Письма в ЖЭТФ, том 25, вып. 8, стр. 377 – 380 *20 апреля 1977 г.*

ЛАГРАНЖЕВЫ УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ АНИЗОТРОПНОЙ СВЕРХТЕКУЧЕЙ ЖИДКОСТИ $He^3 - A$

И.М.Халатников, В.В.Лебедев

На основе лагранжева формализма получены уравнения, описывающие гидродинамику $He^3 - A$. Найдена форма законов сохранения. Рассмотрены диссипативные члены в гидродинамических уравнениях.

В работе [1] был развит лагранжев формализм для описания гидродинамики He^{II}. Этот метод может быть обобщен на случай анизотропной сверхтекучей жидкости $He^3 - A$. По сравнению с He^{II} в этой фазе дополнительно имеется параметр порядка $\vec\Phi = \vec\Phi_1 + i\vec\Phi_2$ (мы отвлекаемся от спиновых переменных), в энергии ϵ появляется зависимость от $\mathbf{l}$ и $\nabla_i \mathbf{l}$ ($\mathbf{l}$ – момент пары). К лагранжиану работы [1] добавляем член, описывающий перенос $\vec\Phi_1$ (при этом $\vec\Phi_2$ автоматически появляется как лагранжев множитель), а также структурное условие на репер $\vec\Phi_1$, $\vec\Phi_2$, $\mathbf{l}$. В результате получаем

$$L = \tfrac{1}{2}\rho v_s^2 - \mathbf{j}\mathbf{v}_s + \tilde\epsilon(\rho, s, \mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n, \mathbf{l}, \nabla_i l_k) - a(\dot\rho + \nabla\mathbf{j}) - \beta(\dot s + \nabla(s\mathbf{v}_n)) -$$

$$- \gamma(\dot f + \nabla(f\mathbf{v}_n)) - \vec\Phi_2 \frac{d}{d\tau}\vec\Phi_1 - \mathbf{g}(\mathbf{l} - [\vec\Phi_1, \vec\Phi_2]), \qquad (1)$$

где $d/d\tau = \hbar/2m\left(\rho\dfrac{\partial}{\partial t} + \mathbf{j}\nabla\right)$, f, γ – переменные Клебша, $\tilde\epsilon = \epsilon - \mathbf{p}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)$, $\mathbf{p} = \partial\tilde\epsilon/\partial\mathbf{v}_s$ – нормальная плотность импульса[1]. Лагранжиан (1) приводит к системе уравнений

$$\dot\rho + \nabla\mathbf{j} = 0 \qquad \dot s + \nabla(s\mathbf{v}_n) = 0 \qquad \dot f + \Delta(f\mathbf{v}_n) = 0, \qquad (2)$$

$$\mathbf{l} = [\vec\Phi_1, \vec\Phi_2] \qquad \mathbf{v}_s = \nabla a - \frac{\hbar}{2m}\Phi_{2i}\nabla\Phi_{1i}, \qquad (3)$$

$$\dot\beta + \mathbf{v}_n\nabla\beta + T = 0 \qquad \dot\gamma + \mathbf{v}_n\nabla\gamma = 0 \qquad \dot a + \tfrac{1}{2}v_s^2 + \mu - \frac{\hbar}{2m}\Phi_2\dot\Phi_1 = 0, \qquad (4)$$

$$\mathbf{p} = s\nabla\beta + f\nabla\gamma \qquad \mathbf{j} = \mathbf{p} + \rho\mathbf{v}_s, \qquad (5)$$

$$\frac{d}{d\tau}\vec\Phi_a = [\mathbf{g}, \vec\Phi_a] \qquad g_i = \frac{\partial\epsilon}{\partial l_i} - \nabla_k\frac{\partial\epsilon}{\partial(\nabla_k l_i)}. \qquad (6)$$

[1] Рассмотренный лагранжев формализм можно при помощи стандартной процедуры свести к гамильтонову.

Отметим, что член $\nabla\alpha$ в выражении (3) для сверхтекучей скорости всегда можно исключить градиентным преобразованием параметра порядка $\vec{\Phi}$. Из (6) следует $d/d\tau\,(\vec{\Phi}_\alpha \vec{\Phi}_\beta) = 0$, т. е. соотношения $\vec{\Phi}_\alpha\vec{\Phi}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$ можно рассматривать, как граничные условия для данной системы уравнений. С учетом этих соотношений из (3) можно найти выражение для ротора сверхтекучей скорости

$$\nabla_i v_{sj} - \nabla_j v_{si} = \frac{\hbar}{2m}\,\mathbf{l}\,[\nabla_i \mathbf{l}, \nabla_j \mathbf{l}\,]. \tag{7}$$

Из (3), (6) непосредственно следует

$$d\mathbf{l}/d\tau = [\,\mathbf{g}, \mathbf{l}\,]. \tag{8}$$

Для сверхтекучей скорости можно найти

$$\frac{\partial v_{si}}{\partial t} = -\nabla_i\,(\mu + \tfrac{1}{2} v_s^2) + \frac{\hbar}{2m}\,\dot{\mathbf{l}}\,[\nabla_i \mathbf{l}, \mathbf{l}\,]. \tag{9}$$

Полученная система уравнений приводит к закону сохранения энергии

$$E = \tfrac{1}{2}\rho v_s^2 + \mathbf{p}\mathbf{v}_s + \epsilon :$$

$$\dot{E} + \nabla \mathbf{Q} = 0,$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{j}\,(\mu + v_s^2/2) + s\mathbf{v}_n T + (\mathbf{p}\mathbf{v}_n)\mathbf{v}_n - \dot{l}_i \frac{\partial\epsilon}{\partial(\nabla l_i)} \quad . \tag{10}$$

Отметим, что из инвариантности E относительно поворотов следует тождество

$$\left[\mathbf{l}, \frac{\partial\epsilon}{\partial\mathbf{l}}\right] + \left[\nabla l_k, \frac{\partial\epsilon}{\partial\nabla l_k}\right] + \left[\nabla_k \mathbf{l}, \frac{\partial\epsilon}{\partial\nabla_k \mathbf{l}}\right] + [\,\mathbf{p}, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s\,] = 0. \tag{11}$$

Из лагранжиана (1) стандартным образом можно найти тензор напряжений, который используем для формулировки закона сохранения импульса

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \nabla_k \pi_{ik} = 0,$$

$$\pi_{ik} = \delta_{ik} P + \nabla_i \mathbf{l}\frac{\partial\epsilon}{\partial\nabla_k \mathbf{l}} + j_k v_{si} + v_{nk} p_i, \tag{12}$$

где $P = Ts + \mu\rho + \mathbf{p}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) - \epsilon$ – давление. Отметим, что тензор π имеет антисимметричную часть, которая при помощи тождества (11) приводится к виду

$$e_{nik}\pi_{ik} = \nabla \mathbf{B}_n + \frac{\hbar}{2m}\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, l_n), \tag{13}$$

где $\mathbf{B}_n = \frac{\hbar}{2m}\mathbf{l}\, j_n - \left[\mathbf{l},\ \frac{\partial\epsilon}{\partial\nabla_n \mathbf{l}}\right]$. Таким образом закон сохранения момента импульса приобретает форму

$$\frac{\partial}{\partial t}\left([\mathbf{r},\mathbf{j}] + \frac{\hbar}{2m}\rho\mathbf{l}\right) = -\nabla_k\left([\mathbf{r},\ \vec{\pi}_k] + \mathbf{B}_k\right). \tag{14}$$

Теперь переходим к рассмотрению диссипативных членов. В силу условия $l^2 = 1$ обобщение уравнения (8) производится заменой $\mathbf{g} \to \mathbf{g} + {}^{\hbar\rho}/_{2m}\mathbf{u}$, обобщение (9) в силу условия (7) достигается путем $\mu \to \mu + h$. Добавляем к π_{ik} диссипативную часть $\tau_{ik} + \lambda\delta_{ik}$ $(\tau_{ii} = 0)$, переписываем уравнение для возрастания энтропии в виде $T(\dot{s} + \nabla(s\,\mathbf{v}_n + {}^{\mathbf{q}}/_T)) = R$ и, используя стандартную процедуру [2] находим $\dot{E} + \nabla(\mathbf{Q} + \mathbf{Q}') = 0$, где

$$Q' = \mathbf{j}_0 h + \lambda\mathbf{v}_n + v_{ni}\vec{\tau}_i + \mathbf{q} - \frac{\partial\epsilon}{\partial(\nabla l_i)}[u, l]_i\,, \tag{15}$$

$$R = -h\nabla\mathbf{j}_0 - \lambda\nabla\mathbf{v}_n - \frac{\mathbf{q}}{T}\nabla T - \mathbf{u}[\mathbf{l},\ \mathbf{g}] - \tau_{ik}w_{ik} \tag{16}$$

и введены $\mathbf{j}_0 = \mathbf{j} - \rho\,\mathbf{v}_n$, $w_{ik} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_{nk} + \nabla_k v_{ni}) - \frac{1}{3}\delta_{ik}\nabla\mathbf{v}_n$. В линейном по пространственным производным приближении находим

$$h = -\zeta_1\nabla\mathbf{j}_0 - \zeta_2\nabla\mathbf{v}_n - \zeta_3(\mathbf{l}w\mathbf{l}),$$

$$\lambda = -\phi_1\nabla\mathbf{j}_0 - \phi_2\nabla\mathbf{v}_n - \phi_3(\mathbf{l}\ w\mathbf{l}),$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{q}}{T} &= -\kappa_1(\nabla T - \mathbf{l}(\mathbf{l}\nabla T)) - \kappa_2[\mathbf{l},\ \nabla T] - \kappa_3\mathbf{l}(\mathbf{l}\nabla T),\\
\mathbf{u} &= -\xi_1(w\mathbf{l}) - \xi_2[\mathbf{l},(w\mathbf{l})] - \xi_3\mathbf{g} - \xi_4[\mathbf{l},\ \mathbf{g}],
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{ik} = {} & -\eta_1\nabla\mathbf{j}_0 l_i l_k - \eta_2\nabla\mathbf{v}_n l_i l_k - \eta_3(\mathbf{l}w\mathbf{l})l_i l_k - \eta_4 e_{imn}l_m w_{nk} - \\
& -\eta_5 l_k((wl)_i - l_i(\mathbf{l}w\mathbf{l})) - \eta_6 l_k[l,(wl)]_i - \eta_7(g_i - l_i(\mathbf{l}\mathbf{g})) - \\
& -\eta_8 l_k[l,\ g]_i - \eta_9(w_{ik} - l_i(wl)_k - l_k(wl)_i + l_i l_k(\mathbf{l}w\mathbf{l})).
\end{aligned}$$

Здесь $\zeta, \phi, \kappa, \xi, \eta$ – кинетические коэффициенты, τ_{ik} получается из $\tilde{\tau}_{ik}$ симметризацией и выделением следа. Требования онсагеровской симметрии приводят к необходимой симметрии матриц

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \eta_5 & \eta_7 \\ \xi_2 & \xi_4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \eta_5 & \eta_8 \\ -\xi_1 & \xi_4 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

В силу положительной определенности квадратичные формы, построенные на матрицах (18), должны иметь положительную определенность, кроме того необходимо $\kappa_1 > 0$, $\kappa_3 > 0$, $\eta_9 > 0$, κ_2, η_4, η_6, ξ_3 произвольны.

Полученная система гидродинамических уравнений в основном совпадает с системой Хо [3], однако имеются отличия, связанные с отсутствием членов с $\mathrm{rot}\ \mathbf{v}_n$. Кроме того в наших уравнениях $\mathbf{l}$ переносится со скоростью $\mathbf{j}/\rho$, однако эта величина может быть переопределена переобозначением кинетических коэффициентов.

Из (14) видно, что переопределением $\mathbf{j}' = \mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathrm{rot}\left(\frac{\hbar}{2m}\rho\mathbf{l}\right)$ мы можем привести законы сохранения плотностей импульса и момента импульса к обычному виду с симметричным тензором напряжений. При этом уравнение (8) сохраняет свой вид, если переобозначить

$$\mathbf{j} \to \mathbf{j}', \quad \mathbf{g} \to \mathbf{g} + \tfrac{1}{2}\left(\rho\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_s + \frac{\hbar}{2m}[\,l, ([\nabla\rho, l]\nabla)\, l\,]\right).$$

Авторы благодарят Хо, любезно приславшего препринт своей статьи, а также И.Дзялошинского и Г.Воловика за обсуждение работы.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
15 марта 1977 г.

Литература

[1] И.М.Халатников. ЖЭТФ, 23, 160, 1952.

[2] И.М.Халатников. Теория сверхтекучести. М., изд. Наука, 1971, гл. V.

[3] Tin Lun Ho. Cornell University. New York, 1977. Preprint.