

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт
теоретической физики им. Л.Д. Ландау Российской академии наук

На правах рукописи

Артемьев Александр Андреевич

**Корреляционные функции в теории струн и квантовой
гравитации Лиувилля**

Специальность 1.3.3 —
«Теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
чл.-корр. РАН, профессор, д.ф.-м.н.,
Белавин Александр Абрамович

Москва — 2026

Оглавление

Введение	4
1. Описание двух подходов к минимальной теории струн	15
1.1 Подход мирового листа	15
1.1.1 Общие свойства минимальных моделей СФТ и теории Лиувилля	15
1.1.2 Минимальная теория струн	20
1.1.3 Кольцо дискретных состояний в МС и высшие уравнения движения	22
1.2 Матричная модель для минимальной струны	25
2. Высшие уравнения движения для корреляторов на торе	33
2.1 Некоторые свойства корреляторов в СФТ на торе	33
2.2 Вычисление корреляционных чисел на торе	38
2.2.1 Случай $\mathcal{T}_{1,2}$	38
2.2.2 Случай $\mathcal{T}_{1,4}$	46
2.3 Обсуждение	53
2.3.1 Общий случай $\mathcal{T}_{1,2k}$ и сравнение с матричной моделью	53
2.3.2 О случае $\mathcal{T}_{1,k}$ с нечётным k	54
2.3.3 Другие выборы фундаментальной области	55
2.3.4 О других теориях двумерной гравитации	58
3. «Квазиклассический» предел амплитуд в минимальной струне	60

3.1	Пререквизиты	61
3.1.1	Классическая теория Лиувилля	61
3.1.2	Некоторые свойства корреляционных чисел в МС	65
3.2	Численное вычисление объемов пространств модулей из СФТ	67
3.2.1	Описание «перевального» метода	68
3.2.2	Пример применения	71
3.2.3	Результаты вычисления	73
3.3	Классическое действие для пертурбативно - тяжелых операторов	77
3.3.1	Мотивация: предел «легких» полей	77
3.3.2	Метод монодромии для вычисления классического действия	79
3.3.3	4 дефекта: пример с 2 тяжелыми операторами	81
3.3.4	4 дефекта: пример с 3 тяжелыми операторами	84
3.3.5	О выводе предыдущих результатов из СФТ	87
3.4	О связи с другими подходами	88
4.	Применение топологической рекурсии к МС	89
4.1	Связь с r -деформированными объемами и теорией пересечений	89
4.1.1	Корреляционные числа и r -деформированные объемы	90
4.1.2	Сравнение спектральных кривых МС и ВМС	93
4.1.3	r -деформированные объемы из теории пересечений	96
4.2	Спектральная кривая после $x - y$ замены и корреляционные числа	100
4.2.1	Интерпретация через интегрируемые иерархии	102
4.2.2	Явные выражения для корреляторов при малых g, n	103
4.2.3	Диаграммная техника для \check{A}_n^g	108
4.2.4	Предел JT/Мирзахани	115
5.	Заключение	120

Введение

Актуальность темы. Важным вопросом современной теоретической физики является задача о построении теории, самосогласованно включающей в себя все известные фундаментальные взаимодействия и справедливой на любых энергетических и пространственных масштабах. Три из четырёх фундаментальных взаимодействий (электромагнитное, слабое и сильное) описываются на языке релятивистской квантовой теории поля в рамках Стандартной модели физики элементарных частиц. Гравитационные взаимодействия не включены в Стандартную модель и, когда квантовые эффекты пренебрежимо малы, хорошо описываются общей теорией относительности Эйнштейна. Рассмотрение эйнштейновской гравитации как квантовой теории поля проблематично, так как, помимо технических сложностей из-за её существенной нелинейности, в четырёх измерениях в теории Эйнштейна отсутствует перенормируемость. Таким образом, она может выступать только в качестве эффективной теории.

В моделях с меньшей размерностью пространства-времени проблема перенормируемости исчезает. Низкоразмерные модели не отражают полностью свойства четырёхмерной гравитации: так, например, в размерности два уравнения Эйнштейна в пустом пространстве выполняются тождественно. Однако, в присутствии граничных условий или материи, взаимодействующей с гравитацией, задача о вычислении корреляционных функций становится нетривиальной и такие двумерные теории могут служить интересными «игрушечными моделями».

В двумерном случае имеется также дискретный подход к описанию квантовой

гравитации — подход матричных моделей. В нём рассматривается задача усреднения по статистическому ансамблю случайных матриц большого размера с некоторым весом. Вычисление корреляционных функций в таких моделях по теории возмущений может быть организовано как суммирование по «ленточным графам», о которых можно думать как о дискретизованных (скажем, триангулированных) случайных двумерных поверхностях. В некоторых точках пространства параметров среднее число граней дискретизованной поверхности расходится и эффективно наибольший вклад в сумму дают «почти непрерывные» поверхности. Взятие так называемого «двойного скейлингового предела» в окрестности таких критических точек приводит к универсальному поведению корреляторов, фактически независимому от конкретного выбора веса, с которым производится усреднение в матричном ансамбле. Ожидается, что это критическое поведение описывается непрерывными теориями двумерной квантовой гравитации.

В последнее время теории двумерной гравитации, предположительно дуальные матричным моделям, активно изучаются; примерами являются гравитация Джакива-Тейтельбойма (JT) [1], «Вирасоро-минимальная струна» (VMC) [2] и «комплексная струна Лиувилля» [3]. Аргументы в пользу дуальности в разных примерах имеют разную природу; так, в JT-гравитации функциональный интеграл вычисляет объемы пространств модулей гиперболических поверхностей, подчиняющиеся характерным для матричных моделей рекуррентным соотношениям, в то время как для VMC соответствие возникает благодаря связи с геометрией определенных расслоений на пространствах модулей кривых. Наличие дуального описания позволяет эффективно исследовать эти теории, что привело к большому набору интересных результатов: от приложений к гораздо менее изученной трехмерной квантовой гравитации [4] до описания квантовых эффектов в околоэкстремальных черных дырах уже в четырёх измерениях [5]. Эти результаты мотивируют исследовать более тщательно другие известные модели двумерной

гравитации и попытаться найти единую парадигму для всех таких примеров.

Современное состояние исследований. Изучение двумерной квантовой гравитации имеет долгую историю. В работе Полякова [6] было получено, что задачу о взаимодействии с двумерной гравитацией конформной теории поля с центральным зарядом $c_M \neq 26$ в конформной калибровке можно свести к теории одного скалярного поля с экспоненциальным членом взаимодействия (ныне известной как теория Лиувилля) и некоторой нелинейной мерой интегрирования в функциональном интеграле. Позже Давид, Дистлер и Каваи [7; 8] выдвинули гипотезу о том, что переход от нелинейной меры к обычной для теории скалярного поля сводится к перенормировке параметров лиувиллевского действия. Теория Лиувилля со стандартной функциональной мерой является конформной КТП; таким образом, после перенормировки теория двумерной гравитации, взаимодействующей с конформной материей, описывается прямым произведением трех конформных теорий поля (теории Лиувилля, СФТ материи и БРСТ-духов, появляющихся при фиксации калибровки), которые взаимодействуют только за счет условия сокращения конформной аномалии: $c_{total} = c_L + c_M - 26 = 0$. Двумерные теории гравитации такого вида могут быть также проинтерпретированы как теории на мировом листе некритических струн; такой взгляд на них подсказывает, какие наблюдаемые представляют интерес для вычисления. Случай, когда материя представляет собой минимальную модель конформной теории поля, известен как «минимальная струна» (МС); в более ранних работах её также называют «минимальная лиувиллевская гравитация». Книжник, Поляков и Замолотчиков [9] обнаружили, что в другой калибровке светового конуса корреляторы в таких теориях гравитации имеют симметрию алгебры токов. Это позволило им определить спектр аномальных размерностей в таких теориях; сейчас этот результат известен как «КПЗ-скейлинг».

Подход матричных моделей впервые был применен к двумерной гравитации в [10], а поведение корреляционных функций в окрестностях критических точек исследовано в [11; 12]. Важным результатом является идентификация некоторых из классов универсальности, реализуемых в двухматричных моделях, с непрерывными теориями двумерной гравитации, взаимодействующей с (p, q) -минимальными моделями конформной теории поля [13; 14], т.е. с минимальной струной. Это отождествление было предложено на основе анализа скейлинговых свойств корреляторов и статистической суммы, которые, как оказывается, согласуются с КПЗ-скейлингом [9].

Ещё один достойный упоминания подход — это «топологическая гравитация» Виттена [15]. Он показал, что после так называемого топологического твиста амплитуды в двумерной гравитации могут быть выражены в терминах чисел пересечения тавтологических классов когомологий на пространствах модулей стабильных кривых. Ожидалось, что эти числа пересечений могут быть вычислены и в матрично-модельном подходе; это утверждение было сформулировано Виттеном как гипотеза и позже доказано Концевичем, используя связь между двумя формулировками и интегрируемой иерархией Кортевега - де Фриза [16].

Для теоретико-полевого и матрично-модельного подхода к минимальной теории струн, однако, сформулировать точное соответствие между наблюдаемыми оказалось более сложно. Во-первых, было быстро понято, что возможность «резонансов» между операторами (или, что эквивалентно, возможность добавить локальные контрчлены к действию на мировом листе) приводит к тому, что отождествление операторов только на основании КПЗ-скейлинга становится невозможным: в общем случае константы связи в производящих функционалах в двух подходах выражаются друг через друга нелинейно. В частности, введение экспоненциального взаимодействия в теорию Лиувилля уже приводит к определенной деформации относительно критической точки в матричной модели, такой, что в этом

подходе несколько констант связи становятся ненулевыми (так называемый «конформный бэкграунд»). Исследование нелинейной связи между константами связи в двух подходах («резонансных преобразований») было начато в [17], где частичный прогресс в этом направлении позволил сопоставить двухточечные амплитуды на поверхностях рода ноль; выражения, полностью описывающие «конформный бэкграунд», впервые были получены в [18]. Наиболее хорошо понят случай, когда $(p, q) = (2, 2m + 1)$, то есть в качестве материи выступает серия Ли-Янга минимальных моделей. В этом случае для получения соответствующего критического поведения достаточно рассматривать одноматричную модель [19; 20], что несколько упрощает вычисления в дискретном подходе. В частности, для серии Ли-Янга резонансные преобразования описаны полностью в [21].

Во-вторых, вычисления корреляторов из первых принципов в подходе мирового листа гораздо сложнее, чем в дуальном подходе. Необходимым условием для этого было найти точное решение теории поля Лиувилля (а именно, ее структурные константы), что было сделано независимо в [22] и [23] (формула DOZZ). Это сразу приводит к вычислению трехточечной амплитуды в минимальной струне на поверхностях рода ноль [24]. После этого в теории Лиувилля были открыты операторные уравнения, названные «высшими уравнениями движения» [25], которые в применении к минимальной струне позволили провести первое аналитическое вычисление амплитуды, включающей интегрирование по пространству модулей кривых (а именно, четырехточечной амплитуды на сфере [26]). Для серии Ли-Янга ответ был сопоставлен с матрично-модельными результатами в [21]. Для более общего случая (p, q) -минимальной струны, несмотря на некоторые продвижения [27; 28], точное соответствие между корреляторами все еще не так хорошо понято.

Цель и задачи работы. Главной целью настоящей диссертационной работы является вычисление корреляционных чисел в $(2, 2p + 1)$ -минимальной теории

струн в непрерывном и матрично-модельном подходе и проверка гипотезы дуальности.

Для достижения цели ставятся следующие **задачи**:

- 1) развить вычислительные и аналитические методы, в частности, метод высших уравнений движения, в подходе мирового листа (теоретико-полевым);
- 2) исследовать свойства матрично-модельных ответов в пределе $p \rightarrow \infty$, отвечающем «квазиклассическому» пределу в теории поля Лиувилля, и дать им интерпретацию в терминах классической теории Лиувилля и гиперболической геометрии;
- 3) развить «словарь» дуальности, уточнив соответствие между корреляторами в обоих подходах.

Основные положения, выносимые на защиту.

- 1) Модификация метода высших уравнений движения для вычисления одноточечного коррелятора на торе в $(2, 2p + 1)$ минимальной струне. Подтверждение дуальности с матричной моделью при помощи аналитических выражений для амплитуд, полученных данным методом.
- 2) В пределе $p \rightarrow \infty$ корреляторы в матрично-модельном подходе сводятся к объемам пространств модулей поверхностей постоянной кривизны с коническими дефектами, определяемым с помощью классической теории Лиувилля.
- 3) Выражения для струнных амплитуд в терминах данных топологической рекурсии, полученные в результате переформулировки дуальности с матричной моделью.

- 4) Общая формула для амплитуд в терминах сумм по стабильным графам и чисел пересечений тавтологических классов когомологий на пространстве модулей стабильных кривых, полученная при помощи новой формулировки дуальности.

Практическая значимость. Изучаемые в диссертации вопросы представляют интерес в области теоретической физики. Развитые в работе методы могут быть применены в других моделях двумерной квантовой гравитации. Так, метод высших уравнений движения на торе был позже адаптирован другими авторами для вычисления одноточечной амплитуды в модели комплексной струны Лиувилля [29]. Рассматриваемые здесь объемы пространств модулей поверхностей с коническими дефектами, по-видимому, дают универсальный предел амплитуд во всех теориях типа «лиувиллевской гравитации», когда центральный заряд материи стремится к $(-\infty)$. В частности, это описывает класс корреляторов в теории гравитации Джакива-Тейтельбойма и её деформациях [30]. Наконец, исследуемые корреляторы являются простыми примерами пертурбативных амплитуд в теории струн. Точные формулы из дуального подхода, выведенные здесь, позволяют вычислять эти амплитуды в любом порядке топологического разложения, что может быть применено для исследования непертурбативных эффектов с помощью техники resurgence (см., например, [31]).

Научная новизна, достоверность и личный вклад. В работе [I] впервые продемонстрировано аналитическое соответствие между матрично-модельным и теоретико-полевым подходами к минимальной гравитации для случая петлевых поправок к струнным амплитудам (т.е. амплитуд на поверхностях рода один). В работе [II] было предложено одно из возможных геометрических определений форм объема, возникающей на пространствах модулей поверхностей с конически-

ми дефектами. Такие формы объема не рассматривались в полной общности в математической и физической литературе ранее. В работах [III, IV] впервые получены явные общие ответы для амплитуд в минимальной струне в матрично-модельном подходе, а также продемонстрирована связь с другими теориями некритических струн, возникшими в последние годы.

Результаты диссертации являются оригинальными и новыми и впервые получены автором в соавторстве с коллегами. В совместной работе [I] личный вклад автора состоял в разработке метода вычисления и получении аналитических результатов в конкретных рассмотренных в диссертации примерах. В совместной работе [III] личный вклад автора состоял в постановке задачи, проведении вычислений, демонстрирующих связь амплитуд и « p -деформированных объемов», а также технических вычислений, необходимых для выведения формулы через теорию пересечений. Достоверность подтверждается согласием с результатами работ других авторов.

Апробация работы. Результаты, изложенные в данной работе, были представлены соискателем на ряде семинаров и международных конференций, как то: семинар лаборатории физики высоких энергий, МФТИ; онлайн-семинар «Непертурбативные методы квантовой теории поля», МФТИ; семинар сектора квантовой теории поля ФИАН; семинар Центра перспективных исследований им. Кричевера, Сколтех; конференция Landau Week (г. Ереван, 2023); конференция «Non-perturbative methods in QFT», (г. Фукуока, 2025); конференция «Advances in Quantum Field Theory» (г. Дубна, 2025); конференция «Integrable Systems and Quantum Theory» (г. Санкт-Петербург, 2025). Также результаты докладывались на научных семинарах учёного совета ИТФ им. Л.Д. Ландау РАН.

Публикации по теме диссертации. Результаты диссертации основаны на работах:

- I *Artemev A., Belavin V.* Torus one-point correlation numbers in minimal Liouville gravity // JHEP. — 2023. — Т. 02. — С. 116. — DOI: [10.1007/JHEP02\(2023\)116](https://doi.org/10.1007/JHEP02(2023)116)
- II *Artemev A.* $p \rightarrow \infty$ limit of tachyon correlators in $(2, 2p + 1)$ minimal Liouville gravity from classical Liouville theory // JHEP. — 2023. — Т. 12. — С. 155. — DOI: [10.1007/JHEP12\(2023\)155](https://doi.org/10.1007/JHEP12(2023)155)
- III *Artemev A., Chaban I.* $(2, 2p + 1)$ minimal string and intersection theory I // JHEP. — 2025. — Т. 01. — С. 151. — DOI: [10.1007/JHEP01\(2025\)151](https://doi.org/10.1007/JHEP01(2025)151)
- IV *Artemev A.* $x - y$ swap for a $(2, 2p + 1)$ minimal string // Phys. Rev. D. — 2025. — Т. 112, № 4. — С. 046019. — DOI: [10.1103/PhysRevD.112.046019](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.112.046019)

Результаты работы изложены в 4 печатных изданиях, 4 из которых изданы в журналах, рекомендуемых ВАК.

Структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав основного текста (главы 1 – 4) и заключения (глава 5). Объем диссертации составляет 135 страниц, включая 9 рисунков и 1 таблицу. Список литературы содержит 83 наименования.

В главе 1 даются необходимые сведения из теоретико-полевого (раздел 1.1) и матрично-модельного (раздел 1.2) подходов к минимальной теории струн. Помимо введения основных определений и обозначений, в разделе 1.1 даётся краткий обзор высших уравнений движения в теории Лиувилля; этот метод будет применен к вычислению струнных амплитуд в основной части работы. Эта глава не содержит новых результатов, помимо переизложения известных в литературе утверждений

о матрично-модельном подходе на несколько другом языке топологической рекурсии.

Глава 2 посвящена вычислению одноточечной тахионной амплитуды в $(2, 2p + 1)$ минимальной теории струн на торе в подходе мирового листа. В разделе 2.1 приводятся общие сведения о корреляционных функциях в двумерной конформной теории поля на торе, необходимые для вычислений. Затем обобщается метод высших уравнений движения, успешно примененный в более ранних работах для четырехточечной амплитуды на сфере. Этот подход позволяет свести интегралы по пространствам модулей, входящие в определение струнных амплитуд, к граничным вкладам, которые могут быть вычислены явно, что продемонстрировано на нескольких примерах в разделе 2.2. Обсуждение и сравнение результатов вычислений с матрично-модельным подходом проведено в разделе 2.3.

В главе 3 исследуется геометрическая интерпретация струнных амплитуд в «квазиклассическом» пределе $p \rightarrow \infty$. В разделе 3.1 приведены общие сведения о пределе бесконечного центрального заряда в теории Лиувилля, а также обсуждаются некоторые свойства амплитуд в минимальной теории струн. Выдвинута гипотеза, что в этом пределе струнные амплитуды сводятся к объемам, ассоциированным с кэлеровыми метриками на пространстве модулей, введенными Зографом и Тахтаджяном. Для этих метрик классическое лиувиллевское действие является кэлеровым потенциалом. С помощью численных (раздел 3.2) и аналитических (3.3) методов на примере четырехточечной амплитуды на сфере демонстрируется, что такое определение объясняет некоторые характерные свойства объемов, известные из матрично-модельного подхода.

В главе 4 развивается подход топологической рекурсии к $(2, 2p + 1)$ минимальной струне. В разделе 4.1 продемонстрировано, что в определенной области параметров струнные амплитуды сводятся к « p -деформированным объемам», которые можно эффективно изучать и вычислять для поверхностей произвольного

рода и для любого центрального заряда материи. В частности, для них выведена формула в терминах чисел пересечений тавтологических классов на пространстве модулей (подраздел 4.1.3). Для более общих значений параметров в разделе 4.2 предложено новое определение дуального подхода, связанное с обычным « $x - y$ заменой». Эта переформулировка проясняет технические и концептуальные сложности в предыдущем подходе и связь с другими некритическими теориями струн; в частности, позволяет обойтись без применения резонансных преобразований, необходимых для идентификации корреляторов в матричной модели и подходе мирового листа.

В главе 5 (заключении) сформулированы выносимые на защиту результаты диссертации.

1 Описание двух подходов к минимальной теории струн

Данная глава служит введением. В ней приводятся сведения из конформной теории поля, необходимые для рассмотрения корреляционных функций в минимальной теории струн, а также описывается предполагаемый дуальный подход на языке топологической рекурсии и известные результаты для струнных амплитуд из обоих подходов.

1.1. Подход мирового листа

1.1.1. Общие свойства минимальных моделей СФТ и теории Лиувилля

Теория поля Лиувилля. Двумерная конформная теория поля Лиувилля описывается действием вида

$$A_L = \int d^2z \sqrt{\hat{g}} \left(\frac{1}{4\pi} \hat{g}^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi + \mu e^{2b\phi} + \frac{Q}{4\pi} \hat{R} \phi \right). \quad (1.1)$$

Здесь z и \bar{z} — голоморфная и антиголоморфная локальные координаты на рассматриваемой двумерной римановой поверхности, а \hat{g} — евклидова метрика со скалярной кривизной \hat{R} , введенная, чтобы записать лагранжиан в общековариантном виде. Параметры лагранжиана Q и b связаны друг с другом как $Q = b + b^{-1}$; центральный заряд теории даётся $c_L = 1 + 6Q^2$. Параметр μ называют «космологи-

ческой постоянной»; зависимость от неё корреляционных функций фиксируется, например, наблюдением, что сдвигом поля $\phi \rightarrow \phi - \frac{1}{2b} \log \mu$ её можно положить равной единице.

Примарные поля в модели можно понимать как нормально упорядоченные экспоненциальные операторы $V_a(z, \bar{z}) =: e^{2a\phi(z, \bar{z})}$;, где a — комплексный параметр. Их конформная размерность $\Delta_a^L = \bar{\Delta}_a^L = a(Q - a)$. Для операторов V_a и V_{Q-a} она одинаковая; такие операторы отождествляются под знаком корреляционных функций с точностью до множителя $R_L(a)$, называемого «коэффициентом отражения». Мы также иногда будем использовать параметризацию «лиувиллевским импульсом» P такую, что $\Delta = \frac{Q^2}{4} + P^2$, тогда отождествляются поля с параметром P и $-P$.

Особую роль играют поля с $a = \frac{(1-m)b^{-1} + (1-n)b}{2} \equiv a_{m,n}$, или $P = i\frac{mb^{-1} + nb}{2} \equiv P_{m,n}$. Мы будем обозначать их как $V_{m,n}$. Для положительных целых m, n (случай «вырожденных полей») в соответствующем модуле Верма на уровне mn имеется потомок $D_{m,n}^{(L)} V_{m,n}$, являющийся старшим вектором (другими словами, сингулярный вектор), который порождает подмодуль. $D_{m,n}^{(L)}$ — полином степени mn из мод тензора энергии-импульса L_{-k} вида $D_{m,n}^{(L)} = L_{-1}^{mn} + \dots$. Чтобы пространство состояний образовывало неприводимое представление алгебры Вирасоро, нужно отфакторизовать модуль Верма по максимальному подмодулю; в частности, положить сингулярный вектор равным нулю. Следующие из этих условий уравнения приводят к тому, что только конечное число конформных семейств вносят вклад в операторное разложение с вырожденным полем.

Выражение для структурных констант или трехточечных функций на сфере $S_L(a_1, a_2, a_3)$ в теории Лиувилля было впервые предложено двумя группами авторов [23], [32]. Оно восстанавливается из рекуррентных соотношений, следующих из уравнений кроссинг-симметрии на четырехточечный коррелятор с вырожденным полем $V_{1,2}$ при дополнительном требовании аналитичности по a_i . Это решение

называют DOZZ-структурной константой:

$$C_L(a_1, a_2, a_3) = (\pi\mu\gamma(b^2)b^{2-2b^2})^{(Q-a)/b} \frac{\Upsilon_b(b)\Upsilon_b(2a_1)\Upsilon_b(2a_2)\Upsilon_b(2a_3)}{\Upsilon_b(a-Q)\Upsilon_b(a-2a_1)\Upsilon_b(a-2a_2)\Upsilon_b(a-2a_3)}. \quad (1.2)$$

Здесь $a = \sum_{i=1}^3 a_i$, $\Upsilon_b(x)$ — спецфункция, выражающаяся через двойную гамма-функцию Барнса (см. [24]). Она удовлетворяет сдвиговым соотношениям

$$\Upsilon_b(x+b) = \gamma(bx)b^{1-2bx}\Upsilon_b(x), \quad (1.3)$$

$$\Upsilon_b(x+b^{-1}) = \gamma(x/b)b^{2b/x-1}\Upsilon_b(x), \quad (1.4)$$

где $\gamma(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)}$. Функция $\Upsilon_b(x)$ не имеет полюсов и имеет нули при $x = -mb - \frac{n}{b}$ и $x = Q + \frac{m}{b} + nb$ для целых неотрицательных m, n .

Операторное разложение (ОРЕ) $V_{a_1}(z, \bar{z})V_{a_2}(0)$, помимо структурных констант, требует информации о спектре теории. Наиболее просто оно пишется в случае, когда a_1, a_2 лежат в «основной области»:

$$\left| \frac{Q}{2} - \operatorname{Re} a_1 \right| + \left| \frac{Q}{2} - \operatorname{Re} a_2 \right| < \frac{Q}{2}. \quad (1.5)$$

В таком случае можно записать

$$V_{a_1}(z, \bar{z})V_{a_2}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dP}{4\pi} C_L(a_1, a_2, \frac{Q}{2} - iP)(z\bar{z})^{\Delta_{Q/2+iP}^L - \Delta_{a_1}^L - \Delta_{a_2}^L} [V_{Q/2+iP}(0)], \quad (1.6)$$

где $[V_{Q/2+iP}(0)]$ означает вклад всех Вирасоро-потомков соответствующего примарного поля (коэффициенты перед которыми зафиксированы конформной симметрией). Операторы в теории Лиувилля параметризованы комплексным a , но в операторное разложение для такого случая входят только поля с $a = \frac{Q}{2} + iP$, $P \in \mathbb{R}$. Такие поля образуют спектр теории.

Когда параметры коррелятора не лежат в «основной области», коррелятор определяется аналитическим продолжением. Некоторые полюса структурных констант при таком продолжении пересекают контур интегрирования по P . В таком случае нужно либо деформировать контур, либо (эквивалентно) добавить вклады от таких полюсов, называемые «дискретными членами». В частности, в случае, когда одно из сливающихся полей вырожденное, только эти дискретные члены дают ненулевой вклад в ОРЕ, а слагаемое с интегралом обращается в ноль.

Минимальные модели. Минимальные модели СФТ — двумерные конформные теории поля с конечным числом конформных семейств в спектре. Для самосогласования, чтобы при операторном разложении возникало только конечное число вкладов, все примарные поля должны быть вырожденными. Для специальных значений центрального заряда

$$c_M = 1 - 6(\beta^{-1} - \beta)^2, \quad \beta = \sqrt{\frac{r}{r'}}, \quad r < r' - \text{взаимно простые} \quad (1.7)$$

в решетке вырожденных полей $\Phi_{m,n}$ есть подмножество $0 < m < r$, $0 < n < r'$, называемое таблицей Каца, на котором ОРЕ может быть замкнуто. Схематично ОРЕ принимает вид

$$[\Phi_{m_1, n_1}][\Phi_{m_2, n_2}] = \sum_{m=1+|m_2-m_1|:2}^{m_1+m_2-1} \sum_{n=1+|n_2-n_1|:2}^{n_1+n_2-1} [\Phi_{m,n}], \quad (1.8)$$

где $:2$ означает суммирование с шагом 2. Также предполагается отождествление $\Phi_{m,n} = \Phi_{r-m, r'-n}$, похожее на свойство отражения в теории Лиувилля. Теория с таким спектром и называется минимальной моделью $M_{r,r'}$.

Конформные размерности примарных полей $\Delta_\alpha^M = \alpha(\alpha - \beta^{-1} + \beta)$, где

$$\alpha_{m,n} = \frac{\beta^{-1} - \beta}{2} + \frac{n\beta - m\beta^{-1}}{2}. \quad (1.9)$$

В частности, в любой минимальной модели есть единичный оператор $\Phi_{1,1}$ размерности 0. Из структуры операторного разложения и требования, что только для единичного оператора одноточечная функция на сфере не равна нулю следуют некоторые «правила отбора» на не обращающиеся в ноль многоточечные корреляторы. В дальнейшем они будут называться «правила слияния».

Кинематические свойства минимальных моделей сильно напоминают теорию Лиувилля для мнимых b . Например, уравнения на зануление потомков вырожденных полей на уровне mn имеют вид $D_{m,n}^{(M)}\Phi_{m,n} = 0$, где оператор $D^{(M)}$ можно получить из $D^{(L)}$ заменой $b^2 \rightarrow -\beta^2$. Также существует аналогичное сдвиговое соотношение на структурные константы, следующее из кроссинг-симметрии; оно тоже даётся аналитическим продолжением полученного в лиувиллевском случае $b \rightarrow -i\beta, a_i \rightarrow i\alpha_i$.

Однако, решения этого соотношения для $c < 1$ не связаны аналитическим продолжением с DOZZ-структурными константами. Они имеют вид [24]

$$C_M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{\mathcal{A}\Upsilon_\beta(\alpha + 2\beta - \beta^{-1}) \prod_{i=1}^3 \Upsilon_\beta(\alpha - 2\alpha_i + \beta)}{\prod_{i=1}^3 (\Upsilon_\beta(2\alpha_i + \beta)\Upsilon_\beta(2\alpha_i + 2\beta - \beta^{-1}))^{1/2}}, \quad (1.10)$$

где

$$\alpha \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad \mathcal{A} \equiv \frac{\beta^{\beta^{-2} - \beta^2 - 1} [\gamma(\beta^2)\gamma(\beta^{-2} - 1)]^{1/2}}{\Upsilon_\beta(\beta)}. \quad (1.11)$$

Для соответствующих значений β и α (1.10) совпадает со структурными константами минимальных моделей в случае, когда последние не обнуляются. Формула выше не удовлетворяет «правилам слияния», то есть может дать ненулевой

ответ даже в случае, когда трехточечный коррелятор $\langle \Phi_{\alpha_1} \Phi_{\alpha_2} \Phi_{\alpha_3} \rangle$ должен обнуляться в минимальной модели. В частности, $C_M(\alpha_1, \alpha_2, 0)$ не зануляется даже при $\Delta_{\alpha_1}^M \neq \Delta_{\alpha_2}^M$. Для значений параметров α в общем положении формула (1.10) может быть проинтерпретирована как трехточечная функция в «временеподобной теории Лиувилля», см. [33].

1.1.2. Минимальная теория струн

Конформная теория поля на мировом листе минимальной струны даётся прямым произведением трёх секторов: минимальной модели СФТ $M_{r,r'}$ в качестве материи, теории поля Лиувилля и духового сектора. Духи представляют из себя систему первого порядка свободных антикоммутирующих полей: голоморфных полей B, C конформных размерностей 2 и -1 соответственно и аналогичных антиголоморфных полей \bar{B}, \bar{C} . Суммарный центральный заряд системы равен нулю, т.е. $c_M + c_L = 26$. Это необходимо для трактовки в терминах теории струн и обеспечивает нильпотентность БРСТ-заряда

$$\mathcal{Q} \equiv \oint dz (C(T_L + T_M) + :C\partial CB:)(z). \quad (1.12)$$

Здесь $T_L(z), T_M(z)$ — голоморфный тензор энергии-импульса в лиувиллевском и материальном секторе, соответственно. Аналогичная формула имеется для антиголоморфного заряда $\bar{\mathcal{Q}}$. Преимущественно мы будем изучать серию Ли-Янга минимальных моделей $r = 2, r' = 2p + 1$. Тогда условие на центральный заряд требует, чтобы константа связи в лиувиллевском секторе равнялась $b = \sqrt{2/(2p + 1)}$.

Амплитуды (или «корреляционные числа») в МС строятся из локальных операторов, представляющих классы БРСТ-когомологий. Правильно построенное выражение из таких операторов будет хорошо определено как старшая форма на пространстве модулей кривых рода g с n отмеченными точками $\mathcal{M}_{g,n}$; интеграл

по этому пространству модулей и даёт значения струнных амплитуд. Общая конструкция приведена, например, в [34].

Главным интересующим нас классом наблюдаемых будут так называемые «тахионы» $\mathcal{T}_{m,n}$. Они строятся «одеванием» примарных полей $\Phi_{m,n}(z, \bar{z})$ в минимальной модели (невырожденными) лиувиллевскими примарными полями $V_{a_{m,-n}}(z, \bar{z})$:

$$\mathcal{T}_{m,n} = C\bar{C}U_{m,n} , \quad U_{m,n} \equiv \Phi_{m,n}V_{a_{m,-n}} , \quad (1.13)$$

такими, что $a_{m,-n}$ решает условие

$$\Delta_{m,n}^M + \Delta_a^L = 1 . \quad (1.14)$$

Для серии Ли-Янга $m = 1$ и с учётом симметрии таблицы Каца независимые поля нумеруются числом n : $1 \leq n \leq p$. Тахионные корреляторы зависят от «космологической постоянной» μ степенным образом: $\mathcal{T}_{m,n} \sim \mu^{\frac{-a_{m,-n}}{b}}$. Показатели степени отвечают аномальным размерностям в формулировке КПЗ [9].

Заметим, что эти классы когомологий могут быть представлены либо вставкой локальных операторов $\mathcal{T}_{m,n}$ в точку на поверхности, либо интегрированием по поверхности поля $U_{m,n}$ размерности $(1, 1)$: $\mathcal{Q}, \bar{\mathcal{Q}}$ -вариации $U_{m,n}$ являются полной производной, поэтому интеграл по поверхности БРСТ-инвариантен с точностью до граничных членов.

Выбор того, какое представление тахиона использовать, диктуется необходимостью насыщения духовых нулевых мод при вычислении коррелятора на поверхности заданного рода g . Нулевые моды соответствуют глобально определенным голоморфным векторным полям (для C) и квадратичным дифференциалам (для B). Для ненулевости коррелятора разность количеств вставок духов C и B должна быть равна $N_C - N_B = 3 - 3g$, что называют аномалией духового числа, а

каждое из чисел N_C, N_B больше либо равно числу соответствующих нулевых мод. Например, на сфере существует 3 нулевые моды C и нет нулевых мод поля B , поэтому n -точечная амплитуда имеет вид $(n - 3)$ -кратного интеграла по сфере

$$A_n^0(k_1, \dots, k_n) = \left\langle \prod_{i=1}^{n-3} \int d^2 z_i U_{1,k_i}(z_i, \bar{z}_i) \mathcal{T}_{1,k_{n-2}}(0) \mathcal{T}_{1,k_{n-1}}(1) \mathcal{T}_{1,k_n}(\infty) \right\rangle \quad (1.15)$$

$(n - 3)$ координаты z_k являются голоморфными координатами на пространстве модулей $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$. При $g \geq 2$ нет нулевых мод C и есть $3g - 3$ нулевые моды B . При $g = 1$ есть по одной нулевой моде C и B ; этот случай будет рассмотрен в главе 2.

1.1.3. Кольцо дискретных состояний в МС и высшие уравнения движения

Помимо тахионов, в минимальной струне существуют другие представимые локальными операторами классы БРСТ-когомологий (они имеют отличные от 1 духовые числа). Они были классифицированы Лианом и Цукерманом в [35]. В случае $(2, 2p + 1)$ МС, который будет основным в нашей работе, существует по одному классу когомологий для каждого значения лиувиллевского параметра $a = a_{1,-n}; n \in \mathbb{Z}, n \bmod (2p + 1) \neq 0$ (в параметризации лиувиллевскими импульсами $P = \frac{ib}{4}(2p + 1 - 2n)$). Лиан и Цукерман также описывают процедуру построения соответствующих представителей.

Важными для дальнейшего являются операторы духового числа 0 из т.н. «кольца дискретных состояний» (ground ring). Они строятся с использованием вырожденных полей в лиувиллевском секторе:

$$O_{m,n} = H_{m,n} \overline{H}_{m,n} \underbrace{\Phi_{m,n} V_{a_{m,n}}}_{\equiv \Theta_{m,n}} \cdot \quad (1.16)$$

Здесь $H_{m,n}$ — полиномы степени $mn - 1$ от мод полей B, C, T_L, T_M . В отличие от тахионов, операторы из кольца дискретных состояний построены из Вирасоропотомков. Причина того, что они тем не менее лежат в когомологиях, в том, что при действии \mathcal{Q} на них возникают сингулярные вектора $D_{m,n}^{(L)} V_{a_{m,n}}, D_{m,n}^{(M)} \Phi_{m,n}$ в соответствующих конформных семействах:

$$\mathcal{Q}O_{m,n} = \bar{H}_{m,n} C \mathcal{D}_{m,n} \Theta_{m,n}, \quad \mathcal{D}_{m,n} = D_{mn}^{(M)} - (-1)^{mn} D_{mn}^{(L)}. \quad (1.17)$$

Общий вид операторов $H_{m,n}$ (определенных с точностью до \mathcal{Q} -точных членов) неизвестен, но может быть легко найден в частных случаях из требования выше. Для целей основной части работы приведем некоторые явные выражения (см., например, [36]):

$$H_{1,2} = M_{-1} - L_{-1} + b^2 :CB:, \quad (1.18)$$

$$H_{1,4} = (\text{часть без духов}) + 9b^4 :BC: (L_{-2} - M_{-2}) + \\ + :\partial B C: \left((12b^4 - \frac{15b^2}{2})L_{-1} - (12b^4 + \frac{15b^2}{2})M_{-1} \right) + \frac{:\partial^2 B C:}{2} 9b^2 (4b^4 - 1). \quad (1.19)$$

M и L обозначают моды тензора энергии-импульса в материальном и лиувиллевском секторе соответственно.

Операторы из этого кольца обладают двумя важными свойствами: независимость корреляторов от точки их вставки и простое ОРЕ (или произведение в когомологиях) с тахионными операторами. Эти свойства полезны для вычисления корреляционных чисел в МС на сфере [26].

Существует важная связь между операторами из кольца дискретных состояний и высшими уравнениями движения (ВУД) Замолодчикова [25]. ВУД представляют из себя набор операторных соотношений в теории поля Лиувилля, которые будут описаны ниже.

Рассмотрим так называемые «логарифмические операторы» в теории Лиувилля:

$$V'_a = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} V_a . \quad (1.20)$$

Обозначим за $V'_{m,n}$ такой логарифмический оператор, в котором производная вычислена в точке $a = a_{m,n}$, соответствующей вырожденному полю. Самый простой пример — само лиувиллевское поле $\phi = V'_{1,1}$, которое подчиняется уравнению движения:

$$\partial\bar{\partial}\phi \equiv \partial\bar{\partial}V'_{1,1} = \pi b\mu e^{2b\phi} . \quad (1.21)$$

В квантовой теории поля его можно понимать в слабом смысле, т.е. как справедливое под знаком корреляционной функции с точностью до контактных членов, если заменить $e^{2b\phi}$ на нормально упорядоченный оператор $V_{1,-1}$. В общем случае ВУД утверждают, что в слабом смысле с точностью до численного коэффициента равны примарное поле $V_{m,-n}$ и поле, полученное применением оператора $D_{m,n}^{(L)}\bar{D}_{m,n}^{(L)}$ к логарифмическому полю:

$$D_{m,n}^{(L)}\bar{D}_{m,n}^{(L)}V'_{m,n} \cong B_{m,n}V_{m,-n} , \quad (1.22)$$

где константа

$$B_{m,n} = (\pi\mu\gamma(b^2)b^{2-2b^2})^n \frac{\Upsilon'_b(2a_{m,n})}{\Upsilon_b(2a_{m,-n})} . \quad (1.23)$$

В минимальной теории струн эти уравнения вместе с некоторыми дополнительными соображениями приводят к «когомологической версии ВУД». Поскольку $V_{m,-n}$ в правой части ВУД возникают при рассмотрении тахионных операторов как «одевающие» для примарных полей $\Phi_{m,n}$ из минимальной модели, можно записать

$$U_{m,n} = V_{m,-n}\Phi_{m,n} = B_{m,n}^{-1}D_{m,n}^{(L)}\bar{D}_{m,n}^{(L)}\underbrace{V'_{m,n}\Phi_{m,n}}_{\equiv\Theta'_{m,n}} = B_{m,n}^{-1}\mathcal{D}_{m,n}\bar{\mathcal{D}}_{m,n}\Theta'_{m,n} , \quad (1.24)$$

используя, что $\Phi_{m,n}$ уничтожаются операторами $D_{m,n}^{(M)}$ и $\bar{D}_{m,n}^{(M)}$. Правая часть равенства может быть переписана также как

$$\mathcal{D}_{m,n} \bar{\mathcal{D}}_{m,n} \Theta'_{m,n} = (\partial H_{m,n} - \mathcal{Q} R_{m,n}) (\bar{\partial} \bar{H}_{m,n} - \bar{\mathcal{Q}} \bar{R}_{m,n}) \Theta'_{m,n}, \quad R_{m,n} \equiv B_{-1} H_{m,n}. \quad (1.25)$$

Это равенство несложно понять, зная, что $(\partial H_{m,n} - \mathcal{Q} R_{m,n}) \Theta_{m,n} = 0$, что, в свою очередь, следует из БРСТ-замкнутости операторов $O_{m,n}$. Таким образом, с точностью до БРСТ-точных членов $U_{m,n}$ можно представить в виде производной по координатам поля $O'_{m,n} \equiv H_{m,n} \bar{H}_{m,n} \Theta'_{m,n}$ — логарифмического аналога оператора $O_{m,n}$ из кольца дискретных состояний.

Другая форма высших уравнений движения, впервые найденная в контексте суперсимметричного расширения минимальной струны [37], но справедливая и в бозонном случае, имеет вид

$$\mathcal{T}_{m,n} \equiv C \bar{C} V_{m,-n} \Phi_{m,n} = B_{m,n}^{-1} \mathcal{Q} \bar{\mathcal{Q}} (O'_{m,n}). \quad (1.26)$$

(1.25) может быть выведено из этого уравнения применением B_{-1} и коммутированием его с БРСТ-зарядом.

1.2. Матричная модель для минимальной струны

Минимальная струна и топологическая рекурсия. В дуальном подходе $(2, 2p + 1)$ минимальная струна обычно описывается в терминах эрмитовой одноматричной модели после «двойного скейлингового предела». В дальнейшем мы опишем гипотезу, как вычислять пертурбативные амплитуды (корреляционные числа) в этом подходе. Мы будем использовать преимущественно формулировку в терминах топологической рекурсии [38], которая является некоторым обобщением

матричных моделей. По ходу изложения будет пояснено, каким именно объектам в матрично-модельной формулировке будут соответствовать вводимые определения.

Начальные данные для топологической рекурсии — так называемая спектральная кривая. Обычно это параметрически заданная кривая в $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$; для минимальной струны она имеет вид

$$\begin{cases} x = 2u_0 T_2(z) \\ y = 2u_0^{\frac{2p+1}{2}} T_{2p+1}(z) \end{cases}, \quad z \in \mathbb{C}P^1, \quad (1.27)$$

где T_k — полиномы Чебышева первого рода, а параметр u_0 связан с «космологической постоянной» μ в подходе мирового листа; в дальнейшем он будет играть особую роль. Впервые эта кривая появилась в [18] как «пространство модулей граничных условий» в минимальной струне.

Ниже мы опишем топологическую рекурсию для спектральных кривых рода ноль в некоторой (хотя и не полной) общности. 1-форма $\omega_{0,1} = y dx$ вместе с бидифференциалом (его возможно выбирать по-другому, но выбор ниже мы будем называть «стандартным» — он возникает в топологической рекурсии для наблюдаемых в матричных моделях)

$$B(z_1, z_2) \equiv \omega_{0,2}(z_1, z_2) = \frac{dz_1 dz_2}{(z_1 - z_2)^2} \quad (1.28)$$

определяют следующее ядро около каждой точки ветвления $\zeta_m : dx(\zeta_m) = 0$ (мы предполагаем, что все нули dx простые)

$$K^{(m)}(z_0, z) = \frac{\int_{\bar{z}^{(m)}}^z B(z_0, \xi) d\xi}{2(y(z) - y(\bar{z}^{(m)})) dx}. \quad (1.29)$$

$\bar{z}^{(m)}$ обозначает действие локальной инволюции Галуа на точку z , то есть это второе решение уравнения $x(z) = x(\bar{z}^{(m)})$ в окрестности ζ_m . Для кривой (1.27) есть только одна точка ветвления $z = 0$ и инволюция действует просто как $\bar{z}^{(1)} = -z$. Это характерно для кривых, связанных с одноматричными моделями в двойном скейлинговом пределе.

Выходными данными процедуры топологической рекурсии является система n -дифференциалов $\omega_{g,n}(z_1, \dots, z_n) \equiv W_{g,n}(z_1, \dots, z_n) dz_1 \dots dz_n$. Она определяется рекуррентной формулой

$$\begin{aligned} \omega_{g,n+1}(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) = & \sum_m \operatorname{Res}_{z=\zeta_m} K^{(m)}(z_{n+1}, z) \left(\omega_{g-1,n+2}(z_1, \dots, z_n, z, \bar{z}^{(m)}) + \right. \\ & \left. + \sum_{g_1=0}^g \sum'_{J_1+J_2=\{z_1, \dots, z_n\}} \omega_{g_1,|J_1|+1}(J_1, z) \omega_{g-g_1,|J_2|+1}(J_2, \bar{z}^{(m)}) \right). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Здесь J_1, J_2 — непересекающиеся подмножества $\{z_1, \dots, z_n\}$, а $|J_i|$ — их мощность. Штрих над суммой означает, что мы опускаем в ней слагаемые, которые включали бы $\omega_{0,1}$. Для матричных моделей в двойном скейлинговом пределе $W_{g,n} \equiv \frac{\omega_{g,n}}{dz_1 \dots dz_n}$ связаны с коэффициентами топологического разложения корреляторов резольвент $R_{g,n}(E)$, т.е. операторов вида $\operatorname{tr} \frac{1}{E-H}$ (H — случайная матрица): $R_{g,n}(-z_1^2, \dots, -z_n^2) = W_{g,n} / \prod_{k=1}^n (-2z_k)$. В частности, известно, что $R_{0,2}$ имеет универсальный вид, не зависящий от потенциала в матричных моделях; это соответствует «стандартному бидифференциалу» $B(z_1, z_2)$.

Перемасштабирование параметра z или функций $x(z), y(z)$ в подходе топологической рекурсии приводит к аналогичному простому преобразованию $W_{g,n}$. Для разных целей удобно использовать спектральную кривую в разных видах; напри-

мер, в [39] спектральная кривая для $(2, 2p + 1)$ МС параметризована как

$$\begin{cases} x(z) = z^2 \\ y(z) = \frac{1}{4\pi} \sin\left(\frac{2}{b^2} \arcsin \pi b^2 z\right) \end{cases}, \quad b^2 \equiv \frac{2}{2p + 1}. \quad (1.31)$$

В гипотезе о дуальности с матричной моделью считается [39], что $W_{g,n}(z)$ (или, более точно, корреляторы резольвент в матричной модели) равны амплитудам открытых струн с n границами и граничными условиями Фаддеева-Замолодчикова-Замолодчикова-Тешнера (ФЗЗТ) [40], где $1 - 2z^2$ для каждой границы параметризует граничную космологическую постоянную. «Свободные энергии» \mathcal{F}_g (коэффициенты топологического разложения для статсуммы) также могут быть вычислены из топологической рекурсии; мы не будем использовать явные формулы для них (см., например, [38]).

Корреляционные числа. Опишем предполагаемые аналоги тахионных корреляционных чисел (таких, как (1.15)) в $(2, 2p + 1)$ МС этом подходе.

Существуют формулы для вычисления того, как свободная энергия \mathcal{F}_g меняется при деформации спектральной кривой. Класс интересных деформаций — те, при которых $x(z)$ и $y(z)$ остаются полиномами той же степени. Для таких спектральных кривых известно, что \mathcal{F}_g являются тау-функциями (редуцированной) иерархии Кадомцева-Петвиавшвили (в частности, для $g = 0$ оно совпадает с квазиклассической тау-функцией Кричевера [41; 42]). КП-времена t_k с этой точки зрения являются естественными координатами, определяющими коэффициенты полиномов. Соответствующие спектральной кривой (1.27) значения времен вычисляются по формуле (см., например, [43])

$$t_k^0 = -\frac{1}{2} \operatorname{Res}_{z=\infty} \left(x^{-1/2+k-p} y dx \right), \quad k = 1, \dots, p. \quad (1.32)$$

Мы используем нестандартную нумерацию и нормировку этих времен, которая связана с общепринятой формулой $t_k = \frac{2p-2k+1}{2} t_{2p-2k+1}^{usual}$. Топологическая рекурсия позволяет легко вычислять производные от свободной энергии по t_k [44]:

$$\frac{\partial^n \mathcal{F}_g}{\partial t_{k_1} \dots \partial t_{k_n}} \Big|_{t_k=t_k^0} = \text{Res}_{z_1=\infty} \dots \text{Res}_{z_n=\infty} \left(\omega_{g,n}(z_1, \dots, z_n) \prod_{i=1}^n \frac{x^{p-k_i+1/2}(z_i)}{2p-2k_i+1} \right). \quad (1.33)$$

Существуют разные способы вычисления свободной энергии в дуальном подходе; достаточно удобным является метод «струнного уравнения Дугласа», с помощью которого были проведены вычисления в работах [21; 45; 46]. Мы не будем объяснять его здесь, так как будем использовать формулы из подхода топологической рекурсии.

Производные по КП-временам естественны с точки зрения подхода интегрируемых систем, но для сравнения с подходом мирового листа необходимо вычислять другие величины. В [21] было предложено брать производные по другим переменным τ_k , связанными с t так называемыми резонансными преобразованиями. Эти преобразования имеют вид

$$t_k = (2p+1)u_0^{k+1} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} \sum_{m_1, \dots, m_n \in D_{n,k}} \frac{\tau_{m_1} \dots \tau_{m_n} (2p-2k+2n-3)!!}{n! (2p-2k-1)!!}, \quad (1.34)$$

где $D_{n,k} = \{m_1, \dots, m_n \geq 1, \sum_{l=1}^n (m_l + 1) = k + 1\}$. Эти выражения квазиоднородны по τ и t , где τ_m, t_m имеет градуировку $(m+1)$. Это отвечает КПЗ-скейлингу соответствующих тахионных операторов, так как $\frac{m+1}{2} = \frac{a_{1,-m}}{b}$.

При подстановке $\tau_1 = -\frac{1}{2}; \tau_2, \dots, \tau_p = 0$ получаются значения КП-времён, соответствующие спектральной кривой (1.27) по формуле (1.32). Изменение u_0 при постоянных τ_k означает просто перемасштабирование x, y (при этом они сохраняют вид полиномов Чебышева). Назовём «сингулярными по u_0^2 » выражения, про-

порциональные отрицательным или нечетным положительным степеням u_0 . Тогда рассмотрим

$$A_n^g(k_1, \dots, k_n) := \left(u_0^{-\sum_{i=1}^n (k_i+1)} \frac{\partial^n \mathcal{F}_g}{\partial \tau_{k_1} \dots \partial \tau_{k_n}} \Big|_{\tau_1 = -\frac{1}{2}; \tau_2, \dots, \tau_p = 0} \right)_{\text{синг. по } u_0^2}. \quad (1.35)$$

Гипотеза дуальности, согласно [21], состоит в том, что эта сингулярная часть совпадает с тахионными корреляционными числами вида $\langle \mathcal{T}_{1,k_1} \dots \mathcal{T}_{1,k_n} \rangle$ на поверхностях рода g . Полиномиальная замена переменных (1.34) может быть найдена из требования, чтобы A_n^g подчинялись «правилам слияния» в СФТ.

Примеры выражений для корреляционных чисел. Здесь мы приведем примеры A_n^g для малых g и n , явно вычисленных из струнного уравнения Дугласа в предыдущих работах других авторов. Заметим, что нумерация в нашей работе отличается от используемых в работах ниже сдвигом $k_i^{\text{здесь}} = k_i^{\text{там}} + 1$.

1. $(g, n) = (0, 4)$; это выражение приведено в [21]

$$A_4^0(k_1, \dots, k_4) = -F_\theta(-2) + \sum_{i=1}^4 F_\theta(k_i - 2) - F_\theta(k_{12|34}) - F_\theta(k_{13|24}) - F_\theta(k_{14|23}), \quad (1.36)$$

где $k_{ij|lm}$ и функции F_θ определены как

$$k_{ij|lm} = \min(k_i + k_j - 2, k_l + k_m - 2); \quad F_\theta(k) = \frac{1}{2}(p-k-1)(p-k-2)\theta(p-2-k). \quad (1.37)$$

В таком виде уравнение справедливо в чётном секторе (если $\sum_{i=1}^4 k_i - 4$ чётно). В нечетном есть дополнительные слагаемые, роль которых сводится к обнулению ответов в случае невыполнения «правил слияния».

2. $(g, n) = (0, 5)$, приведено в [45]

$$A_0^5(k_1, \dots, k_5) = A^{(I)} + A^{(J)} + A^{(1)} + A^{(2)}; \quad (1.38)$$

$$A^{(1)} = \sum_{i=1}^5 \left(\frac{3p(p+1)}{2} F_\theta(k_i - 2) - H_\theta(k_i - 3) \right) - 2 \sum_{i < j} F_\theta(k_i - 2) F_\theta(k_j - 2) - \frac{p(p+1)(5p^2 + 5p + 2)}{8}, \quad (1.39)$$

$$A^{(2)} = \sum_{i < j} \left(H_\theta(k_{ij} - 1) - F_\theta(k_{ij}) \frac{p^2 + p}{2} + F_\theta(k_{ij}) \sum_{l \neq i, j} F_\theta(k_l - 2) \right) - \sum_{i < j < l} H_\theta(k_{ijl}) - \sum_{i, j, l, m} F_\theta(k_{ij}) F_\theta(k_{lm}), \quad (1.40)$$

$$A^{(I)} = \sum_{i=1}^5 \frac{1}{8} (2k_i - k - 4)(2k_i - k - 6)(2p - 3 - k)(2p - 5 - k) \theta(2k_i - k - 6), \quad (1.41)$$

$$A^{(J)} = \sum_{i < j} \left(- \frac{((k - 2k_{ij})^2 + 2(k - 2k_{ij}))(2p - 3 - k)(2p - 5 - k)}{8} \theta(2k_{ij} - k - 2) + H(k - k_{ij}) \right) \times \theta(p - 1 - k + k_{ij}) \theta(p - 1 - k_{ij}). \quad (1.42)$$

Здесь введены новые обозначения

$$H_\theta(k) = \frac{1}{2} F_\theta(k) F_\theta(k + 2); \quad k = \sum_{i=1}^5 k_i - 5, \quad k_{ij} = k_i + k_j - 2, \quad k_{lmn} = k_l + k_m + k_n - 3. \quad (1.43)$$

Снова приведено выражение в чётном секторе (справедливое, когда k чётно); в

нечётном секторе $A^{(I)}$ и $A^{(J)}$ нужно положить равными нулю.

3. $(g, n) = (1, 1)$, приведено в [46]

$$A_1^1(k_1) = \frac{1}{24}k_1(2p + 1 - k_1). \quad (1.44)$$

4. $(g, n) = (1, 2)$; это вычисление в [46] содержит опечатку — не учтены тета-функции Хэвисайда, входящие в ответ. Правильное выражение

$$\begin{aligned} A_2^1(k_1, k_2) = & \left(-k_1(2p + 1) + (p - k_2)(p - k_2 + 1) + k_1^2\right) \times \\ & \times \left(k_1(2p + 1) + k_2(2p - k_2 + 1) - k_1^2 + p(p + 1) + 2\right) + \\ & + (k_1 + k_2 - p - 1)(k_1 + k_2 - p) \left((k_1 + k_2 - p - 2)(k_1 + k_2 - p + 1) - 2p(p + 1)\right) \times \\ & \times \Theta(p + 1 - k_1 - k_2). \end{aligned} \quad (1.45)$$

Как видно из примеров выше, резонансные преобразования в подходе струнного уравнения Дугласа [21; 45; 46] выражают A_n^g как кусочно-полиномиальные функции p, k_i . n -е производные свободной энергии по τ выражаются в терминах n -й и младших производных по КП-временам; младшие производные возникают, когда становятся важными нелинейные члены в резонансных преобразованиях. Однако, есть область в пространстве параметров, где эти выражения существенно упрощаются: это область $k_i + k_j > p - 3$ для любых i, j . В этой области $\forall i, j, l$ $\frac{\partial^2 t_l}{\partial \tau_i \partial \tau_j} = 0$ и то же самое верно для старших производных. Тогда производная по τ даётся просто линейной комбинацией n -х производных по КП-временам. Было замечено, что в такой области в пределе $b \rightarrow 0$ корреляционные числа совпадают с объемами Вейля-Петерсона, аналитически продолженными на мнимые длины $l_n = 2\pi i \left(1 - \frac{2k_n}{2p+1}\right)$ ([30], [47]). В соответствующей нормировке поправки к «классическому» ответу полиномиальны по b^4 .

2 Высшие уравнения движения для корреляторов на торе

Как упоминалось ранее, в теоретико-полевым подходе к минимальной струне существенный прогресс был достигнут благодаря открытию высших уравнений движения в теории поля Лиувилля. Однако, было неизвестно, возможно ли разработать основанный на ВУД метод для рассмотрения амплитуд для рода $g > 0$. Помимо численных проверок [48], не было прямых аргументов в пользу того, что соответствие с матричными моделями распространяется не только на амплитуды на сфере. Целью этой главы является описание метода, позволяющего вычислить одноточечные корреляционные числа в $(2, 2p + 1)$ МС на торе.

2.1. Некоторые свойства корреляторов в СФТ на торе

В этом разделе собраны некоторые факты о конформных теориях поля (духовой BC -системе, минимальных моделях и теории поля Лиувилля) на торе, которые будут использованы далее. В дальнейшем τ будет обозначать модулярный параметр тора; $q \equiv \exp(2\pi i\tau)$.

Важным кинематическим свойством, верным для корреляторов во всех упомянутых выше теориях (и в любой самосогласованной СФТ), являются конформные тождества Уорда. Пусть Φ_Δ — поле, примарное в голоморфном секторе с конформной размерностью Δ . Тогда тождества Уорда позволяют выразить одноточечный коррелятор $\langle \Phi_\Delta \rangle_\tau$ с дополнительными вставками тензора энергии-импульса T в

терминах коррелятора без таких вставок. Первые два таких тождества имеют вид

$$\langle T(z)\Phi_{\Delta}(x)\rangle_{\tau} = \left[\Delta (\mathcal{P}(z-x) + 2\eta_1) + (\zeta(z-x) + 2\eta_1x)\partial_x + 2\pi i \frac{\partial}{\partial\tau} \right] \langle \Phi_{\Delta}(x)\rangle_{\tau}, \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \langle T(z)T(w)\Phi_{\Delta}(x)\rangle_{\tau} &= \frac{c}{12}\mathcal{P}''(z-w)\langle \Phi_{\Delta}\rangle_{\tau} + \\ &+ [2(\mathcal{P}(z-w) + 2\eta_1) + (\zeta(z-w) + 2\eta_1w)\partial_w] \langle T(w)\Phi_{\Delta}(x)\rangle_{\tau} + \\ &+ [\Delta(\mathcal{P}(z-x) + 2\eta_1) + (\zeta(z-x) + 2\eta_1x)\partial_x] \langle T(w)\Phi_{\Delta}(x)\rangle_{\tau} + 2\pi i \frac{\partial}{\partial\tau} \langle T(w)\Phi_{\Delta}(x)\rangle_{\tau}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь z, x, w — глобальные голоморфные координаты точек вставки полей на торе; $\mathcal{P}(z)$ — функция Вейерштрасса, а ζ -функция — её первообразная со знаком минус ($\zeta(z) \sim 1/z$, $z \rightarrow 0$). Это эллиптические аналоги рациональных мероморфных коэффициентов, возникающих в конформных тождествах Уорда на сфере. η_1 — функция только от τ , имеющая следующее разложение в ряд:

$$\eta_1 = (2\pi)^2 \left[\frac{1}{24} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1-q^n} \right]. \quad (2.3)$$

Вывод тождеств (2.1) и (2.2), а также точные определения функций $\zeta(z)$ и $\mathcal{P}(z)$, которые не понадобятся нам в этой работе, могут быть найдены в [49] (обратите внимание, что наша нормировка T отличается от [49] на множитель 2π).

Другим общим свойством конформных теорий поля является модулярная ковариантность одноточечных функций примарных полей. Так, для полей с равной голоморфной и антиголоморфной размерностью (бесспиновых) $f_{\Delta}(\tau) \equiv \langle \Phi_{\Delta}\rangle_{\tau}$ являются (неголоморфными) модулярными формами веса (Δ, Δ) , что означает их инвариантность при замене $\tau \rightarrow \tau + 1$ и следующий закон преобразования при

$\tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}$:

$$f_{\Delta}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = (\tau\bar{\tau})^{\Delta} f_{\Delta}(\tau) . \quad (2.4)$$

Это свойство является важным условием самосогласованности конформных теорий на римановых поверхностях старшего рода [50] (доказательство этой формулы для минимальных моделей можно найти в [51], где также доказаны аналогичные свойства преобразования корреляционных функций Вирасоро-потомков).

Обратимся теперь к конкретным корреляционным функциям в интересующих нас СФТ. В гамильтоновом подходе корреляционные функции на торе выражаются в виде следа по полному пространству состояний, представляющему спектр теории, со вставкой оператора $q^{L_0}\bar{q}^{\bar{L}_0}$. Так, считая, что в спектре теории только бесспиновые примарные поля с конформной размерностью $h = \bar{h}$, для одноточечной функции получаем

$$\langle \Phi_{\Delta}(z, \bar{z}) \rangle_{\tau} = \sum_{h, \lambda, \bar{\lambda}} q^{h+|\lambda|-\frac{c}{24}} \bar{q}^{h+|\bar{\lambda}|-\frac{c}{24}} \langle h, \lambda, \bar{\lambda} | \Phi_{\Delta}(z, \bar{z}) | h, \lambda, \bar{\lambda} \rangle , \quad (2.5)$$

где h — промежуточные конформные размерности из спектра теории, а $\lambda, \bar{\lambda}$ — диаграммы Юнга, нумерующие Вирасоро-потомки в соответствующем модуле. Несмотря на обозначение, из трансляционной инвариантности одноточечная функция не зависит от z, \bar{z} ; в дальнейшем мы будем иногда опускать эти аргументы. Отношение $\langle h, \lambda, \bar{\lambda} | \Phi_{\Delta} | h, \lambda, \bar{\lambda} \rangle / \langle h | \Phi_{\Delta} | h \rangle$ полностью фиксируется конформной симметрией и ряд по $\lambda, \bar{\lambda}$ для каждой размерности h в спектре суммируется в торический конформный блок (см., например, [52]). С другой стороны, $\langle h | \Phi_{\Delta} | h \rangle$ есть просто диагональная структурная константа.

Рассмотрим отдельно корреляторы в BC -системе. Как отмечено, например, в [34], в контексте теории струн BC -система на торе должна быть проквантована с теми же граничными условиями, что и поля в других секторах (то есть перио-

дическими по обоим направлениям, вместо стандартных антипериодических для фермионных полей), поскольку соответствующий функциональный интеграл по духам вычисляет детерминант Фаддеева-Попова. Это означает, что поля должны раскладываться по целочисленным Фурье-модам: $B(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i n z} B_{-n}$, $C(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i n z} C_{-n}$, а духовый коррелятор $\langle \dots \rangle_{gh}$ нужно понимать как след со вставкой оператора фермионной четности $(-1)^F$. Коэффициенты разложения B_l, C_k удовлетворяют антикоммутиационным соотношениям $\{B_l, C_k\} = \delta_{l+k,0}$.

Пространство вакуумных состояний в духовой теории двукратно вырождено и является двумерным представлением подалгебры нулевых мод $\{B_0, C_0\} = 1$. Можно выбрать в нем базис $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$, например, так, что $C_0 |\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle$, $B_0 |\uparrow\rangle = 0$; оба этих состояния уничтожаются B_k, C_k с положительным k . Полный базис в пространстве состояний строится действием на вакуумы мод B_l, C_l с $l < 0$; он может быть занумерован двумя строго возрастающими диаграммами Юнга λ_1, λ_2 .

Для каждого базисного элемента $B_{-\lambda_1} C_{-\lambda_2} |\uparrow\rangle$ существует пара $B_{-\lambda_1} C_{-\lambda_2} |\downarrow\rangle$, построенная из другого вакуумного состояния и имеющая то же самое собственное значение L_0 , но другое фермионное число. Из этого, в частности, следует, что среднее от единичного оператора в духовом секторе обнуляется. Все те же рассуждения верны и для антиголоморфных духов \bar{B}, \bar{C} . Простейший незануляющийся коррелятор на торе $\langle B(z)C(w)\bar{B}(\bar{z})\bar{C}(\bar{w}) \rangle$ даётся

$$\langle B(z)C(w)\bar{B}(\bar{z})\bar{C}(\bar{w}) \rangle_\tau = |\eta(q)|^4, \quad \eta(q) \equiv q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n). \quad (2.6)$$

Этот коррелятор не зависит от точек вставки полей z, w, \bar{z}, \bar{w} ; в дальнейшем мы будем часто использовать это свойство. В лагранжевом подходе этот факт можно объяснить тем, что функциональный интеграл по духам обнуляется, если не насыщаются нулевые моды, которых по одной для каждого из полей B и C , а эти нулевые моды — просто постоянные функции от z .

Одноточечные корреляционные функции примарных полей в $(2, 2p + 1)$ минимальной модели, как было упомянуто раньше, даются просто следами по соответствующему гильбертовому пространству. Формула для них принимает вид

$$\langle \Phi_{1,k} \rangle_\tau = \sum_{m=1}^p C_{m,(1,k)}^{(M)m} |q|^{2\Delta_{1,m}^M - \frac{1}{12} + \frac{(b^{-1}-b)^2}{2}} |F_M(\Delta_{1,k}^M, \Delta_{1,m}^M, q)|^2, \quad (2.7)$$

где $F_M(\Delta_{1,k}^M, \Delta_{1,m}^M, q)$ — торический одноточечный конформный блок, а $C_{l,(1,k)}^{(M)m}$ даётся подстановкой параметров $\alpha_1 = \alpha_{1,k}$, $\alpha_2 = \alpha_{1,l}$, $\alpha_3 = \alpha_{1,m}$ в (1.10). Одноточечная функция в теории Лиувилля

$$\langle V_a \rangle_\tau = \int_{\gamma} \frac{dP}{4\pi} C_{a,Q/2+iP}^{(L)Q/2+iP} (q\bar{q})^{-1/24+P^2} \times |F_L(\Delta_a^L, \Delta_{Q/2+iP}^L, q)|^2, \quad (2.8)$$

где диагональная структурная константа следует из (1.2) и даётся выражением

$$C_{a,Q/2+iP}^{(L)Q/2+iP} = (\pi\mu\gamma(b^2)b^{2-2b^2})^{-a/b} \frac{\Upsilon(b)\Upsilon(2a)\Upsilon(2iP)\Upsilon(-2iP)}{\Upsilon^2(a)\Upsilon(a+2iP)\Upsilon(a-2iP)}. \quad (2.9)$$

Она имеет четыре серии полюсов по P в $\pm 2iP = -mb - nb^{-1} - a$ и $\pm 2iP = Q + mb + nb^{-1} - a$, $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Для $0 < a < Q$ (что верно, например, для «одевающих» лиувиллевских полей с $a = a_{1,-n}$) контур интегрирования γ идёт по действительной оси, так, что две серии полюсов расположены с одной стороны от контура, а две с другой. Для других a (например, соответствующих вырожденным полям), как и при обсуждении ОРЕ, следует также учитывать вычеты в полюсах, пересекающих контур при аналитическом продолжении из области $0 < a < Q$.

2.2. Вычисление корреляционных чисел на торе

Из-за присутствия духовых нулевых мод, обсуждавшихся ранее, чтобы получить ненулевой ответ для одноточечной тахионной амплитуды на торе, необходимо дополнительно к $\mathcal{T}_{1,n}$ вставить под коррелятор поля B и \bar{B} . Согласно свойствам, описанным в предыдущем разделе, такой коррелятор является модулярной формой веса $(2, 2)$. Отсюда следует, что, интегрируя его по пространству модулей кривых рода один с одной отмеченной точкой, которое представляет собой фундаментальную область действия $PSL(2, \mathbb{Z})$ на верхней полуплоскости, мы получим хорошо определенное корреляционное число (модулярные свойства обеспечивают независимость ответа от выбора этой фундаментальной области). Таким образом, мы рассматриваем

$$A_1^1(n) := \int_F d^2\tau \langle B\bar{B}\mathcal{T}_{1,n} \rangle_\tau = \int_F d^2\tau \langle B\bar{B}C\bar{C}V_{1,-n}\Phi_{1,n} \rangle_\tau. \quad (2.10)$$

В этом разделе мы проиллюстрируем главные шаги вычисления на самом технически простом примере $n = 2$, а затем опишем, как оно обобщается на более сложный случай $n = 4$, в котором появляются дополнительные тонкости.

2.2.1. Случай $\mathcal{T}_{1,2}$

Сведение к граничным членам

Сперва заметим, что коррелятор не зависит от точек вставок духов благодаря (2.6). Корреляторы, в которых нет как минимум одной вставки духов B и C , обнуляются; также равны нулю корреляторы вида $\langle \partial^k B \partial^l C \rangle$, где k или $l > 0$. Пусть C находится в той же точке, где и $V\Phi$ (без ограничения общности в $z = 0$); мы не будем указывать этот аргумент в дальнейшем, когда это не будет вызы-

вать путаницы), а B — в некоторой другой точке z . Тогда тахионный оператор $S\bar{C}V\Phi$ можно переписать, используя ВУД в форме (1.26). Явное выражение для оператора H в этом случае приведено в (1.18).

БРСТ-оператор теперь можно прокоммутировать с духовыми полями B , используя $\{\mathcal{Q}, B(z)\} = T(z)$, где $T = T_L + T_M + T_{gh}$ — полный тензор энергии импульса, после чего можно откинуть \mathcal{Q} -точные члены. Это даёт

$$\int d^2\tau \langle B(z)\bar{B}(\bar{z}) \mathcal{Q}\bar{\mathcal{Q}}(O'_{m,n}) \rangle_\tau = \int d^2\tau \langle T(z)\bar{T}(\bar{z})O'_{m,n} \rangle_\tau. \quad (2.11)$$

Тот факт, что \mathcal{Q} -точные члены могут быть отброшены, стандартно понимается следующим образом. В гамильтоновом подходе среднее по тору от БРСТ-точного оператора $\mathcal{Q}(\dots)$ представляется (супер)следом по гильбертовому пространству вида $\text{Tr} \left[(-1)^F q^{\mathbf{L}_0} \bar{q}^{\bar{\mathbf{L}}_0} \{ \mathcal{Q}, \dots \} \right]$ (\mathbf{L} — моды полного тензора энергии-импульса). Используя циклическое свойство следа и то, что \mathcal{Q} антикоммутирует с оператором четности $(-1)^F$ и коммутирует с \mathbf{L}_k , приходим к тому, что такой коррелятор формально обнуляется. В нашем случае в этом аргументе могли бы быть какие-то тонкости, поскольку действие логарифмических операторов определено только на расширенном гильбертовом пространстве в минимальной струне: из рассмотрения корреляторов на сфере известно, что корреляторы с \mathcal{Q} -потомками логарифмических операторов в БРСТ-инвариантном окружении не обязательно дают ноль. Обратив внимание на эту тонкость, мы тем не менее отбрасываем \mathcal{Q} -точные члены в (2.11), чтобы продвинуться далее.

Вынося производную $\partial/\partial a$ из-под интеграла по τ , мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} \int d^2\tau \langle T(z)\bar{T}(\bar{z}) (L_{-1} - M_{-1} + b^2 : BC :) (\dots) V_a \Phi_{1,2} \rangle_\tau &= \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} \int d^2\tau \langle T(z)\bar{T}(\bar{z}) b^4 BC \bar{B} \bar{C} V_a \Phi_{1,2} \rangle_\tau. \end{aligned}$$

Опущенные члены равны нулю, поскольку в них не хватает духовых операторов B или C либо в голоморфном, либо в антиголоморфном секторе (недостающие духи могут прийти из T_{gh} , но в таких слагаемых имеется производная по z хотя бы от одного духового поля, что тоже приводит к занулению). Мы также заменили нормально упорядоченное произведение : BC : на обычное, так как сингулярный член в их операторном произведении не даёт вклада в коррелятор на торе и B и C можно поместить в одну точку. Теперь мы можем использовать тождества Уорда (2.1), чтобы избавиться от вставок T, \bar{T} , поскольку помимо T в корреляторе имеются только примарные поля. Это одно из специфичных для случая $\mathcal{T}_{1,2}$ технических упрощений. Из тождеств Уорда также можно выкинуть члены с производными по w и \bar{w} благодаря трансляционной инвариантности одноточечной функции на торе¹.

В точке $a = a_{1,2}$ полная размерность поля $BCV_a\Phi_{1,2}$ равна 0. При дифференцировании по a мы либо не дифференцируем префакторы, возникающие из тождеств Уорда, что даёт

$$(2\pi)^2 \frac{\partial^2}{\partial\tau\partial\bar{\tau}} \langle BC\bar{B}C'V_{1,2}\Phi_{1,2} \rangle_\tau, \quad (2.12)$$

либо дифференцируем конформные размерности Δ_Φ в одном из префакторов. Так возникают ещё два слагаемых

$$2\pi\Delta_a^{L'} \left(i [\bar{\mathcal{P}}(\bar{z}) + 2\bar{\eta}_1] \frac{\partial}{\partial\tau} - i [\mathcal{P}(z) + 2\eta_1] \frac{\partial}{\partial\bar{\tau}} \right) \langle BC\bar{B}C'V_{1,2}\Phi_{1,2} \rangle_\tau. \quad (2.13)$$

Заметим, что (2.13) явно зависит от z , хотя в исходном выражении эта зависимость отсутствует.

Приведенные выше слагаемые представляют собой полные производные по τ , поэтому они могут быть сведены к граничным вкладам. Стандартное представление для пространства модулей кривых рода 1 с одной отмеченной точкой — область

¹Более подробное обсуждение этого вопроса проведено в разделе 2.3.2.

$F_0 = \{\text{Im } \tau > 0, |\text{Re } \tau| < \frac{1}{2}, |\tau| > 1\}$ в плоскости τ (см. рис. 2.1 слева). Граничные компоненты с $\tau_1 \equiv \text{Re } \tau = \pm 1/2$ отождествлены («склеены») друг с другом; также отождествлены дуги окружности, симметричные относительно мнимой оси². Таким образом, естественно думать про границу пространства модулей как горизонтальный отрезок длины 1 с координатой $\tau_2 \equiv \text{Im } \tau \rightarrow +\infty$. В этом пределе практически все вклады в корреляционные функции во всех трех секторах вымирают, будучи пропорциональными положительным степеням $q = \exp(2\pi i\tau)$. Таким образом, мы ожидаем, что достаточно учесть конечное число слагаемых в корреляторе, дающие вклад порядка q^0 , что сильно упрощает задачу. Это наблюдение является главной мотивацией для дальнейших выкладок.

Сперва обсудим проблему z -зависимости в (2.13). Её разрешение в том, что (2.13) на самом деле равно нулю, так как коррелятор $\langle BC\overline{BC}V_{1,2}\Phi_{1,2} \rangle$ не зависит от $\tau, \bar{\tau}$. Есть два способа показать это. Первый из них опирается на структуру БРСТ-когомологий и сводится к следующей цепочке равенств (а также аналогичных для $\bar{\tau}$):

$$\begin{aligned} 2\pi i \frac{\partial}{\partial \tau} \langle BC\overline{BC}V_{1,2}\Phi_{1,2} \rangle_{\tau} &= (\text{т. Уорда}) = \langle T(z)BC\overline{BC}V_{1,2}\Phi_{1,2} \rangle_{\tau} = \\ &= \langle T(z)O_{1,2} \rangle_{\tau} = \langle (\mathcal{Q}B(z))O_{1,2} \rangle_{\tau} = \langle \mathcal{Q}(B(z)O_{1,2}) \rangle_{\tau} - \langle B(z)(\mathcal{Q}O_{1,2}) \rangle_{\tau} = 0 . \end{aligned}$$

Здесь те же выкладки, что обсуждались ранее, проделаны в обратном порядке, но уже не для логарифмического поля. В таком подходе факт независимости $\langle O_{1,2} \rangle_{\tau}$ от τ аналогичен утверждению о независимости корреляторов на сфере от точек вставки \mathcal{Q} -замкнутых операторов в случае, когда все остальные операторы тоже \mathcal{Q} -замкнуты. Другой способ состоит в прямом вычислении $\langle O_{1,2} \rangle_{\tau}$, используя явные выражения для одноточечных функций (2.7), (2.8) и торических блоков

²Заметим, что арки можно отождествить друг с другом только при условии модулярной ковариантности интегрируемого выражения. В нашем случае $O'_{1,2}$ это не так, что приводит к дополнительным вкладкам, описанным ниже.

[52]. Поскольку мы рассматриваем одноточечную функцию вырожденного поля, только дискретные члены дают вклад в лиувиллевский коррелятор (непрерывный вклад обнуляется) и выражение для $\langle O_{1,2} \rangle_\tau$ достаточно простое. Мы проверили независимость от τ коррелятора $\langle BC\overline{BC}V_{1,2}\Phi_{1,2} \rangle_\tau$, используя явные выражения в виде рядов для торических конформных блоков, до порядка q^4 ; утверждение сводится к следующему интересному тождеству

$$\frac{\eta(q)^2}{q^{1/12}} \times F_L(\Delta_{1,2}^L, \Delta_{Q/2+ib/4}^L, q) \times F_M(\Delta_{1,2}^M, \Delta_{1,p}^M, q) = 1. \quad (2.14)$$

Такой метод сложнее распространить на общий случай $O_{1,k}$, но мы ожидаем, что подобного рода соотношения на произведения конформных блоков должны иметь место и в нем.

Перейдем к вопросу о модулярной ковариантности и возможности отождествить компоненты границы фундаментальной области. Как обсуждалось в предыдущем разделе, одноточечные функции примарных полей являются модулярными формами (2.4); в частности, в случае $\Delta = 0$, как с оператором $O_{1,2}$, коррелятор модулярно-инвариантен. С другой стороны, корреляторы логарифмических полей таких, как $O'_{1,2}$, преобразуются нековариантно. Взяв в качестве $\Phi_\Delta = BC\overline{BC}V_a\Phi_{1,2}$ и продифференцировав обе части (2.4) по a , а затем положив $a = a_{1,2}$, мы получим

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} f_\Delta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} f_\Delta(\tau) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} \Delta_a^L \cdot \log(\tau\bar{\tau}) f_\Delta(\tau). \quad (2.15)$$

Обозначим $\langle O' \rangle_\tau \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} f_\Delta(\tau)$ как $F(r, \varphi)$, где $\tau = ire^{i\varphi}$. Тогда равенство выше может быть записано как

$$F(1/r, -\varphi) = F(r, \varphi) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} \Delta_a^L \cdot \log(r^2) f_\Delta(\tau). \quad (2.16)$$

Зная это, перепишем (2.12) как интеграл по границе, используя теорему Гаусса:

$$\int_F dS (\vec{\nabla}, \vec{A}) = \int_{\partial F} dl (\vec{n}, \vec{A}) . \quad (2.17)$$

Вклад от границы «в бесконечности» даётся

$$(2\pi)^2 \int_F dS \underbrace{\frac{1}{4} (\vec{\nabla}, \vec{\nabla})}_{\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial\bar{\tau}}} \langle O' \rangle = \frac{1}{4} (2\pi)^2 \int_{-1/2}^{1/2} d\tau_1 \frac{\partial}{\partial\tau_2} \langle O' \rangle_{\tau_2 \rightarrow \infty} + \dots, \quad (2.18)$$

а интеграл по дуге может быть переписан как

$$-\frac{1}{4} (2\pi)^2 \int_{-\pi/6}^{\pi/6} d\varphi \frac{\partial}{\partial r} F(r, \varphi) \Big|_{r=1} = -\frac{1}{4} (2\pi)^2 \int_0^{\pi/6} d\varphi \left[\frac{\partial}{\partial r} F(r, \varphi) + \frac{\partial}{\partial r} F(r, -\varphi) \right] \Big|_{r=1} . \quad (2.19)$$

Вкладов по вертикальным компонентам границы с $\text{Re } \tau = \pm 1/2$ нет, так как относительно $\tau \rightarrow \tau + 1$ подынтегральное выражение инвариантно. Дифференцируя (2.16) по r при $r = 1$, мы получим

$$-\frac{\partial}{\partial r} F(r, -\varphi) \Big|_{r=1} = \frac{\partial}{\partial r} F(r, \varphi) \Big|_{r=1} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} \Delta_a^L \cdot 2 \cdot f_\Delta(\tau) . \quad (2.20)$$

Таким образом, интеграл по дуге даётся выражением

$$+\frac{1}{4} (2\pi)^2 \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} \Delta_a^L \Big|_{a=a_{1,2}} \cdot 2 \int_0^{\pi/6} d\varphi \langle O_{1,2} \rangle_{\tau=i \exp(i\varphi)} . \quad (2.21)$$

Наконец, используя, что $\langle O_{1,2} \rangle_\tau$ не зависит от τ , как обсуждалось ранее, мы можем

записать (2.12) в виде

$$\frac{1}{4}(2\pi)^2 \int_{-1/2}^{1/2} d\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_2} \langle O'_{1,2} \rangle_{\tau_2 \rightarrow \infty} + \frac{1}{24}(2\pi)^3 \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} \Delta_a^L \Big|_{a=a_{1,2}} \cdot \langle O_{1,2} \rangle_{\tau} . \quad (2.22)$$

Вычисление $\langle O_{1,2} \rangle_{\tau}$ и $\langle O'_{1,2} \rangle_{\tau}$, $\tau_2 \rightarrow \infty$

В этом разделе мы обсудим, как вычислять $\langle O_{1,2} \rangle$ и $\langle O'_{1,2} \rangle$. Во-первых, коррелятор в минимальной модели даётся суммой по p конформным семействам (2.7)

$$\langle \Phi_{1,2} \rangle_{\tau} = \sum_{m=1}^p C_{m,(1,2)}^{(M)m} |q|^{2\Delta_{1,m}^M - \frac{1}{12} + \frac{(b^{-1}-b)^2}{2}} |F_M(\Delta_{1,2}^M, \Delta_{1,m}^M, q)|^2 . \quad (2.23)$$

В случае $\Phi_{1,2}$ диагональные структурные константы $C_{m,(1,2)}^{(M)m}$ отличны от нуля только при $m = p$: это единственная возможность удовлетворить правилам операторного разложения с $\Phi_{1,2}$, которая реализуется за счет того, что $\Phi_{1,p}$ и $\Phi_{1,p+1}$ отождествляются. Для $m = p$ случая структурная константа равна

$$C_{p,(1,2)}^{(M)p+1} = \left(\frac{\gamma(2 - 2b^2)\gamma(1 - pb^2)}{\gamma(1 - b^2)\gamma(2 - b^2(p + 1))} \right)^{1/2} . \quad (2.24)$$

Духовый коррелятор даётся (2.6) и может быть разложен в ряд по q, \bar{q} , начинающийся с $|q|^{1/6}$. Лиувиллевский вклад даётся (2.8).

Конформные блоки F_L и F_M — ряды по целым неотрицательным степеням q , начинающиеся с 1. Рассмотрим тогда лидирующие вклады в разложении по q выражения под интегралом по лиувиллевскому импульсу P . Подставляя $\Delta_{1,m}^M = \Delta_{1,p}^M$, мы получаем, что они порядка $|q|^{(b^2/8+2P^2)}$. Для действительных P уже лидирующий член стремится к нулю степенным образом на границе пространства модулей $\tau_2 \rightarrow \infty$. Таким образом, непрерывный вклад в коррелятор исчезает. Однако, для $a \rightarrow a_{1,2} = -\frac{b}{2}$ имеются и дискретные вклады в коррелятор от полюсов, пересе-

кающих контур при аналитическом продолжении. Есть 2 таких полюса, вычеты в которых не зануляются в пределе $a \rightarrow a_{1,2}$, соответствующие $P = \pm \frac{ia}{2} \rightarrow \mp \frac{ib}{4}$. Заметим, что оба вклада в коррелятор от этих полюсов в пределе становятся порядка $|q|^0$ и они равны друг другу, поскольку связаны отражением $P \rightarrow -P$. Эти вклады и дадут искомый коррелятор. Мы получаем, что

$$\langle O_{1,2} \rangle_{\tau_2 \rightarrow \infty} = b^4 \times C_{p,(1,2)}^{(M)p+1} \times \frac{2\pi i \times 2}{4\pi} \operatorname{Res}_{P=ia/2} C_{a,Q/2+iP}^{(L)Q/2+iP} \Big|_{a=a_{1,2}} . \quad (2.25)$$

Посмотрим теперь, как эти соображения модифицируются для логарифмического поля $O'_{1,2}$. Нас интересуют вклады в одноточечную функцию, пропорциональные $\tau_2 = \operatorname{Im} \tau$, поскольку в соответствующем граничном вкладе проводится дифференцирование по τ_2 . Такой множитель может возникнуть только при дифференцировании по a степенного префактора $|q|^{2P^2(a)}$ в дискретных членах: вклады с производными по a от структурной константы занулятся на границе пространства модулей. В нашем случае $P(a) = \pm ia/2$ и дифференцирование дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau_2} \langle O'_{1,2} \rangle_{\tau_2 \rightarrow \infty} &= \lim_{a \rightarrow a_{1,2}} \left[\frac{\partial}{\partial \tau_2} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} \exp(2\pi \tau_2 a^2 / 2) \langle O_{1,2} \rangle_{\tau} + O(a - a_{1,2}) \right] = \\ &= \pi a_{1,2} \langle O_{1,2} \rangle_{\tau} = -\frac{\pi b}{4} \cdot 2 \langle O_{1,2} \rangle_{\tau} . \end{aligned} \quad (2.26)$$

Теперь, используя

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} \Delta_a^L = \frac{Q}{2} - a = \left(a = a_{1,k} = -\frac{(k-1)b}{2} \right) = \frac{b^{-1}}{2} + \frac{kb}{2} = \frac{b}{4} (2p+1+2k) , \quad (2.27)$$

два слагаемых в (2.22) суммируются в

$$\frac{(2\pi)^3 b}{24} \frac{b}{4} (2p+1+4) \langle O_{1,2} \rangle_{\tau} - \frac{(2\pi)^2}{4} \frac{4\pi b}{8} \langle O_{1,2} \rangle_{\tau} = \frac{(2\pi)^3 b}{96} (2p-1) \langle O_{1,2} \rangle_{\tau} . \quad (2.28)$$

2.2.2. Случай $\mathcal{T}_{1,4}$

Теперь рассмотрим пример, в котором в операторе $H_{1,n}$ возникают Вирасоропотомки полей V и Φ — случай $n = 4$, см. (1.19). Как и раньше, мы будем использовать конформные тождества Уорда на торе (2.1) и (2.2), отбрасывая слагаемые с производными по координатам полей. Чтобы убедиться, что всё будет аналогично случаю (1, 2), нужно проверить следующие утверждения:

- 1) Одноточечное среднее от оператора $\langle O_{1,4} \rangle_\tau$ не зависит от τ и $\bar{\tau}$. Как и раньше, принимая во внимание БРСТ-замкнутость $O_{1,4}$, для этого достаточно доказать, что производная по τ ($\bar{\tau}$) может быть получена вставкой \mathcal{Q} -точного полного тензора энергии-импульса: $2\pi i \frac{\partial}{\partial \tau} \langle O_{1,4} \rangle_\tau = \langle T(z) O_{1,4} \rangle_\tau$.
- 2) Доказав первое утверждение, необходимо проверить, что для логарифмического оператора

$$\frac{\partial}{\partial a} \langle T(z) \bar{T}(\bar{z}) H_{1,4} \bar{H}_{1,4} V_a \Phi_{1,4} \rangle_\tau \Big|_{a=a_{1,4}} = (2\pi)^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \bar{\tau}} \frac{\partial}{\partial a} \langle H_{1,4} \bar{H}_{1,4} V_a \Phi_{1,4} \rangle_\tau \Big|_{a=a_{1,4}} . \quad (2.29)$$

Для проверки этих двух утверждений рассмотрим сперва среднее вида

$$\begin{aligned} \langle T(z) H_{1,4} V_a \Phi_{1,4} \rangle_\tau &= 9b^4 \langle T(z) BC(L_{-2} - M_{-2}) V_a \Phi_{1,4} \rangle_\tau + \\ &+ \langle T(z) \partial BC(\#L_{-1} - \#M_{-1}) V_a \Phi_{1,4} \rangle_\tau + \frac{9b^2(4b^4 - 1)}{2} \langle T(z) \partial^2 BC V_a \Phi_{1,4} \rangle_\tau \end{aligned} \quad (2.30)$$

(сконцентрировавшись на голоморфной части). Мы отбросили слагаемые без духов в $H_{1,4}$, поскольку, как и раньше, соответствующие вклады в коррелятор обнуляются.

Сведение к граничным членам

Члены с производными духов в H . Рассмотрим второе и третье слагаемое в (2.30). Поскольку духовая двухточечная функция $\langle \partial^k B C \rangle_\tau = 0$ для $k = 1, 2$, вклад от $(T_L + T_M)(z)$ в этих слагаемых зануляется. Однако, четырехточечная функция, включающая производные духовых полей (и, соответственно, среднее вида $\langle T_{gh}(z) \partial^k B C \rangle$) не обращается в ноль. Из тождеств Уорда, используя независимость от точек вставки двухточечной функции без производных по координатам, мы получаем

$$\begin{aligned} \partial_x^k \langle T_{gh}(z) B(x) C(0) \rangle_\tau &= \partial_x^k \left[2(\mathcal{P}(z-x) + 2\eta_1) - (\mathcal{P}(z) + 2\eta_1) + 2\pi i \frac{\partial}{\partial \tau} \right] \langle B(x) C(0) \rangle_\tau \\ &= 2(-1)^k \mathcal{P}^{(k)}(z-x) \langle BC \rangle_\tau . \end{aligned} \quad (2.31)$$

Используя эти формулы, мы получаем, что второе слагаемое в (2.30) обнуляется из-за трансляционной инвариантности (в лиувиллевском и материальном секторе), а третье даёт вклад вида

$$9b^2(4b^4 - 1) \mathcal{P}''(z) \langle B C V_a \Phi_{1,4} \rangle_\tau . \quad (2.32)$$

Первое слагаемое. В слагаемом без производных от духовых полей мы представляем действие мод T_L, T_M в виде контурных интегралов: $L_{-2} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dw}{w} T_L(w)$ и переписываем его как

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dw}{w} \langle (T_L + T_M + T_{gh})(z) B C (T_L(w) - T_M(w)) V_a \Phi_{1,4}(0) \rangle_\tau . \quad (2.33)$$

Перечислим сперва члены, в которых не нужно использовать тождества Уорда с двойной вставкой T :

$$T_{gh}(T_L - T_M) : \left[1(\mathcal{P}(z) + 2\eta_1) + 2\pi i \frac{\partial}{\partial \tau_{gh}} \right] \langle BC(L_{-2} - M_{-2})V_a \Phi_{1,4}(0) \rangle_\tau, \quad (2.34)$$

$$T_L(-T_M) : \left[\Delta_a^L(\mathcal{P}(z) + 2\eta_1) + 2\pi i \frac{\partial}{\partial \tau_L} \right] \langle BC(-M_{-2})V_a \Phi_{1,4}(0) \rangle_\tau, \quad (2.35)$$

$$T_M T_L : \left[\Delta_{1,4}^M(\mathcal{P}(z) + 2\eta_1) + 2\pi i \frac{\partial}{\partial \tau_M} \right] \langle BCL_{-2}V_a \Phi_{1,4}(0) \rangle_\tau. \quad (2.36)$$

Мы обозначаем частными производными по τ с нижним индексом производные, которые действуют только на соответствующий множитель в (факторизующемся) одноточечном корреляторе. Полная производная по τ даётся суммой $\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau_{gh}} + \frac{\partial}{\partial \tau_L} + \frac{\partial}{\partial \tau_M}$. Теперь перепишем одно из оставшихся слагаемых с двойной вставкой ливиллевского тензора энергии-импульса T_L , используя (2.2)

$$\begin{aligned} & \frac{c_L}{12} \mathcal{P}''(z) \langle BC V_a \Phi_{1,4} \rangle_\tau + \oint \frac{dw}{(2\pi i)w} [2(\mathcal{P}(z-w) + 2\eta_1) + (\zeta(z-w) + 2\eta_1 w) \partial_w] \times \\ & \times \left[\Delta_a^L(\mathcal{P}(w) + 2\eta_1) + 2\pi i \frac{\partial}{\partial \tau_L} \right] \langle BC V_a \Phi_{1,4} \rangle_\tau + \\ & + \left[\Delta_a^L(\mathcal{P}(z) + 2\eta_1) + 2\pi i \frac{\partial}{\partial \tau_L} \right] \langle BCL_{-2} V_a \Phi_{1,4} \rangle_\tau. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Аккуратно извлечем слагаемые порядка $1/w$, дающие вклад в интеграл во втором слагаемом в уравнении выше. Имея в виду, что $\mathcal{P}(w) \sim \frac{1}{w^2}$, $w \rightarrow 0$, мы получаем

$$\begin{aligned}
& [2(\mathcal{P}(z-w) + 2\eta_1) + (\zeta(z-w) + 2\eta_1 w)\partial_w] \left[\Delta_a^L(\mathcal{P}(w) + 2\eta_1) + 2\pi i \frac{\partial}{\partial \tau_L} \right] = \\
& = 2 \left(\mathcal{P}(z) + 2\eta_1 - w\mathcal{P}'(z) + \frac{w^2}{2}\mathcal{P}''(z) \right) \left(2\eta_1 \Delta_a^L + 2\pi i \frac{\partial}{\partial \tau_L} + \frac{\Delta_a^L}{w^2} + \dots \right) + \\
& + \left(\zeta(z) + (2\eta_1 - \zeta'(z))w + \frac{w^2}{2}\zeta''(z) - \frac{w^3}{6}\zeta'''(z) \right) \left(-\frac{2\Delta_a^L}{w^3} + \dots \right) = \\
& = 2(\mathcal{P}(z) + 2\eta_1) \left(2\eta_1 \Delta_a^L + 2\pi i \frac{\partial}{\partial \tau_L} \right) + \frac{2\Delta_a^L}{3}\mathcal{P}''(z) + \dots \quad (2.38)
\end{aligned}$$

Мы использовали, что $\zeta'''(z) = -\mathcal{P}''(z)$. Используя тождества Уорда с одной вставкой T

$$\langle BCL_{-2}V_a\Phi_{1,4} \rangle_\tau = \left(2\eta_1 \Delta_a^L + 2\pi i \frac{\partial}{\partial \tau_L} \right) \langle BCV_a\Phi_{1,4} \rangle_\tau, \quad (2.39)$$

выражение (2.37) может быть переписано как

$$\left(\frac{c_L}{12} + \frac{2\Delta_a^L}{3} \right) \mathcal{P}''(z) \langle BCV_a\Phi_{1,4} \rangle_\tau + \left[(\Delta_a^L + 2)(\mathcal{P}(z) + 2\eta_1) + 2\pi i \frac{\partial}{\partial \tau_L} \right] \langle BCL_{-2}V_a\Phi_{1,4} \rangle_\tau. \quad (2.40)$$

Аналогично слагаемое со вставкой $T_M(z)T_M(w)$ даст

$$\left(-\frac{c_M}{12} - \frac{2\Delta_{1,4}^M}{3} \right) \mathcal{P}''(z) \langle BCV_a\Phi_{1,4} \rangle_\tau + \quad (2.41)$$

$$+ \left[(\Delta_{1,4}^M + 2)(\mathcal{P}(z) + 2\eta_1) + 2\pi i \frac{\partial}{\partial \tau_M} \right] \langle BC(-M_{-2})V_a\Phi_{1,4} \rangle_\tau. \quad (2.42)$$

Суммируя все вклады, мы получаем

$$\begin{aligned}
& \left[9b^4 \left(\frac{c_L - c_M}{12} + \frac{2(\Delta_a^L - \Delta_{1,4}^M)}{3} \right) + 9b^2(4b^4 - 1) \right] \mathcal{P}''(z) \langle BC V_a \Phi_{1,4} \rangle_\tau + \\
& + (\Delta_a^L + \Delta_{1,4}^M + 3)(\mathcal{P}(z) + 2\eta_1) \langle BC(L_{-2} - M_{-2}) V_a \Phi_{1,4} \rangle_\tau + \\
& + 2\pi i \frac{\partial}{\partial \tau} \langle BC(L_{-2} - M_{-2}) V_a \Phi_{1,4} \rangle_\tau .
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Как и ожидалось, префакторы в первой и второй строчке зануляются для $a = a_{1,4}$ (т.е. в случае коррелятора $\langle T(z) O_{1,4} \rangle_\tau$) и остаётся только производная по модулярному параметру. Из этого, как объяснялось ранее, будет следовать независимость $\langle O_{1,4} \rangle_\tau$ от τ и $\bar{\tau}$. Чтобы доказать утверждение для логарифмического оператора, для краткости введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
& \left[9b^4 \left(\frac{c_L - c_M}{12} + \frac{2(\Delta_a^L - \Delta_{1,4}^M)}{3} \right) + 9b^2(4b^4 - 1) \right] \mathcal{P}''(z) = \beta \cdot (a - a_{1,4}) , \\
& (\Delta_a^L + \Delta_{1,4}^M + 3)(\mathcal{P}(z) + 2\eta_1) = \gamma \cdot (a - a_{1,4}) .
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Аналогичные обозначения будем использовать для антиголоморфного фактора.

Тогда имеем

$$\begin{aligned}
& \langle T(z) \bar{T}(\bar{z}) H_{1,4} \bar{H}_{1,4} V_a \Phi_{1,4} \rangle_\tau = \beta(a - a_{1,4}) \langle \bar{T} BC \bar{H}_{1,4} V_a \Phi_{1,4} \rangle_\tau + \\
& + \left(2\pi i \frac{\partial}{\partial \tau} + \gamma(a - a_{1,4}) \right) \langle \bar{T} H_{1,4} \bar{H}_{1,4} V_a \Phi_{1,4} \rangle_\tau = \\
& = \beta(a - a_{1,4}) \left[\bar{\beta}(a - a_{1,4}) \langle BC \bar{B} C V_a \Phi_{1,4} \rangle_\tau + \left(-2\pi i \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} + \bar{\gamma}(a - a_{1,4}) \right) \langle BC \bar{H}_{1,4} V_a \Phi_{1,4} \rangle_\tau \right] \\
& + \left(-2\pi i \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} + \bar{\gamma}(a - a_{1,4}) \right) \left(2\pi i \frac{\partial}{\partial \tau} + \gamma(a - a_{1,4}) \right) \langle H_{1,4} \bar{H}_{1,4} V_a \Phi_{1,4} \rangle_\tau + \\
& + \bar{\beta}(a - a_{1,4}) \left(2\pi i \frac{\partial}{\partial \tau} + \gamma(a - a_{1,4}) \right) \langle H_{1,4} \bar{B} C V_a \Phi_{1,4} \rangle_\tau .
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Мы видим, что после дифференцирования по a и подстановки $a = a_{1,4}$ единственный ненулевой вклад³ даётся

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} \langle T(z) \bar{T}(\bar{z}) H_{1,4} \bar{H}_{1,4} V_a \Phi_{1,4} \rangle_\tau &= (4\pi^2) \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \bar{\tau}} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} \langle H_{1,4} \bar{H}_{1,4} V_a \Phi_{1,4} \rangle_\tau = \\ &= (4\pi^2) \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \bar{\tau}} \langle O'_{1,4} \rangle_\tau . \end{aligned}$$

Вычисление $\langle O_{1,4} \rangle_\tau$ и $\langle O'_{1,4} \rangle_\tau$, $\tau_2 \rightarrow \infty$

В отличие от случая (1, 2) здесь имеется 2 разных вклада в сумму по спектру в минимальной модели (соответствующие $m = p \sim p + 1$ и $m = p - 1 \sim p + 2$) и две пары дискретных членов в лиувиллевском корреляторе, соответствующие $P = \pm \frac{ib}{4}$ и $P = \pm \frac{3ib}{4}$. При перемножении корреляторов в лиувиллевском и материальном секторах возникает 4 разных слагаемых, в которых лидирующая степень q не обязательно нулевая. Эта лидирующая степень $p(q) = |q|^{2\Delta_{1,m}^M + 2P^2 + \frac{(b^{-1}-b)^2}{2}}$; для разных P, m она равна

$$\begin{aligned} m = p - 1 : \quad P = \pm \frac{ib}{4} \quad - \quad p(q) = |q|^{b^2}, \quad P = \pm \frac{3ib}{4} \quad - \quad p(q) = |q|^0 \\ m = p : \quad P = \pm \frac{ib}{4} \quad - \quad p(q) = |q|^0, \quad P = \pm \frac{3ib}{4} \quad - \quad p(q) = |q|^{-b^2} \end{aligned}$$

Однако, два «лишних» вклада с ненулевой степенью $|q|$ на самом деле зануляются из-за дополнительного численного коэффициента, возникающего при действии мод L, M , входящих в (1.19). Из конформного тождества Уорда (2.1) следует

$$\langle (L_{-2} - M_{-2}) V_{1,4} \Phi_{1,4} \rangle_\tau = \left[2\eta_1 (\Delta_{1,4}^L - \Delta_{1,4}^M) + 2\pi i \left(\frac{\partial}{\partial \tau_L} - \frac{\partial}{\partial \tau_M} \right) \right] \langle V_{1,4} \Phi_{1,4} \rangle_\tau . \quad (2.46)$$

³Все остальные слагаемые содержат старшие степени $(a - a_{1,4})$, или обнуляются, поскольку средние от операторов из кольца дискретных состояний не зависят от τ .

Дифференцирование по τ лидирующих вкладов для четырех рассматриваемых слагаемых приводит к дополнительному множителю, зависящему от P и m . В главном порядке мы можем заменить

$$\frac{\partial}{\partial \tau_L} - \frac{\partial}{\partial \tau_M} \rightarrow 2\pi \left(\Delta_m^M - \Delta_P^L + \frac{c_L - c_M}{24} \right). \quad (2.47)$$

Более того, мы имеем $\eta_1 \approx \frac{1}{24}(2\pi)^2$ (опять же, в лидирующем порядке по q) и всю скобку в (2.46) можно заменить на

$$(2\pi)^2 \left[\frac{1}{12} (\Delta_{1,4}^L - \Delta_{1,4}^M) + \left(\frac{(b^{-1} - b)^2}{4} + \Delta_m^M - P^2 \right) \right] (1 + O(q)). \quad (2.48)$$

Легко проверить, что для случаев $(m = p - 1, P = \pm \frac{ib}{4})$ и $(m = p, P = \pm \frac{3ib}{4})$ префактор зануляется, а для остальных двух комбинаций он сводится к $\pm(2\pi)^2 \frac{b^2}{2}$. Знак \pm не имеет значения, так как такой фактор приходит и из голоморфного, и из антиголоморфного сектора. Для вычисления $\langle O_{1,4} \rangle_\tau$ остаётся посчитать произведение вырожденных структурных констант, соответствующих двум «правильным» комбинациям m и P .

Оказывается, что все 4 вклада (если считать отдельно лиувиллевские дискретные члены, отличающиеся отражением $P \rightarrow -P$) оказываются равными друг другу (более того, каждое из них оказалось бы равно единице, если нормировать исходный тахионный оператор так же, как это сделано в [26]). Вклады в коррелятор для $m = p$ и $m = p - 1$ вместе с соответствующими дискретными членами в теории Лиувилля дают по половине коррелятора $\langle O_{1,4} \rangle_\tau$, поскольку выполняется равенство

$$C_{p,(1,4)}^{(M)p+1} \text{Res}_{P=ib/4} C_{a_{1,4}, Q/2+iP}^{(L)Q/2+iP} = C_{p-1,(1,4)}^{(M)p+2} \text{Res}_{P=3ib/4} C_{a_{1,4}, Q/2+iP}^{(L)Q/2+iP}. \quad (2.49)$$

При рассмотрении логарифмических операторов $O'_{1,4}$ вместо $O_{1,4}$ две пары связан-

ных отражением дискретных членов после дифференцирования по a домножаются на соответствующие лиувиллевские импульсы (с точностью до фактора $i/2$ они равны $\frac{-3b}{2}$ и $\frac{-b}{2}$), поэтому мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial \tau_2} \langle O'_{1,4} \rangle_{\tau_2 \rightarrow \infty} = -\pi \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{3b}{2} \langle O_{1,4} \rangle_{\tau} + \frac{b}{2} \langle O_{1,4} \rangle_{\tau} \right) = -\frac{\pi b}{4} \cdot 4 \langle O_{1,4} \rangle_{\tau} . \quad (2.50)$$

Выше мы доказали, что выражение вида (2.22) верно и для случая (1, 4). Таким образом, мы получаем итоговый ответ для одноточечной тахионной амплитуды

$$A_1^1(4) = \frac{(2\pi)^3 b}{24} \frac{1}{4} (2p + 1 + 8) \langle O_{1,4} \rangle - \frac{(2\pi)^2 8\pi b}{4} \frac{1}{8} \langle O_{1,4} \rangle = \frac{(2\pi)^3 b}{96} (2p - 3) \langle O_{1,4} \rangle . \quad (2.51)$$

2.3. Обсуждение

2.3.1. Общий случай $\mathcal{T}_{1,2k}$ и сравнение с матричной моделью

Экстраполируя наблюдение, сделанное выше на примерах $O_{1,2}, O_{1,4}$ о том, что $\langle O \rangle$ даётся суммой двух/четырёх равных слагаемых, а также формулы (2.50) и (2.26), мы можем предположить справедливость следующих формул (в нормировке, совпадающей с [26])

$$\langle O_{1,2k} \rangle = 2k , \quad \partial_{\tau_2} \langle O'_{1,2k} \rangle |_{\tau_2 \rightarrow \infty} = -\frac{\pi b}{4} \cdot 2k \langle O_{1,2k} \rangle = -\pi b k^2 . \quad (2.52)$$

Тогда для чётных k , проделав все шаги, ведущие к (2.22), мы найдем

$$\begin{aligned} A_1^1(k) &= \frac{(2\pi)^3 b}{24} \frac{1}{4} (2p + 1 + 2k) \langle O_{1,k} \rangle - \frac{(2\pi)^2 2\pi b}{4} \frac{1}{8} k \langle O_{1,k} \rangle = \\ &= \frac{(2\pi)^3 b}{96} (2p + 1 - k) \langle O_{1,k} \rangle \sim k(2p + 1 - k) . \end{aligned} \quad (2.53)$$

Это совпадает с ответом из матрично-модельного подхода, полученным в [46].

2.3.2. О случае $\mathcal{T}_{1,k}$ с нечётным k

В наших примерах мы игнорировали члены с производными по w и \bar{w} , аргументируя это трансляционной инвариантностью одноточечной функции. Уже на примере обычных уравнений движения в теории Лиувилля известно, что это может быть несправедливо для логарифмических операторов — из уравнений движения мы получаем, что оператор $\partial\bar{\partial}\phi$, дающийся производной по координатам от поля Лиувилля, имеет ненулевое среднее. В этом случае, однако, зануление из-за трансляционной инвариантности компенсируется тем, что обращается в бесконечность диагональная структурная константа $C_L(0, Q/2 + iP, Q/2 - iP)$. Для случая среднего от $V_{1,2k}$, так же, как для $V_{1,2}$, таких проблем не ожидается. Однако, для $A_1^1(k)$ с нечётным k члены с производными по координатам тахиона следует рассматривать более аккуратно.

Другая связанная с этим проблема (или же другое проявление проблемы, описанной выше) видна уже на примере $k = 1$, в случае, когда $H_{1,1} = 1$. Используя высшие уравнения движения и коммутируя БРСТ-заряд с духовым полем $B(z)$, мы приходим к коррелятору вида

$$\langle T(z)\bar{T}(z)V'_{1,1}\Phi_{1,1} \rangle_\tau = \langle T(z)\bar{T}(z)\phi \mathbb{I}_M \rangle_\tau. \quad (2.54)$$

Из-за ненасыщения нулевых мод в духовом секторе коррелятор должен обнуляться. Однако, выражение, с которого мы стартовали, ненулевое (более того, эта тахионная одноточечная амплитуда была вычислена аналитически другим способом в [53]), что выглядит как явное противоречие. С другой стороны, лиувиллевская часть этого коррелятора $\langle \phi \rangle_\tau$ обращается в бесконечность. Выглядит разумным, что описанные выше «ноль» и «бесконечность» должны компенсировать друг друга; мы, однако, не нашли регуляризацию, позволяющую продемонстрировать это

явно.

Несмотря на эти проблемы, корреляционные числа $\mathcal{T}_{1,k}$ с нечетным k могут быть вычислены с использованием метода, изложенного в нашей работе, если перед применением ВУД мы используем отождествление тахионных операторов относительно отражения $\mathcal{T}_{1,k} = \mathcal{T}_{1,2p+1-k}$. Такое отражение меняет местами четные и нечетные k . Заметим, что выражение (2.53), полученное нашим методом, с очевидностью уважает симметрию относительно отражения.

2.3.3. Другие выборы фундаментальной области

В этом разделе мы хотели бы проверить совместимость нашего метода с требованием инвариантности тахионных амплитуд (2.10) относительно выбора фундаментальной области. В исходной постановке задачи то, что тахионная амплитуда (2.10) хорошо определена, следует из модулярной ковариантности одноточечных функций (2.4), модулярных свойств духового коррелятора $\langle B\bar{B}C\bar{C} \rangle_\tau$, а также требования (1.14) к размерностям вертексных операторов. Вопрос состоит в том, совместны ли с этим требованием высшие уравнения движения и процедура регуляризации, использованные в вычислениях раздела 2.2.

В качестве примера другого выбора фундаментальной области рассмотрим область F_1 , полученную из F_0 действием S -преобразования $\tau \rightarrow -1/\tau$ (см. рис. 2.1). При таком выборе граница F_0 на бесконечности отображается в точку $\tau = 0$, а дуги $(\tilde{a}, 0)$ и $(\tilde{d}, 0)$ переводятся друг в друга некоторым модулярным преобразованием (см. ниже); таким образом, граничные вклады должны быть вычислимы из соображений, аналогичных разделу 2.2, опираясь на закон модулярных преобразований логарифмических полей. Однако, выражение для одноточечной амплитуды имеет особенность в точке $\tau = 0$, которая требует аккуратного рассмотрения.

Покажем, как прийти к формуле (2.22) при таком выборе фундаментальной

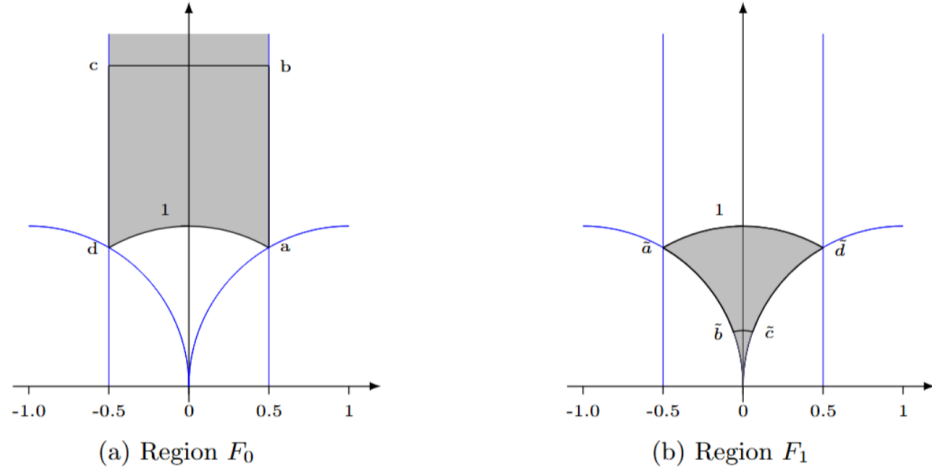


Рис. 2.1. Фундаментальные области.

области, стартуя с (2.12). Во-первых, вклад интеграла по дуге (\tilde{a}, \tilde{d}) даётся такой же формулой (2.21), но с другим знаком:

$$-\frac{1}{4}(2\pi)^2 \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} \Delta_a^L \cdot 2 \int_0^{\pi/6} d\varphi \langle O \rangle_{\tau=i \exp(i\varphi)}, \quad (2.55)$$

поскольку для F_1 внешняя нормаль к границе направлена в другую сторону. Две дуги $(0, \tilde{a})$ and $(0, \tilde{d})$ можно параметризовать, соответственно, как

$$\begin{cases} \tau_1 = r_1 e^{i\varphi_1} - 1, & r_1 = 1, \quad \varphi_1 \in (0, \pi/3), \\ \tau_2 = 1 - r_2 e^{-i\varphi_2}, & r_2 = 1, \quad \varphi_2 \in (0, \pi/3). \end{cases} \quad (2.56)$$

Эти две дуги отождествляются модулярным преобразованием

$$\tau_2 = \frac{\tau_1}{\tau_1 + 1}, \quad \text{или} \quad \varphi_1 = \varphi_2, \quad r_2 = \frac{1}{r_1}, \quad (2.57)$$

при котором корреляционные функции примарных полей преобразуются как

$$f_\Delta \left(\frac{\tau}{\tau + 1} \right) = |\tau + 1|^{2\Delta} f_\Delta(\tau). \quad (2.58)$$

Тогда для логарифмического оператора мы будем иметь

$$\langle O' \rangle_{\tau/(\tau+1)} = \langle O' \rangle_{\tau} + \Delta_a^{L'} \log |\tau + 1| \times \langle O \rangle_{\tau_1}. \quad (2.59)$$

По этим дугам интегрируется нормальная производная коррелятора (т.е. производные по $r_1 = |\tau_1 + 1|$ и r_2 , с дополнительным знаком «минус»). Дифференцируя закон преобразования выше по r_1 , как и раньше, мы находим, что только слагаемое с Δ' выживает при суммировании интегралов по двум дугам; это слагаемое интегрируется в

$$+\frac{1}{4}(2\pi)^2 \frac{\pi}{3} \Delta_a^{L'} \langle O \rangle. \quad (2.60)$$

Два вклада (2.55) и (2.60) вместе суммируются в тот же ответ, что даёт формула (2.21).

Теперь разберемся с сингулярностью в точке $\tau = 0$. Введем регуляризацию, добавив к границе дугу окружности $\gamma_0 \equiv (\tilde{b}, \tilde{c})$ малого радиуса r с центром в $\tau = 0$. Легко вычислить, что длина этой дуги $l \approx r^2$ для $r \rightarrow 0$. Из модулярных свойств мы знаем, что

$$\langle O' \rangle_{ire^{i\varphi}} = \langle O' \rangle_{ie^{i\varphi}/r} - \Delta_a^{L'} \log r \langle O \rangle_{\tau}. \quad (2.61)$$

При преобразовании $\tau \rightarrow -1/\tau$ эта дуга отображается в почти горизонтальный отрезок с $\tau_2 \approx (-i\tau) = \frac{1}{r}$. Для $\tau_2 \rightarrow (+\infty)$ $\frac{\partial}{\partial \tau_2} \langle O' \rangle \approx \text{const}$, как обсуждалось ранее; объединяя эти два факта и закон преобразования одноточечной функции логарифмических полей, интеграл по дуге γ_0 можно вычислить как

$$\frac{1}{4}(2\pi)^2 \int_{\gamma_0} dl \left(-\frac{\partial}{\partial r} \langle O' \rangle_{ire^{i\varphi}} \right) = \frac{1}{4}(2\pi)^2 \int_0^{r^2} dl \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \tau_2} \langle O' \rangle_{\tau_2 \rightarrow \infty} + \frac{1}{4}(2\pi)^2 \Delta_a^{L'} \int_0^{r^2} dl \frac{1}{r} \langle O \rangle. \quad (2.62)$$

Второе слагаемое стремится к нулю при $r \rightarrow 0$; таким образом, остаётся только первое, которое воспроизводит вклад (2.18) из интегрирования по верхней границе исходной фундаментальной области F_0 .

2.3.4. О других теориях двумерной гравитации

Интересным является вопрос об обобщении этих результатов на некритические теории струн, в которых СФТ материального сектора имеет центральный заряд $c < 1$ общего положения (иррациональный b^2), а структурные константы аналогичны (1.10). Существует несколько способов определить такие «обобщенные минимальные модели». В оригинальной работе Замолодчикова [24] такой термин используется для описания теории с непрерывным набором примарных полей Φ_α , $\alpha \in \mathbb{C}$ и структурными константами, дающимися (1.10), с дополнительным отождествлением Φ_α и $\Phi_{b^{-1}-b-\alpha}$. В более поздней работе [33] это же название используется для модели с иррациональным центральным зарядом и спектром из дискретного набора полей вида $\Phi_{m,n}$, а модель с непрерывным спектром, напоминающую введенную в [24]⁴, называют « $c < 1$ теория Лиувилля». В других источниках эту же модель называют «временеподобной теорией Лиувилля» [2]

В [33] утверждается, что обобщенная минимальная модель (согласно их определению) плохо определена на Римановых поверхностях старшего рода: в ней имеется дискретный набор возможных корреляционных функций и все они либо ноль, либо бесконечность. С другой стороны, $c < 1$ теория Лиувилля не обладает таким свойством. Соответствующая теория струн («Вирасоро-минимальная струна») была изучена в [2], где была предложена формула, в частности, для одноточечных

⁴Разница между моделью Замолодчикова и $c < 1$ теорией Лиувилля в том, что во второй теории не предполагается, что модули Верма со старшими векторами вырожденных размерностей $V_{\alpha_{m,n}}$ факторизованы до неприводимых: в этих модулях имеются нетривиальные потомки с нулевой нормой. В частности, V_0 не совпадает с единичным оператором. Однако, можно согласованно дополнить спектр такой теории «настоящими» вырожденными полями, не нарушив условия конформного бутстрапа. Ожидается, что струнные амплитуды со вставками таких полей будут воспроизводить ответы, полученные, например, из ВУД при предположении параметров общего положения.

корреляционных чисел на поверхностях рода один; однако в силу отсутствия в этой теории вырожденных полей ВУД не применимы для этого вычисления напрямую. Другим возможным обобщением является «комплексная струна Лиувилля» [3], где в качестве материи выступает обычная теория Лиувилля с комплексным центральным зарядом $c_M \notin (-\infty, 1]$. Вычисление в нашей работе с использованием ВУД было обобщено на этот случай в работе [29], хотя корреляторы в такой теории имеют гораздо более сложную аналитическую структуру.

3 «Квазиклассический» предел амплитуд в минимальной струне

Одна из теорий двумерной гравитации, связанных с минимальной струной — гравитация Джакива-Тейтельбойма. Считается, что МС сводится к JT-гравитации в пределе $p \rightarrow \infty$. Впервые такая связь была замечена в [1] на уровне дуальных матричных моделей, а затем проверена прямыми вычислениями в обоих подходах (см., например, [39]). Интересно изучить аналог тахионных корреляционных чисел в таком пределе. В [30; 47] была предложена интерпретация для них как объемов пространств модулей поверхностей постоянной кривизны с коническими дефектами.

В этой главе будет предложено одно из возможных определений того, что это значит, используя известные в литературе метрики Зографа-Тахтаджяна (ЗТ) на пространствах модулей кривых, введенные в [54], [55]. Это кэлеровы метрики, для которых потенциалом является классическое лиувиллевское действие, которое будет определено далее. Целью этой части работы будет изучение объемов, ассоциированные с этими метриками, и сравнение их свойств с корреляционными числами в МС в «квазиклассическом» пределе.

3.1. Пререквизиты

3.1.1. Классическая теория Лиувилля

Теория Лиувилля имеет интересный предел, когда $b \rightarrow 0$ (или центральный заряд $c \rightarrow \infty$). После перескалирования поля $b\phi(x) = \varphi(x)$ в терминах φ из лиувиллевского действия выносится большой множитель $\sim 1/b^2$. Тогда значение функционального интеграла определяется перевальной точкой — решением классического уравнения Лиувилля

$$\partial\bar{\partial}\varphi_{cl}(z, \bar{z}) = \Lambda e^{2\varphi_{cl}(z, \bar{z})}, \quad \Lambda = 4\pi\mu b^2. \quad (3.1)$$

Если проинтерпретировать φ_{cl} как вейлевский фактор конформно-плоской метрики $g_{ij} = e^{2\varphi_{cl}}\delta_{ij}$ на рассматриваемой поверхности, то уравнение Лиувилля выражает собой условие, что эта метрика имеет постоянную кривизну.

Классический предел корреляционных функций экспоненциальных примарных операторов $\exp(2a_k\phi(x)) = \exp(2\frac{a_k}{b}\varphi(x))$ зависит от того, как их конформная размерность ведет себя при стремлении $b \rightarrow 0$: если $a_k = \eta_k/b \rightarrow \infty$, $b \rightarrow 0$ так, что η_k остаётся конечным, мы имеем дело с «тяжелыми» полями. Такие операторы влияют на перевальную точку в функциональном интеграле и дают вклад в классические уравнения движения: в правой части появляется дельта-функциональный источник

$$\partial\bar{\partial}\varphi_{cl}(z, \bar{z}) = \Lambda e^{2\varphi_{cl}(z, \bar{z})} - \pi \sum_{k=1}^n \eta_k \delta^{(2)}(z - z_k). \quad (3.2)$$

В лидирующем приближении такие корреляционные функции экспоненцируются и ведут себя как $\exp(-\frac{1}{b^2}S_{cl}^n(\eta_k, z_k, \bar{z}_k))$, где S_{cl} — (регуляризованное) лиувиллев-

ское действие, вычисленное на решении уравнения (3.2). Дельта-функциональные вклады (для действительных значений $0 < \eta_k < 1/2$) могут быть проинтерпретированы как конические дефекты соответствующей метрики в точках вставки операторов; дефицит угла в этих дефектах равен $4\pi\eta$. Случай $\eta_k = 1/2 + ip$ описывает геометрию поверхностей постоянной кривизны с геодезическими границами длины $\sim p$.

Если же конформные размерности полей остаются порядка единицы, когда $c \rightarrow \infty$, такие поля называют «легкими». Они не влияют на перевальную точку; коррелятор с такими полями в главном порядке получает просто дополнительный фактор $\exp(2a\varphi_{cl}/b)$, в котором соответствующие экспоненциальные поля вычислены на решении уравнений движения, включающих дельта-функциональные вклады от «тяжелых» полей.

В простых случаях классическое действие может быть вычислено напрямую. Для случая трёхточечного коррелятора на сфере легко убедиться (как в случае конических дефектов [22], так и для геодезических границ [56]), что классическое действие (при выборе $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = \infty$) совпадает с прямым пределом $b \rightarrow 0$ логарифма DOZZ-структурной константы (1.2); предполагая, что $\sum_{i=1}^3 \eta_i > 1$, оно даётся

$$S_{cl}^{(3)}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\eta - 1) \log 2 + F(\eta - 1) + \sum_{i=1}^3 F(\eta - 2\eta_i) - F(0) - \sum_{i=1}^3 F(2\eta_i), \quad (3.3)$$

где

$$\eta \equiv \eta_1 + \eta_2 + \eta_3, \quad F(x) = \psi^{(-2)}(1-x) + \psi^{(-2)}(x) - 2\psi^{(-2)}\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{1/2}^x \log \gamma(z) dz, \quad (3.4)$$

а $\psi^{(n)}$ — полигамма-функция.

Важным инструментом в изучении классической теории Лиувилля является предел $b \rightarrow 0$ уравнения Белавина-Полякова-Замолотчикова (БПЗ). Поскольку вырожденное поле $V_{1,2}(z, \bar{z}) = e^{-\varphi(z, \bar{z})}$ «легкое», зависимость от z для четырехточечной функции с таким оператором факторизуется; если оставшиеся поля «тяжелые», мы имеем

$$\langle V_{1,2}(z, \bar{z}) V_{a_1}(x_1, \bar{x}_1) \dots \rangle \stackrel{b \rightarrow 0}{\approx} \psi(z, \bar{z}) \langle V_{a_1}(x_1) \dots \rangle \sim \psi(z, \bar{z}) e^{-S_{cl}(\eta_1, x_1, \dots)/b^2}, \quad (3.5)$$

$$\psi(z, \bar{z}) = e^{-\varphi_{cl}(z, \bar{z})}. \quad (3.6)$$

Тогда можно записать уравнение БПЗ на голоморфную часть функции ψ как

$$[\partial^2 + t(z)]\psi(z) = 0, \quad t(z) := -(\partial\varphi_{cl})^2 + \partial^2\varphi_{cl}. \quad (3.7)$$

В такой форме оно практически тавтологично. Однако важно, что вид функции $t(z)$ можно зафиксировать почти полностью, даже не зная решения φ_{cl} : $t(z)$ является мероморфной функцией (что следует из уравнений движения) с известными особенностями в x_i , определяемыми контактными членами в (3.2), и поведением на бесконечности. Например, для коррелятора с четырьмя тяжелыми полями с параметрами η_1, \dots, η_4 в точках $(x, 0, 1, \infty)$ $t(z)$ выглядит как

$$t(z) = \frac{\delta_1}{(z-x)^2} + \frac{\delta_2}{z^2} + \frac{\delta_3}{(z-1)^2} + \frac{x(x-1)c(x)}{z(z-1)(z-x)} + \frac{\delta_4 - \delta_3 - \delta_2 - \delta_1}{z(z-1)}, \quad \delta_i = \eta_i(1 - \eta_i). \quad (3.8)$$

Коэффициент $c(x)$ называют «аксессуарным параметром»; он не может быть зафиксирован перечисленными выше требованиями. Для n -точечного коррелятора на сфере мы будем иметь $n - 3$ таких параметра, по одному на каждую из $n - 3$ комплексных координат на пространстве модулей кривых $\mathcal{M}_{0,n}$ рода ноль с n отмеченными точками. Если ψ строится по решению φ_{cl} уравнения Лиувилля, из

предыдущих соображений о факторизации (3.6) ожидается, что

$$c(x) = -\frac{\partial S_{cl}(\eta_1, \dots, \eta_4, x)}{\partial x}. \quad (3.9)$$

Это так называемая «гипотеза Полякова». Она была строго доказана (по крайней мере для случая поверхностей рода ноль) для корректно регуляризованного лиувиллевого действия ([54], [57], [58]).

Из двух линейно независимых решений $\psi_{1,2}$ уравнения (3.7) может быть построено решение уравнения Лиувилля: функция

$$\tilde{\varphi}_{cl}(z, \bar{z}) = -\log [\Lambda_{ij} \psi_i(z) \bar{\psi}_j(\bar{z})] \quad (3.10)$$

формально его решает, если $\det \Lambda_{ij} = -\Lambda$. Нетривиальным требованием является однозначность функции $\tilde{\varphi}_{cl}(z, \bar{z})$; для этого необходимо, чтобы монодромия решений ψ лежала в подгруппе $SL(2, \mathbb{C})$, сохраняющей билинейную форму Λ_{ij} . Такая подгруппа изоморфна $SU(2)$ либо $SU(1, 1)$, в зависимости от знака кривизны Λ . Именно это требование определяет аксессуарный параметр $c(x)$, для которого решения (3.7) определяют корректную $\varphi_{cl}(z, \bar{z})$, решающую (3.2).

Как было упомянуто во введении, нас будет интересовать интерпретация классического лиувиллевого действия как кэлерова потенциала для метрик на пространстве модулей кривых рода ноль с отмеченными точками, которая была предложена Зографом и Тахтаджаном в [54; 55]: $g_{i\bar{j}}^{ZT} = \partial_i \bar{\partial}_j S^{(cl)}$. Здесь $i = 1, \dots, n - 3$ нумеруют голоморфные координаты на пространстве модулей $\mathcal{M}_{0,n}$; стандартный выбор — $n - 3$ независимых двойных отношения координат отмеченных точек x_i .

3.1.2. Некоторые свойства корреляционных чисел в МС

Для удобства повторим здесь формулу (1.36). Упорядочим параметры тахионного коррелятора $A_n^0(k_1, \dots, k_n)$ в $(2, 2p + 1)$ МС по возрастанию: $1 \leq k_1 \leq k_2 \leq k_3 \leq \dots \leq k_n \leq p$. Тогда четырехточечная амплитуда на сфере, полученная из матрично-модельного подхода, принимает вид [21]

$$A_4^0(k_1, \dots, k_4) = -F_\theta(-2) + \sum_{i=1}^4 F_\theta(k_i - 2) - F_\theta(k_{12|34}) - F_\theta(k_{13|24}) - F_\theta(k_{14|23}), \quad (3.11)$$

где

$$k_{ij|lm} = \min(k_i + k_j - 2, k_l + k_m - 2); \quad F_\theta(k) = \frac{1}{2}(p - k - 1)(p - k - 2)\theta(p - 2 - k). \quad (3.12)$$

В случае невыполнения «правил слияния»

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 + k_2 + k_3 - 2 > k_4, \sum_{i=1}^4 k_i \text{ четна;} \\ k_1 + k_2 + k_3 + k_4 > 2p - 1, \sum_{i=1}^4 k_i \text{ нечетна} \end{array} \right., \quad (3.13)$$

к этому ответу имеются поправки, которые обнуляют коррелятор. Предел $p \rightarrow \infty$ этого выражения в случае, когда все операторы «тяжелые» (как и раньше, это означает, что параметры «одевающих» лиувиллевских полей $\eta_{1, -k_i} = ba_{1, -k_i} = b^2 \frac{k_i + 1}{2}$, или эквивалентно $\kappa_i = \frac{k_i}{p} \approx k_i b^2$, остаются конечными в пределе $b \rightarrow 0$) берется с использованием асимптотики функции F_θ :

$$F_\theta(\kappa p) \approx p^2 \cdot \frac{1}{2}(1 - \kappa)^2 \theta(1 - \kappa). \quad (3.14)$$

В таком пределе для правил слияния (3.13) существует геометрическая интерпретация. В нечетном секторе они принимают вид $\kappa_1 + \dots + \kappa_4 > 2$, что совпадает с

условием существования метрики постоянной отрицательной кривизны на сфере с коническими дефектами дефицита угла $2\pi\kappa_i$ (из формулы Гаусса-Бонне). Если такое неравенство не выполнено, может существовать только метрика с положительной постоянной кривизной; в таком случае необходимое условие существования принимает вид неравенства $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 > \kappa_4$, что совпадает с «квазиклассическим» пределом правил слияния в четном секторе. Это неравенство в литературе известно как «условие Троянова» [59].

Для обсуждения в разделе 3.3 мы также отметим следующее свойство этих корреляционных чисел: предположим, что сумма любых $n - 2$ из n параметров коррелятора k_i меньше, чем p . Тогда выражение для корреляционных чисел факторизуется и с точностью до множителя, зависящего только от $\sum_{i=1}^n k_i$, вычисляет размерность пространства конформных блоков в материальном секторе МС (минимальной модели). Например, для четырехточечного коррелятора мы имеем

$$A_4^0(k_1, \dots, k_4) = \begin{cases} k_1(2p + 1 - \sum_{i=1}^4 k_i), & k_{14} < k_{23} \\ \frac{k_2 + k_3 + k_1 - k_4}{2}(2p + 1 - \sum_{i=1}^4 k_i), & k_{14} \geq k_{23} \end{cases}. \quad (3.15)$$

Это свойство было замечено для четырех- и пятиточечных амплитуд в [47], основываясь на результатах [21], [45]. Для старших корреляционных чисел такое поведение можно ожидать, исходя из вычислений в [60] (хотя методы этой работы основаны на аналитическом продолжении выражений, полученных из кулоновских интегралов, и имеют ограниченную применимость в контексте минимальной струны).

3.2. Численное вычисление объемов пространств модулей из СФТ

В этом разделе мы опишем метод численного вычисления метрик Зографа-Тахтаджяна и связанных с ними объемов пространств модулей, основанный на конформном бутстрапе. Для определенности рассмотрим однопараметрическое семейство метрик постоянной кривизны на сфере с 4 коническими дефектами дефицита угла $2\pi \cdot (1, 1, \kappa, \kappa)$, $0 < \kappa < 1$. Использование известных результатов в конформной теории поля Лиувилля в целях исследования геометрии пространств модулей было впервые предложено в [61]; наше вычисление аналогично проделанному в [62–64].

Результат (3.11) для четырехточечной амплитуды в минимальной струне предсказывает следующую формулу для объемов в рассматриваемом случае:

$$V(\kappa) = 2\pi^2 (1 - 2(1 - \kappa)^2 + (1 - 2\kappa)^2\theta(1 - 2\kappa)) \quad (3.16)$$

Мы изменили нормировку на более общепринятую в геометрии, где объем Вейля-Петерсона $V(1) = 2\pi^2$.

3.2.1. Описание «перевального» метода

Стартуем с известного представления для четырехточечного коррелятора в теории Лиувилля:

$$\begin{aligned} \langle V_{a_1}(0)V_{a_2}(x, \bar{x})V_{a_3}(1)V_{a_4}(\infty) \rangle &= \int \frac{dP}{4\pi} C_L(a_1, a_2, \frac{Q}{2} - iP) C_L(\frac{Q}{2} + iP, a_3, a_4) \times \\ &\times \left| F_{\Delta} \left(\begin{array}{cc|c} \Delta_1 & \Delta_3 & x \\ \Delta_2 & \Delta_4 & \end{array} \right) \right|^2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Здесь $\Delta = \frac{Q^2}{4} + P^2$, а конформный блок F включает в себя степенной фактор $x^{\Delta - \Delta_1 - \Delta_2}$. Если мы предположим, что все внешние и промежуточные поля «тяжелые», структурные константы (как и конформные блоки: $F \sim e^{b^{-2}f}$) экспоненцируются в пределе $b \rightarrow 0$ и подынтегральное выражение принимает вид

$$\exp \left(\underbrace{-\frac{1}{b^2} \left[S_{cl}^{(3)}(\eta_1, \eta_2, \frac{1-2ip}{2}) + S_{cl}^{(3)}(\frac{1+2ip}{2}, \eta_3, \eta_4) - 2\text{Re} f_{\frac{1}{4}+p^2} \left(\begin{array}{cc|c} \delta_1 & \delta_3 & x \\ \delta_2 & \delta_4 & \end{array} \right) \right]}_{\equiv S^{(4)}(p, x, \bar{x}) = S_{\text{hol}}^{(4)}(p, x) + S_{\text{a/hol}}^{(4)}(p, \bar{x})} \right). \quad (3.18)$$

Квазиклассические структурные константы $S_{cl}^{(3)}$ приведены в (3.3). Тогда стандартный метод перевала утверждает, что в квазиклассическом пределе интеграл приблизительно равен $\exp \left(-\frac{1}{b^2} S^{(4)}(p_{\text{saddle}}(x, \bar{x}), x, \bar{x}) \right)$, где p_{saddle} определяется условием экстремума $S^{(4)}(p, x, \bar{x})$: $\frac{\partial S^{(4)}}{\partial p} \Big|_{p=p_{\text{saddle}}} = 0$. Мы ожидаем, что по крайней мере в какой-то области пространства параметров $S^{(4)}(p_{\text{saddle}}, x, \bar{x})$, вычисленное таким способом из конформной теории поля, совпадает с обычным классическим лиувилевским действием. Для некоторых значений параметров это неверно (например,

по причине исчезновения действительной перевальной точки); мы прокомментируем это позже.

Заметим, что у перевального значения p_{saddle} , когда оно действительно, есть простой геометрический смысл: оно пропорционально длине единственной простой замкнутой геодезической, разделяющей пары точек $(0, x)$ и $(1, \infty)$, на гиперболической сфере с четырьмя коническими дефектами, то есть координате Фенкеля-Нильсена l (см., например, [65]). С другой стороны, производная «голоморфной» части действия по p , вычисленная в перевальной точке, пропорциональна $i\theta$ [66], где θ — сопряженная координата «твиста»; условие экстремума в интеграле тогда означает, что θ действительно.

Получим асимптотический ряд для p_{saddle} на границе пространства модулей, когда $x \rightarrow 0$. Рассмотрим первые несколько членов в разложении $S^{(4)}$ по p ; из явных выражений можно увидеть, что слагаемое в $S^{(4)}(p, x, \bar{x})$, приходящее из структурных констант, есть чётная, но неаналитическая при $p = 0$ функция p : имеем

$$S^{(4)}(p, x, \bar{x}) = \text{const} - A(\eta_i)|p| + B(\eta_i)p^2 + (\delta_1 + \delta_2 - \frac{1}{4} - p^2) \log(x\bar{x}) + O(p^3). \quad (3.19)$$

Тогда в главном приближении перевальное уравнение принимает вид

$$0 = \frac{\partial S^{(4)}}{\partial p} = -A + 2|p| \log \frac{e^B}{x\bar{x}} \leftrightarrow |p| = \frac{A/2}{\log \frac{e^B}{x\bar{x}}} + \dots \rightarrow 0, x \rightarrow 0. \quad (3.20)$$

Это подтверждает, что p_{saddle} мало для маленьких x (заметим, что решение существует только при $A > 0$). Все старшие слагаемые в разложении классического конформного блока малы по сравнению с любой степенью p , будучи пропорциональными степеням $x = \exp(-\# / p_{\text{saddle}})$. Игнорируя эти слагаемые, мы можем построить разложение для p_{saddle} в ряд по $\frac{1}{\log(x\bar{x})}$, раскладывая $(\partial S_{cl}^{(3)} / \partial p)$ дальше

в ряд по p и решая поправленное уравнение на перевальную точку порядок за порядком.

Мы будем использовать вместо x эллиптическую переменную q , определенную как

$$q = \exp(i\pi\tau), \quad \tau = i \frac{K(1-x)}{K(x)}, \quad (3.21)$$

где $K(x)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Чтобы переписать ряды в терминах q , можно использовать, что $x = 16q(1+o(1))$; слагаемые, обозначенные $o(1)$, не важны для нашего разложения. Известно, что эллиптическая параметризация существенно упрощает численное вычисление корреляторов в минимальной струне, такое, как в [67]: даже лидирующей степени q (соответствующей частично отсуммированному ряду по x) достаточно, чтобы установить соответствие с матричной моделью с большой точностью. Поправки в виде ряда по x к классическому блоку f можно систематически строить, используя рекурсионную формулу Замолодчикова [68], что было успешно проделано в [62]. Заметим также, что мы можем раскладывать по $\epsilon = (\log \frac{a(\eta_i)}{q\bar{q}})^{-1}$ для любой функции $a(\eta)$; иногда такая замена параметра улучшает сходимость. Для специального выбора $a(\eta) = e^{B(\eta)}/2^8$ разложение имеют наиболее простой вид.

После того, как получен ряд для p_{saddle} , мы можем вычислить классическое действие и соответствующую кэлерову метрику на пространстве модулей $g_{q\bar{q}} = -4\pi\partial_q\partial_{\bar{q}}S^{(4)}(q, \bar{q})$ в виде разложения в ряд по ϵ . Вплоть до этого шага возможно получить все выражения аналитически; оставшийся шаг для вычисления объемов — проинтегрировать $\sqrt{\det g}$ по пространству модулей $\mathcal{M}_{0,4}$. Дискретная группа S_3 порядка 6 переставляет точки $0, 1, \infty$ и, нетривиально преобразуя двойное отношение x , действует на $\mathcal{M}_{0,4}$. Удобным выбором фундаментальной области для

действия этой группы является

$$\mathcal{F} = \{q = re^{i\psi} \mid -\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2, 0 \leq r \leq \exp(-\sqrt{\pi^2 - \psi^2})\}. \quad (3.22)$$

Эта область изображена на рис. 3.1, но проще понимать её в терминах координаты τ , где она совпадает с обычной фундаментальной областью действия $SL(2, \mathbb{Z})$ на верхней полуплоскости. Интегрирование по этой области членов ряда для $g_{q\bar{q}}$ может быть выполнено численно.

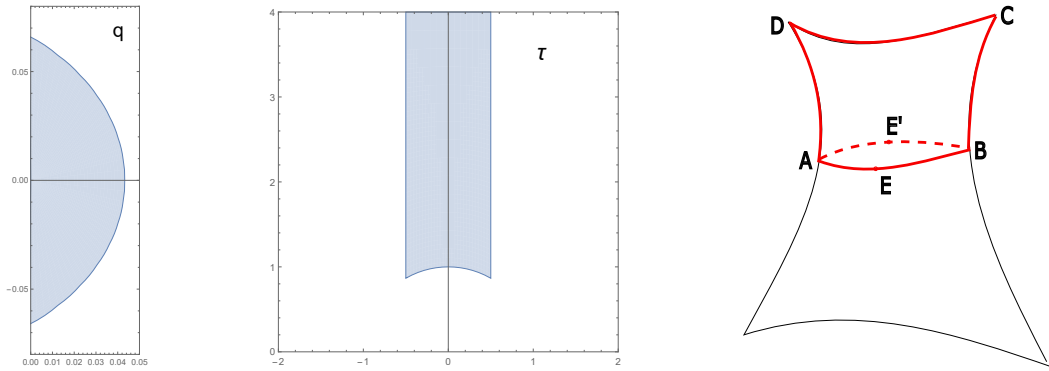


Рис. 3.1. 1 и 2: фундаментальная область \mathcal{F} в координатах q и τ . 3: Гиперболическая поверхность с 4 коническими дефектами и разделяющей геодезической.

3.2.2. Пример применения

Применим теперь описанный в предыдущей секции метод к конкретному вычислению, анонсированному в начале раздела: четырехточечной функции в теории Лиувилля вида $\langle V_{\frac{\kappa}{2b}}(0)V_{\frac{\kappa}{2b}}(x, \bar{x})V_{\frac{1}{2b}}(1)V_{\frac{1}{2b}}(\infty) \rangle$. Пространство модулей $\mathcal{M}_{0,4}$ разбивается на фундаментальную область \mathcal{F} и 5 её образов под действием упомянутой ранее группы S_3 . Для вычисления интеграла по пространству модулей каждую из областей можно отобразить в \mathcal{F} и проводить в ней разложение по конформным блокам в s -канале. В двух случаях $V_{\kappa/2b}$ будет сливаться с $V_{\kappa/2b}$, а в остальных четырех — с $V_{1/2b}$. Для краткости мы будем называть эти две возможности каналом 1 и каналом 2 соответственно.

Сперва следует понять, когда в интеграле по p существует действительная перевальная точка. Используя формулу (3.3) для классических структурных констант, мы получаем, что в канале 2 для любых $0 < \kappa < 1$ коэффициент A в (3.20) равен $2\pi > 0$. Тогда седловая точка существует и в соответствующих областях описанная в предыдущем разделе процедура применима. Однако это не так в канале 1 — коэффициент A равен 2π для $\kappa > 1/2$ и нулю иначе. Для более общих параметров коррелятора действительная седловая точка исчезает, если параметры η_1, η_2 сливающихся полей таковы, что $\eta_1 + \eta_2 < 1/2$. Причина этого в том, что функции $F(\eta_1 + \eta_2 - 1/2 - ip)$ и $F(\eta_1 + \eta_2 - 1/2 + ip)$, входящие в определение структурной константы (3.3) и дающиеся интегральным представлением (3.4), получают дополнительный линейный по p вклад, когда $\text{Re}(\eta_1 + \eta_2 - 1/2) < 0$, что сокращает член $-2\pi|p|$ в ряде для $S^{(4)}$.

На самом деле ситуация несколько сложнее: в этой области классический предел структурной константы следует вычислять по-другому. Как объяснено в [69], если действительная часть аргумента одной из F -функций в (3.3) лежит в интервале от -1 до 0 , чтобы получить асимптотику, совпадающую с логарифмом DOZZ-формулы, нужно заменить

$$\exp\left(-\frac{1}{b^2}F(\eta)\right) \Rightarrow \frac{1}{2 \sinh \frac{i\pi\eta}{b^2}} \exp\left(-\frac{1}{b^2}F(\eta + 1)\right). \quad (3.23)$$

Для $\text{Im} \eta = \pm p$ знаменатель может быть разложен в ряд по $\exp(-\pi|p|/b^2)$. Этот ряд может быть проинтерпретирован как сумма по комплексным перевальным точкам в функциональном интеграле. Проведя такую замену для двух F -функций с отрицательным аргументом и проводя такое разложение, легко увидеть, что всё равно ни для одного из членов ряда нет нетривиальной действительной перевальной точки в интеграле по p .

Вспоминая, что p_{saddle} пропорционально длине разделяющей геодезической,

можно понять геометрический смысл того, почему седловая точка исчезает: на соответствующей гиперболической поверхности для недостаточно «острых» дефектов геодезической в нужном классе гомологий не существует. Действительно, см. рис. 3.1; если существует геодезическая $AEBE'A$, разделяющая пары точек, то вместе с кусками геодезических, соединяющих дефекты друг с другом, она образует два гиперболических четырехугольника $AEBCD$ и $AE'BCD$. Сумма их углов равна $2\pi(2 - 2\eta_1 - 2\eta_2) + 2\pi$ и должна быть меньше, чем 4π , согласно формуле Гаусса-Бонне, откуда с необходимостью $\eta_1 + \eta_2 > 1/2$.

Подводя итог, мы видим, что процедура, которая описана в предыдущем разделе, надежна только для $\kappa > 1/2$. В следующем подразделе мы ограничимся только такими значениями параметра.

3.2.3. Результаты вычисления

Введем параметр разложения как

$$\frac{1}{\epsilon} = \log \frac{1}{x\bar{x}} - h(\Delta\kappa), \quad (3.24)$$

где $\Delta\kappa \equiv \kappa - \frac{1}{2}$, а h — функция $\Delta\kappa$ и η_i , не зависящая от x . Тогда, откидывая степенные вклады в классический конформный блок, уравнение на седловую точку принимает вид

$$\frac{\partial S^{(4)}}{\partial p} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial p} \left(S_{cl}^{(3)}(\eta_1, \eta_2, \frac{1}{2} - ip) + S_{cl}^{(3)}(\frac{1}{2} + ip, \eta_3, \eta_4) \right)}_{=-2\pi|p|+\dots} + 2p \left(\frac{1}{\epsilon} + h(\Delta\kappa) \right) \Big|_{p=p_{\text{saddle}}} = 0. \quad (3.25)$$

и может быть решено порядок за порядком по ϵ , подставляя $p_{\text{saddle}} = \sum_{n=1}^{n_{\text{max}}} p_n \epsilon^n$.
 Для приведенного ниже выбора h в каналах 1 и 2 соответственно

$$\begin{aligned} h_1 &= \psi^{(0)}(1 - \Delta\kappa) + \psi^{(0)}(\Delta\kappa) + 8\gamma_E + 6\psi^{(0)}\left(\frac{1}{2}\right) \text{ и} \\ h_2 &= 4\psi^{(0)}\left(\frac{1}{4}(2\Delta\kappa + 1)\right) + 4\psi^{(0)}\left(\frac{1}{4}(3 - 2\Delta\kappa)\right) + 8\gamma_E \end{aligned} \quad (3.26)$$

коэффициенты разложения выглядят наиболее просто. Например, вплоть до 6 порядка по ϵ p_{saddle} даётся формулой

$$\begin{aligned} p_{\text{saddle}1} &= \pi\epsilon - \frac{1}{6}\epsilon^4\pi^3 \left(\psi^{(2)}(1 - \delta) + \psi^{(2)}(\delta) + 6\psi^{(2)}\left(\frac{1}{2}\right) - 32\psi^{(2)}(1) \right) + \\ &+ \frac{1}{120}\pi^5\epsilon^6 \left(\psi^{(4)}(1 - \delta) + \psi^{(4)}(\delta) + 6\psi^{(4)}\left(\frac{1}{2}\right) - 128\psi^{(4)}(1) \right) + \dots \end{aligned} \quad (3.27)$$

в канале 1 и

$$\begin{aligned} p_{\text{saddle}2} &= \pi\epsilon + \frac{2}{3}\epsilon^4\pi^3 \left(-\psi^{(2)}\left(\frac{1}{4}(3 - 2\delta)\right) - \psi^{(2)}\left(\frac{1}{4}(2\delta + 1)\right) + 8\psi^{(2)}(1) \right) + \\ &+ \frac{1}{30}\epsilon^6\pi^5 \left(\psi^{(4)}\left(\frac{1}{4}(3 - 2\delta)\right) + \psi^{(4)}\left(\frac{1}{4}(2\delta + 1)\right) - 32\psi^{(4)}(1) \right) + \dots \end{aligned} \quad (3.28)$$

в канале 2. Подставляя теперь это в Лиувиллевское действие, мы получаем ряд по ϵ ; почленное дифференцирование с использованием

$$\partial_q \partial_{\bar{q}} \epsilon^{-n} = \frac{n(n+1)}{q\bar{q}} \epsilon^{-n-2} \quad (3.29)$$

даёт разложение в ряд для метрики в двух каналах (в приведенных ниже формулах мы снова для простоты используем выбор f как в (3.26))

$$g_1 = \frac{8\pi^3 \epsilon^3}{q\bar{q}} \left(1 - 10\pi^2 \left(\frac{\psi^{(2)}(1 - \Delta\kappa) + 6\psi^{(2)}\left(\frac{1}{2}\right) + \psi^{(2)}(\Delta\kappa)}{12} + \frac{8\zeta(3) - 4\psi^{(2)}(1)}{3} \right) \epsilon^3 + \dots \right) \quad (3.30)$$

$$g_2 = \frac{8\pi^3 \epsilon^3}{q\bar{q}} \left(1 - 10\pi^2 \left(\frac{\psi^{(2)}\left(\frac{2\Delta\kappa+1}{4}\right) + \psi^{(2)}\left(\frac{3-2\Delta\kappa}{4}\right) + \frac{8\zeta(3) - 4\psi^{(2)}(1)}{3} \right) \epsilon^3 + \dots \right). \quad (3.31)$$

Осталось проинтегрировать почленно по фундаментальной области \mathcal{F} . Интегрирование по радиусу может быть проведено явно

$$\int_0^{\exp(-\sqrt{\pi^2 - \psi^2})} \frac{dr}{r} (C - 2 \log r)^{-n} = \frac{\left(C + 2\sqrt{\pi^2 - \psi^2}\right)^{1-n}}{2(n-1)}, \quad (3.32)$$

а по углу ψ — только численно. Раскладывая до 25 порядка по ϵ и интегрируя по фундаментальной области в обоих каналах, получаем следующие графики (рис. 3.2). Точки на графиках 3.2, 3.3 и 3.4 обозначают результаты численного вычисле-

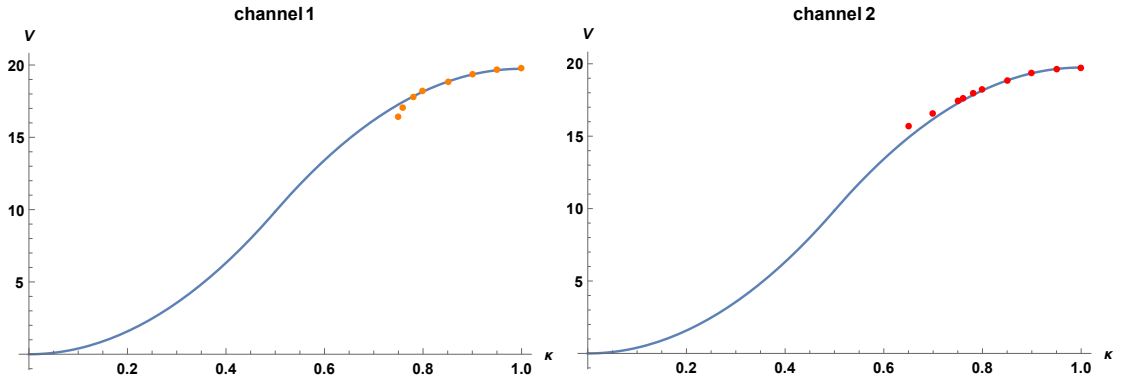


Рис. 3.2. Зависимость от κ вкладов в объем пространства модулей в двух каналах (результат интегрирования умножен на 6 — количество образов фундаментальной области). При маленьких $\kappa \approx 0.7$ согласие ухудшается.

ния объемов, ассоциированных с метрикой ЗТ, а сплошная синяя линия — аналитическое выражение из (3.16), которое для $\kappa > 1/2$ совпадает с обычным объемом

Вейля-Петерсона, аналитически продолженным на мнимые длины. На графике 3.2 точки получены, используя разложение по параметру ϵ для выбора $h(\Delta\kappa)$ как в (3.26).

Для κ близких к единице согласие очень хорошее, но при уменьшении κ коэффициенты разложения для метрики начинают крайне быстро расти. Соответствующий ряд сходится недостаточно быстро; не хватает разложения даже до 50 порядка по ϵ . Эту проблему можно смягчить, подстраивая h и параметр разложения ϵ соответственно. В таблице 3.1 и на рисунке 3.3 для каждой точки мы подстраивали h для достижения оптимальной сходимости (для некоторых из точек мы также увеличили порядок разложения по ϵ с 25 до 40).

Таблица 3.1. Вклады в объем пространства модулей от двух каналов. Результат вычисления в таблице умножен на 6 (отнормирован, чтобы согласовываться с полным ответом (3.16) при $\kappa = 1$).

κ	1	0.95	0.9	0.85	0.8	0.75	0.7	0.65	0.6	0.55
к. 1×6	19.737	19.639	19.344	18.856	18.181	17.326	16.303	15.125	13.810	12.381
к. 2×6	19.737	19.639	19.340	18.835	18.115	17.137	15.913	14.265	12.287	10.082
сумма	19.737	19.639	19.343	18.850	18.159	17.263	16.173	14.838	13.302	11.615
(3.16)	19.739	19.641	19.344	18.851	18.160	17.272	16.186	14.903	13.423	11.745

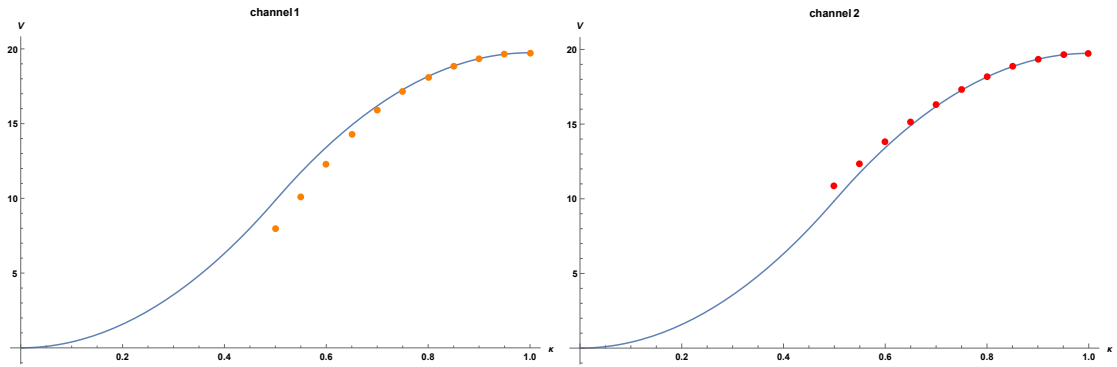


Рис. 3.3. Зависимость от κ вкладов в объем пространства модулей в двух каналах (результат интегрирования умножен на 6 — количество образов фундаментальной области) при подстройке параметра разложения ϵ для каждой точки.

Сумма по 6 образам фундаментальной области находится в неплохом согласии с аналитическим ответом (3.16) (погрешность $\sim 1\%$) для всех рассматриваемых

значений параметра κ (см. рис. 3.4). Бóльшей точности можно добиться, если учитывать сублидирующие члены в разложении классического конформного блока и раскладывать до более высокого порядка по ϵ .

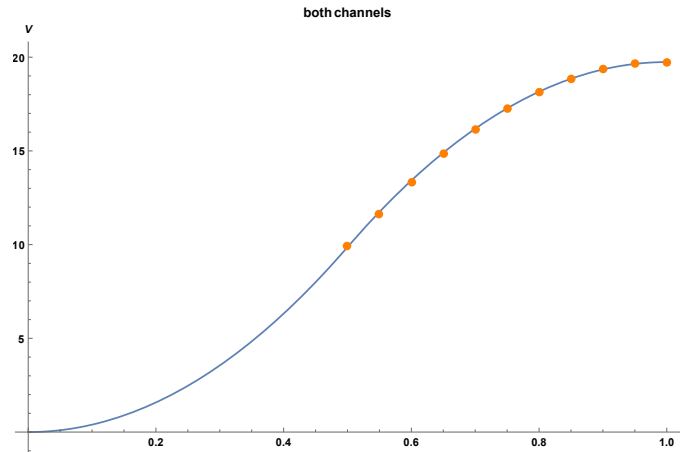


Рис. 3.4. Сумма вкладов в объем пространства модулей от всех областей в зависимости от κ при подстройке параметра разложения ϵ для каждой точки.

3.3. Классическое действие для пертурбативно - тяжелых операторов

3.3.1. Мотивация: предел «легких» полей

Упрощение выражений для амплитуд в минимальной струне, когда $p > k_i + k_j$ (3.15), позволяет сделать предположение о том, как метрика на пространстве модулей ведет себя для таких значений параметров. Рассмотрим, например, четырехточечную амплитуду на сфере в случае $k_1 + k_4 < k_2 + k_3$, когда размерность пространства конформных блоков в минимальной модели максимальна и равна k_1 (как и раньше, предполагается, что $k_1 \leq k_2 \leq k_3 \leq k_4 \leq p$). Амплитуда и её

квазиклассический предел даются (3.15)

$$A_4^0(k_1, \dots, k_4) = k_1(2p + 1 - k_1 - k_2 - k_3 - k_4) \approx p^2 \kappa_1 (2 - \sum_{i=1}^n \kappa_i), p \rightarrow \infty;$$

$$\kappa_i \equiv \frac{k_i}{p} \approx 2ba_{1, -k_i-1}^L = 2\eta_i. \quad (3.33)$$

Для общего n -точечного оператора при тех же условиях мы ожидаем (см. обсуждение в конце 3.1.2)

$$A_n^0(k_1, \dots, k_n) \approx p^{2n-6} \kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_{n-3} (2 - \sum_{i=1}^n \kappa_i)^{n-3}, p \rightarrow \infty. \quad (3.34)$$

До предела формула более сложная: зависящий от $\sum_{i=1}^n k_i$ множитель наиболее просто выражается через «число скринингов» в лиувиллевском секторе, см. [60]. В пределе $b \rightarrow 0$ этот множитель есть просто правая часть формулы Гаусса-Бонне

$$\text{Area}[g] \sim 2 - \sum \kappa_i \quad (3.35)$$

в степени $(n - 3)$. Левая часть формулы, с другой стороны, есть просто объем «физической» сферы, на которой определена наша метрика постоянной кривизны.

Это свойство несложно обосновать для метрики Зографа-Тахтаджяна в пределе «легких» полей. Пусть размерности полей $\Delta_i = a_i(Q - a_i) = O(1)$, $b \rightarrow 0$ для $i = 1 \dots n - 3$ и только 3 тяжелых поля с параметрами κ_{n-2} , κ_{n-1} , κ_n в точках $(0, 1, \infty)$ дают вклад в классическое уравнение Лиувилля. Вся зависимость от x_i выносится из-за коррелятора в качестве множителя $\exp\left(\frac{1}{b} \sum a_i \varphi_{cl}(x_i)\right)$. Рассматривая аргумент экспоненты как кэлоров потенциал, соответствующая метрика $g_{i\bar{j}}^{ZT} = \partial_i \bar{\partial}_{\bar{j}} S$ становится блочно-диагональной: $g_{i\bar{j}}^{ZT}(x_k) = \delta_{ij} a_i \partial \bar{\partial} \phi(x_i)$. Из уравнения Лиувилля следует, что каждая её компонента действительно сводится

к метрике на «физической» сфере $g = e^{2\varphi} dz d\bar{z}$ с точностью до коэффициента. Соответствующий объем пространства модулей тогда

$$\begin{aligned} \int \prod_{i=1}^{n-3} d^2 x_i \sqrt{\det g^{Z\bar{T}}} &= \prod_{i=1}^{n-3} \left(\int d^2 x_i a_i e^{2\varphi(x_i)} \right) = \prod_{i=1}^{n-3} a_i \left(\int d^2 x_i \sqrt{\det g} \right) \sim \\ &\sim (2 - \kappa_{n-2} - \kappa_{n-1} - \kappa_n)^{n-3} \prod_{i=1}^{n-3} a_i \end{aligned} \quad (3.36)$$

что в лидирующем порядке по a_i совпадает с ответом (3.34) из минимальной струны. Это наблюдение не совсем строгое, так как мы берем асимптотику ответов МС в предположении, что все поля тяжелые с размерностью $\Delta_i = O(1/b^2)$ и не можем напрямую сравнивать её с пределом «легких» полей. Однако, ожидается, что «легкий» предел должен согласовываться с пертурбативно-тяжелым — когда после взятия предела $b \rightarrow 0$, $a_i = \eta_i/b$ с конечным η_i мы стремим η_i к нулю (эквивалентно, раскладываем в ряд Маклорена по η_i). Такой предел для конформных блоков имеет особый смысл в контексте AdS₃/CFT₂ соответствия и хорошо изучен (см., например, [70]). В следующем разделе мы рассмотрим пертурбативно-тяжелый предел явно и подтвердим это ожидание прямым вычислением.

3.3.2. Метод монодромии для вычисления классического действия

Напомним, что классическое уравнение БПЗ для случая 4 тяжелых операторов $\langle V_{1,2}(z, \bar{z}) V_{a_1}(x, \bar{x}) V_{a_2}(0) V_{a_3}(1) V_{a_4}(\infty) \rangle$ имеет вид $[\partial_z^2 + t(z)]\psi = 0$, где

$$t(z) = \frac{\delta_1}{(z-x)^2} + \frac{\delta_2}{z^2} + \frac{\delta_3}{(z-1)^2} + \frac{x(x-1)c(x, \bar{x})}{z(z-1)(z-x)} + \frac{\delta_4 - \delta_3 - \delta_2 - \delta_1}{z(z-1)}. \quad (3.37)$$

Это уравнение может быть использовано как для голоморфной задачи о вычислении классических конформных блоков, так и для вычисления классического действия. В обоих случаях мы должны подобрать аксессуарный параметр $c(x, \bar{x})$, чтобы выполнить определенные условия на монодромию системы решений. Для задачи о конформном блоке фиксируются следы матриц монодромии (они определяются промежуточными размерностями блока); для вычисления действия, как упоминалось ранее, нужно наложить условие, что группа монодромии лежит в вещественной подгруппе $SL(2, \mathbb{C}) - SU(1, 1)$ либо $SU(2)$. После того, как $c(x, \bar{x})$ найден, конформный блок или классическое действие могут быть найдены из (3.9).

Разложение по η_i решений уравнения БПЗ может быть построено следующим образом. Представим $t(z)$ как

$$t(z) = t^{(0)}(z) + t^{(1)}(z), \quad (3.38)$$

где $t^{(1)}$ содержит вклады, пропорциональные размерностям пертурбативно-тяжелых полей или аксессуарному параметру, и будем искать решение в виде ряда $\psi = \psi^{(0)} + \psi^{(1)} + \dots$. Приравнивая соответствующие порядки малости, получаем цепочку уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} [\partial_z^2 + t^{(0)}]\psi^{(0)} = 0, \\ [\partial_z^2 + t^{(0)}]\psi^{(1)} = -t^{(1)}\psi^{(0)}, \\ [\partial_z^2 + t^{(0)}]\psi^{(2)} = -t^{(2)}\psi^{(0)} - t^{(1)}\psi^{(1)}, \\ \dots \end{array} \right. \quad (3.39)$$

Решение уравнений в нулевом порядке $\psi_{\pm}^{(0)}$ предполагаются известными (мы будем рассматривать случаи 2 и 3 тяжелых операторов, когда они известны явно). Тогда поправки $\psi^{(i)}$ могут быть найдены с использованием метода вариаций постоянной.

В первом порядке мы имеем

$$\psi_{\pm}^{(1)} = \frac{1}{W} \left(\psi_+^{(0)} \int^z \psi_-^{(0)} t^{(1)} \psi_{\pm}^{(0)} - \psi_-^{(0)} \int^z \psi_+^{(0)} t^{(1)} \psi_{\pm}^{(0)} \right) \quad (3.40)$$

(W — вронскиан решений $\psi_{\pm}^{(0)}$). Матрица монодромии в первом порядке определяется интегралами $\oint \psi_{\mp}^{(0)} t^{(1)} \psi_{\pm}^{(0)}$ вокруг особых точек, то есть вычетами подынтегральных выражений. Более явно, для контура γ она даётся

$$M_{\gamma}^{(1)} = (\text{id} + I)M_{\gamma}^{(0)}, \quad I = \frac{1}{W} \begin{pmatrix} \oint_{\gamma} \psi_-^{(0)} t^{(1)} \psi_+^{(0)} & - \oint_{\gamma} \psi_+^{(0)} t^{(1)} \psi_+^{(0)} \\ \oint_{\gamma} \psi_-^{(0)} t^{(1)} \psi_-^{(0)} & - \oint_{\gamma} \psi_+^{(0)} t^{(1)} \psi_-^{(0)} \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

где $M_{\gamma}^{(0)}$ — матрица монодромии в нулевом порядке. В старших порядках эта процедура встречается с определенными сложностями. Причина в том, что контур интегрирования уже нельзя замкнуть и вычислить вычеты, поскольку подынтегральное выражение не будет однозначной функцией в окрестности особых точек. Поэтому в последующих разделах мы ограничимся первым порядком по параметру пертурбативно-тяжелых полей. Заметим, что выражения для объемов, с которыми мы сравниваем ответы, точны в некотором конечном порядке такой теории возмущений, будучи полиномами по η_k ; было бы интересно найти способ увидеть это явно из такого подхода.

3.3.3. 4 дефекта: пример с 2 тяжелыми операторами

Простейший пример соответствует двум пертурбативно-тяжелым и двум тяжелым полям. Параметры тяжелых полей должны быть равны $\eta_3 = \eta_4 = \eta_h$ для того, чтобы существовало решение уравнения Лиувилля в нулевом порядке. Самый простой случай, когда дополнительно к этому равны параметры пертурбативно-

тяжелых полей $\eta_1 = \eta_2 = \eta_L$, был рассмотрен в [71], где была получена следующая координатная зависимость для классического действия:

$$S_{cl}(x) = 4\eta_L \log(1 + |1 - x|^{1-2\eta_h}) + s(x) + s(\bar{x}) + O(\eta_L)^2. \quad (3.42)$$

Метрическая форма объема, вычисленная по такому кэлерову потенциалу, может быть проинтегрирована по d^2x явно; ответ для объема $\sim \eta_L(1 - 2\eta_h) \sim \kappa_L(2 - 2\kappa_h)$. Это согласуется с (3.33) в первом порядке по η_L .

В этой секции мы немного обобщим вычисление в [71] на случай двух различных пертурбативно-тяжелых операторов $\eta_1 = \eta_l$, $\eta_2 = \eta_l \cdot \sigma$. Разложение тензора энергии-импульса $t(z)$ в этом случае

$$t^{(0)}(z) = \frac{\delta_3}{(z-1)^2}, \quad t^{(1)}(z) = \frac{\eta_l}{(z-x)^2} + \frac{\sigma\eta_l}{z^2} + \frac{x(x-1)c(x, \bar{x})}{z(z-1)(z-x)} - \frac{\eta_l(1+\sigma)}{z(z-1)}, \quad (3.43)$$

а матрицы монодромии для базиса решений нулевого порядка

$$\psi_{\pm}^{(0)}(z) = (1-z)^{\frac{1\pm\alpha}{2}} \quad (3.44)$$

в первом порядке даются ($C \equiv c(x, \bar{x})/\eta_l$ и $\alpha \equiv 1 - 2\eta_h$)

$$M_{\gamma_0} - \text{id} = \frac{2\pi i \eta_l}{\alpha} \begin{pmatrix} C(1-x) + \sigma & -C(1-x) + \alpha - \sigma \\ C(1-x) + \alpha + \sigma & -C(1-x) - \sigma \end{pmatrix}, \quad (3.45)$$

$$M_{\gamma_x} - \text{id} = \frac{2\pi i \eta_l}{\alpha} \begin{pmatrix} -C(1-x) - \sigma & (C(1-x) + \sigma(1+\alpha))(1-x)^\alpha \\ -\frac{(C(1-x) + \sigma(1-\alpha))}{(1-x)^\alpha} & C(1-x) + \sigma \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

Некоторой заменой базиса матрицы монодромии по любому контуру M_γ должны

приводиться к унитарным, т.е.

$$\exists B \in \text{SL}(2, \mathbb{C}) : \forall \gamma \quad BM_\gamma B^{-1} \in \text{SU}(2), \quad \text{или} \quad JM_\gamma = (M_\gamma^{-1})^\dagger J, \quad (3.47)$$

где $J = B^\dagger B$. Разложим $J = J_0 + \eta_l J_1 + \dots$. В нулевом порядке по η_l это условие для матриц монодромии даёт $J_0 = \text{diag}(a, 1/a)$. В первом порядке

$$J_0 \delta M_\gamma = (\delta M_\gamma^{-1})^\dagger J_0 = -\delta M_\gamma^\dagger J_0, \quad (3.48)$$

где δM_γ — линейная по η_l часть матрицы монодромии. (3.48) сводится к 2 уравнениям на C, \bar{C}

$$\begin{cases} C(1-x) = \bar{C}(1-\bar{x}), \\ \frac{C(1-x)+\sigma(1-\alpha)}{C(1-x)+\sigma(1+\alpha)} \frac{1}{|1-x|^{2\alpha}} = \frac{C(1-x)+\alpha+\sigma}{C(1-x)+\sigma-\alpha}. \end{cases} \quad (3.49)$$

Решение этих уравнений

$$C = \frac{1}{1-x} \left(\frac{\alpha \left(\sqrt{\sigma^2(\zeta+1)^2 - 2\sigma((\zeta-6)\zeta+1) + (\zeta+1)^2} - (\sigma+1)(\zeta+1) \right)}{2(\zeta-1)} - \sigma \right), \quad (3.50)$$

где $\zeta \equiv |1-x|^{2\alpha}$. Мы можем продифференцировать это по \bar{x} и получить метрику; однако, такое громоздкое выражение сложно интегрировать по сфере. Вместо этого рассмотрим, как аксессуарный параметр ведет себя при $x \rightarrow 1$ и $x \rightarrow \infty$:

$$C \approx \frac{1}{1-x} \left(\alpha \cdot \frac{\sigma+1 - \sqrt{(\sigma-1)^2}}{2} - \sigma \right), \quad x \rightarrow 1, \quad (3.51)$$

$$C \approx -\frac{1}{x} \left(\alpha \cdot \frac{\sqrt{(\sigma-1)^2} - (\sigma+1)}{2} - \sigma \right), \quad x \rightarrow \infty. \quad (3.52)$$

Поскольку коэффициенты метрики (которые в этом случае совпадают с метриче-

ской формой объема) даются $g_{x\bar{x}} \sim \bar{\partial}c = \partial\bar{c}$, интеграл по d^2x сводится к сумме граничных членов, которые определяются вычетами C и \bar{C} в точках $x = 1$ и ∞ (с правильным знаком):

$$V \sim \eta_L \cdot \alpha \cdot \left(\sigma + 1 - \sqrt{(\sigma - 1)^2} \right) = (2 - 4\eta_h) \cdot \begin{cases} \eta_1, & \sigma > 1 \\ \eta_2, & \sigma < 1 \end{cases} . \quad (3.53)$$

Это снова согласуется с ответом (3.33) из минимальной струны: для рассматриваемого нами случая размерность пространства конформных блоков пропорциональна наименьшему из чисел η_1, η_2 , которое зависит от того, как σ соотносится с единицей.

3.3.4. 4 дефекта: пример с 3 тяжелыми операторами

Теперь используем результаты [72] для случая 1 пертурбативно-тяжелого оператора в точке x с размерностью η_l и трех тяжелых операторов с параметрами $\kappa_2/2, \kappa_1/2, \kappa_1/2$ в точках $0, 1, \infty$. Мы также будем использовать обозначения $1 - \kappa_1 = \alpha, 1 - \kappa_2 = \beta$ для более простого сравнения с оригинальной работой. Ожидается, что (3.33) справедлива при $2\kappa_1 > \kappa_2$, т.е. при выполнении условия Троянова. Тензор энергии-импульса раскладывается как

$$t^{(0)}(z) = \frac{\delta_2}{z^2} + \frac{\delta_1}{(z-1)^2} - \frac{\delta_2}{z(z-1)}, \quad t^{(1)}(z) = \frac{\eta_l}{(z-x)^2} + \frac{x(x-1)c(x)}{z(z-1)(z-x)} - \frac{\eta_l}{z(z-1)} \quad (3.54)$$

Для выбора базиса решений нулевого порядка, как в [72]

$$\psi_{\pm}^{(0)}(z) = (1-z)^{\frac{1+\alpha}{2}} z^{\frac{1\pm\beta}{2}} F_{\pm}(z), \quad F_{\pm}(z) = {}_2F_1\left(\frac{1\pm\beta}{2}, \frac{1\pm\beta}{2} + \alpha, 1\pm\beta, z\right) \quad (3.55)$$

матрица монодромии вокруг точки 0 равна $-\text{diag}(e^{i\pi\beta}, e^{-i\pi\beta}) + 0\eta_l + \dots$; для монодромии вокруг точки x мы имеем

$$M_{\gamma_x} = 1_{2 \times 2} + i\eta_l \begin{pmatrix} I_{++} & I_{+-} \\ I_{-+} & I_{--} \end{pmatrix}, \quad (3.56)$$

$$I_{++} = -I_{--} = AF_+F_-(1-x)^\alpha(Cx(1-x) + B(x)), \quad (3.57)$$

$$I_{+-} = -A(1-x)^\alpha x^{-\beta} F_-^2(Cx(1-x) + D_-(x)); I_{-+} = A(1-x)^\alpha x^\beta F_+^2(Cx(1-x) + D_+(x)), \quad (3.58)$$

где

$$A = \frac{2\pi^2}{\sin \pi\beta}, \quad B(x) = 1 - x(\alpha + 2) + x(1-x) \frac{d \log(F_+ F_-)}{dx};$$

$$D_\pm = 1 - x(\alpha + 2) + x(1-x) \frac{d \log F_\pm^2}{dx} \pm \beta(1-x) \quad (3.59)$$

и в формулах выше $F_\pm = F_\pm(x)$. В нулевом порядке обе эти матрицы лежат в $SU(2)$. Чтобы это осталось верно, матрица J_0 снова должна иметь диагональный вид $\text{diag}(a, 1/a)$, но теперь a фиксировано условиями нулевого порядка, следующими из условия на монодромию вокруг 1, где в базисе [72] монодромия не диагональна; вычисление дает, что это выполнено при

$$a^2 = -\frac{16^{-\beta} \Gamma\left(-\frac{\beta}{2}\right)^2 \Gamma\left(\frac{1}{2}(-2\alpha + \beta + 1)\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}(2\alpha + \beta + 1)\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 \Gamma\left(-\alpha - \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\alpha - \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}\right)}. \quad (3.60)$$

$a \in \mathbb{R}$ в области параметров, где ожидается существование метрики постоянной положительной кривизны на поверхности, т.е. при выполнении условий $2\kappa_1 + \kappa_2 < 2$, $2\kappa_1 > \kappa_2$. Теперь мы должны найти C такое, что (3.48) справедливо для моно-

дромии вокруг x в первом порядке. В матричном виде

$$\begin{pmatrix} aI_{++} & aI_{+-} \\ a^{-1}I_{-+} & a^{-1}I_{--} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\bar{I}_{++} & a^{-1}\bar{I}_{-+} \\ a\bar{I}_{+-} & a^{-1}\bar{I}_{--} \end{pmatrix}, \quad (3.61)$$

что сводится к двум уравнениям на $C \equiv c/\eta_l$ и \bar{C}

$$Cx(1-x) + B = \frac{\bar{F}_+\bar{F}_-}{F_+F_-} \frac{(1-\bar{x})^\alpha}{(1-x)^\alpha} (\bar{C}\bar{x}(1-\bar{x}) + \bar{B}), \quad (3.62)$$

$$Cx(1-x) + D_- = -\frac{1}{a^2} \frac{(1-\bar{x})^\alpha}{(1-x)^\alpha} (x\bar{x})^\beta \frac{\bar{F}_+^2}{F_-^2} (\bar{C}\bar{x}(1-\bar{x}) + \bar{D}_+). \quad (3.63)$$

Из этих уравнений можно найти C и \bar{C}

$$\begin{aligned} \bar{C} = & -\frac{1}{\bar{x}(1-\bar{x})} \left(\frac{1-x}{1-\bar{x}} \right)^\alpha \frac{1}{\frac{\bar{F}_+\bar{F}_-}{F_+F_-} + \frac{(x\bar{x})^\beta \bar{F}_+^2}{a^2 F_-^2}} \cdot \\ & \cdot \left(D_- + \frac{(x\bar{x})^\beta (1-\bar{x})^\alpha \bar{F}_+^2}{a^2 (1-x)^\alpha F_-^2} \bar{D}_+ - B + \frac{\bar{F}_+\bar{F}_- (1-\bar{x})^\alpha}{F_+F_- (1-x)^\alpha} \bar{B} \right). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Как и раньше, рассмотрим теперь асимптотики этой функции на границе пространства модулей $x = 0, 1, \infty$. В $x = 0$ мы имеем $D_\pm = 1 \pm \beta, B = \bar{B} = 1$, поэтому

$$\bar{C} \approx -\frac{1}{\bar{x}} (1 - \beta - 1 + 1), \quad x \rightarrow 0. \quad (3.65)$$

При $x \rightarrow 1$ лидирующая асимптотика гипергеометрической функции

$$F_\pm \approx (1-x)^{-\alpha} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\pm\beta+1)}{\Gamma\left(\frac{\pm\beta+1}{2}\right)\Gamma\left(\alpha + \frac{1\pm\beta}{2}\right)}; \quad \log F_\pm = -\alpha \log(1-x). \quad (3.66)$$

Тогда

$$B(x) \approx 1 - \alpha - 2 + 2\alpha \frac{1-x}{1-x} = \alpha - 1 = D_\pm \quad (3.67)$$

и последний множитель в выражении (3.64) сводится к

$$(\alpha - 1) \left(\frac{1-x}{1-\bar{x}} \right)^{-\alpha} \left(\frac{\bar{F}_+ \bar{F}_-}{F_+ F_-} + \frac{(x\bar{x})^\beta \bar{F}_+^2}{a^2 F_-^2} \right). \quad (3.68)$$

Асимптотика для \bar{C}

$$\bar{C} \approx -\frac{1}{\bar{x}-1}(1-\alpha), \quad x \rightarrow 1. \quad (3.69)$$

Аналогично анализируется поведение на бесконечности, где мы получаем асимптотику

$$\bar{C} \approx -\frac{1}{\bar{x}}(1+\alpha), \quad x \rightarrow \infty. \quad (3.70)$$

Тогда сумма трёх граничных вкладов, дающая объем пространства модулей, равна

$$\eta_l(2\alpha + \beta - 1) = \eta_l(2 - 2\kappa_1 - \kappa_2), \quad (3.71)$$

что согласуется с (3.33).

Эти вычисления фактически подтверждают, что аксессуарный параметр s , вычисленный в первом порядке теории возмущений для пертурбативно-тяжелых полей, имеет ту же асимптотику, что производная классического решения $\partial\phi(x, \bar{x})$; тем самым устанавливается соответствие с пределом «легких» операторов.

3.3.5. О выводе предыдущих результатов из СФТ

Как было отмечено ранее, в области пространства параметров, рассмотренной в этом разделе, численный метод раздела 3.2 не работает напрямую, поскольку нетривиальная седловая точка в интеграле по лиувиллевскому импульсу p исчезает (причем во всех каналах). Каким же образом мы можем получить из конформно-теоретико-полевых выражений соответствующий нетривиально зависящий от x, \bar{x} кэлеров потенциал?

По-видимому, чтобы это сделать, нужно учесть дискретные члены в лиувилевском ОРЕ, т.е. вклады от полюсов структурной константы, пересекающих контур интегрирования $p \in \mathbb{R}$ в (3.17) при аналитическом продолжении по внешним параметрам в область $\eta_i + \eta_j < 1/2$. В пределе $b \rightarrow 0$ имеется бесконечно много таких дискретных вкладов, поскольку расстояние между полюсами $\sim b$. Все эти полюса должны быть просуммированы, после чего логарифм корреляционной функции получает нетривиальную зависимость от x и \bar{x} . В работе [71] результат из начала раздела 3.3.3 был воспроизведен из СФТ с помощью такой процедуры. Это было возможно благодаря применимости пертурбативно-тяжелого приближения, в котором известно выражение для конформных блоков [73]. Было бы интересно понять, как провести это суммирование, когда все поля «тяжелые».

3.4. О связи с другими подходами

По ходу подготовки данной части работы в литературе появилось другое предложение [74] для меры на пространствах модулей поверхностей с коническими дефектами, которое тоже согласуется с ответом для минимальной струны. Отметим одно из сходств: приближенное выражение (3.34), которое мы мотивировали из классической теории Лиувилля, может быть рассмотрено как следствие из уравнений «струны» и «дилатона» в [74] (уравнения (1.3a) и (1.3b)). Действительно, для поверхностей без геодезических границ из этих уравнений следует, что объем пространства модулей с одним дефектом маленького дефицита угла $\kappa \rightarrow 0$ приближенно линеен по κ с коэффициентом, пропорциональным степени Эйлеровой характеристики. Аргумент о пределе «легких» операторов в секции 3.3.1 также можно обобщить для получения уравнения «дилатона» в более общем случае.

4 Применение топологической рекурсии к МС

Эта глава посвящена нескольким результатам, полученным для $(2, 2p + 1)$ минимальной струны в подходе топологической рекурсии. Этот подход наиболее удобен для демонстрации связей с другими теориями двумерной гравитации. Мы сформулируем несколько способов систематического вычисления тахионных амплитуд в этом подходе (один упрощенный и справедлив только в определенной области параметров, а другой — для общих их значений) и представим общие формулы для них в терминах чисел пересечений на пространстве модулей кривых и «квантовых объемов» — корреляторов в Вирасоро-минимальной струне [2].

4.1. Связь с p -деформированными объемами и теорией пересечений

p -деформированные объемы. Введем сначала ещё один класс наблюдаемых $V_{g,n}^p(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ в матричной модели минимальной струны, впервые рассмотренный в [39]. Эти корреляторы получили название « p -деформированные объемы»; они вычисляются с помощью интегрального преобразования от n -дифференциалов $W_{g,n}(z_1, \dots, z_n)$. Удобнее записать обратное преобразование (здесь $W_{g,n}$ вычислены

по спектральной кривой (1.31), в соглашениях [39]):

$$\frac{W_{g,n}(z_k)}{\prod_{k=1}^n 2z_k} = \prod_{k=1}^n \left(\int_0^\infty d\beta_k e^{(1-2\pi^2 b^4 z_k^2)\beta_k} \int_0^\infty d\lambda_k \lambda_k \tanh \pi \lambda_k K_{i\lambda_k}(\beta_k) \right) V_{g,n}^p(\lambda_1, \dots, \lambda_n). \quad (4.1)$$

Переход от $W_{g,n}$ к $V_{g,n}^p$ можно выполнять согласно следующему правилу: $W_{g,n}$ являются полиномами по $1/z_k^2$, тогда каждый множитель вида $\frac{1}{z_k^{2(i+1)}}$ в $W_{g,n}$ переходит в

$$\frac{1}{z_k^{2(i+1)}} \rightarrow (2\pi^2 b^4)^{i+1/2} \frac{\sqrt{\frac{1}{2\pi}}}{2^i \Gamma(i+1) \Gamma(i+3/2)} \prod_{j=1}^i \left(\lambda_k^2 + \frac{(2j-1)^2}{4} \right). \quad (4.2)$$

4.1.1. Корреляционные числа и p -деформированные объемы

Название « p -деформированных объемов» обусловлено тем, что такие корреляторы в пределе $p \rightarrow \infty$ сводятся к объемам Вейля-Петерсона. Как было отмечено ранее, то же свойство верно для корреляционных чисел в МС в некоторой области параметров. Нетривиальное наблюдение, которое можно сделать на примерах корреляционных чисел на поверхностях малого рода, заключается в том, что p -деформированные объемы и корреляционные числа в области параметров $k_i + k_j > p - 3$ связаны аналитическим продолжением даже до квазиклассического предела: с точностью до нормировки

$$\left. \frac{\partial^n \mathcal{F}_g}{\partial \tau_{k_1} \dots \partial \tau_{k_n}} \right|_{\tau_1 = -\frac{1}{2}, \tau_2 \dots \tau_p = 0} \sim V_{g,n}^p \left(\vec{\lambda} = \frac{i}{2} (2(p - \vec{k}) + 1) \right). \quad (4.3)$$

Насколько нам известно, это совпадение не было описано до нашей работы. Такая формула позволяет просто и систематически вычислять поправки при конечных p к тахионным корреляторам (в упомянутой выше области параметров) из топологической рекурсии. Можно также записать аргументы p -деформированных

объемов λ через лиувиллевские импульсы для одевающих полей в соответствующем корреляторе: $\lambda_j = \frac{2P_{1,-k_j}}{b}$.

Проверку справедливости формулы (4.3) можно провести, вычислив напрямую корреляционные числа в этой области параметров с использованием «струнного уравнения Дугласа» (см. [21]) и сравнив ответы с интегральным преобразованием (4.1). Струнное уравнение Дугласа легко использовать для вычисления корреляционных чисел для случаев $g = 0, 1$; ответы для них существенно упрощаются в рассматриваемой области, когда можно учитывать только линейные члены в «резонансных преобразованиях». В частности, с формулой выше можно сверить результаты, приведенные в [21], [46]; например, четырехточечное корреляционное число на сфере в области $k_i + k_j > p - 3$ даётся

$$\begin{aligned} A_4^0(k_1, \dots, k_4) &= -\frac{1}{2} \left(p(p+1) - \sum_{j=1}^4 (p - k_j)(p - k_j + 1) \right) = \\ &= \frac{-1}{2b^4} \left(1 + \frac{3b^4}{4} - b^4 \sum_{j=1}^4 \left(p - k_j + \frac{1}{2} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

и сводится к соответствующему « p -деформированному объему», вычисленному, например, в [39]; в нашей нормировке

$$V_{0,4}^p(\vec{\lambda}) = 2\pi^2 + \frac{6\pi^2}{(2p+1)^2} + \frac{8\pi^2}{(2p+1)^2} \sum_{j=1}^4 \lambda_j^2 = 2\pi^2 \left(1 + \frac{3b^4}{4} + b^4 \sum_{j=1}^4 \lambda_j^2 \right). \quad (4.4)$$

Мы проверили соотношение (4.3) вплоть до восьмиточечных корреляторов на поверхностях рода ноль и шеститочечных для рода один.

Опишем более общий способ убедиться в данном соответствии. Для этого найдем деформацию данных спектральной кривой такую, что изменение свободной энергии \mathcal{F}_g пропорционально $V_{g,1}^p(\lambda)$, и сравним её с тем, что получается при вариации параметров τ_k . Деформации описывающих спектральную кривую функций

$(x(z), y(z)) \in \mathbb{C}((z)) \times \mathbb{C}((z))$ могут быть запараметризованы 1-формой

$$\Omega = \delta y dx - \delta x dy. \quad (4.5)$$

Здесь $dx, dy \in \mathbb{C}((z))dz$ — 1-формы на спектральной кривой, а вариации $\delta x, \delta y$ в координатах $\{(x_k, y_k)\}$ таких, что

$$x(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k z^k, \quad y(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_k z^k, \quad (4.6)$$

даются

$$\delta x(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta x_k z^k, \quad \delta y(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta y_k z^k. \quad (4.7)$$

Форма Ω — координатно-инвариантная характеристика деформации; в частности, если δ соответствует репараметризации $z \rightarrow f(z)$, она равна нулю. Согласно общей теории [38], если Ω может быть выражена как

$$\Omega(p) = \oint_{(\infty)} \Lambda(q) B(p, q), \quad (4.8)$$

то при соответствующей деформации спектральной кривой свободная энергия меняется на

$$\delta \mathcal{F}_g(\Lambda) = \oint_{\infty} \omega_{g,1}(z) \Lambda(z). \quad (4.9)$$

Похожая формула справедлива для $\omega_{g,n}$ и может быть использована для старших производных свободной энергии: n -я производная выражается через n -кратный контурный интеграл от $\omega_{g,n}$. Приравнивая $\delta \mathcal{F}_g(\Lambda) = \sum_{k=1}^p V_{g,1}^p(\frac{i}{2}(2p-2k+1)) \delta \tau_k$, из явных формул (4.2) можно найти Λ в следующем виде: коэффициенты перед $\delta \tau_k$

совпадают с полиномами Чебышева первого рода

$$\Lambda(z) = \sum_{k=1}^p \sum_{i=0}^{p-k+1} \frac{z^{2i+1}}{\Gamma(i+1)\Gamma(i+3/2)} \prod_{j=1}^i \left(\frac{(2j-1)^2 - (2p-2k+1)^2}{4} \right) \delta\tau_k. \quad (4.10)$$

Затем может быть вычислена Ω . Её коэффициенты пропорциональны полиномам Чебышева второго рода

$$\Omega(z) = \# \sum_{k=1}^p U_{2(p-k)}(z) dz \delta\tau_k. \quad (4.11)$$

Если мы оставляем $x(z)$ инвариантным, варьируя кривую, чтобы реализовать такую деформацию, нужно выбрать δy в виде $\delta y \sim \frac{U_{2(p-k)}(z)}{z}$. Такая же деформация уравнений спектральной кривой возникает в [18], где утверждается, что в подходе мирового листа она описывает вставку оператора $\mathcal{T}_{1,k}$. Это ровно то, что мы хотели бы показать. В [18] анализировалась только одноточечная функция на диске, поэтому только линейные слагаемые в резонансных преобразованиях дают вклад в такой ответ, что согласуется с рассматриваемым нами ограничением на параметры.

4.1.2. Сравнение спектральных кривых МС и ВМС

В этом разделе мы будем использовать несколько другую параметризацию спектральной кривой, отличную от [39]:

$$\begin{cases} x(z) = T_2(\pi b^2 z) = 2\pi^2 b^4 z^2 - 1 \\ y(z) = (-1)^p T_{2p+1}(\pi b^2 z) = \sin\left(\frac{2}{b^2} \arcsin(\pi b^2 z)\right) \end{cases}. \quad (4.12)$$

Бидифференциал $B(z_1, z_2)$ такой же, как раньше: $B(z_1, z_2) = \frac{dz_1 dz_2}{(z_1 - z_2)^2}$. В этой нормировке $W_{g,n}$ отличаются от заданных (1.31) множителем $(8\pi^3 b^4)^{2g-2+n}$. p -деформированные объемы вычисляются из $W_{g,n}$ с помощью преобразования

$$\frac{V_{g,n}^p(\vec{\lambda})}{(8\pi^3 b^4)^{2g-2+n}} = \prod_{k=1}^n \left(\frac{\cosh \pi \lambda_k}{\pi^2 b^2} \int_0^\infty \frac{d\beta_k}{\beta_k} K_{i\lambda_k}(\beta_k) \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} \frac{dz_k}{2\pi i} e^{(2\pi^2 b^4 z_k^2 - 1)\beta_k} \right) W_{g,n}(z_1, \dots, z_n), \quad (4.13)$$

которое обратно к (4.1). Проинтегрировав по β , можно свести это к взятию повторного вычета

$$V_{g,n}^p(\vec{\lambda}) = (8\pi^3 b^4)^{2g-2+n} \operatorname{Res}_{z_1 \dots z_n = 0} W_{g,n}(z_1, \dots, z_n) \prod_{k=1}^n \frac{dz_k}{2\pi b^2 \lambda_k} e^{2\lambda_k \arcsin \pi b^2 z_k}. \quad (4.14)$$

Если $\lambda_k = \frac{i}{2}(2m_k + 1)$, $m_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, можно упростить формулу ещё больше, получив

$$\frac{V_{g,n}^p\left(\frac{i}{2}(2\vec{m} + 1)\right)}{(8\pi^3 b^4)^{2g-2+n}} = \operatorname{Res}_{z_1 \dots z_n = 0} W_{g,n}(z_1, \dots, z_n) \prod_{k=1}^n \frac{dz_k}{2\pi} \frac{2p+1}{2m_k+1} (-1)^{m_k} T_{2m_k+1}\left(\frac{2\pi z_k}{2p+1}\right). \quad (4.15)$$

Формула (4.14) мотивирует рассмотреть следующую локальную замену координаты на спектральной кривой:

$$z(s) = \frac{1}{\pi b^2} \sin \pi b s. \quad (4.16)$$

1-форма $\omega_{0,1}$ и бидифференциал $\omega_{0,2}$ в координате s принимают вид

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{0,1}(s) &= 2\pi b \sin(2\pi b s) \sin(2\pi b^{-1} s) ds, \\ B(z(s_1), z(s_2)) &= (\pi b)^2 \frac{\cos \pi b s_1 \cos \pi b s_2}{(\sin \pi b s_1 - \sin \pi b s_2)^2} ds_1 ds_2. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Другие $\tilde{\omega}_{g,n}(s_1, \dots, s_n)$ тоже даются отображением обратного образа $\omega_{g,n}(z_1, \dots, z_n)$ при диффеоморфизме (4.16). Это следует из рекурсии (1.30), так как $\omega_{g,n}$ определяются только $\omega_{0,1}$ и B . Существуют разные выборы вложения спектральной кривой $\mathbb{C}^2 \supset (\tilde{x}(s), \tilde{y}(s))$ такие, что соответствующая 1-форма $\tilde{\omega}_{0,1} = \tilde{y} d\tilde{x}$. Удобный выбор

$$\begin{cases} \tilde{x}(s) = s^2 \\ \tilde{y}(s) = y(z(s)) \frac{dx(z(s))}{d\tilde{x}(s)} \end{cases} . \quad (4.18)$$

Замена параметра (4.16) позволяет заметить сходство данных топологической рекурсии для МС и ВМС [2]. В переменной s 1-формы $\tilde{\omega}_{0,1}$ совпадают, а « p -деформированные объемы» могут быть получены из $\tilde{W}_{g,n}$ по формуле

$$V_{g,n}^p(\vec{\lambda}) = (8\pi^3 b^4)^{2g-2+n} \operatorname{Res}_{z_k=0} \tilde{W}_{g,n}(s_1, \dots, s_n) \prod_{k=1}^n \frac{ds_k}{2\pi b^2 \lambda_k} e^{2\pi b \lambda_k s_k}, \quad (4.19)$$

которое совпадает с формулой для перехода от n -дифференциалов к «квантовым объемам» в ВМС [2]. Единственная разница начальных данных топологической рекурсии в этой параметризации — нетривиальный бидифференциал $\tilde{W}_{0,2}(s)$ для минимальной струны.

В отличие от $W(z)$, $\tilde{W}(s)$ — коэффициенты $\tilde{\omega}_{g,n}$ — не имеют простой интерпретации в терминах амплитуд открытых струн. То же самое верно для ВМС: резольвенты в соответствующей матричной модели получаются из ФЗЗТ-амплитуд после двойного преобразования Лапласа, по s^2 , а затем по «длине границы» β .

Существует интересный альтернативный способ записать обратное преобразо-

вание для (4.19); если $\text{Im } s_k < 0 \forall k$, то

$$\tilde{W}_{g,n}(s_1, \dots, s_n) \sim \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} V_{g,n}^p \left(\frac{i}{2}(2\vec{m} + 1) \right) \prod_{k=1}^n (-2\pi^2 b^3) (2m_k + 1) e^{-2\pi s_k \frac{ib}{2}(2m_k+1)}. \quad (4.20)$$

Эта формула представляет \tilde{W} как сумму по дискретному набору «физических операторов» в минимальной струне (лиувиллевские импульсы, по которым идёт суммирование, соответствуют классам БРСТ-когомологий, описанным в [35], включая тахионы и операторы с другим духовым числом). Такое представление, однако, нельзя воспринимать буквально, поскольку $V_{g,n}^p$ совпадает с корреляционными числами только в определенной области параметров, а для операторов, кроме тахионов, связь между $V_{g,n}^p$ и корреляционными числами неясна.

4.1.3. p -деформированные объемы из теории пересечений

В этом разделе мы используем топологическую рекурсию с начальными данными (4.17), чтобы получить формулу для $V_{g,n}^p$ в терминах чисел пересечений тапологических классов на пространстве модулей кривых $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Для вывода такого представления мы используем метод, разработанный в [75].

Определения входящих в формулу классов когомологий ψ_i , κ_k и $\delta_{k,l}$ хорошо известны и не будут приводиться здесь; соответствующие определения вместе с более подробным введением в теорию пересечений на $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ можно найти в [76].

Согласно [75], $\tilde{W}_{g,n}$ для нашей топологической рекурсии имеют следующее представление:

$$\tilde{W}_{g,n} = 2^{3g-3+n} \sum_{j_1, \dots, j_n \geq 0} \frac{d\xi_{j_1}}{ds_1} \dots \frac{d\xi_{j_n}}{ds_n} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{j_1} \dots \psi_n^{j_n} e^{\sum_{k \geq 0} \tilde{t}_k \kappa_k + \sum_{k,l \geq 0} \tilde{B}_{k,l} \delta_{k,l}} \quad (4.21)$$

Подынтегральное выражение в (4.21) понимается как формальный ряд из когомо-

логических классов, а интегрирование — как спаривание формы старшей степени с фундаментальным классом гомологий $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. 1-формы $d\xi_j$ определены как

$$d\xi_j(s) = -\operatorname{Res}_{s'=0} \tilde{B}(s, s') \frac{(2j-1)!!}{2^j s'^{2j+1}}, \quad (4.22)$$

а \tilde{t}_k вычисляются из преобразования Лапласа 1-формы $\tilde{\omega}_{0,1} = \tilde{y} d\tilde{x}$:

$$e^{-\sum_k \tilde{t}_k u^{-k}} = \frac{2u^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-u\tilde{x}(s)} \tilde{\omega}_{0,1}(s) = 4b\pi^3 e^{-\frac{b^2+b^{-2}}{4}(2\pi)^2 u^{-1}} \frac{\sinh \frac{2\pi^2}{u}}{\frac{2\pi^2}{u}}. \quad (4.23)$$

Наконец, параметры $\tilde{B}_{k,l}$ определяются из регуляризованного бидифференциала:

$$\frac{e^{-\sum_{k,l \geq 0} \tilde{B}_{k,l} (u_1+u_2)^k (u_1 u_2)^l} - 1}{u_1 + u_2} = \frac{1}{2\pi \sqrt{u_1 u_2}} \int_{s_1 \in \mathbb{R} + i\epsilon} \int_{s_2 \in \mathbb{R}} e^{-\frac{s_1^2}{u_1} - \frac{s_2^2}{u_2}} \left(\tilde{B} - \overset{\circ}{B} \right) (s_1, s_2), \quad (4.24)$$

где $\overset{\circ}{B}(s_1, s_2) = \frac{ds_1 ds_2}{(s_1 - s_2)^2}$. Приведем некоторые технические вычисления, нужные для целей этого раздела. Во-первых, обратное преобразование Лапласа от 1-форм $d\xi_j$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{s=0} \frac{e^{2\pi b \lambda s} d\xi_j}{2\pi b^2 \lambda} &= -\operatorname{Res}_{s=0} \operatorname{Res}_{s'=0} \frac{e^{2\pi b \lambda s}}{2\pi b^2 \lambda} \cdot \frac{(2j-1)!!}{2^j s'^{2j+1}} \tilde{B}(s, s') = \\ &= -\frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{|s|=2\epsilon} \oint_{|s'|=\epsilon} \frac{e^{2\pi b \lambda s}}{2\pi b^2 \lambda} \cdot \frac{(2j-1)!!}{2^j s'^{2j+1}} \tilde{B}(s, s') = \\ &= -\frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{|s'|=\epsilon} \oint_{|s|=\epsilon/2} \frac{e^{2\pi b \lambda s}}{2\pi b^2 \lambda} \cdot \frac{(2j-1)!!}{2^j s'^{2j+1}} \tilde{B}(s, s') - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|s'|=\epsilon} \operatorname{Res}_{s=s'} \frac{e^{2\pi b \lambda s}}{2\pi b^2 \lambda} \cdot \frac{(2j-1)!!}{2^j s'^{2j+1}} \tilde{B}(s, s') \end{aligned} \quad (4.25)$$

Здесь мы деформируем контур интегрирования по s' , принимая во внимание вклад от полюса при $s' = s$. Поскольку подынтегральное выражение регулярно в $s = 0$,

первый член зануляется и выражение сводится к

$$\begin{aligned}
\dots &= -\operatorname{Res}_{s'=0} \frac{(2j-1)!!}{2^j s'^{2j-1}} \operatorname{Res}_{z=z(s')} \frac{e^{2\lambda \arcsin \pi b^2 z}}{2\pi b^2 \lambda} \frac{dz dz(s')}{(z-z(s'))^2} = \\
&= -\operatorname{Res}_{s'=0} \frac{(2j-1)!!}{2^j s'^{2j-1}} dz(s') \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{z=z(s')} \frac{e^{2\lambda \arcsin \pi b^2 z}}{2\pi b^2 \lambda} = -\operatorname{Res}_{s'=0} \frac{(2j-1)!!}{2^j s'^{2j-1}} \frac{\partial}{\partial s'} \frac{e^{2\pi b \lambda s'}}{2\pi b^2 \lambda} ds' = \\
&= -\frac{(2j-1)!!}{2^j b} \operatorname{Res}_{s'=0} \frac{e^{2\pi b \lambda s'}}{s'^{2j-1}} ds' = -\frac{1}{b} \frac{(\pi b \lambda)^{2j}}{j!} \tag{4.26}
\end{aligned}$$

Теперь вычислим преобразование от бидифференциала

$$\begin{aligned}
&\int_{s_1 \in \mathbb{R}+i\epsilon} \int_{s_2 \in \mathbb{R}} e^{-\tilde{x}(s_1)/u_1 - \tilde{x}(s_2)/u_2} \tilde{B}(s_1, s_2) = \\
&= \int_{\mathbb{R}+i\epsilon} ds_1 e^{-s_1^2/u_1} \int_{\mathbb{R}} ds_2 e^{-s_2^2/u_2} (\pi b)^2 \frac{\cos \pi b s_1 \cos \pi b s_2}{(\sin \pi b s_1 - \sin \pi b s_2)^2} = \\
&= \int_{\mathbb{R}+i\epsilon} ds_1 e^{-s_1^2/u_1} \int_{\mathbb{R}} ds_2 e^{-s_2^2/u_2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{(s_1 - s_2 + \frac{2k}{b})^2} - \frac{1}{(s_1 + s_2 + \frac{2k-1}{b})^2} \right) = \\
&= \int_0^\infty dl l \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}+i\epsilon} ds_1 e^{-s_1^2/u_1} \int_{\mathbb{R}} ds_2 e^{-s_2^2/u_2} \left(e^{il(s_1 - s_2 + \frac{2k}{b})} - e^{il(s_1 + s_2 + \frac{2k-1}{b})} \right) = \\
&= \sqrt{\pi u_2} \int_0^\infty dl l \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}+i\epsilon} ds_1 e^{-s_1^2/u_1 - \frac{u_2 l^2}{4} + il(s_1 + \frac{k}{b}) + \pi i k} = \\
&= \pi \sqrt{u_1 u_2} \int_0^\infty dl l e^{-(u_1 + u_2)l^2/4} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{i \frac{k}{b}(l - \pi b)} = \\
&= 2\pi^2 b \sqrt{u_1 u_2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^\infty dl l e^{-(u_1 + u_2)l^2/4} \delta(l - 2\pi b(k + 1/2)) = \\
&= 2\pi \sqrt{u_1 u_2} \cdot \pi b \sum_{k \in \mathbb{Z}} \pi b |k + 1/2| e^{-(u_1 + u_2)(\pi b(k + 1/2))^2} \sim \tag{4.27}
\end{aligned}$$

$$\sim \frac{2\pi \sqrt{u_1 u_2}}{u_1 + u_2} \left(1 + \sum_{m \geq 1} (-1)^m \frac{2^{1-2m} - 1}{m!} ((\pi b)^2 (u_1 + u_2))^m B_{2m} \right). \tag{4.28}$$

Последняя формула даёт асимптотический ряд для (4.27). Она может быть получена стандартными методами (см., например, [77]). Для вычисления коэффициентов $\tilde{B}_{k,l}$ необходимо вычесть

$$\begin{aligned} & \int_{s_1 \in \mathbb{R} + i\epsilon} \int_{s_2 \in \mathbb{R}} e^{-\tilde{x}(s_1)/u_1 - \tilde{x}(s_2)/u_2} \overset{\circ}{\tilde{B}}(s_1, s_2) = \int_{\mathbb{R} + i\epsilon} ds_1 e^{-s_1^2/u_1} \int_{\mathbb{R}} ds_2 e^{-s_2^2/u_2} \frac{1}{(s_1 - s_2)^2} = \\ & = \pi \sqrt{u_1 u_2} \int_0^\infty dl l e^{-(u_1 + u_2)l^2/4} = \frac{2\pi \sqrt{u_1 u_2}}{u_1 + u_2}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Таким образом, прямое вычисление даёт $\tilde{B}_{k,l} = 0$ для $l \neq 0$ и $\tilde{B}_{k,0} = (2\pi)^{2k+2} \tilde{b}_k$, где первые несколько коэффициентов \tilde{b}_k даются

$$\begin{aligned} \tilde{b}_0 &= \frac{(ib/2)^2}{12}, & \tilde{b}_3 &= -\frac{59(ib/2)^8}{56700}, \\ \tilde{b}_1 &= -\frac{(ib/2)^4}{90}, & \tilde{b}_4 &= \frac{232(ib/2)^{10}}{467775}, \\ \tilde{b}_2 &= \frac{8(ib/2)^6}{2835}, \end{aligned}$$

Используя (4.14), мы находим (напоминаем, что $P_k = \frac{b}{2} \lambda_k$):

$$\begin{aligned} V_{g,n}^p(\vec{\lambda}) &= \#(8\pi^3 b^4)^{2g-2+n} \sum_{j_1, \dots, j_n \geq 0} \prod_{k=1}^n \operatorname{Res}_{s_k=0} \frac{e^{2\pi b \lambda_k s_k} d\xi_{j_k}}{2\pi b^2 \lambda_k} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{j_1} \dots \psi_n^{j_n} e^{\sum_{k \geq 0} \tilde{t}_k \kappa_k + \sum_{k \geq 0} \tilde{B}_{k,0} \delta_{k,0}} = \\ &= \#(8\pi^3 b^4)^{2g-2+n} \sum_{j_1, \dots, j_n \geq 0} \prod_{k=1}^n \frac{-1}{b} \frac{(\pi b \lambda_k)^{2j_k}}{j_k!} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{j_1} \dots \psi_n^{j_n} e^{\sum_{k \geq 0} \tilde{t}_k \kappa_k + \sum_{k \geq 0} \tilde{B}_{k,0} \delta_{k,0}} = \\ &= \#(8\pi^3 b^4)^{2g-2+n} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} e^{\frac{c-13}{24} (2\pi)^2 \kappa_1 - \sum_{m \geq 1} \frac{B_{2m} (2\pi)^{4m}}{(2m)(2m)!} \kappa_{2m} + \sum_{k=1}^n (2\pi)^2 P_k^2 \psi_k + \sum_{k \geq 0} \tilde{b}_k (2\pi)^{2k+2} \delta_{k,0}} = \\ &= (8\pi^2 b^2)^{3g-3+n} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} e^{\frac{c-13}{24} \kappa_1 - \sum_{m \geq 1} \frac{B_{2m}}{(2m)(2m)!} \kappa_{2m} + \sum_{k=1}^n P_k^2 \psi_k + \sum_{k \geq 0} \tilde{b}_k \delta_{k,0}}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Эта формула сводится к «квантовым объемам», дающим корреляционные числа в ВМС [2], при стирании множителя с δ -классами (что соответствовало бы стандартному бидифференциалу $\frac{ds_1 ds_2}{(s_1 - s_2)^2}$), в согласии с обсуждениями в предыдущем разделе. Несколько примеров p -деформированных объемов, вычисленных с использованием этой формулы, приведены ниже (здесь $l_i = 2\pi b^2 \lambda_i$):

$$V_{0,4}^p(\vec{\lambda}) = 2\pi^2 + \frac{3}{2}\pi^2 b^4 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 l_i^2, \quad (4.31)$$

$$V_{0,5}^p(\vec{\lambda}) = 10\pi^4 + 14\pi^4 b^4 + \frac{13}{2}\pi^4 b^8 + \left(3\pi^2 + \frac{5}{2}\pi^2 b^4\right) \sum_{i=1}^5 l_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i<j} l_i^2 l_j^2 + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^5 l_i^4, \quad (4.32)$$

$$V_{1,1}^p(\vec{\lambda}) = \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{48} l_1^2, \quad (4.33)$$

$$V_{1,2}^p(\vec{\lambda}) = \frac{\pi^4}{4} + \frac{5}{24}\pi^4 b^4 + \frac{7}{192}\pi^4 b^8 + \left(\frac{1}{12}\pi^2 + \frac{1}{24}\pi^2 b^4\right) \sum_{i=1}^2 l_i^2 + \frac{1}{96} \sum_{i<j} l_i^2 l_j^2 + \frac{1}{192} \sum_{i=1}^2 l_i^4. \quad (4.34)$$

4.2. Спектральная кривая после $x - y$ замены и корреляционные числа

Подход к определению корреляционных чисел через «резонансные преобразования» имеет несколько недостатков. Во-первых, сами они несколько неестественны с точки зрения матричных моделей или интегрируемых систем. Во-вторых, формулы, полученные из этого подхода с помощью струнного уравнения Дугласа не допускают прозрачной интерпретации с точки зрения конформной теории поля; например, они имеют структуру, отличную от ответов из ВУД. Наконец, если мы ожидаем, что в матрично-модельном подходе можно вычислить корреляторы не только тахионов, но и операторов с другим духовым числом (например, из

кольца дискретных состояний), непонятно, как включить их в этот подход. Действительно, резонансные преобразования фиксируют t_k как полиномы от τ_m вида (1.34) по сути из-за КПЗ-скейлинга; с этой точки зрения «времена», соответствующие операторам из кольца дискретных состояний, имели бы неположительную КПЗ-размерность.

В этой части работы мы предлагаем альтернативную прескрипцию для вычисления A_n^g , которая предположительно разрешает некоторые упомянутые выше недостатки. Рассмотрим « $x - y$ двойственную» спектральную кривую, заданную

$$\begin{cases} \check{x} = 2u_0^{\frac{2p+1}{2}} T_{2p+1}(z) \\ \check{y} = 2u_0 T_2(z) \end{cases} \quad (4.35)$$

со стандартным бидифференциалом B . Тогда утверждается, что из соответствующей системы n -дифференциалов $\check{\omega}_{g,n}$ с помощью преобразования¹

$$\check{A}_n^g(k_1, \dots, k_n) = \operatorname{Res}_{z_1=\infty} \dots \operatorname{Res}_{z_n=\infty} \left(\check{\omega}_{g,n}(z_1, \dots, z_n) \prod_{i=1}^n \frac{T_{2(p-k_i)+1}(z_i)}{2(p-k_i)+1} \right) \quad (4.36)$$

получаются функции, совпадающие с A_n^g , определенными (1.35) (с точностью до нормировки).

На данный момент это утверждение имеет статус гипотезы. Это нетривиальное совпадение далее будет проверено на всех примерах корреляционных чисел, явно изученных в литературе. Заметим, что похожее по духу утверждение появлялось в [78] в несколько другом описании дуальной теории, использующем Фробениусовы многообразия. Однако в этом подходе согласие с «резонансными преобразованиями» было неполным, поэтому связь между этими результатами не до конца понятна.

¹Заметим, что степень полинома Чебышева пропорциональна лиувиллевскому импульсу для одевающего поля: $P_{1,-k} = \frac{ib}{4}(2p+1-2k)$

4.2.1. Интерпретация через интегрируемые иерархии

Поясним сначала, почему преобразование (5.9) и спектральная кривая (4.35) более естественны с точки зрения интегрируемых иерархий. Если мы вычислим для этой кривой КП-времена согласно формуле (ср. с (1.32) для исходной кривой)

$$\check{t}_k^0 = -\frac{1}{2} \operatorname{Res}_{z=\infty} \left(x^{-(2p-2k+1)/(2p+1)} y dx \right), \quad (4.37)$$

мы получим гораздо более простой ответ, чем раньше: только два из времен \check{t}_1^0 и \check{t}_{-1}^0 не равны нулю. Более того, преобразование (5.9), формально совпадающее с прескрипцией для вычисления p -деформированных объемов из топологической рекурсии со спектральной кривой (1.27), теперь проще интерпретировать: свойство полиномов Чебышева

$$(T_{2p+1}(z))^{\frac{2k+1}{2p+1}} = 2^{\frac{2(p-k)}{2p+1}} T_{2k+1}(z) + O(1/z), \quad z \rightarrow \infty; \quad k \leq 2p \quad (4.38)$$

означает, что по крайней мере для $k = 1, \dots, p$, соответствующих тахионным операторам, (5.9) вычисляет просто производные по КП-временам

$$\frac{\partial^n \check{\mathcal{F}}_g}{\partial \check{t}_{k_1} \dots \partial \check{t}_{k_n}} \Big|_{\check{t}_k = \check{t}_k^0} = \operatorname{Res}_{z_1=\infty} \dots \operatorname{Res}_{z_n=\infty} \left(\check{\omega}_{g,n}(z_1, \dots, z_n) \prod_{i=1}^n \frac{\check{x}^{\frac{2p-2k_i+1}{2p+1}}(z_i)}{2p - 2k_i + 1} \right). \quad (4.39)$$

4.2.2. Явные выражения для корреляторов при малых g, n

В окрестности каждой точки ветвления $\zeta_m = \cos \frac{\pi m}{2p+1}$, $m = 1, \dots, 2p$ ядро рекурсии с начальными данными (4.35) даётся

$$K^{(m)}(z_0, z) \frac{dz}{dz_0} = \frac{\frac{1}{z_0-z} - \frac{1}{z_0-\bar{z}^{(m)}}}{8u_0^{p+3/2}(z^2 - \bar{z}^{(m)2})(2p+1)U_{2p}(z)} = \quad (4.40)$$

$$= \frac{1}{8(2p+1)u_0^{p+3/2}} \frac{1}{z + \bar{z}^{(m)}} \frac{1}{(z_0 - z)(z_0 - \bar{z}^{(m)})U_{2p}(z)} \quad (4.41)$$

$(\bar{z}^{(m)}(z))$ — локальная инволюция Галуа в окрестности точки ζ_m ; в дальнейшем мы будем опускать зависимость от m для краткости, где она понятна из контекста, и писать просто \bar{z}). Зависимость корреляторов от множителя $(4u_0^{p+3/2})$ будет тривиальной (степенной); мы будем опускать его далее.

В качестве простейшего примера рассмотрим $\check{W}_{0,3}$:

$$\begin{aligned} \check{W}_{0,3}(z_0, z_1, z_2) &= \frac{1}{dz_0 dz_1 dz_2} \sum_{m=1}^{2p} \text{Res}_{z=\zeta_m} K^{(m)}(z_0, z) (\check{\omega}_{0,2}(\bar{z}, z_1) \check{\omega}_{0,2}(z, z_2) + (z \leftrightarrow \bar{z})) = \\ &= \sum_{m=1}^{2p} \text{Res}_{z=\zeta_m} \frac{d\bar{z}/dz}{2(2p+1)} \frac{1}{z + \bar{z}} \frac{1}{(z_0 - z)(z_0 - \bar{z})U_{2p}(z)} \left(\frac{1}{(z - z_1)^2(\bar{z} - z_2)^2} + (z \leftrightarrow \bar{z}) \right) = \\ &= \sum_{m=1}^{2p} \frac{-2}{4(2p+1)} \frac{1}{(z_0 - \zeta_m)^2(z_1 - \zeta_m)^2(z_2 - \zeta_m)^2} \frac{1}{\zeta_m U'_{2p}(\zeta_m)} = \\ &= \sum_{m=1}^{2p} \underbrace{\frac{1}{2(2p+1)^2} (-1)^m \frac{\sin^2 \frac{\pi m}{2p+1}}{\cos \frac{\pi m}{2p+1}}}_{\equiv c_m} \frac{1}{(z_0 - \zeta_m)^2(z_1 - \zeta_m)^2(z_2 - \zeta_m)^2} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Выполним теперь преобразование (5.9) по каждой переменной z_0, z_1, z_2 . В резуль-

тате получим

$$\check{A}_3^0(\vec{k}) = \sum_{m=1}^{2p} \frac{(-1)^m}{2(2p+1)^2} \frac{\sin^2 \frac{\pi m}{2p+1} \prod_{i=0}^2 \sin \frac{\pi m(2(p-k_i)+1)}{(2p+1)}}{\cos \frac{\pi m}{2p+1} \sin^3 \frac{\pi m}{2p+1}} = \frac{1}{2(2p+1)} \cdot b^2 \sum_{m=1}^{2p} \frac{\prod_{i=0}^2 \sin \frac{2\pi m k_i}{(2p+1)}}{\sin \pi m b^2}. \quad (4.43)$$

С точки зрения теории на мировом листе (или «резонансных преобразований», по построению) известно, что трехточечная тахионная амплитуда на сфере должна быть пропорциональна размерности пространства трехточечных конформных блоков («fusion-константе») в минимальной модели, т.е. с точностью до нормировки равняться 0 или 1. Легко узнать в последнем множителе выражение для этой fusion-константы (с точностью до знака) в виде, известном как «формула Верлинде» [79]. Похожее представление имеется для размерностей пространств конформных блоков в минимальной модели для большего числа операторов и на поверхностях старшего рода; например, n -точечная fusion-константа для рода ноль

$$\mathcal{N}_{i_1 \dots i_k}^{(0)} = (-1)^{\sum_i (i_i - 1)} b^2 \sum_{m=1}^{2p} \frac{\prod_{l=1}^k \sin \pi m i_l b^2}{(\sin \pi m b^2)^{k-2}}. \quad (4.44)$$

Следующая по сложности 4-точечная амплитуда на сфере. Соответствующий 4-дифференциал даётся

$$\check{W}_{0,4}(z_0, z_1, z_2, z_3) = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{\substack{n \neq m \\ m, n=1..2p}} \frac{c_n c_m}{z_{0m}^2 z_{im}^2 z_{\bullet n}^2 z_{\circ n}^2 (\zeta_m - \zeta_n)^2} + \sum_{m=1}^{2p} \frac{c_m}{24(2p+1)^2 \zeta_m (\zeta_m^2 - 1)} \frac{P_{0,4}^m(z_0, z_i)}{z_{0m}^2 z_{im}^2 \prod_{j=0}^3 z_{jm}^2} \right), \quad (4.45)$$

где

$$P_{0,4}^m(z_0, z_1) = (-1)^m [(-12s_m^4) [z_{1m}^2 + 3z_{0m}^2] + 12\zeta_m s_m^2 z_{0m} z_{1m} (3z_{0m} + z_{1m}) + z_{0m}^2 z_{1m}^2 (3\zeta_m^2 - 8p(1+p)s_m^2)], \quad (4.46)$$

$$z_{im} \equiv z_i - \zeta_m, \quad s_m^2 \equiv 1 - \zeta_m^2, \quad (4.47)$$

а \circ и \bullet означают 2 оставшихся элемента в наборе $\{0, 1, 2, 3\}$, помимо 0 и i . Выполним теперь преобразование (5.9). Ответ можно упростить, если представить зависящие от (m, n) множители после симметризации относительно $m \leftrightarrow 2p + 1 - m$ как суммы вида $\sum_{k=1}^{2p} \sin(\pi k m b^2) \sin(\pi k n b^2) f(k)$ (что, по сути, есть дискретное преобразование Фурье). Тогда с каждой переменной суммирования будет связан множитель, дающий размерность пространства конформных блоков в минимальной модели, т.е. имеющий вид правой части формулы Верлинде. Оказывается, что для нашего случая $f(k)$ можно выбрать в простом виде как полиномы от $|p + 1/2 - k|$. Например²,

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^{n+m}}{b^2} \sum_{k=1}^{2p} \sin(\pi m k b^2) \sin(\pi n k b^2) G(k) = \\ & = \left(\frac{\delta_{m,n} - \delta_{m,2p+1-n}}{8} \left(\frac{s_m^2}{\zeta_m^2} - \frac{\zeta_m^2}{s_m^2} \right) + \frac{\delta_{m \neq n} \delta_{m+n \neq 2p+1}}{2} \left(\frac{s_m s_n}{(\zeta_m - \zeta_n)^2} + \frac{s_m s_n}{(\zeta_m + \zeta_n)^2} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.48)$$

где

$$G(m) \equiv \left(\frac{b^4}{12} + \frac{2}{3} + b^4 \left(p + \frac{1}{2} - m \right)^2 - 2b^2 \left| p + \frac{1}{2} - m \right| \right). \quad (4.49)$$

Тогда предполагаемый 4-точечный тахионный коррелятор получает простое пред-

²Доказательство таких свойств в общем случае осложнено тем, что равенства типа приведенного ниже справедливы только для целых значений $m, n \in 1 \dots 2p$ и не являются тождествами на функции действительного аргумента.

ставление

$$\check{A}_4^0(\vec{k}) = \frac{b^2}{8} \left[\frac{V_{0,4}^p(\vec{\lambda} = 2P_{1,-\vec{k}}/b)}{2\pi^2} \mathcal{N}_{k_1 \dots k_4}^{(0)} + \sum_{i=2,3,4} \sum_{m=1}^{2p} \left(\frac{1}{2} \mathcal{N}_{k_1 k_i m}^{(0)} \mathcal{N}_{m \bullet \circ}^{(0)} \right) G(m) \right]. \quad (4.50)$$

Здесь $V_{0,4}^p$ — p -деформированный объем. Структура этого выражения уже напоминает ответ из высших уравнений движения [26], хотя ингредиенты несколько отличаются.

Проверим, что коррелятор, полученный в таком виде, согласуется с A_4^0 , вычисленным в предыдущих работах. Во-первых, \check{A}_4^0 с очевидностью удовлетворяет правилам слияния — он равен нулю, если $\mathcal{N}_{k_1 \dots k_4}^{(0)}$ равно нулю.

Во-вторых, рассмотрим случай, когда размерность пространства конформных блоков равна k_1 . В таком случае в каждом из членов суммы $\sum_{i=2,3,4}$ коэффициенты $\mathcal{N}_{k_1 k_i m}^{(0)}$ отличны от нуля только для $m = k_i - k_1 + 1, k_i - k_1 + 3, \dots, k_i + k_1 - 1$ (а также симметричных относительно отражения $m \leftrightarrow 2p + 1 - m$, но для их учета можно просто стереть множитель $1/2$). Вычислив сумму (: 2 означает, что индекс увеличивается с шагом 2)

$$\sum_{m=k_i-k_1+1:2}^{k_i+k_1-1} (G(m) + 2b^2 |p + \frac{1}{2} - m|) = \frac{1}{12} k_1 (b^4 (4k_1^2 + 12k_i^2 - 3) - 24b^2 k_i + 20) \quad (4.51)$$

и прибавляя к этому ответу $k_1 V_{0,4}^p$, мы получаем

$$2b^2 \left(k_1 \left(k_1 + p + \frac{1}{2} \right) - \sum_{i=2,3,4} \sum_{m=k_i-k_1+1:2}^{k_i+k_1-1} |p + \frac{1}{2} - m| \right). \quad (4.52)$$

Это в точности ответ для четырехточечного коррелятора, полученный с использованием ВУД (см. [26], с точностью до нормировки, или выражение в [21]). Условие $\mathcal{N}_{k_1 \dots k_4}^{(0)} = k_1$ — достаточное условие применимости ВУД. Наконец, два ответа мож-

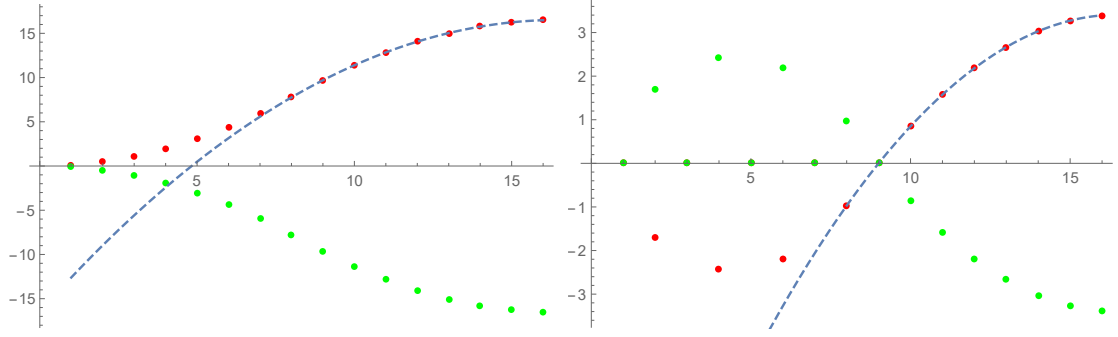


Рис. 4.1. Сравнение ответа (4.50) из топологической рекурсии (красный) и из подхода «резонансных преобразований» [21] (зеленый, на графике изображен со знаком «минус» для более явного сравнения) для двух примеров с $p = 16$: слева — $\vec{k} = (k_1, k_1, p, p)$, справа — $\vec{k} = (k_1, p/2, p/2, p/2)$, где k_1 отложен по горизонтальной оси. Прерывистая линия — соответствующие p -деформированные объемы.

но сравнить явно численно; два примера, приведенных на рис. 4.1, иллюстрируют согласие с ответом в [21], в частности, совпадение с p -деформированным объемом в соответствующей области параметров. Другой способ записать эту формулу — в терминах «квантовых объемов» $V_{g,n}^b$, т.е. корреляционных чисел в ВМС³:

$$\check{A}_4^0(\vec{k}) = \frac{b^2}{8} \left[\frac{V_{0,4}^b(l_i = 4\pi b P_{1,-k_i})}{2\pi^2} \mathcal{N}_{k_1 \dots k_4}^{(0)} + \sum_{i=2,3,4} \sum_{m=1}^{2p} \left(\frac{1}{2} \mathcal{N}_{k_1 k_i m}^{(0)} \mathcal{N}_{m \bullet \circ}^{(0)} \right) \mathbf{G}(m) \right]. \quad (4.53)$$

Преимущество такой записи в более простом выражении для модифицированного «пропагатора»

$$\mathbf{G}(m) = \left(\frac{2}{3} + b^4 \left(p + \frac{1}{2} - m \right)^2 - 2b^2 \left| p + \frac{1}{2} - m \right| \right) = 4B_2 \left(\frac{b^2}{2} \left| p + \frac{1}{2} - m \right| \right), \quad (4.54)$$

где $B_k(x)$ — полином Бернулли. В таком виде ответы в минимальной струне практически совпадают с выражениями из раздела 5.4 [29], с точностью до того, что трехточечные амплитуды, входящие в выражение, имеют другой вид.

³Мы используем нормировку, в которой $V_{g,n}^b$ сводятся к объемам Вейля-Петерсона при $b \rightarrow 0$, отличающуюся от данной в [2] множителем $(8\pi^2 b^2)^{3g-3+n}$; см. (4.70) ниже

Ещё один достаточно простой пример — одноточечное корреляционное число на торе. Мы имеем

$$\check{W}_{1,1}(z_0) = \sum_{m=1}^{2p} \operatorname{Res}_{z=\zeta_m} K^{(m)}(z_0, z) \check{W}_{0,2}(z, \bar{z}) = \sum_{m=1}^{2p} (-1)^m \frac{P_{1,1}^m(z_{0m})}{48(2p+1)^2 z_{0m}^4 s_m^2 \zeta_m}, \quad (4.55)$$

$$P_{1,1}(x) = 3s_m^4 + x^2 (2p(p+1)s_m^2 - 3\zeta_m^2) - 3x\zeta_m s_m^2 \quad (4.56)$$

и

$$\check{A}_1^1(k_0) = \sum_{m=1}^{2p} \frac{(3\zeta_m^2 - 2k_0(2p+1-k_0)s_m^2) \sin(\pi m b^2 k_0)}{48(2p+1)^2 \zeta_m s_m^3}. \quad (4.57)$$

Альтернативно можно записать его как

$$\check{A}_1^1(k_0) = \frac{1}{4} \left(\mathcal{N}_{k_0}^{(1)} \frac{V_{1,1}^p(2P_{1,-k_0}/b)}{2\pi^2} + \frac{1}{4} \sum_{l=1}^{2p} \mathcal{N}_{k_0 l}^{(0)} G(l) \right), \quad (4.58)$$

где размерность пространства одноточечных конформных блоков на торе даётся

$$\mathcal{N}_{k_0}^{(1)} = \frac{1}{2} (-1)^{k_0-1} \sum_{m=1}^{2p} \frac{\sin \pi m k_0 b^2}{\sin \pi m b^2}. \quad (4.59)$$

Хотя это не очевидно, для $k_0 = 1, \dots, 2p$ (4.58) совпадает с простым ответом, полученным в [46]

$$A_1^1(k_0) = \frac{1}{24(2p+1)} k_0(2p+1-k_0). \quad (4.60)$$

4.2.3. Диаграммная техника для \check{A}_n^g

На рассмотренных выше примерах можно заметить, что разные слагаемые в выражениях для \check{A}_g^n можно сопоставить различным стабильным графам. Стабильные графы Γ перечисляют компоненты границы в пространстве модулей стабильных кривых $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, то есть разные вырождения соответствующей комплексной кри-

вой. Стабильный граф определяется как

- связный граф с n внешними ногами, вершинами и соединяющими их рёбрами. Внешние ноги соответствуют отмеченным точкам, вершины — компонентам связности для нормализации кривой, а ребра — узловым точкам, где происходит вырождение.
- Каждой вершине v сопоставляется число $g_v \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, равное роду соответствующей гладкой компоненты. Для каждого v выполняется условие стабильности: $2g_v - 2 + n_v > 0$, где n_v — валентность v , включающая ребра и ноги.
- Полный род графа, определенный как $\sum_v g_v + h^1(\Gamma)$ (h^1 — первое число Бетти), равен g .

Появление сумм по стабильным графам типично для топологической рекурсии. Аналогичную структуру имеют ответы в [80].

Было бы интересно проинтерпретировать стабильные графы как «фейнмановские диаграммы» для корреляторов в МС, научившись писать по данному графу аналитическое выражение для соответствующего слагаемого. Из простейших примеров выше можно было бы предположить такую диаграммную технику:

- каждому ребру и внешней ноге сопоставляется число $k \in 1, \dots, p$ (для внешних ног это аргументы \check{A}_n^g);
- для каждой вершины рода g_v с n_v входящими ребрами, которым соответствуют числа $\vec{k}_v = k_1 \dots k_{n_v}$, пишется множитель $\frac{\mathcal{N}_{\vec{k}_v}^{(g_v)} V_{g,n}^b}{(2\pi^2)^{3g+n-3}}$;
- для каждого внутреннего ребра («пропагатора»), которому соответствует число k_{int} , пишется множитель $G(k_{int})$, а затем проводится сумма по k_{int} от 1 до p ;

- каждый граф взвешен своим симметричным фактором $1/|\text{Aut}(\Gamma)|$ (таким, как множитель $1/2$ во втором слагаемом в (4.58)).

Однако, более сложные примеры $(g, n) = (0, 5)$ и $(g, n) = (1, 2)$ содержат дополнительные вклады, не следующие из правил выше, хотя и тоже имеют структуру суммы по стабильным графам. Приведем ответы для них ниже:

$$4b^4 \check{A}_5^0 = a_1 + a_2 + \delta a_2 + a_3. \quad (4.61)$$

Здесь

$$a_1 = \mathcal{N}_{k_1 \dots k_5}^{(0)} \frac{V_{0,5}^b(4\pi b P_{1,-\vec{k}})}{4\pi^4}, \quad (4.62)$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \sum_{i < j, 1}^5 \sum_{n=1}^{2p} \mathbf{G}(n) \mathcal{N}_{k_i k_j n}^{(0)} \mathcal{N}_{n \dots}^{(0)} \frac{V_{0,4}^b(4\pi b P_{1,-n, \cdot, \cdot, \cdot})}{2\pi^2}, \quad (4.63)$$

$$a_3 = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^5 \sum_{j_1 < j_2; j_{1,2} \neq i} \sum_{l_1, l_2}^{2p} \mathbf{G}(l_1) \mathbf{G}(l_2) \mathcal{N}_{k_i l_1 l_2}^{(0)} \mathcal{N}_{k_{j_1} k_{j_2} l_1}^{(0)} \mathcal{N}_{l_2 \dots}^{(0)}. \quad (4.64)$$

дают вклады, которые соответствуют предложенной выше диаграммной технике; рис. 4.2 иллюстрирует соответствующие стабильные графы. Однако, есть дополнительное слагаемое, соответствующее стабильному графу типа 2; оно имеет вид

$$\begin{aligned} \delta a_2 &= \frac{b^4}{2} \sum_{i < j, 1}^5 \sum_{n=1}^{2p} \mathcal{N}_{k_i k_j n}^{(0)} \mathcal{N}_{n \dots}^{(0)} \left(\frac{4}{15b^4} - \frac{16}{3b^2} |P_{1,-n}|^2 + 8|P_{1,-n}|^4 \right) = \\ &= -4 \sum_{i < j, 1}^5 \sum_{n=1}^{2p} \mathcal{N}_{k_i k_j n}^{(0)} \mathcal{N}_{n \dots}^{(0)} (B_4(b|P_{1,-n}|) - 2(b|P_{1,-n}|)^2 B_2(b|P_{1,-n}|)) \end{aligned} \quad (4.65)$$

Для двухточечной амплитуды на торе есть 5 стабильных графов, изображенных на рис. 4.3. Соответствующая амплитуда дается

$$8\check{A}_2^1 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5, \quad (4.66)$$

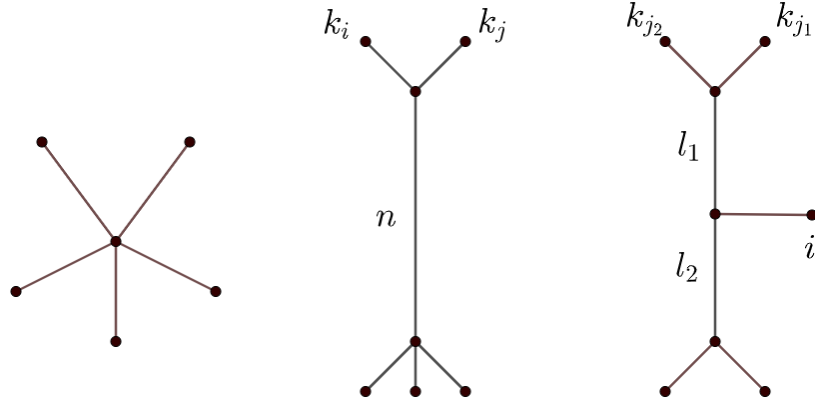


Рис. 4.2. Стабильные графы для $(g, n) = (0, 5)$. Все вершины имеют род $g_v = 0$

где

$$b_1 = \mathcal{N}_{k_1 k_2}^{(1)} \frac{V_{1,2}^b(4\pi b P_{1,-\vec{k}})}{4\pi^4},$$

$$b_2 = \frac{1}{8} \sum_{l_1, l_2=1}^{2p} \mathbf{G}(l_1) \mathbf{G}(l_2) \mathcal{N}_{k_1 l_1 l_2}^{(0)} \mathcal{N}_{k_2 l_1 l_2}^{(0)},$$

$$b_3 = \frac{1}{4} \sum_{l=1}^{2p} \mathcal{N}_{k_1 k_2 l l}^{(0)} \left(\frac{V_{0,4}^b(4\pi b P_{1,-\vec{k}}, 4\pi b P_{1,-l}, 4\pi b P_{1,-l})}{2\pi^2} \mathbf{G}(l) - \right.$$

$$\left. -16(B_4(b|P_{1,-l}|) - 2(b|P_{1,-l}|)^2 B_2(b|P_{1,-l}|)) \right),$$

$$b_4 = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{2p} \mathcal{N}_l^{(1)} \mathcal{N}_{l k_1 k_2}^{(0)} \left(\frac{V_{1,1}^b(4\pi b P_{1,-l})}{2\pi^2} \mathbf{G}(l) - \frac{1}{3}(B_4(b|P_{1,-l}|) - 2(b|P_{1,-l}|)^2 B_2(b|P_{1,-l}|)) \right),$$

$$b_5 = \frac{1}{8} \sum_{l_1, l_2=1}^{2p} \mathcal{N}_{k_1 k_2 l_1}^{(0)} \mathcal{N}_{l_1 l_2 l_2}^{(0)} \mathbf{G}(l_1) \mathbf{G}(l_2).$$

Основываясь на этих примерах, а также вычислениях в предельном случае $p \rightarrow \infty$, которое будет рассмотрено в следующем разделе, можно предположить

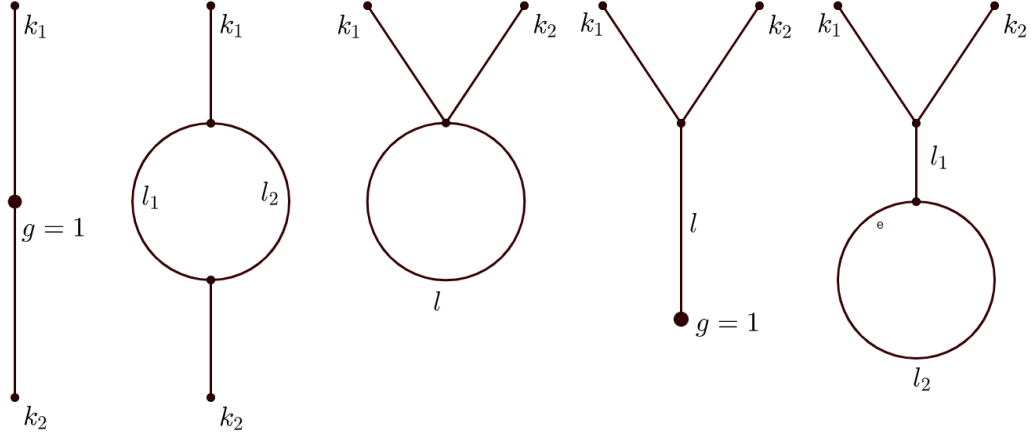


Рис. 4.3. Стабильные графы для $(g, n) = (1, 2)$. Род вершин обозначен только в случае, когда он ненулевой.

следующую общую формулу:

$$\begin{aligned} \check{A}_n^g(\vec{k}) = & \sum_{\Gamma} \frac{1}{|\text{Aut}(\Gamma)|} \sum_{\vec{k}_e; k_e=1}^p \sum_{\vec{n}_e; n_e=1}^{\infty} \prod_e \left[\frac{4^{n_e} B_{2n_e}(|bP_{1,-k_e}|)}{n_e!} \right] \prod_v \mathcal{N}_{\vec{k}_v}^{(g_v)} \times \\ & \times \left(\prod_e \left(\frac{-\partial}{4b^2 \partial(P_{1,-k_e}^2)} \right)^{n_e-1} \prod_v \frac{V_{g_v, n_v}^b(4\pi b P_{1, -\vec{k}_v})}{(2\pi^2)^{3g_v+n_v-3}} \right) \Big|_{P_e^2=0}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Сумма по Γ включает все стабильные графы рода g с n ногами, отмеченными числами k_1, \dots, k_n . Каждому ребру сопоставляется два числа $k_e = 1, \dots, p$ и $n_e \in \mathbb{N}$; сумма выше ведется по всем таким сопоставлениям. Этот ответ можно также записать как сумму чисел пересечений тавтологических классов на $\overline{\mathcal{M}}_{\Gamma} = \prod_v \overline{\mathcal{M}}_{g_v, n_v}$ — пространствах модулей стабильных кривых с вырождением, определенным соответствующим графом Γ . Такая запись имеет вид

$$\begin{aligned} \check{A}_n^g(\vec{k}) = & \sum_{\Gamma} \frac{1}{|\text{Aut}(\Gamma)|} \sum_{\vec{k}_e; k_e=1}^p \prod_v \mathcal{N}_{\vec{k}_v}^{(g_v)} \times \int_{\overline{\mathcal{M}}_{\Gamma}} \prod_v e^{(1+b^4)\kappa_1 - \sum_{m \geq 1} \frac{B_{2m}}{(2m+1)!} (4b^2)^{2m} \kappa_{2m}} \times \\ & \times e^{\sum_{i=1}^n (2bP_{1,-k_i})^2 \psi_i} \times \sum_{\vec{n}_e; n_e=1}^{\infty} \prod_e \frac{4^{n_e} B_{2n_e}(|bP_{1,-k_e}|) (-\psi_{e\bullet} - \psi_{e\circ})^{n_e-1}}{n_e!}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Произведение по v понимается так, что каждый κ -класс есть элемент соответствующих кохомологий $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g_v, n_v})$; $\psi_{e\bullet}$ и $\psi_{e\circ}$ — ψ -классы, отвечающие двум образам узловой точки, которой соответствует ребро e , при нормализации стабильной кривой.

Старшие члены в ряде по n_e (с $n_e > 2$), конечно, не входят в примеры, которые мы явно получили из топологической рекурсии. Однако, в JT-пределе, который будет рассмотрен в следующем разделе, можно явно увидеть, как возникает ряд из полиномов Бернулли в (4.68).

Другой способ записать этот ряд можно получить, используя интегральное представление:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n B_{2n}(bP) u^{n-1}}{n!} &= \int_{-\epsilon-i\infty}^{-\epsilon+i\infty} \frac{dt}{2\pi i} \left(\frac{\pi}{\sin \pi t} \right)^2 \underbrace{\frac{e^{4u(bP+t)^2} - 1}{u}}_{f(P,t); f(-P,t)=f(P,-t)} = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\epsilon-i\infty}^{-\epsilon+i\infty} \frac{dt}{2\pi i} \left(\frac{\pi}{\sin \pi t} \right)^2 (f(P,t) + f(-P,t)) + \frac{1}{4} \operatorname{Res}_{t=0} \left(\frac{\pi}{\sin \pi t} \right)^2 (f(P,t) - f(P,-t)). \end{aligned}$$

Этот интеграл формально сводится к ряду по вычетам в правой полуплоскости (в каждом порядке по u это ряд для дзета-функции Гурвица $\zeta(-2n+1, bP)$, которая сводится к полиномам Бернулли). Такой ряд имеет вид

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} \left(4(bP+k) e^{4u(bP+k)^2} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(4(-bP+k) e^{4u(bP-k)^2} \right) + 4(bP) e^{4u(bP)^2} = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(4|bP+k| e^{4b^2 u (P+k/b)^2} \right). \end{aligned}$$

Эта функция сингулярна при $u \rightarrow 0$ и имеет только асимптотическое разложение по u , но регулярная часть соответствующего асимптотического ряда совпадает с рядом, с которого мы начинали. В таком представлении интересно, что, суммируя

по $k \in \mathbb{Z}$ и всем промежуточным значениям лиувиллевого импульса $|bP_{1,-m}| = \frac{1}{2} - \frac{m}{2p+1}$, $m = 1, \dots, p$ на ребре $e = (v_1, v_2)$, мы получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^p \sin(\pi k m_{v_1} b^2) \sin(\pi k m_{v_2} b^2) \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(4|bP_{1,-k}| + m \right) e^{4b^2 u (|P_{1,-k}| + m/b)^2} = \\ & = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \bmod (2p+1) \neq 0}} 2b|P_{1,-n}| \sin(\pi n m_{v_1} b^2) \sin(\pi n m_{v_2} b^2) e^{4b^2 u |P_{1,-n}|^2}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Множители $\sin(\dots)$ возникают из представления Верлинде для fusion-констант, возникающих в вершинах v_1, v_2 . Во-первых, заметим, что это просто дискретная версия соответствующего ребрам стабильного графа множителя в [80], где интеграл заменен на сумму. Во-вторых, $P_{1,-n}$ в сумме выше пробегают все значения, соответствующие физическим операторам в МС согласно Лиану-Цукерману [35]. Ограничение $n \bmod (2p+1) \neq 0$ на самом деле необязательно: соответствующие слагаемые автоматически исчезают из-за множителей $\sin(\dots)$.

После подстановки ряда (4.69) в (4.68) можно вычислить интеграл по $\overline{\mathcal{M}}_\Gamma$ явно в терминах «квантовых объемов»; напоминаем, что в нашей нормировке они определены как

$$\frac{V_{g,n}^b(4\pi b P_{1,-\vec{k}})}{(2\pi^2)^{3g+n-3}} = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} e^{(1+b^4)\kappa_1 - \sum_{m \geq 1} \frac{B_{2m}}{(2m+1)!} (4b^2)^{2m} \kappa_{2m} + \sum_{i=1}^n (2bP_{1,-k_i})^2 \psi_i}. \quad (4.70)$$

В результате получается самое компактное и близкое к исходной цели построить диаграммную технику выражение для \check{A}_n^g (хотя, как было отмечено ранее, оно несколько формально, поскольку ряд по k_e расходится и должен пониматься в

смысле дзета-регуляризации):

$$\check{A}_n^g(\vec{k}) = \sum_{\Gamma} \frac{1}{|\text{Aut}(\Gamma)|} \sum_{\vec{k}_e \in \mathbb{Z}} \prod_v \left(\mathcal{N}_{\vec{k}_v}^{(g_v)} \frac{V_{g_v, n_v}^b(4\pi b P_{1, -\vec{k}_v})}{(2\pi^2)^{3g_v + n_v - 3}} \right) \prod_e 2b |P_{1, -k_e}|. \quad (4.71)$$

Формула (4.68) должна следовать из общего представления для $\omega_{g,n}$ в терминах суммы по стабильным графам, данного в [81], при определенном выборе параметризации спектральной кривой. Если эта формула будет доказана, мы будем иметь мощный метод получения выражений для тахионных амплитуд из дуального подхода.

4.2.4. Предел JT/Мирзахани

Известно, что в пределе $p \rightarrow \infty$ $(2, 2p + 1)$ минимальная струна сводится к теории гравитации Джакива-Тейтельбойма (JT). В частности, спектральная кривая (1.27) в правильном пределе становится кривой Мирзахани, топологическая рекурсия для которой вычисляет объемы Вейля-Петерсона [1; 82]

$$\begin{cases} x(z) = z^2 \\ y(z) = \frac{1}{4\pi} \sin 2\pi z \end{cases}. \quad (4.72)$$

Тахионные корреляторы в минимальной струне сводятся в этом пределе к объемам Вейля-Петерсона для поверхностей с коническими дефектами. Насколько нам известно, эти объекты не изучались систематически в литературе до недавних работ [74] (с физической стороны) и [83] (с математической).

В [74], в частности, была предложена формула для этих объектов в терминах теории пересечений, а также вычисляющий их матричный интеграл. Из результатов нашей работы, изложенных выше, следует, что существует альтернативный

подход к их вычислению с использованием спектральной кривой Мирзахани после $x - y$ замены. Рассмотрим топологическую рекурсию с

$$\begin{cases} x^{JT}(z) = \frac{1}{4\pi} \sin 2\pi z \\ y^{JT}(z) = z^2 \end{cases} \quad (4.73)$$

и стандартным бидифференциалом. Точки ветвления для этой кривой — нули $\cos(2\pi z)$; $z_m = \frac{1}{4}(2m+1)$, $m \in \mathbb{Z}$. Локальная инволюция Галуа $\bar{z}^m(z)$ в окрестности z_m есть просто $2z_m - z$. Тогда ядро рекурсии

$$K_{JT}^{(m)}(z_0, z) = \frac{\frac{1}{z_0-z} - \frac{1}{z_0-\bar{z}}}{(z^2 - \bar{z}^2) \cos(2\pi z)} \frac{dz_0}{dz} = \frac{1}{2z_m(z_0 - z)(z_0 + z - 2z_m) \cos(2\pi z)} \frac{dz_0}{dz}. \quad (4.74)$$

Аналог «преобразования Чебышева», которое в этом пределе даёт объёмы из n -дифференциалов

$$A_n^{gJT}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \text{Res}_{z_i=\infty} \left(\omega_{g,n}^{JT}(z_1, \dots, z_n) \prod_{i=1}^n \frac{\sin(2\pi\alpha_i z_i)}{2\pi\alpha_i} \right). \quad (4.75)$$

Параметр $\alpha_i \in [0, 1]$ соответствует коническому дефекту с дефицитом угла $2\pi(1 - \alpha_i)$. Снова начнем рассмотрение с простейшего примера $W_{0,3}^{JT}$

$$\begin{aligned} W_{0,3}^{JT}(z_0, z_1, z_2) &= \frac{1}{dz_0 dz_1 dz_2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \text{Res}_{z=z_m} K_{JT}^{(m)}(z_0, z) (W_{0,2}(\bar{z}, z_1) W_{0,2}(z, z_2) + (z \leftrightarrow \bar{z})) = \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \text{Res}_{z=z_m} \frac{(-1)}{2z_m} \frac{1}{(z_0 - z)(z_0 - 2z_m + z) \cos(2\pi z)} \left(\frac{1}{(z - z_1)^2 (\bar{z} - z_2)^2} + (z \leftrightarrow \bar{z}) \right) = \\ &= - \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^m}{2\pi z_m} \frac{1}{(z_0 - z_m)^2 (z_1 - z_m)^2 (z_2 - z_m)^2}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Преобразование (4.75) приводит к

$$-A_3^{0JT}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^m}{2\pi z_m} \left(\prod_{i=0}^2 \cos(2\pi \alpha_i z_m) \right). \quad (4.77)$$

Легко доказать, что это кусочно-постоянная функция α : она даётся суммой нескольких слагаемых, каждое из которых есть разложение в ряд Фурье «прямоугольной волны»:

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{2(-1)^m}{\pi(2m+1)} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}(2m+1)\right) = 1 - 2\theta(1 - |\alpha - 2|), \quad \alpha \in (0, 4). \quad (4.78)$$

Пример такого коррелятора приведен на рис. 4.4. Для достаточно маленьких α («острых» дефектов) A_3^{0JT} равна 1, как и ожидается от объема Вейля-Петерсона $V_{0,3}$. Если $\sum_{i=1}^3 (1 - \alpha_i) < 2$, для достаточно маленьких значений параметра коррелятор ненулевой и равняется 1/2. С точки зрения минимальной струны в этой области fusion-константа не равна нулю только в чётном секторе и 1/2 возникает при усреднении по двум секторам. Геометрически, в согласии с формулой Гаусса-Бонне, при выполнении этого неравенства мы рассматриваем случай поверхностей положительной постоянной кривизны.

A_3^{0JT} обнуляется, когда перестает выполняться «условие Троянова», которое в этих обозначениях принимает вид

$$\sum_{i=1}^3 (1 - \alpha_i) > 2(1 - \min(\alpha_i)). \quad (4.79)$$

Это условие существования на поверхности метрики положительной кривизны с данными коническими дефектами (см. раздел 3.1.2).

Для иллюстрации приведем также выражение для четырехточечного корреля-

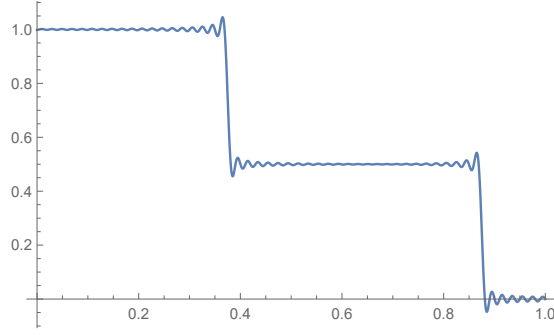


Рис. 4.4. Пример трехточечной амплитуды (4.77) с $\vec{\alpha} = (\alpha_0, 3/8, 1/4)$ в зависимости от α_0 (взята частичная сумма до $|m| = 100$).

тора в роде ноль, следующее из (4.73)

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{m \neq n; \\ m, n \in \mathbb{Z}}} \frac{(-1)^{m+n}}{4\pi^2 z_n z_m} \frac{\prod_{j=0, i} \cos(2\pi \alpha_j z_m)}{\prod_{j \neq 0, i} \cos(2\pi \alpha_j z_n)} \frac{1}{(z_m - z_n)^2} - \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{\left(\prod_{i=0}^3 \cos(2\pi \alpha_i z_m) \right)}{2z_m^2} \left(-1 + \sum_{i=0}^3 \alpha_i^2 \right).$$

В последнем слагаемом можно узнать объем Вейля-Петерсона $\frac{V_{0,4}(\vec{l}=2\pi i \vec{\alpha})}{2\pi^2}$ в качестве множителя.

Прокомментируем теперь, как в этом пределе можно мотивировать (4.68) прямым вычислением. Общая формула в [81], представляющая $\omega_{g,n}$ как сумму интегралов по $\overline{\mathcal{M}}_\Gamma$, утверждает, что множители, ассоциированные с ребрами стабильного графа, имеют вид $\sum_{r,s=0}^{\infty} B_{m_1, 2r, m_2, 2s} \psi_\bullet^r \psi_\circ^s$; здесь коэффициенты $B_{m,r,l,s}$ вычисляются из разложения бидифференциала $\omega_{0,2}$ в подходящей локальной координате ζ (она должна удовлетворять $\zeta(\bar{z}^{(m)}) = -\zeta(z)$; в нашем случае мы можем взять $\zeta = z - z_m$), когда z_1 и z_2 находятся в окрестности точек ветвления z_{m_1} и z_{m_2} :

$$\omega_{0,2} = \left(\frac{\delta_{m_1, m_2}}{(z_1 - z_2)^2} + 2\pi \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{B_{m_1, r, m_2, s} (z - z_{m_1})^r (z - z_{m_2})^s}{\Gamma(\frac{r+1}{2}) \Gamma(\frac{s+1}{2})} \right) dz_1 dz_2. \quad (4.80)$$

Для стандартного бидифференциала и $z_m = \frac{1}{4}(2m + 1)$ вычисление $B_{m_1, r, m_2, s}$ дает

$$\sum_{r, s=0}^{\infty} B_{m_1, 2r, m_2, 2s} \psi_{\bullet}^r \psi_{\circ}^s = \frac{1}{\Psi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} \frac{\Psi^n}{(m_1 - m_2)^{2n}} \delta_{m_1 \neq m_2}, \quad \Psi = \psi_{\bullet} + \psi_{\circ}. \quad (4.81)$$

По аналогии со случаем конечных p представим этот ряд как интеграл вида $\int_0^1 d\alpha \cos(2\pi\alpha z_{m_1}) \cos(2\pi\alpha z_{m_2}) \dots$ (это непрерывный аналог представления в виде $\sum_{k=1}^p \sin \pi k m_1 b^2 \sin \pi k m_2 b^2 \dots$). Это сводится к обратному преобразованию Фурье по $(m_1 - m_2)$; для этого мы используем

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}, m \neq 0} \frac{\cos(\pi\alpha m)}{m^{2n}} = \frac{(2\pi i)^{2n}}{(2n)!} B_{2n} \left(\frac{\alpha}{2} \right). \quad (4.82)$$

Тогда, как и анонсировано ранее, возникает тот же ряд, что и в (4.68)

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{\cos(\pi\alpha m)}{\Psi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} \frac{\Psi^n}{m^{2n}} \delta_{m \neq 0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4\pi^2 \Psi)^{n-1}}{n!} B_{2n} \left(\frac{\alpha}{2} \right). \quad (4.83)$$

5 Заключение

Данная исследовательская работа посвящена изучению предполагаемой эквивалентности двух формулировок минимальной теории струн: в терминах конформной теории поля и матричных моделей. В подходе мирового листа был развит аналитический метод вычисления амплитуд с помощью высших уравнений движения Замолодчикова и применен к вычислению струнной амплитуды на поверхностях рода один. Также была продемонстрирована связь между квазиклассическим пределом струнных амплитуд и объемами пространств модулей, вычисляемых в терминах классической теории Лиувилля. С другой стороны, был предложен эффективный способ вычисления предполагаемых аналогов струнных амплитуд в терминах топологической рекурсии, который позволяет получить общую формулу для них в терминах диаграммной техники с простыми правилами, а также упрощает анализ и сравнение результатов с другими теориями двумерной гравитации и теоретико-полевым подходом.

Высшие уравнения движения на торе

Одноточечная амплитуда на торе в минимальной струне определена как интеграл по пространству модулей F от корреляционной функции в соответствующей СФТ вида

$$\int_F d^2\tau \langle B\bar{B}\mathcal{T}_{1,n} \rangle_\tau = \int_F d^2\tau \langle B\bar{B}C\bar{C}V_{1,-n}\Phi_{1,n} \rangle_\tau . \quad (5.1)$$

Высшие уравнения движения представляют оператор $\mathcal{T}_{1,n}$ в виде БРСТ-потомка логарифмического партнера оператора из кольца дискретных состояний

$$\mathcal{T}_{1,n} = B_{1,n}^{-1} \mathcal{Q} \bar{\mathcal{Q}} (O'_{1,n}) , \quad (5.2)$$

что с использованием конформных тождеств Уорда позволяет свести интеграл по F к граничным членам вида.

$$\frac{1}{4} (2\pi)^2 \int_{-1/2}^{1/2} d\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_2} \langle O'_{1,n} \rangle_{\tau_2 \rightarrow \infty} + \frac{1}{24} (2\pi)^3 \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} \Delta_a^L \cdot \langle O_{1,n} \rangle . \quad (5.3)$$

Они определяются неоднородными слагаемыми, возникающими при модулярном преобразовании логарифмических полей $O'_{1,n}$, а также значением среднего $\langle O_{1,n} \rangle_\tau$, которое оказывается константой на пространстве модулей. Эти свойства позволяют вычислить граничные вклады точно, приводя к ответу в форме

$$\int_F d^2\tau \langle B \bar{B} \mathcal{T}_{1,k} \rangle \sim k(2p + 1 - k), \quad (5.4)$$

согласующимся с матрично-модельным подходом, примененным к этой задаче ранее в [46].

Квазиклассический предел струнных амплитуд

Выдвинута гипотеза, что квазиклассический предел амплитуд в минимальной струне вычисляет объемы пространств модулей поверхностей постоянной кривизны с коническими дефектами, ассоциированные с метрикой Зографа-Тахтаджана. Это кэлеровы метрики, потенциал для которых даётся классическим лиувиллевским действием (экспоненциальной асимптотикой коррелятора): $g_{i\bar{j}}^{ZT} \sim \partial_i \bar{\partial}_j S^{(cl)}$.

Гипотеза проверяется на примере сферы с четырьмя коническими дефектами.

С одной стороны, с использованием формулы конформного бутстрапа

$$\begin{aligned} \langle V_{a_1}(0)V_{a_2}(x)V_{a_3}(1)V_{a_4}(\infty) \rangle &= \int \frac{dP}{4\pi} C_L(a_1, a_2, \frac{Q}{2} - iP) C_L(\frac{Q}{2} + iP, a_3, a_4) \times \\ &\times \left| F_{\Delta} \left(\begin{array}{cc} \Delta_1 & \Delta_3 \\ \Delta_2 & \Delta_4 \end{array} \middle| q(x) \right) \right|^2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

и метода перевала в интеграле по P , справедливого в пределе $b \rightarrow 0$ для нахождения коррелятора в квазиклассическом пределе, получено разложение классического Лиувилевского действия на границе пространства модулей $q \rightarrow 0$, что позволяет вычислить метрику Зографа-Тахтаджана в виде ряда по $\epsilon = \frac{1}{|\log fq\bar{q}|}$ вида

$$g_{q\bar{q}} = \frac{8\pi^3 \epsilon^3}{q\bar{q}} (1 - \alpha_3 \epsilon^3 + \dots). \quad (5.6)$$

Соответствующий объем $V_{ZT} = \int d^2q \sqrt{g}$ вычисляется численно.

С другой стороны, используется метод монодромии. Он сводит поиск классического действия к решению вопроса, при каком значении параметра $c(x, \bar{x})$ система решений уравнения

$$[\partial_z^2 + t(z)]\psi = 0, \quad t(z) = \frac{\delta_1}{(z-x)^2} + \frac{\delta_2}{z^2} + \frac{\delta_3}{(z-1)^2} + \frac{x(x-1)c(x, \bar{x})}{z(z-1)(z-x)} + \frac{\delta_4 - \delta_3 - \delta_2 - \delta_1}{z(z-1)} \quad (5.7)$$

имеет унитарную монодромию. Данное уравнение решается по теории возмущений, считая одну или несколько из классических размерностей δ маленькой и получая разложение в ряд по соответствующему параметру.

Оба метода согласуются с выдвинутой гипотезой.

Дуальный подход через топологическую рекурсию

С дуальной к минимальной струне матричной моделью ассоциирована спектральная кривая

$$\begin{cases} x = 2u_0 T_2(z) \\ y = 2u_0^{\frac{2p+1}{2}} T_{2p+1}(z) \end{cases} . \quad (5.8)$$

Процедура топологической рекурсии вычисляет набор мероморфных мультидифференциалов $\omega_{g,n}$ по этой кривой.

Показано, что в определенной области параметров (при достаточно больших k_i) амплитуды совпадают с « p -деформированными объемами», введенными в [39] и их можно вычислять с помощью простого линейного преобразования из мультидифференциалов $\omega_{g,n}$

$$V_{g,n}^p(\vec{\lambda} = \frac{i}{2}(2(p - \vec{k}) + 1)) = \text{Res}_{z_1=\infty} \dots \text{Res}_{z_n=\infty} \left(\omega_{g,n}(z_1, \dots, z_n) \prod_{i=1}^n \frac{T_{2(p-k_i)+1}(z_i)}{2(p - k_i) + 1} \right), \quad (5.9)$$

что позволяет вывести общую формулу для амплитуд в этой области параметров в терминах чисел пересечений тавтологических классов на пространстве модулей.

$$V_{g,n}^p(\vec{\lambda} = \frac{2\vec{P}}{b}) = (8\pi^2 b^2)^{3g-3+n} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} e^{\frac{c_L-13}{24}\kappa_1 - \sum_{m \geq 1} \frac{B_{2m}}{(2m)(2m)!} \kappa_{2m} + \sum_{k=1}^n P_k^2 \psi_k + \sum_{k \geq 0} \tilde{b}_k \delta_{k,0}} . \quad (5.10)$$

Они являются деформацией аналитически продолженных на мнимые аргументы полиномов Вейля-Петерсона, вычисляющих объемы пространств модулей гиперболических поверхностей с геодезическими границами.

С другой стороны, обнаружено, что то же преобразование, примененное к $\check{\omega}_{g,n}$

— данным топологической рекурсии для $x - y$ двойственной кривой

$$\begin{cases} \check{x} = 2u_0^{\frac{2p+1}{2}} T_{2p+1}(z) \\ \check{y} = 2u_0 T_2(z) \end{cases}, \quad (5.11)$$

вычисляет амплитуды без ограничения на параметры и приводит к общей формуле для амплитуд A_n^g в терминах суммы по стабильным графам

$$\check{A}_n^g(\vec{k}) = \sum_{\Gamma} \frac{1}{|\text{Aut}(\Gamma)|} \sum_{\vec{k}_e \in \mathbb{Z}} \prod_v \left(\mathcal{N}_{\vec{k}_v}^{(g_v)} \frac{V_{g_v, n_v}^b(4\pi b P_{1, -\vec{k}_v})}{(2\pi^2)^{3g_v + n_v - 3}} \right) \prod_e 2b |P_{1, -k_e}|. \quad (5.12)$$

Эта общая формула согласуется с результатами, полученными ранее в работах других авторов.

Благодарности

Автор глубоко признателен своему научному руководителю Белавину Александру Абрамовичу за наставничество и поддержку, а также за знакомство с теорией струн и предложенную задачу, которая не перестает занимать ум и вызывать интерес на протяжении многих лет. Автор особенно благодарен своим родителям: Артемьевой Анне Владимировне и Артемьеву Андрею Александровичу, за моральную поддержку и терпение в годы работы над этой диссертацией и на протяжении всей жизни.

Автор благодарен старшим коллегам и преподавателям, сформировавшим его взгляды на науку и научившим всему, что он знает: Лашкевичу Михаилу Юрьевичу, Пугаю Ярославу Петровичу, Рослому Алексею Андреевичу, Маршакову Андрею Владимировичу и другим. Автор выражает особую благодарность Литвинову Алексею Викторовичу за невообразимый труд по поддержанию научной жизни, заразительный энтузиазм и интерес к математической физике во всех её проявлениях.

Автор благодарен своим друзьям и однокурсникам в МФТИ: Илье Кочергину, Никите Семенину, Коле Кишмару, Саше Труфанову, Абубакиру Кошек, Диме Коляскину и другим за дружбу и поддержку во время тяжелого пути, который мы проходили вместе, а также за поддержание контакта, даже когда нас разделили океаны. Автор особо благодарен Илье Корюкаеву за непрекращающуюся дружбу и поддержку со школьных лет.

Автор благодарен всему студенческому составу центра Кричевера в Сколтехе,

с кем он имел возможность встретиться во время обучения в аспирантуре, в особенности Игорю Чабану, Лёше Бычкову, Паше Мещерякову и Диме Хромову, за тёплый коллектив, активную научную атмосферу и свежий взгляд на науку.

Автор выражает благодарность Автономной некоммерческой образовательной организации высшего образования «Сколковский институт науки и технологий» (Сколтех), во время обучения в которой была получена часть результатов этой диссертации.

Список литературы

1. *Saad P., Shenker S. H., Stanford D.* JT gravity as a matrix integral. — 2019. — arXiv: [1903.11115 \[hep-th\]](#).
2. The Virasoro Minimal String / S. Collier [и др.] // SciPost Phys. — 2024. — Т. 16. — С. 057. — DOI: [10.21468/SciPostPhys.16.2.057](#). — arXiv: [2309.10846 \[hep-th\]](#).
3. The complex Liouville string / S. Collier [и др.]. — 2024. — Сент. — arXiv: [2409.17246 \[hep-th\]](#).
4. *Collier S., Eberhardt L., Mühlmann B.* A microscopic realization of dS_3 // SciPost Phys. — 2025. — Т. 18, № 4. — С. 131. — DOI: [10.21468/SciPostPhys.18.4.131](#). — arXiv: [2501.01486 \[hep-th\]](#).
5. *Iliesiu L. V., Turiaci G. J.* The statistical mechanics of near-extremal black holes // JHEP. — 2021. — Т. 05. — С. 145. — DOI: [10.1007/JHEP05\(2021\)145](#). — arXiv: [2003.02860 \[hep-th\]](#).
6. *Polyakov A. M.* Quantum Gravity in Two-Dimensions // Mod. Phys. Lett. A. — 1987. — Т. 2. — С. 893. — DOI: [10.1142/S0217732387001130](#).
7. *David F.* Conformal Field Theories Coupled to 2D Gravity in the Conformal Gauge // Mod. Phys. Lett. A. — 1988. — Т. 3. — С. 1651. — DOI: [10.1142/S0217732388001975](#).
8. *Distler J., Kawai H.* Conformal field theory and 2D quantum gravity // Nuclear Physics B. — 1989. — Т. 321, № 2. — С. 509–527. — ISSN 0550-3213. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(89\)90354-4](https://doi.org/10.1016/0550-3213(89)90354-4). — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321389903544>.
9. *Knizhnik V. G., Polyakov A. M., Zamolodchikov A. B.* Fractal Structure of 2D Quantum Gravity // Mod. Phys. Lett. A / под ред. I. M. Khalatnikov, V. P. Mineev. — 1988. — Т. 3. — С. 819. — DOI: [10.1142/S0217732388000982](#).

10. *David F.* A Model of Random Surfaces with Nontrivial Critical Behavior // Nucl. Phys. B. — 1985. — Т. 257. — С. 543–576. — DOI: [10.1016/0550-3213\(85\)90363-3](https://doi.org/10.1016/0550-3213(85)90363-3).
11. *Douglas M. R., Shenker S. H.* Strings in Less Than One-Dimension // Nucl. Phys. B / под ред. E. Brezin, S. R. Wadia. — 1990. — Т. 335. — С. 635. — DOI: [10.1016/0550-3213\(90\)90522-F](https://doi.org/10.1016/0550-3213(90)90522-F).
12. *Brezin E., Kazakov V. A.* Exactly Solvable Field Theories of Closed Strings // Phys. Lett. B. — 1990. — Т. 236. — С. 144–150. — DOI: [10.1016/0370-2693\(90\)90818-Q](https://doi.org/10.1016/0370-2693(90)90818-Q).
13. *Douglas M. R.* Strings in Less Than One-dimension and the Generalized K^-D^-V Hierarchies // Phys. Lett. B / под ред. E. Brezin, S. R. Wadia. — 1990. — Т. 238. — С. 176. — DOI: [10.1016/0370-2693\(90\)91716-0](https://doi.org/10.1016/0370-2693(90)91716-0).
14. *Daul J. M., Kazakov V. A., Kostov I. K.* Rational theories of 2-D gravity from the two matrix model // Nucl. Phys. B. — 1993. — Т. 409. — С. 311–338. — DOI: [10.1016/0550-3213\(93\)90582-A](https://doi.org/10.1016/0550-3213(93)90582-A). — arXiv: [hep-th/9303093](https://arxiv.org/abs/hep-th/9303093).
15. *Witten E.* Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space // Surveys Diff. Geom. — 1991. — Т. 1. — С. 243–310. — DOI: [10.4310/SDG.1990.v1.n1.a5](https://doi.org/10.4310/SDG.1990.v1.n1.a5).
16. *Kontsevich M.* Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function // Commun. Math. Phys. — 1992. — Т. 147. — С. 1–23. — DOI: [10.1007/BF02099526](https://doi.org/10.1007/BF02099526).
17. *Moore G. W., Seiberg N., Staudacher M.* From loops to states in 2-D quantum gravity // Nucl. Phys. B. — 1991. — Т. 362. — С. 665–709. — DOI: [10.1016/0550-3213\(91\)90548-C](https://doi.org/10.1016/0550-3213(91)90548-C).
18. *Seiberg N., Shih D.* Branes, rings and matrix models in minimal (super)string theory // JHEP. — 2004. — Т. 02. — С. 021. — DOI: [10.1088/1126-6708/2004/02/021](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2004/02/021). — arXiv: [hep-th/0312170](https://arxiv.org/abs/hep-th/0312170).
19. *Kazakov V. A.* The Appearance of Matter Fields from Quantum Fluctuations of 2D Gravity // Mod. Phys. Lett. A / под ред. E. Brezin, S. R. Wadia. — 1989. — Т. 4. — С. 2125. — DOI: [10.1142/S0217732389002392](https://doi.org/10.1142/S0217732389002392).

20. The Ising Model Coupled to 2-D Gravity: A Nonperturbative Analysis / E. Brezin [и др.] // Phys. Lett. B. — 1990. — Т. 237. — С. 43—46. — DOI: [10.1016/0370-2693\(90\)90458-I](https://doi.org/10.1016/0370-2693(90)90458-I).
21. *Belavin A. A., Zamolodchikov A. B.* On correlation numbers in 2D minimal gravity and matrix models // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2009. — Июль. — Т. 42, № 30. — С. 304004. — ISSN 1751-8121. — DOI: [10.1088/1751-8113/42/30/304004](https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/30/304004). — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/42/30/304004>.
22. *Zamolodchikov A., Zamolodchikov A.* Conformal bootstrap in Liouville field theory // Nuclear Physics B. — 1996. — Окт. — Т. 477, № 2. — С. 577—605. — ISSN 0550-3213. — DOI: [10.1016/0550-3213\(96\)00351-3](https://doi.org/10.1016/0550-3213(96)00351-3). — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213\(96\)00351-3](http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213(96)00351-3).
23. *Dorn H., Otto H.-J.* Two- and three-point functions in Liouville theory // Nuclear Physics B. — 1994. — Окт. — Т. 429, № 2. — С. 375—388. — ISSN 0550-3213. — DOI: [10.1016/0550-3213\(94\)00352-1](https://doi.org/10.1016/0550-3213(94)00352-1). — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213\(94\)00352-1](http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213(94)00352-1).
24. *Zamolodchikov A. B.* Three-point function in the minimal Liouville gravity // Theor. Math. Phys. — 2005. — Т. 142. — С. 183—196. — DOI: [10.1007/s11232-005-0003-3](https://doi.org/10.1007/s11232-005-0003-3). — arXiv: [hep-th/0505063](https://arxiv.org/abs/hep-th/0505063).
25. *Zamolodchikov A.* Higher equations of motion in Liouville field theory // International Journal of Modern Physics A. — 2004. — Май. — Т. 19, supp02. — С. 510—523. — ISSN 1793-656X. — DOI: [10.1142/S0217751X04020592](https://doi.org/10.1142/S0217751X04020592). — URL: <http://dx.doi.org/10.1142/S0217751X04020592>.
26. Polyakov's string: Twenty five years after. Proceedings / под ред. A. Belavin, A. Zamolodchikov. — 10.2005. — arXiv: [hep-th/0510214](https://arxiv.org/abs/hep-th/0510214).
27. *Belavin A., Dubrovin B., Mukhametzhano B.* Minimal Liouville Gravity correlation numbers from Douglas string equation // JHEP. — 2014. — Т. 01. — С. 156. — DOI: [10.1007/JHEP01\(2014\)156](https://doi.org/10.1007/JHEP01(2014)156). — arXiv: [1310.5659](https://arxiv.org/abs/1310.5659) [hep-th].
28. *Belavin A. A., Belavin V. A.* Frobenius manifolds, Integrable Hierarchies and Minimal Liouville Gravity // JHEP. — 2014. — Т. 09. — С. 151. — DOI: [10.1007/JHEP09\(2014\)151](https://doi.org/10.1007/JHEP09(2014)151). — arXiv: [1406.6661](https://arxiv.org/abs/1406.6661) [hep-th].

29. The complex Liouville string: the worldsheet / S. Collier [и др.]. — 2024. — Сент. — arXiv: [2409.18759](https://arxiv.org/abs/2409.18759) [hep-th].
30. *Turiaci G. J., Usatyuk M., Weng W. W.* 2D dilaton-gravity, deformations of the minimal string, and matrix models // Classical and Quantum Gravity. — 2021. — Сент. — Т. 38, № 20. — С. 204001. — ISSN 1361-6382. — DOI: [10.1088/1361-6382/ac25df](https://doi.org/10.1088/1361-6382/ac25df). — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/ac25df>.
31. *Gregori P., Schiappa R.* From minimal strings towards Jackiw–Teitelboim gravity: on their resurgence, resonance, and black holes // Class. Quant. Grav. — 2024. — Т. 41, № 11. — С. 115001. — DOI: [10.1088/1361-6382/ad32df](https://doi.org/10.1088/1361-6382/ad32df). — arXiv: [2108.11409](https://arxiv.org/abs/2108.11409) [hep-th].
32. *Zamolodchikov A. B., Zamolodchikov A. B.* Structure constants and conformal bootstrap in Liouville field theory // Nucl. Phys. — 1996. — Т. B477. — С. 577–605. — DOI: [10.1016/0550-3213\(96\)00351-3](https://doi.org/10.1016/0550-3213(96)00351-3). — arXiv: [hep-th/9506136](https://arxiv.org/abs/hep-th/9506136) [hep-th].
33. *Ribault S., Santachiara R.* Liouville theory with a central charge less than one // Journal of High Energy Physics. — 2015. — Август. — Т. 2015, № 8. — ISSN 1029-8479. — DOI: [10.1007/jhep08\(2015\)109](https://doi.org/10.1007/jhep08(2015)109). — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP08\(2015\)109](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP08(2015)109).
34. *Polchinski J.* String Theory. Т. 1. — Cambridge University Press, 1998. — (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). — DOI: [10.1017/CB09780511816079](https://doi.org/10.1017/CB09780511816079).
35. *Lian B. H., Zuckerman G. J.* Semi-infinite homology and 2D gravity. I // Communications in Mathematical Physics. — 1992. — Апрель. — Т. 145, № 3. — С. 561–593. — DOI: [10.1007/BF02099398](https://doi.org/10.1007/BF02099398).
36. *Imbimbo C., Mahapatra S., Mukhi S.* Construction of physical states of non-trivial ghost number in $c < 1$ string theory // Nuclear Physics B. — 1992. — Т. 375, № 2. — С. 399–420. — ISSN 0550-3213. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(92\)90038-D](https://doi.org/10.1016/0550-3213(92)90038-D). — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032139290038D>.
37. *Belavin A., Belavin V.* Four-point function in Super Liouville Gravity // J. Phys. A. — 2009. — Т. 42. — С. 304003. — DOI: [10.1088/1751-8113/42/30/304003](https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/30/304003). — arXiv: [0810.1023](https://arxiv.org/abs/0810.1023) [hep-th].

38. *Eynard B., Orantin N.* Invariants of algebraic curves and topological expansion // Commun. Num. Theor. Phys. — 2007. — Т. 1. — С. 347–452. — DOI: [10.4310/CNTP.2007.v1.n2.a4](https://doi.org/10.4310/CNTP.2007.v1.n2.a4). — arXiv: [math-ph/0702045](https://arxiv.org/abs/math-ph/0702045).
39. *Mertens T. G., Turiaci G. J.* Liouville quantum gravity — holography, JT and matrices // Journal of High Energy Physics. — 2021. — ЯНВ. — Т. 2021, № 1. — ISSN 1029-8479. — DOI: [10.1007/jhep01\(2021\)073](https://doi.org/10.1007/jhep01(2021)073). — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP01\(2021\)073](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP01(2021)073).
40. *Fateev V., Zamolodchikov A. B., Zamolodchikov A. B.* Boundary Liouville field theory. 1. Boundary state and boundary two point function. — 2000. — ЯНВ. — arXiv: [hep-th/0001012](https://arxiv.org/abs/hep-th/0001012).
41. *Marshakov A.* On Krichever tau-function and Verlinde formula // Phys. Lett. B. — 2024. — Т. 859. — С. 139126. — DOI: [10.1016/j.physletb.2024.139126](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2024.139126). — arXiv: [2410.09863](https://arxiv.org/abs/2410.09863) [hep-th].
42. *Krichever I. M.* The tau function of the universal Whitham hierarchy, matrix models and topological field theories // Commun. Pure Appl. Math. / под ред. I. M. Khalatnikov, V. P. Mineev. — 1994. — Т. 47. — С. 437. — arXiv: [hep-th/9205110](https://arxiv.org/abs/hep-th/9205110).
43. *Marshakov A.* On two-dimensional quantum gravity and quasiclassical integrable hierarchies // J. Phys. A. — 2009. — Т. 42. — С. 304021. — DOI: [10.1088/1751-8113/42/30/304021](https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/30/304021). — arXiv: [0902.4833](https://arxiv.org/abs/0902.4833) [hep-th].
44. KP integrability through the $x-y$ swap relation / A. Alexandrov [и др.] // Selecta Math. — 2025. — Т. 31, № 2. — С. 42. — DOI: [10.1007/s00029-025-01035-8](https://doi.org/10.1007/s00029-025-01035-8). — arXiv: [2309.12176](https://arxiv.org/abs/2309.12176) [math-ph].
45. *Tarnopolskiy G. M.* Five-point correlation numbers in a one-matrix model // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2011. — Июль. — Т. 44, № 32. — С. 325401. — ISSN 1751-8121. — DOI: [10.1088/1751-8113/44/32/325401](https://doi.org/10.1088/1751-8113/44/32/325401). — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/44/32/325401>.
46. *Belavin A. A., Tarnopolsky G. M.* Two-dimensional gravity in genus one in matrix models, topological and liouville approaches // JETP Letters. — 2010. — АБГ. — Т. 92, № 4. — С. 257–267. — ISSN 1090-6487. — DOI: [10.1134/S0021364010160137](https://doi.org/10.1134/S0021364010160137). — URL: <http://dx.doi.org/10.1134/S0021364010160137>.

47. *Artemev A.* Note on large- p limit of $(2,2p+1)$ minimal Liouville gravity and moduli space volumes // Nuclear Physics B. — 2022. — АБГ. — Т. 981. — С. 115876. — DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2022.115876](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2022.115876). — eprint: [2203.06629](https://arxiv.org/abs/2203.06629).
48. *Belavin V.* Torus Amplitudes in Minimal Liouville Gravity and Matrix Models // Phys. Lett. — 2011. — Т. B698. — С. 86–90. — DOI: [10.1016/j.physletb.2011.03.003](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2011.03.003). — arXiv: [1010.5508](https://arxiv.org/abs/1010.5508) [hep-th].
49. *Eguchi T., Ooguri H.* Conformal and Current Algebras on General Riemann Surface // Nucl. Phys. B. — 1987. — Т. 282. — С. 308–328. — DOI: [10.1016/0550-3213\(87\)90686-9](https://doi.org/10.1016/0550-3213(87)90686-9).
50. *Sonoda H.* SEWING CONFORMAL FIELD THEORIES. 2. // Nucl. Phys. B. — 1988. — Т. 311. — С. 417–432. — DOI: [10.1016/0550-3213\(88\)90067-3](https://doi.org/10.1016/0550-3213(88)90067-3).
51. *Felder G., Silvotti R.* Modular Covariance of Minimal Model Correlation Functions // Commun. Math. Phys. — 1989. — Т. 123. — С. 1–15. — DOI: [10.1007/BF01244015](https://doi.org/10.1007/BF01244015).
52. *Fateev V. A., Litvinov A. V.* On AGT conjecture // JHEP. — 2010. — Т. 02. — С. 014. — DOI: [10.1007/JHEP02\(2010\)014](https://doi.org/10.1007/JHEP02(2010)014). — arXiv: [0912.0504](https://arxiv.org/abs/0912.0504) [hep-th].
53. *Bershadsky M., Klebanov I. R.* Genus one path integral in two-dimensional quantum gravity // Phys. Rev. Lett. — 1990. — Т. 65. — С. 3088–3091. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.65.3088](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.65.3088).
54. *Zograf P. G., Takhtadzhyan L. A.* On Liouville’s equation, accessory parameters, and the geometry of Teichmüller space for Riemann surfaces of genus 0 // Mathematics of the USSR-Sbornik. — 1988. — Февр. — Т. 60, № 1. — С. 143. — DOI: [10.1070/SM1988v060n01ABEH003160](https://doi.org/10.1070/SM1988v060n01ABEH003160). — URL: <https://dx.doi.org/10.1070/SM1988v060n01ABEH003160>.
55. *Takhtajan L., Zograf P.* Hyperbolic 2-spheres with conical singularities, accessory parameters and Kähler metrics on $\mathcal{M}_{0,n}$. — 2001. — arXiv: [math/0112170](https://arxiv.org/abs/math/0112170) [math.CV].
56. *Hadasz L., Jaskólski Z.* Classical Liouville action on the sphere with three hyperbolic singularities // Nuclear Physics B. — 2004. — АБГ. — Т. 694, № 3. — С. 493–508. — DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2004.03.012](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2004.03.012).

57. *Hadasz L., Jaskólski Z.* Polyakov conjecture for hyperbolic singularities // *Physics Letters B.* — 2003. — Ноябрь. — Т. 574, № 1/2. — С. 129—135. — DOI: [10.1016/j.physletb.2003.08.075](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2003.08.075). — URL: <https://doi.org/10.1016%2Fj.physletb.2003.08.075>.
58. *Cantini L., Menotti P., Seminara D.* Proof of Polyakov conjecture for general elliptic singularities // *Physics Letters B.* — 2001. — Сентябрь. — Т. 517, № 1/2. — С. 203—209. — DOI: [10.1016/S0370-2693\(01\)00998-4](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(01)00998-4). — URL: <https://doi.org/10.1016%2Fs0370-2693%2801%2900998-4>.
59. *Mazzeo R., Weiss H.* Teichmüller theory for conic surfaces. — 2015. — arXiv: [1509.07608](https://arxiv.org/abs/1509.07608) [math.DG].
60. *Fateev V. A., Litvinov A. V.* Multipoint correlation functions in Liouville field theory and minimal Liouville gravity // *Theoretical and Mathematical Physics.* — 2008. — Март. — Т. 154, № 3. — С. 454—472. — DOI: [10.1007/s11232-008-0038-3](https://doi.org/10.1007/s11232-008-0038-3). — URL: <https://doi.org/10.1007%2Fs11232-008-0038-3>.
61. *Hadasz L., Jaskólski Z., Piątek M.* Classical geometry from the quantum Liouville theory // *Nuclear Physics B.* — 2005. — Сентябрь. — Т. 724, № 3. — С. 529—554. — DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2005.07.003](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2005.07.003). — URL: <https://doi.org/10.1016%2Fj.nuclphysb.2005.07.003>.
62. *Harrison S. M., Maloney A., Numasawa T.* Liouville Theory and the Weil-Petersson Geometry of Moduli Space. — 2022. — arXiv: [2210.08098](https://arxiv.org/abs/2210.08098) [hep-th].
63. Liouville theory and the Weil-Petersson geometry of moduli space: bordered, conic, and higher genus surfaces / K. Colville [и др.]. — 2023. — Ноябрь. — arXiv: [2312.00323](https://arxiv.org/abs/2312.00323) [hep-th].
64. *Firat A. H.* Hyperbolic string tadpole. — 2023. — arXiv: [2306.08599](https://arxiv.org/abs/2306.08599) [hep-th].
65. *Wolpert S.* On the Weil-Petersson Geometry of the Moduli Space of Curves // *American Journal of Mathematics.* — 1985. — Т. 107, № 4. — С. 969—997. — ISSN 00029327, 10806377. — URL: <http://www.jstor.org/stable/2374363> (дата обр. 25.08.2025).
66. *Teschner J.* Supersymmetric gauge theories, quantisation of moduli spaces of flat connections, and Liouville theory. — 2014. — arXiv: [1412.7140](https://arxiv.org/abs/1412.7140) [hep-th].

67. *Aleshkin K., Belavin V.* On the construction of the correlation numbers in Minimal Liouville Gravity // Journal of High Energy Physics. — 2016. — Ноябрь. — Т. 2016, № 11. — ISSN 1029-8479. — DOI: [10.1007/jhep11\(2016\)142](https://doi.org/10.1007/jhep11(2016)142). — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP11\(2016\)142](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP11(2016)142).
68. *Zamolodchikov A. B.* Conformal symmetry in two-dimensional space: Recursion representation of conformal block // Theoretical and Mathematical Physics. — 1987. — Т. 73. — С. 1088—1093.
69. *Harlow D., Maltz J., Witten E.* Analytic continuation of Liouville theory // Journal of High Energy Physics. — 2011. — Декабрь. — Т. 2011, № 12. — DOI: [10.1007/jhep12\(2011\)071](https://doi.org/10.1007/jhep12(2011)071). — URL: <https://doi.org/10.1007%2Fjhep12%282011%29071>.
70. *Alkalaev K., Pavlov M.* Holographic variables for CFT2 conformal blocks with heavy operators // Nuclear Physics B. — 2020. — Июль. — Т. 956. — С. 115018. — DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2020.115018](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2020.115018).
71. Heavy-heavy-light-light correlators in Liouville theory / V. Balasubramanian [и др.] // Journal of High Energy Physics. — 2017. — Август. — Т. 2017, № 8. — DOI: [10.1007/jhep08\(2017\)045](https://doi.org/10.1007/jhep08(2017)045).
72. *Alkalaev K., Pavlov M.* Four-point conformal blocks with three heavy background operators // Journal of High Energy Physics. — 2019. — Август. — Т. 2019, № 8. — DOI: [10.1007/jhep08\(2019\)038](https://doi.org/10.1007/jhep08(2019)038).
73. *Fitzpatrick A. L., Kaplan J., Walters M. T.* Virasoro conformal blocks and thermality from classical background fields // Journal of High Energy Physics. — 2015. — Ноябрь. — Т. 2015, № 11. — DOI: [10.1007/jhep11\(2015\)200](https://doi.org/10.1007/jhep11(2015)200). — URL: <https://doi.org/10.1007%2Fjhep11%282015%29200>.
74. *Eberhardt L., Turiaci G. J.* 2D dilaton gravity and the Weil-Petersson volumes with conical defects. — 2023. — arXiv: [2304.14948](https://arxiv.org/abs/2304.14948) [hep-th].
75. *Eynard B.* Intersection numbers of spectral curves. — 2011. — Апрель. — arXiv: [1104.0176](https://arxiv.org/abs/1104.0176) [math-ph].
76. *Zvonkine D.* An introduction to moduli spaces of curves and their intersection theory. — 2012. — URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:124196489>.

77. *McIntosh R.* On the asymptotics of some partial theta functions // The Ramanujan Journal. — 2018. — Apr. — Т. 45. — DOI: [10.1007/s11139-017-9893-6](https://doi.org/10.1007/s11139-017-9893-6).
78. *Belavin V., Rud Y.* Matrix model approach to minimal Liouville gravity revisited // J. Phys. A. — 2015. — Т. 48, № 18. — 18FT01. — DOI: [10.1088/1751-8113/48/18/18FT01](https://doi.org/10.1088/1751-8113/48/18/18FT01). — arXiv: [1502.05575](https://arxiv.org/abs/1502.05575) [hep-th].
79. *Verlinde E. P.* Fusion Rules and Modular Transformations in 2D Conformal Field Theory // Nucl. Phys. B. — 1988. — Т. 300. — С. 360—376. — DOI: [10.1016/0550-3213\(88\)90603-7](https://doi.org/10.1016/0550-3213(88)90603-7).
80. The complex Liouville string: the matrix integral / S. Collier [и др.] // SciPost Phys. — 2025. — Т. 18. — С. 154. — DOI: [10.21468/SciPostPhys.18.5.154](https://doi.org/10.21468/SciPostPhys.18.5.154). — arXiv: [2410.07345](https://arxiv.org/abs/2410.07345) [hep-th].
81. Identification of the Givental formula with the spectral curve topological recursion procedure / P. Dunin-Barkowski [и др.] // Commun. Math. Phys. — 2014. — Т. 328. — С. 669—700. — DOI: [10.1007/s00220-014-1887-2](https://doi.org/10.1007/s00220-014-1887-2). — arXiv: [1211.4021](https://arxiv.org/abs/1211.4021) [math-ph].
82. *Mirzakhani M.* Simple geodesics and Weil-Petersson volumes of moduli spaces of bordered Riemann surfaces // Invent. Math. — 2006. — Т. 167, № 1. — С. 179—222. — DOI: [10.1007/s00222-006-0013-2](https://doi.org/10.1007/s00222-006-0013-2).
83. *Anagnostou L., Mullane S., Norbury P.* Weil-Petersson volumes, stability conditions and wall-crossing. — 2023. — arXiv: [2310.13281](https://arxiv.org/abs/2310.13281) [math.AG]. — URL: <https://arxiv.org/abs/2310.13281>.