резонансная поправка к адиабатически возмущенному конечнозонному почти периодическому решению уравнения Кортевега - де Фриза*, Мат.заметки, **44**, 4, 551-555 (1988).

[20] С.Ю.Доброхотов, *Резонансы в асимптотике решения задачи Коши для уравнения Шредингера с быстроосциллирующим конечнозонным потенциалом*, Мат.заметки, **44**, 3, 319-340 (1988).

[21] С.Ю.Доброхотов, В.П.Маслов, *Конечнозонные почти периодические решения в ВКБ-приближениях*, Современные проблемы математики. Итоги науки и техники.-М.:ВИНИТИ, **15**, 3-94 (1980).

[22] Е.И.Динабург, Я.Г.Синай, *О спектре одномерного уравнения Шредингера с квазипериодическим потенциалом*, Функциональный анализ и его приложения, **9**, 4, 8-21 (1975).

[23] В.С.Дрюма, *Об аналитическом решении двумерного уравнения Кортевега де Вриза (КДВ)*, Письма в ЖЭТФ, **19**, 12, 753-755 (1974).

[24] Б.А.Дубровин, *Обратная задача теории рассеяния для периодических конечнозонных потенциалов*, Функциональный анализ и его приложения, **9**, 1, 65-66 (1975).

[25] Б.А.Дубровин, *Тета-функции и нелинейные уравнения*, УМН, **36**, вып.2, 11-80 (1981).

[26] Б.А.Дубровин *К дифференциальной геометрии сильно интегрируемых систем гидродинамического типа*, Функциональный анализ и его приложения, **24**, 4, 25-30 (1990).

[27] Б.А.Дубровин, И.М.Кричевер, С.П.Новиков *Уравнение Шредингера в периодическом поле и римановы поверхности*, ДАН, **229**, вып.1, 15-18 (1976).

[28] Б.А.Дубровин, В.Б.Матвеев, С.П.Новиков, *Нелинейные уравнения типа Кортевега-де Вриза, конечнозонные линейные операторы и Абелевы многообразия*, УМН, **31**, 1, 56-136 (1976).

[29] Б.А.Дубровин, С.М.Натанзон, *Вещественные тета-функциональные решения уравнения Кадомцева-Петвиашвили*, УМН, **55**, вып.2, 267-286 (1988).

[30] Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, *Гидродинамика слабо деформированных солитонных решеток. Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория*, УМН, **44**, 6, 30-98 (1989)

[31] Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, *Гамильтонов формализм одномерных систем гидродинамического типа и метод усреднения Боголюбова-Уизема*, ДАН СССР, **270**, 4, 781-785 (1983).

[32] В.Е.Захаров *Распространие ударных волн вдоль солитона на поверхности жидкости*, Изв. Вузов, сер.Радиофизика, **29**, 9, 1073-1079 (1986).

[33] В.Е.Захаров, С.В.Манаков, *Многомерные нелинейные интегрируемые системы и методы построения их решений*, Зап.научн.сем. ЛОМИ, **133**, 77-91 (1984).

[34] В.Е.Захаров, С.В.Манаков, *Построение многомерных интегрируемых систем и их решений*, Функциональный анализ и его прил., **19**, вып.2, 11-25 (1985).

[35] В.Е.Захаров, С.В.Манаков, С.П.Новиков, Л.П.Питаевский *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, М.: Наука, (1980).

[36] В.Е.Захаров, А.Б.Шабат, *Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи теории рассеяния*, Функциональный анализ и его прил., **8**, 3, 43-53 (1974).

[37] В.Е.Захаров, А.Б.Шабат, *Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи теории рассеяния II*, Функциональный анализ и его прил., **13**, 3, 13-22 (1979).

[38] Н.Х.Ибрагимов, А.Б.Шабат, *Уравнение Кортевега – де Фриза с групповой точки зрения*, ДАН СССР, **244**, 1, 56-61 (1979).

[39] А.Р.Итс, В.Б.Матвеев, *Операторы Шредингера с конечным числом лакун и многосолитонные решения уравнения КортевеадеФриза*, ТМФ, **23**, 1, 51-67 (1975).

[40] Б.Б.Кадомцев, В.И.Петвиашвили, *Об устойчивости уединенных волн в слабо дисперигирующих средах*, ДАН СССР, **192**, 4, 753-756 (1970).

[41] М.Л.Концевич, *Алгебра Вирасоро и пространства Тейхмюллера*, Функциональный анализ и его прил., **21**, 2, 78-79 (1987).

[42] И.М.Кричевер, *Алгеброгеометрическое построение уравнений Захарова-Шабата и их периодических решений*, ДАН СССР, **227**, 2, 291-294, (1976).

[43] И.М.Кричевер, *Спектральная теория двумерного периодического оператора Шредингера*, УМН, **44**, 2, 121-144 (1989).

[44] И.М.Кричевер, *Метод усреднения для двумерных "интегрируемых" уравнений*, Функциональный анализ и его прил., **22**, 3, 37-52 (1989).

[45] И.М.Кричевер, *Безотражательные потенциалы на фоне конечнозонных*, Функциональный анализ и его прил., **9**, 2, 161-163 (1975).

[46] И.М.Кричевер, *Спектральная теория "конечнозонных" нестационарных операторов Шредингера. Нестационарная модель Пайерлса*, Функциональный анализ и его прил., **20**, 3, 42-54 (1986).

[47] И.М.Кричевер, С.П.Новиков, *Алгебры типа Вирасоро, тензор энергии-импульса и операторные разложения на римановых поверхностях*, Функциональный анализ и его прил., **23**, 1, 24-40 (1989).

[48] И.М.Кричевер, С.П.Новиков, *Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и структуры теории солитонов*, Функциональный анализ и его прил., **21**, 2, 46-63 (1987).

[49] И.М.Кричевер, С.П.Новиков, *Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и струны в пространстве Минковского*, Функциональный анализ и его прил., **21**, 4, 47-61 (1987).

[50] Е.А.Кузнецов, А.В.Михайлов, *Устойчивость стационарных волн в нелинейных средах со слабой дисперсией*, ЖЭТФ, **40**, 5, 855-859 (1974).

[51] Р.Курант, Д.Гильберт, *Методы математической физики*, М.: Гостехиздат, (1954).

[52] Л.Д,.Ландау, Е.М.Лифшиц, *Теоретическая физика, том III. Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, М.: Наука, (1974).

[53] В.Д.Липовский, *Гамильтонова структура уравнения Кадомцева-Петвиашвили II в классе убывающих данных Коши*, Функциональный анализ и его прил., **20**, 4, 35-43 (1986).

[54] С.В.Манаков, *Метод обратной задачи рассеяния и двумерные эволюционные уравнения*, УМН, **31**, вып.5, 245-246 (1976).

[55] В.А.Марченко, *Восстановление потенциальной энергии по фазам рассеянных волн*, ДАН СССР, **104**, 5, 695-698 (1955).

[56] В.А.Марченко, И.В.Островский, *Характеристика спектра оператора Хилла*, Мат. сборник, **97**, 4, 540-606 (1975).

[57] С.М.Натанзон, *Примианы вещественных кривых и их приложения к эффективизации операторов Шредингера*, Функциональный анализ и его прил., **23**, 1, 41-55 (1989).

[58] С.М.Натанзон, *Дифференциальные уравнения на тета-функции Прима. Критерий вещественности двумерных конечнозонных потенциальных операторов Шредингера*, Функциональный анализ и его прил., **26**, 1, 17-26 (1992).

[59] С.П.Новиков, *Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза I*, Функциональный анализ и его прил., **8**, 3, 54-66 (1974).

[60] С.П.Новиков, *Геометрия консервативных систем гидродинамического типа*, УМН, **40**, 4, 79-89 (1985).

[61] Р.Г.Новиков, *Построение двумерного оператора Шредингера по амплитуде рассеяния при фиксированной энергии*, ТМФ, **66**, 2, 234-240 (1986).

[62] Р.Г.Новиков, *Восстановление двумерного оператора Шредингера по амплитуде рассеяния при фиксированной энергии*, Функциональный анализ и его прил., **20**, 3, 90-91 (1986),

[63] Р.Г.Новиков, Г.М.Хенкин,*Решение многомерной обратной задачи на основе обобщенных дисперсионных соотношений*, ДАН СССР, **292**, 4, 814-818 (1987)

[64] Р.Г.Новиков, Г.М.Хенкин, $\bar{\partial}$ - *Уравнение в многомерной обратной задаче рассеяния*, УМН, **42**, вып.3, 93-152 (1987).

[65] А.Ю.Орлов, Е.И.Шульман, *Дополнительные симметрии нелинейного уравнения Шредингера*, ТМФ, **64**, 323-327 (1985).

[66] А.Я.Повзнер, *О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора* $-\Delta u + cu$, Мат. сборник, **32**, 1, 109-156 (1953).

[67] М.Рид, Б.Саймон, *Методы современной математической физики*, Москва: Мир, (1977).

[68] Дж.Спрингер, *Введение в теорию римановых поверхностей*, М.:Издательсьво иностранной литературы, (1960).

[69] И.А. Тайманов, *Эффективизация тета-функциональных формул для двумерных потенциальных операторов Шредингера, конечнозонных на одном уровне энергии*, ДАН СССР, **285**, 5, 1067-1070 (1985).

[70] И.А. Тайманов, *Многообразия Прима разветвленных накрытий и нелинейные уравнения*, Математический сборник, ДАН СССР, **181**, 7, 934-950 (1990).

[71] Дж.Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, М.: Мир, (1977).

[72] Л.Д.Фаддеев, *Обратная задача квантовой теории рассеяния*, Современные проблемы математики, т.3, М.: ВИНИТИ (1974).

[73] Л.Д.Фаддеев, *Единственность решения обратной задачи рассеяния*, Вестн. ЛГУ, **7**, 126-130 (1956).

[74] Л.Д.Фаддеев, *Растущие решения уравнения Шредингера*, ДАН СССР, **165**, 3, 514-517 (1965).

[75] Б.Л.Фейгин, Д.Б.Фукс, *Кососимметрические инвариантные дифференциальные операторы на прямой и модули Верма над алгеброй Вирасоро* , Функциональный анализ и его прил., **16**, 2, 47 (1982).

[76] Н.Е.Фирсова, *О решении задачи Коши для уравнения КдВ с начальными данными, являющимися суммой периодической и быстроубывающей функций*, Мат. сборник, **135**(137), 2, 261-268 (1988).

[77] С.П.Царев, *О скобках Пуассона и одномерных гамильтоновых системах гидродинамического типа*, ДАН СССР, **282**, 3,534-537 (1985).

[78] С.П.Царев, *Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа*, Изв. АН СССР, сер. Математика, **54**, 5, (1990).

[79] И.В.Чередник, *Об условиях вещественности в "конечнозонном интегрировании"*, ДАН СССР, **252**, вып.5, 1104-1108 (1980).

[80] Б.В.Шабат, *Введение в комплексный анализ*, М:Наука, (1976).

[81] К.Шадан, П.Сабатье, *Обратные задачи в квантовой теории рассеяния*, М.:Мир, (1980).

[82] А.С.Шварц, *Фермионная струна и универсальное простанство модулей*, Письма в ЖЭТФ, **46**, 9, 340–342 (1987).

[83] М.Шиффер, Д.К.Спенсер, *Функционалы на конечных римановых поверхностях*, М.: ИЛ, (1957).

[84] M.J.Ablowitz, D.Bar Jaakov, A.S.Fokas, *On the inverse scattering of the time-dependent Schrödinger equation and the associated Kadomtsev-Petviashvili equation*, Stud. in applied math., **69**, 2, 135-143 (1983).

[85] H.M.Babujian, *Off-shell Bethe ansatz equations and N-point correlators in the $SU(2)$ WZNW theory*, J. Phys. A: Math. Gen., **26** 6981-6990 (1983).

[86] R.Beals, R.R.Coifman, *Scattering, transformations spectrales et equations d'evolution nonlineare I, II*, Seminaire Goulaouic – Meyer-Schwartz, – 1980-1981, Exp.22; 1981-1982, Exp.21, Ecole Polytechnique, Palaiseau.

[87] R.Beals, R.R.Coifman, *Multidimensional inverse scattering and nonlinear partial differential equations*, Proc. of Symposia in Pure Mathematics, **43**, 45-70 (1985).

[88] A.A.Beilinson, V.V.Schechtman, *Determinant bundles and Virasoro algebras*, Preprint 497, University Utrecht.

[89] E.D.Belokolos, A.I.Bobenko, V.Z.Enol'skii, A.R.Its, V.B.Matveev, *Algebro-Gemetric Approach to nonlinear Integrable Equations*, Springer-Verlag, (1994).

[90] M.Boiti, J.Leon, M.Manna, F.Pempinelli, *On a spectral transform of a KDV-like equation related to the Schrd̈inger operator in the plane*, Inverse Problems, **3**, 25-36 (1987).

[91] J.Bourgain, *On the Cauchy problem for the Kadomtsev- Petviashvili equation*, Geometric and Functional Analysis, **3**, 4, 315-341, (1993)

[92] F.Calogero, A.Degasperis, *Exact solution via the spectral transform of a generalization with linearly x-dependent coefficients of the modified Korteveg-de Vries equation*, Let. Nuovo Cimento, **22**, 420 (1978).

[93] H.H.Chen, Y.C.Lee, J.E.Lin, *On a new hierarchy of symmetries for the Kadomtsev-Petviashvili equation*, Phys. **D 9**, 3, 439-443 (1983).

[94] E.Date, M.Kashiwara, M.Jimbo, T.Miwa, *Transformation groups for soliton equations*, in: Proceedings of "Nonlinear integrable systems – classical theory and quantum theory" (Kyoto, 1981), 39–119, World Sci. Publishing, Singapore, (1983).

[95] R.Dijkgraaf, H.Verlinde, E.Verlinde, *Topological strings in* $d < 1$, Princeton preprint PUPT - 1024, IASSNS-HEP - 90/71.

[96] B.A.Dubrovin, *Hamiltonian formalism of Whitham-type hierarchies and topological Landau-Ginzburg models*, Commun. Math. Phys., **145**, 415-427 (1992) .

[97] N.M.Ercolani, M.G.Forest, D.W.McLaughlin, A.Sinha, *Strongly nonlinear modal equations for nearly integrable PDEs*, J. Nonlinear Sci., **3** 393-426 (1993).

[98] H.Flaschka, M.G.Forest, D.W.McLaughlin, *Multiphase averaging and the inverse spectral solution of the KdV equation*, Commun. Pure Appl. Math., **33** 739-784 (1980).

[99] A.S.Fokas, M.J.Ablowitz, *On the inverse scattering transform for the Kadomtsev-Petviashvili equation*, Stud. in applied math., **69**, 3, 211-228 (1983).

[100] A.S.Fokas, P.M.Santini, *Recursion operators and bi- hamiltonian structures in Multidimensions I*, Commun. Math. Phys., **115**, 375-419 (1988).

[101] A.S.Fokas, P.M.Santini, *Recursion operators and bi- hamiltonian structures in Multidimensions II*, Commun. Math. Phys., **116**, 449-474 (1988).

[102] M.Jimbo, T.Miwa, *Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients II*, Physica **2D**, 3, 407–448 (1981).

[103] A.S.Fokas, L.-Y.Sung, *On the solvability of the N-Wave, Davey Stewartson and Kadomtsev-Petviashvili equation*, Inverse Problem, **8**, 673-708 (1992).

[104] M.G.Forest, D.W.McLaughlin, *Modulations of perturbed KdV wave-trains*, SIAM J.of Appl. Math., **44**, 2, 278-300 (1984).

[105] M.G.Forest, D.W.McLaughlin, *Modulations of Sinh- and Sine-Gordon wave-trains*, Stud. Appl. Math., **68**, 1, 11-59 (1983).

[106] B.Fuchssteiner, *Master symmetries, higher order time- dependent symmetries and conserved densities of nonlinear evolution equations*, Progr. Theor. Phys., **70**, 1508-1522 (1983).

[107] C.S.Gardner, J.M.Green, M.D.Kruskal, r.M.Miura, *A method for solving the Korteveg-de Vries equation*, Phys. rev. Lett., **19**,1095-1098 (1967).

[108] A.Gerasimov, A.Marshakov, A.Mironov, A.Morozov, A.Orlov, *Matrix model of two-dimensional gravity and Toda theory*, Nuclear Phys. B **357**, 565-618 (1991).

[109] P.G.Grinevich, R.G.Novikov, *Transparent Potentials at Fixed Energy in Dimension Two. Fixed-Energy Dispersion Relations for the Fast Decaying Potentials*, Commun. Math. Phys., **174**, 409-446 (1995).

[110] P.G.Grinevich, *Nonsingularity of the direct scattering transform for the Kadomtsev-Petviashvili 2 equation with real exponentially decaying at infinity potential*, Lett. Math. Phys., **40**, 59-73 (1997).

[111] P.G.Grinevich, A.Yu.Orlov, *Virasoro action on Riemann surfaces, Grassmanians,* $\det\bar{\partial}$ *and Segal-Wilson* τ*- function*, Problems of modern quantum field theory (Invited lecvtures of the spring school held in Alushta USSR, April 24 - May 5, 1989), ed. A.A.Belavin, A.U.Klimyk, A.B.Zamolodchikov, Springer-Verlag, 1989, pp. 86-106.

[112] P.G.Grinevich, A.Yu.Orlov, E.I.Schulman, *On the symmetries of the integrable systems*, Important developments in soliton theory, ed. A. Fokas, V.E. Zakharov, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 283-301 (1993).

[113] P.G.Grinevich, *The action of the Virasoro nonisospectral KdV symmetries of the Whitham equations*, Nonlinear Processes in Physics (Proccedings of the 3 Potsdam - 5 Kiev Workshop at Clarkson University, Potsdam, NY, USA, August 1-11, 1991), ed. A.S.Fokas, D.J.Kaup, A.C.Newell, V.E.Zakharov, Springer-Verlag, 108-112 (1993).

[114] P.G.Grinevich, *Nonisospectral symmetries of the KdV equation and the corresponding symmetries of the Whitham equations*, Singular limits of Dispersive waves, ed. N.M.Ercolany, I.R.Gabitov, C.D.Levermore, D.Serre, NATO ASI Series, Series B: Physics Vol. 320, Plenum, 67-88 (1994).

[115] P.G.Grinevich, M.U.Schmidt, *Period preserving nonisospectral flows and the moduli space of periodic solutions of soliton equations*, Physica D, **87**, 73-98 (1995);

[116] G.M.Henkin, R.G.Novikov, *A multidimensional inverse problem in quantum and acoustic scattering*, Inverse Problems, **4**, 103-121 (1988)

[117] W.Koppelman, *Singular integral equations, boundary value problem and Rieman-Roch theorem*, J. Math. and Mech., **10**, 2, 247-277 (1961).

[118] I.M.Krichever, *Perturbation theory in periodic problems for the two-dimensional integrable systems*, Soviet Sci.Rev.,Math.Phys.Rev., Gordon and Breach, Harwood Academic Publishers, **9** (1992).

[119] I.M.Krichever, *The Cauchy problem for doubly periodic solutions of KP-II equation*, Important developments in soliton theory, ed. A. Fokas, V.E. Zakharov, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 123-146 (1993).

[120] I.M.Krichever, *Whitham theory for integrable systems and topological quantum field theories*, New symmetry principles in quantum field theory, Cargese, 1991, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys., 295, Plenum, New York, 309–327 (1992).

[121] I.M.Krichever, *The dispersionless Lax equations and topological minimal models*, Comm. Math. Phys., **143**, 2, 415–429 (1992).

[122] I.M.Krichever, *The τ -function of the universal Whitham hierarchy, matrix models and topological field theories*, Commun. Pure Appl. Math., **47** (1994).

[123] P.D.Lax, *Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves*, Comm. Pure and Appl. Math., **21**, 467-490 (1968).

[124] P.D.Lax, *Periodic solutions of the KdV equation*, Lecture in Appl. Math., AMS, **15**, 85-96 (1974).

[125] P.D.Lax, C.David Levermore, *The small dispersion limit of the KdV equation III*, Commun. Pure Appl. Math. **36**, 253-290, 571-593, 809-830 (1983).

[126] D.Maison, *Are the stationary, axially symmetric Einstein equations completely integrable?*, Phys. Rev. Lett., **41**, 521 (1978).

[127] D.Maison, *On the complete integrability of the stationary, axially symmetric Einstein equations*, Journ. Math. Phys., **20**, 871 (1979).

[128] D.Mamford, *Tata lectures on Theta*, Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart (1983).

[129] S.V.Manakov, *The inverse scattering transform for the time-dependent Schrödinger equation and Kadomtsev-Petviashvili equation*, Physica **3D**, 1&2, 420-427 (1981).

[130] H.McKean, E.Trubowitz, *Hill's operator and hyperelliptic function theory in the presence of of infinitely many branch points*, Comm. Pure Appl. Math **29**, 143-226 (1976).

[131] H.P.McKean, P.van Moerbeke, *The spectrum of Hill's equation.*, Invent. Math., **30** 217-274 (1975).

[132] A.J.Nachman, M.J.Ablowitz, *A multidimensional inverse-scattering method*, Stud. in applied math., **71**, 3, 243-250 (1974).

[133] S.M.Natanzon, *Real nonsigular finite zone solutions of soliton equations*, Amer. Math. Soc. Transl., **170**, 2, 153-183 (1995).

[134] R.G.Newton, *Construction of potentials from the phase shifts at fixed energy*, J. Math. Phys., **3**, 75-82 (1962).

[135] R.G.Newton, The three-dimensional inverse scattering problem in quantum mechanics, Indiana University, Bloomington (1974).

[136] R.G.Novikov, *The inverse scattering problem on a fixed energy level for the two-dimensional Schrödinger operator*, J. Funkt. Anal., **103**, 409-463 (1992).

[137] W.Oevel, B.Fuchssteiner, *Explicit formulas for symmetries and conservation laws of the Kadomtsev - Ptviashvili equation*, Phys. Lett., **88A**, 323 (1982).

[138] A.Yu.Orlov, *Vertex operator, $\bar{\partial}$-problem, symmetries, variational identies and hamiltonian formalism for 2+1 integrable systems*, Plasma theory and nonlinear and turbulent processes in physics, Kiev,USSR, 13-25 April 1987, World Scientific (1988).

[139] A.Yu.Orlov, E.I.Schulman, *Additional symmetries of one-dimensional integrable equations and conformal algebra representation*, Preprint IAE217, Novosibirsk (1984).

[140] A.Yu.Orlov, E.I.Schulman, *Additional symmetries for integrable equations and conformal algebra representation* , Lett. Math. Phys., **12**, 3,171-179 (1986).

[141] A.Yu.Orlov, P.Winternitz, *Algebra of pseudodifferential operators and symmetries of equations in the Kadomtsev-Petviashvili hierarchy*, J.Math.Phys., **38**, 9, 4644-4674 (1997).

[142] T. Regge, *Introduction to complexe orbital moments*, Nuovo Cimento, **14**, 951-976 (1959).

[143] Yu.L. Rodin, *The Riemann boundary value problems on closed Riemann surfaces and integrable systems*, Physica **D**, **24**, 1-3, 1-53 (1987).

[144] P.C.Sabatier, *Asymptotic properties of the potentials in the inverse–scattering problem at fixed energy*, J. Math. Phys. **7**, 1515-1531 (1966).

[145] M.U.Schmidt, *Integrable systems and Riemann surfaces of infinite genus*, Mem. Am Math. Soc., 581 (1996).

[146] F.J.Schwarz, *Symmetries of the two-dimensional Korteveg-de Vries equation*, J. Phys. Soc. Japan, **51**, 8, 2387-2388 (1982).

[147] G.Segal, G.Wilson, *Loop groups and equations of KdV type*, Publ. Math. IHES, 61, 5-65 (1985).

[148] T.-Y.Tsai, *The Schrödinger operator in the plane*, Inverse Problems, **9**, 763-767 (1993).

[149] X.Zhou, *Inverse scattering transform for the time dependent Schrödinger equation with application to the KPI equation*, Commun. Math. Phys., **128**, 551-564 (1990).

Основные публикации по теме диссертации.

1. П.Г.Гриневич, Р.Г.Новиков. Аналоги многосолитонных потенциалов для двумерного оператора Шредингера. — Функциональный анализ и его приложения, 1985 г., т. 19, вып. 4, стр. 32-42.

2. П.Г.Гриневич, Р.Г.Новиков. Аналоги многосолитонных потенциалов для двумерного оператора Шредингера и нелокальная задача Римана. — Доклады Академии Наук СССР, 1986 г., т. 286, № 1, стр. 19-22.

3. П.Г.Гриневич, С.В.Манаков. Обратная задача теории рассеяния для двумерного оператора Шредингера, $\bar{\partial}$-метод и нелинейные уравнения. — Функциональный анализ и его приложения, 1986 г., т. 20, вып. 2, стр. 14-24.

4. П.Г.Гриневич. Рациональные солитоны уравнений Веселова-Новикова – безотражательные при фиксированной энергии двумерные потенциалы. — Теоретическая и математическая физика, 1986 г., т.69, № 2, стр. 307-310.

5. П.Г.Гриневич, С.П.Новиков. Двумерная "обратная задача рассеяния" для отрицательных энергий и обобщенно-аналитические функции. 1. Энергии ниже основного состояния. — Функциональный анализ и его приложения, 1988 г., т. 22, вып. 1, стр. 23-33.

6. П.Г.Гриневич. Быстроубывающие потенциалы на фоне конечнозонных и $\bar{\partial}$-проблема на римановых поверхностях. — Функциональный анализ и его приложения, 1989 г., т. 23, вып. 4, стр. 79-80.

7. P.G.Grinevich, A.Yu.Orlov. Virasoro action on Riemann surfaces, Grassmanians, $\det \bar{\partial}$ and Segal-Wilson τ- function.— в сборнике Problems of modern quantum field theory (Invited lecvtures of the spring school held

in Alushta USSR, April 24 - May 5, 1989), ed. A.A.Belavin, A.U.Klimyk, A.B.Zamolodchikov, Springer-Verlag, 1989, pp. 86-106.

8. П.Г.Гриневич, А.Ю.Орлов. Вариации комплексной структуры римановых поверхностей векторными полями на окружности и объекты теории КП. Задача Кричевера-Новикова на функции Бейкера-Ахиезера. Функциональный анализ и его приложения, 1990 г., т. 24, вып. 1, стр. 72-73.

9. P.G.Grinevich, A.Yu.Orlov, E.I.Schulman. On the symmetries of the integrable systems. — в книге "Important developments in soliton theory", ed. A. Fokas, V.E. Zakharov, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1993, pp. 283-301.

10. P.G.Grinevich. The action of the Virasoro nonisospectral KdV symmetries of the Whitham equations. - в сборнике "Nonlinear Processes in Physics" (Proccedings of the 3 Potsdam - 5 Kiev Workshop at Clarkson University, Potsdam, NY, USA, August 1-11, 1991), ed. A.S.Fokas, D.J.Kaup, A.C.Newell, V.E.Zakharov, Springer-Verlag, 1993, pp. 108-112.

11. P.G.Grinevich. Nonisospectral symmetries of the KdV equation and the corresponding symmetries of the Whitham equations. — в сборнике "Singular limits of Dispersive waves", ed. N.M.Ercolany, I.R.Gabitov, C.D.Levermore, D.Serre, NATO ASI Series, Series B: Physics Vol. 320, Plenum, 1994, pp. 67-88.

12. P.G.Grinevich. Fast decaying potentials on the finite-gap background and the $\bar{\partial}$-problem on the Riemann surfaces. — Теоретическая и математическая физика, 1994 г., т.99, № 2, стр. 300-308.

13. П.Г.Гриневич, Р.Г.Новиков. Transparent Potentials at Fixed Energy in Dimension Two. Fixed-Energy Dispersion Relations for the Fast

Decaying Potentials. — Commun. Math. Phys., 1995, v.174, pp. 409-446.

14. P.G.Grinevich, M.U.Schmidt. Period preserving nonisospectral flows and the moduli space of periodic solutions of soliton equations. — Physica D, 1995, v. 87, pp 73-98;

15. P.G.Grinevich. Nonsingularity of the direct scattering transform for the Kadomtsev-Petviashvili 2 equation with real exponentially decaying at infinity potential. — Lett. Math. Phys., 1997, v. 40, pp. 59-73;