

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

На правах рукописи

Еремин Борис Андреевич

Зеркальная симметрия многообразий Калаби-Яу и $N=2$ суперконформные двумерные теории поля

Специальность 1.3.3 — теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
чл.-корр. РАН, профессор, д.ф.-м.н.,
Белавин Александр Абрамович

Москва — 2025

Оглавление

Введение	4
1 Компактификация в теории суперструн	12
1.1 Теория струн	12
1.2 Комплексные и кэлеровы многообразия	15
1.3 Многообразия Калаби-Яу и их когомологии	17
1.4 Пространство модулей Калаби-Яу	21
1.5 Пример: квинтика	23
2 Зеркальная симметрия и многообразия Калаби-Яу	26
2.1 Конструкция зеркальной симметрии Берглунда-Хубша-Кравица	30
2.2 Конструкция Батырева: построение зеркала, проверка эквивалентности двух конструкций	35
2.3 Пример: орбифолды квинтики	41
3 Калибровочная линейная сигма-модель и многообразия Калаби-Яу	48
3.1 Специальная геометрия	48
3.2 Калибровочная линейная сигма-модель	50
3.3 Множественные зеркала и периоды на Калаби-Яу	53
3.4 Проверка JKLMR гипотезы	57
3.5 Пример: JKLMR гипотеза для орбифолдов квинтики	62
4 $N = 2$ суперконформные теории поля и компактификация в теории суперструн	67
4.1 Конформные теории поля	67
4.2 $N = 2$ алгебра Вирасоро	69
4.3 Минимальные модели $N = 2$ алгебры Вирасоро и киральные кольца	73
4.4 Модулярный бутстрап и спектр конформной теории поля	76

4.5	Характеры минимальных моделей	77
4.6	ADE классификация	79
4.7	Орбифолды произведений минимальных моделей и компактификация	83
4.8	Построение твистованных состояний и спектральный поток	86
4.9	Взаимная локальность	89
4.10	Зеркальная симметрия и взаимная локальность	91
4.11	Зеркальная симметрия двойственных орбифолдов и алгоритм построения киральных колец	95
4.12	Пример модели орбифолда с недиагональным модулярным инвариантом	96
5	Заключение	105
A	Симметрия характеров $N = 2$ минимальных моделей	110
B	Взаимная локальность полей в ADE минимальных моделях	113
	Литература	115

Введение

Одной из основных задач современной теоретической физики является проблема объединения Стандартной модели физики элементарных частиц и квантовой гравитации, а также описание всех четырех фундаментальных взаимодействий на едином языке. Теория струн является перспективным кандидатом на роль такой теории. Непротиворечивая теория струн, содержащая бозоны и фермионы, а также не имеющая конформной аномалии, возникает в размерности пространства-времени, равной 10 [1]. Для получения четырехмерной теории в пространстве-времени Минковского, обладающей $N = 1$ суперсимметрией, необходимо компактифицировать оставшиеся 6 из 10 измерений на многообразии Калаби-Яу [2].

Многообразия Калаби-Яу вызывают глубокий интерес среди математиков и физиков-теоретиков последние несколько десятилетий. Важнейшим свойством таких многообразий является зеркальная симметрия, которая предполагает для данного Калаби-Яу X существование зеркального двойника Y [3–9]. В диссертации исследуются конструкции построения зеркального партнера Y согласно подходам Батырева [10] и Берглунда-Хубша-Кравица (БХК) [11, 12]. Конструкция Батырева позволяет строить зеркальные пары в торических многообразиях на основании двойственных многогранников, которые определяют многообразия Калаби-Яу. Конструкция Берглунда-Хубша-Кравица использует подход, основанный на группах фазовых симметрий многообразий Калаби-Яу. В диссертации также исследуется двойственность между Калаби-Яу и калибровочными линейными сигма-моделями, которая позволяет вычислять метрику [13] на пространстве модулей Калаби-Яу.

Альтернативный способ изучения компактификации предложил Д. Гепнер. В своей новаторской работе [14] он разработал алгебраический подход, который основан на методах конформной теории поля. Оказывается, что компактный сектор теории суперструн представляет собой $N = 2$ суперсимметричную двумерную конформную теорию поля на мировом листе. Центральный заряд этой теории равен 9. В таких моделях удивительным образом возникает зеркальная симметрия между пространствами состояний [3, 4, 15]. В главе 4 рассмотрен специальный класс таких теорий, которые представляют собой произведение $N = 2$ минимальных моделей типа ADE, на которых действует допустимая группа симметрии G .

Мы явно построим полный набор локальных полей при помощи спектрального потока и аксиом конформного бутстрапа [16]. В диссертации также исследуется вопрос построения зеркально-двойственных конформных теорий поля, которые определяются при помощи дуальной группы симметрии G^* . Это сделано для широкого класса моделей, упомянутого выше. Оказывается, что конформные теории поля, построенные по взаимно-двойственным группам G и G^* , являются эквивалентными, то есть имеют изоморфные пространства состояний.

Цели и задачи диссертационного исследования

Диссертация посвящена исследованию конструкций зеркального двойника для многообразия Калаби-Яу, определяемого нулями обратимого многочлена из списка Берглунда-Хубша. А также построению моделей суперсимметричных конформных теорий поля, которые возникают как компактный сектор в теории суперструн. А именно:

- Построение зеркального партнера к многообразию Калаби-Яу, которое определяется нулями некоторого полинома во взвешенном проективном пространстве на основании двух конструкций: Батырева и Берглунда-Хубша-Кравица. Доказательство эквивалентности этих двух конструкций;
- Изучение дуальности между многообразиями Калаби-Яу и двумерными суперсимметричными калибровочными линейными сигма-моделями, проверка зеркальной версии гипотезы Джокерса и соавторов;
- Построение моделей суперконформной теории поля с центральным зарядом равным 9, описание пространства локальных полей;
- Исследование зеркальной симметрии на уровне конформных теорий поля, построенных как орбифолды произведений $N = 2$ минимальных моделей.

Основные положения, выносимые на защиту диссертации

1. Конструкции зеркальной симметрии Батырева и Берглунда-Хубша-Кравица (БХК) для класса орбифолдов Калаби-Яу, задаваемых обратимыми полиномами W_M во взвешенных проективных пространствах, оказываются полностью эквивалентными.

2. Степени мономов-деформаций полиномов, образующих зеркальные пары орбифолдов Калаби-Яу, связаны уравнениями. В уравнения входит обратная матрица степеней многочлена W_M .
3. Результаты построения зеркального партнера для орбифолдов квинтики согласованы с конструкциями БХК и Батырева.
4. Установлена двойственность между многообразиями Калаби-Яу и калибровочными линейными сигма-моделями (КЛСМ) для специального класса многообразий из списка Берглунда-Хубша. Гипотеза о равенстве метрики на пространстве модулей многообразий Калаби-Яу и статистической суммы КЛСМ верна для рассмотренного класса многообразий.
5. Построены $N = 2$ суперконформные интегрируемые теории поля с центральным зарядом равным 9, которые реализованы как орбифолды произведений $N = 2$ минимальных моделей типа ADE по некоторой допустимой группе G . Конструкция построения твистованных состояний согласована с модулярными инвариантами из списка ADE. Спектр взаимно локальных полей модели нумеруется элементами двойственной группы G^* . Уравнения, связывающие элементы групп G и G^* , аналогичны уравнениям для минимальных моделей с инвариантами типа A.
6. Зеркальная модель $N = 2$ суперконформного орбифолда типа ADE строится по двойственной группе G^* . Перестановка групп G и G^* осуществляется зеркальным спектральным потоком. Пространства состояний моделей, построенных по группам G и G^* , оказываются изоморфными.

Актуальность

Последние четыре десятилетия теория суперструн является мощным источником задач для современной теоретической физики и математики, оставаясь при этом наиболее перспективным кандидатом на роль теории квантовой гравитации. Компактные измерения в теории суперструн — многообразия Калаби-Яу обладают рядом замечательных свойств, одно из которых — зеркальная симметрия. Данное явление предполагает наличие глубокой геометрической связи между попарно различными многообразиями Калаби-Яу и активно изучается как физиками, так и математиками. С практической точки зрения, зеркальная симметрия позволяет вычислять метрику на пространстве модулей комплексных и кэлеровых структур многообразия Калаби-Яу, которая входит в лагранжиан эффективной теории

супергравитации.

Альтернативный, алгебраический взгляд на проблему компактификации — состоит в построении моделей $N = 2$ суперсимметричной конформной теории поля и описании их пространств состояний при помощи методов модулярного или конформного бутстрапа [14, 17]. Взаимно локальные поля в этих моделях отвечают безмассовым состояниям струны. Важно отметить, что аппарат конформной теории поля находит применение в широком спектре физических задач: от описания критических явлений в статистической физике (например, модель Изинга) и теории представлений алгебры Вирасоро до исследования интегрируемых моделей и анализа спектра безмассовых состояний в теории струн. В настоящей диссертации строятся модели интегрируемой суперсимметричной конформной теории поля с полным описанием пространства состояний. Эти модели удовлетворяют требованиям локальности, замкнутости операторной алгебры и другим аксиомам конформного бутстрапа. Исследование моделей с произвольным модулярным инвариантом из ADE-классификации открывает путь к построению феноменологически перспективных теорий суперструн с тремя поколениями заряженных частиц.

Наконец, отдельного внимания заслуживают двумерные $N = (2, 2)$ суперсимметричные калибровочные линейные сигма-модели. Они замечательны тем, что для них применима техника суперсимметричной локализации, которая позволила вычислить статистическую сумму этих моделей точно [18, 19]. Таким образом, используя дуальность Калаби-Яу/КЛСМ, предсказанную в [20], а также зеркальную симметрию, можно вычислять специальную геометрию на пространстве модулей кэлеровых структур для семейства Калаби-Яу. Метрика на пространстве модулей явно содержится в лагранжиане теории супергравитации.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются оригинальными и впервые получены автором в сотрудничестве с научным руководителем и коллегами. Эквивалентность конструкций зеркальной симметрии Батырева и Берглунд-Хубша предполагалась математиками и формулировалась в качестве гипотез в ряде статей. В работе [1] впервые было явно найдено уравнение, определяющее зеркального партнёра Y в торическом многообразии для многообразия Калаби-Яу X , построенного по конструкции Батырева. При этом X задается как орбифолд гиперповерхности типа Берглунда-Хубша и определяется нулями обратимого многочлена, что отвечает достаточно широкому классу Калаби-Яу. Явно построено отображение, связывающее зеркальную гиперповерхность во взвешенном проективном пространстве, постро-

енную по конструкции Берглунда-Хубша, и гиперповерхность в торическом многообразии, построенную по конструкции Батырева. В работе [II] конструкция построения зеркальных партнеров продемонстрирована явно на примере орбифолдов квинтики.

В работах [III] и [IV] построена дуальная калибровочная линейная сигма-модель для многообразий Калаби-Яу, не относящихся к классу Ферма. Проверена гипотеза Джокерса и соавторов о равенстве статистической суммы КЛСМ и экспоненты кэлерава потенциала на пространстве кэлеровых модулей многообразия Калаби-Яу, которое является пространством суперсимметричных вакуумов данной КЛСМ. До работ автора эта гипотеза была проверена только для случая Калаби-Яу типа Ферма, имеющих полиномиальные деформации. В остальных случаях отмечалась проблема при вычислении статсуммы. Проблему удалось разрешить в [III], основываясь на идее множественных зеркал.

До выполнения настоящей диссертационной работы был неизвестен полный спектр полей в орбифолдах произведений $N = 2$ минимальных моделей типа ADE, которые связаны с сигма-моделями на соответствующих Калаби-Яу. Вычислялись только размерности киральных колец (киральных-киральных и антикиральных-киральных). В главе 4, следуя принципу локальности и используя конструкцию спектрального потока, впервые был предложен явный алгоритм построения пространства состояний в таких моделях. Также исследована зеркально-двойственная модель и получены условия на дуальную группу. Доказано, что модели, построенные по взаимно-двойственным группам, являются эквивалентными в смысле изоморфизма пространств состояний.

Работа [V] является обзорной и посвящена зеркальной симметрии и специальной геометрии, возникающей на пространстве модулей Калаби-Яу.

Практическая и научная ценность

Исследования, представленные в диссертационной работе, носят теоретический характер и находят применение в струнной феноменологии, геометрии многообразий Калаби-Яу, а также при изучении интегрируемых моделей конформной теории поля. Изучение зеркальной симметрии позволяет устанавливать фундаментальные дуальности в теории струн, такие как соответствие между компактификациями суперструн типа IIA и IIB. Кроме того, оно даёт возможность вычислять числа Ходжа $h_{1,1}$ и $h_{2,1}$ для зеркальных пар многообразий Калаби-Яу, что критически важно для определения числа поколений частиц в струнной компактификации — эта величина задаётся разностью $|h_{1,1} - h_{2,1}|$. Результаты, полученные при исследовании конструкций зеркальной симметрии в работах [I], [II], могут быть исполь-

зованы научными группами, которые работают в области алгебраической геометрии.

Результат, полученный в работах [IV] и [III] позволяет вычислять метрику на пространстве модулей многообразий Калаби-Яу. Эта метрика непосредственно входит в лагранжиан эффективной теории супергравитации, возникающей как низкоэнергетический предел теории струн.

Пространство полей $N = 2$ суперконформных теорий поля с центральным зарядом $c = 9$ соответствует компактному сектору безмассовых состояний в теории суперструн. При этом среди моделей типа **A**, спектр которых был изучен ранее, отсутствуют модели, дающие ровно три поколения кварков. Таким образом, полученные результаты открывают возможность построения феноменологически реалистичных моделей теории струн. Предложенная явная конструкция полей позволит непосредственно вычислять корреляционные функции в этих теориях.

Степень достоверности и апробация работы

Результаты исследований, вошедших в диссертацию, многократно представлялись соискателем на всероссийских и международных конференциях и семинарах. В частности, на **семинарах** Центра перспективных исследований им. Кричевера в Сколтехе, лаборатории Квантовой физики и информации Института проблем передачи информации им. Харкевича РАН (г. Москва), Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау (г. Черноголовка), лаборатории алгебраической геометрии и гомологической алгебры МФТИ (г. Долгопрудный), отдела теоретической физики Математического института им. В.А. Стеклова РАН (г. Москва), семинаре по квантовой теории поля Физического института им. П.Н. Лебедева РАН (г. Москва), а также на следующих **международных конференциях**: “Integrable Systems and Quantum Theory” (г. Санкт-Петербург, 2024), "Interaction Between Algebraic Geometry and QFT" (г. Долгопрудный, 2019) и **всероссийских конференциях**: “Молодежная конференция по теоретической и экспериментальной физике” (г. Москва, ИТЭФ, 2019, 2020), 62-, 63- и 65-я “Всероссийская научная конференция МФТИ” (г. Долгопрудный, МФТИ, 2019, 2020, 2022). Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Публикации по теме диссертации

Основные результаты по теме диссертации изложены в следующих работах:

- I. *A. Belavin, B. Eremin.* On the equivalence of Batyrev and BHK mirror symmetry constructions // [Nuclear Physics B.](#) – 2020. – Т. **961**, С. 115271.
- II. *A. Belavin, B. Eremin.* Mirror pairs of Quintic orbifolds // [JETP Letters.](#) – 2020. – Т. **112**, № **6**. – С. 370-375.
- III. *A. A. Belavin, B. A. Eremin.* Multiple mirrors and the JKLMR conjecture // [Theoretical and Mathematical Physics.](#) – 2022. – Т. **213**. – С. 1441–1452.
- IV. *A. Belavin, B. Eremin.* Partition Functions of $\mathcal{N} = (2, 2)$ Supersymmetric Sigma Models and Special Geometry on the Moduli Spaces of Calabi-Yau Manifolds // [Theoretical and Mathematical Physics.](#) – 2019. – Т. **201**, №**2**. – С. 1606-1613
- V. *A. Belavin, B. Eremin, S. Parkhomenko.* Review on Special Geometry and Mirror Symmetry for Calabi-Yau Manifolds (Brief Review) // [JETP Letters.](#) – 2023. – Т. **118**, №**10**. – С. 701-709.

Работы изданы в 5 печатных изданиях, 5 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав основного текста (Главы [1](#) – [4](#)), заключения ([5](#)) и двух приложений ([А](#), [В](#)). Общий объем диссертации составляет 122 страницы, включая 3 рисунка и 7 таблиц. Список литературы содержит 85 ссылок.

В [главе 1](#) дается краткое описание схемы компактификации в теории суперструн. Приведены некоторые математические определения и утверждения о комплексных и кэлеровых многообразиях. Даны определения многообразий Калаби-Яу. Разобран простейший пример таких многообразий — квинтика. Глава является вводной.

В [главе 2](#) формулируются определения и свойства семейств многообразий Калаби-Яу, задаваемых нулями обратимых многочленов. В разделе [2.1](#) описана конструкция зеркальной симметрии Берглунда-Хубша-Кравица. Получена некоторая переформулировка этой конструкции на языке связи зеркальных мономов-деформаций ([2.40](#)). В разделе [2.2](#) рассмотрена конструкция Батырева и построен зеркальный двойник ([2.64](#)) в торическом многообразии на основании этой конструкции. Показано, что результаты построения зеркального партнера, согласно этим двум конструкциям, совпадают. В разделе [2.3](#) оба подхода построения зеркального двойника продемонстрированы на примере орбифолдов семейства квинтики. Глава

содержит результаты работ [I],[II].

В **главе 3** исследуется двойственность между Калаби-Яу и $N = (2, 2)$ суперсимметричными линейными калибровочными сигма-моделями на сфере (КЛСМ). Эта связь устанавливается для многообразий Калаби-Яу типа Берглунда-Хубша. Разделы 3.1-3.3 являются подготовительными. В них ставится задача вычисления специальной геометрии на пространстве модулей многообразий Калаби-Яу, кратко описывается калибровочная линейная сигма-модель на сфере и конструкция множественных зеркал. Далее, в разделе 3.4, явным вычислением проверяется зеркальная версия гипотезы Джокерса и соавторов о равенстве статистической суммы КЛСМ (3.58) и экспоненты кэлера потенциала (3.42) на пространстве модулей Калаби-Яу X . Показано, что эта гипотеза остается справедливой в случае, когда Калаби-Яу X является одним из множественных зеркал многообразия типа Ферма. В разделе 3.5 приведены примеры выполнения гипотезы. Глава основана на результатах работы [III].

В **главе 4** строятся $N = 2$ суперконформные теории поля с центральным зарядом, равным 9. Теории реализованы как орбифолды произведений $N = 2$ минимальных моделей типа ADE. Разделы с 4.1 по 4.6 являются вводными и посвящены общим положениям конформной теории поля, а также содержат введение в модулярный и конформный бутстрап в минимальных моделях $N = 2$ супералгебры Вирасоро. В разделах 4.7-4.9 явно построен спектр взаимно локальных полей при помощи методов конформного бутстрапа и спектрального потока. В разделе 4.10 получена двойственная модель орбифолда при помощи зеркальной версии спектрального потока. Упрощены уравнения взаимной локальности. В разделе 4.11 исследована зеркальная симметрия между взаимно-двойственными конформными теориями поля. Установлено соответствие между киральными кольцами исходной и зеркальной модели (формулы (4.116)-(4.117)). В разделе 4.12 конструкция продемонстрирована на примере модели $(1_A)^1(16_E)^3$.

В **главе 5 (заключении)** сформулированы основные результаты диссертации, выносимые на защиту.

В **приложении А** доказано правило отражения для характеров $N = 2$ минимальных моделей.

В **приложении В** проверена взаимная локальность примарных полей из спектра $N = 2$ минимальной модели типа ADE.

Глава 1

Компактификация в теории суперструн

Данная глава является вводной. Её цель — изложить основные определения и теоретические предпосылки исследования. В ней рассматриваются условия, накладываемые на компактификацию десятимерной теории суперструн, которые естественным образом приводят к определению многообразия Калаби-Яу. В заключительной части главы подробно разбирается пример наиболее известного трёхмерного комплексного многообразия Калаби-Яу — квинтики в $\mathbb{P}^4$.

1.1 Теория струн

Исторически первой теорией струн была модель бозонной струны [21]. Она описывается действием Полякова

$$S[X] = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{ab} g_{MN}(X) \partial_a X^M(\sigma) \partial_b X^N(\sigma), \quad (1.1)$$

где T — натяжение струны, h_{ab} — метрика на мировом листе, g_{MN} — метрика в таргет-пространстве, а X^M — бозонные поля. Оказывается, что при квантовании этой теории возникает конформная аномалия, которая исчезает при размерности пространства-времени, равной 26. Такая теория имеет ряд проблем, которые не позволяют рассматривать её с физической точки зрения. В спектре присутствуют тахионы, то есть частицы с отрицательным квадратом массы, а также она не содержит фермионов.

Добавление фермионов в действие (1.1) позволило определить суперсимметричную теорию струн, содержащую фермионы. Оказывается, что критическая размерность теории суперструн равна 10 [22, 23] (в контексте теории струн стоит также упомянуть работы [24–28]). Такая теория не содержит тахионов. Таргет-пространство представляет собой произведение пространства Минковского и некоторого компактного пространства: $\mathbb{R}^{1,3} \times X^6$ [2]. Эффек-

тивная десятимерная теория супергравитации будет описываться действием

$$S_{\text{eff}}[\Phi] = \int_{\mathbb{R}^{1,3} \times X^6} d^{10}w L[\Phi(w)] = \int d^4x \int d^6y (T[\Phi] + V[\Phi]). \quad (1.2)$$

Здесь Φ — поля в десятимерной теории, $T[\Phi]$ — кинетические члены в лагранжиане, а $V[\Phi]$ — потенциал. w^A , $A = 1, \dots, 10$ — координаты в $\mathbb{R}^{1,3} \times X^6$, а x^μ и y^m соответственно координаты в пространстве Минковского и на компактном многообразии X^6 .

В качестве примера компактификации рассмотрим схему редукции Калуцы-Клейна. Это пример пятимерной теории поля на произведении пространства Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$ с координатами x и окружности S^1 радиуса R с координатами y . Окружность играет роль компактного пространства. Действие имеет вид

$$S[\varphi] = \int_{\mathbb{R}^{1,3} \times S^1} d^4x dy \left(\frac{1}{2} \partial_A \varphi \partial^A \varphi \right). \quad (1.3)$$

Рассмотрим теперь квантование этой теории в подходе функционального интеграла и проинтегрируем по компактному измерению. Для этого разложим поля в действии (1.3) по собственным функциям лапласиана на окружности:

$$\varphi(x, y) = \sum_k \varphi_k(x) \frac{e^{iky/R}}{\sqrt{2\pi R}}. \quad (1.4)$$

Подставим это разложение в (1.3) и проинтегрируем по y . Получаем:

$$S[\varphi] = - \int_{\mathbb{R}^{1,3} \times S^1} d^4x dy \left(\frac{1}{2} \varphi \Delta \varphi \right) = - \int_{\mathbb{R}^{1,3}} d^4x \sum_k \left(\varphi_k(x) \Delta \varphi_k(x) + \frac{k^2}{R^2} \varphi_k^2(x) \right). \quad (1.5)$$

Отсюда видно, что результирующая теория состоит из бесконечного набора полей с квадратами масс k^2/R^2 . Если радиус компактификации стремится к нулю, то в эффективном действии остаются только нулевые моды φ_0 , которые отвечают безмассовым состояниям.

Схема компактификации в теории суперструн аналогична редукции Калуцы-Клейна. Необходимо разложить поля в действии (1.2) по собственным функциям оператора Лапласа компактного пространства X^6 . Аналогично, полученная эффективная теория будет содержать безмассовые частицы, если размер компактного пространства X^6 асимптотически мал.

Четырехмерная теория должна быть суперсимметричной. Вакуум теории суперструн $|\text{vac}\rangle$ должен быть инвариантен относительно преобразований суперсимметрии с генерато-

рами Q_M в четырехмерном пространстве Минковского:

$$\delta_\epsilon |\text{vac}\rangle = \epsilon^M Q_M |\text{vac}\rangle = 0. \quad (1.6)$$

Здесь ϵ^M параметризует преобразование суперсимметрии. ϵ^M и Q_M являются спинорами $SO(1, 9)$. Из того, что вариация поля равна $\delta_\epsilon \Phi = [\epsilon^M Q_M, \Phi]$ следует, что вакуумные средние от них тоже должны быть равны нулю: $\langle \delta_\epsilon \Phi \rangle = 0$. Так как все фермионные поля являются спинорами и нетривиально преобразуются относительно группы $SO(1, 3)$ можно заключить, что их вакуумные средние равны нулю: $\langle \Phi_{\text{Fermi}} \rangle = 0$. А, значит, суперсимметричная вариация бозонов дает нулевой вклад: $\langle \delta_\epsilon \Phi_{\text{Bose}} \rangle \sim \langle \Phi_{\text{Fermi}} \rangle = 0$. Среди фермионных полей теории супергравитации есть гравитино ψ_M , который преобразуется как

$$\delta_\epsilon \psi_M = \nabla_M \epsilon + \dots. \quad (1.7)$$

Здесь ∇_M означает ковариантную производную, действующую на спиноры, а под многоточием понимаются слагаемые, содержащие бозонные поля. Их вакуумные средние, как мы обсудили выше, равны нулю. Тогда условие сохранения пространственно-временной суперсимметрии обязывает $\langle \delta_\epsilon \psi_M \rangle$, то есть:

$$\langle \nabla_M \epsilon \rangle \equiv \bar{\nabla}_M \epsilon = 0, \quad M = 1, \dots, 10, \quad (1.8)$$

а, следовательно

$$\bar{\nabla}_m \epsilon = 0, \quad m = 1, \dots, 6 \quad \text{и} \quad \bar{\nabla}_\mu \epsilon = 0, \quad \mu = 1, \dots, 4. \quad (1.9)$$

В ковариантной производной $\bar{\nabla}$ берется вакуумное среднее от спиновой связности. Таким образом, наличие ковариантно-постоянного спинора является необходимым условием суперсимметричной компактификации. Оказывается, это условие означает, что компактное пространство X^6 является многообразием Калаби-Яу.

Докажем, что из существования ковариантно-постоянного спинора следует обращение в ноль тензора Риччи. Для этого рассмотрим равенство

$$[\nabla_M, \nabla_N] \epsilon = \frac{1}{4} R_{MNPQ} \Gamma^{PQ} \epsilon = 0, \quad (1.10)$$

где $\Gamma^{AB} = \frac{1}{2}[\Gamma^A, \Gamma^B]$, а R_{MNPQ} - тензор Римана десятимерного пространства. Домножим

теперь это равенство на гамма-матрицу Γ^C , воспользуемся равенством $\Gamma^C \Gamma^{PQ} = \Gamma^{NPQ} + g^{CP} \Gamma^Q - g^{CQ} \Gamma^P$, где $\Gamma^{CPQ} = \frac{1}{3!}(\Gamma^C \Gamma^P \Gamma^Q \pm \dots)$, а также тождеством Бьянки $R_{MNPQ} + R_{MQNP} + R_{MPQN} = 0$. Получим равенство:

$$R_{MQ} \Gamma^Q \epsilon = 0, \quad (1.11)$$

и, как следствие

$$R_{\mu\nu} \Gamma^\nu \epsilon = 0, \quad R_{mn} \Gamma^n \epsilon = 0. \quad (1.12)$$

Первое условие выполняется, например, при $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Нас больше интересует второе условие, которое накладывается на компактную часть пространства. Рассмотрим его эрмитово сопряжение и домножим справа на $\Gamma^p \epsilon$, получим $\epsilon^\dagger \epsilon R_m{}^p = 0$. Это означает, что для существования ковариантно-постоянного спинора на компактном пространстве X^6 необходимо обнуление тензора Риччи

$$R_{mn} = 0. \quad (1.13)$$

Таким образом, X^6 является компактным и Риччи-плоским. На самом деле, многообразие X^6 должно быть еще комплексным и кэлеровым. Такие пространства называются многообразиями Калаби-Яу.

Для начала дадим некоторые базовые определения, необходимые для обсуждения многообразий Калаби-Яу.

1.2 Комплексные и кэлеровы многообразия

Вещественные многообразия локально выглядят как евклидовы пространства $\mathbb{R}^n$. Комплексные многообразия M локально изоморфны $\mathbb{C}^n$. При этом функции перехода между картами в M являются голоморфными. Комплексное многообразие M называется гладким, если для его открытого покрытия $\{U_a\}$ координатные функции $w_a : U_a \rightarrow \mathbb{C}^n$ такие, что $w_a \circ w_b^{-1}$ голоморфны на множестве $w_b(U_a \cap U_b) \subset \mathbb{C}^n$. Атлас $\{U_a, w_a\}$ определяет комплексную структуру на многообразии M . В качестве примера комплексного многообразия можно привести комплексное проективное пространство:

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{C}^*. \quad (1.14)$$

На комплексном многообразии размерности n можно ввести n голоморфных координат z^i и n антиголоморфных координат $\bar{z}^i$. Как следствие, пространство дифференциальных форм

E^r ранга r может быть разложено в следующую прямую сумму

$$E^r = \bigoplus_{p+q=r} \Omega^{p,q}, \quad (1.15)$$

где $\Omega^{p,q}$ - пространство (p, q) - форм вида

$$\omega = \frac{1}{p!q!} \omega_{i_1 \dots i_p, \bar{j}_1 \dots \bar{j}_q} dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{j_q}. \quad (1.16)$$

Эквивалентное определение комплексного многообразия стартует с определения почти комплексной структуры. Она задается как отображение на касательном пространстве $T(M)$:

$$J : T(M) \rightarrow T(M), \quad v^\mu \mapsto J^\mu_\nu v^\nu \quad \text{с условием} \quad J^2 = -\text{Id}. \quad (1.17)$$

Локально в голоморфных (и антиголоморфных) координатах почти комплексная структура имеет вид $J^l_k = i$, $J^{\bar{l}}_{\bar{k}} = -i$.

Далее определим тензор Нейенхейса

$$N(J) : T(M) \times T(M) \rightarrow T(M), \quad (1.18)$$

$$N(v, w) = [v, w] + J[Jv, w] + J[v, Jw] - [Jv, Jw]. \quad (1.19)$$

Почти комплексная структура называется интегрируемой, если $N(J) = 0$. Теперь можно сформулировать эквивалентное определение комплексного многообразия как многообразия M с интегрируемой почти комплексной структурой J . Доказательство эквивалентности интегрируемости J и возможности ввести голоморфные координаты было дано Ньюландером и Ниренбергом.

Отметим, что многообразие с почти комплексной структурой J допускает наличие ковариантно-постоянного спинора, так как

$$\nabla J = 0. \quad (1.20)$$

Отсюда также следует, что $N(J) = 0$. То есть наличие ковариантно-постоянного спинора достаточно для того, чтобы многообразие было комплексным.

Теперь определим кэлеровы многообразия. Для этого рассмотрим эрмитову метрику $g_{i,\bar{j}}$ на многообразии M : $ds^2 = 2 \sum_{i,j=1}^n g_{i,\bar{j}}(z) dz^i \otimes d\bar{z}^{\bar{j}}$. По метрике можно построить фундамен-

тальную $(1, 1)$ -форму:

$$\omega = i \sum_{i,j=1}^n g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j \quad (1.21)$$

Отметим, что форма ω вещественная, то есть $\bar{\omega} = \omega$, через нее также можно определить форму объема на M как ω^n . Иначе определение фундаментальной формы переписывается с использованием комплексной структуры J как $\omega(v, u) = g(Jv, u)$.

Метрика $g_{i\bar{j}}$ называется Кэлеровой, если соответствующая ей форма ω замкнута, то есть $d\omega = 0$. Тогда комплексное многообразие, также как и форма ω , называется Кэлеровым. Из замкнутости ω немедленно следует, что

$$\partial_i g_{j\bar{k}} = \partial_j g_{i\bar{k}}, \quad \bar{\partial}_i g_{j\bar{k}} = \bar{\partial}_k g_{j\bar{i}}. \quad (1.22)$$

Тогда метрика может быть выражена через кэлеров потенциал K как

$$g_{i\bar{j}} = \partial_i \bar{\partial}_j K. \quad (1.23)$$

Заметим, что K определён с точностью до добавления голоморфной и антиголоморфной функции.

1.3 Многообразие Калаби-Яу и их когомологии

Итак, мы готовы сформулировать следующие эквивалентные определения многообразия Калаби-Яу. Пусть X трехмерное комплексное (шестимерное вещественное) многообразие. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. На многообразии X существует ковариантно-постоянный спинор $\nabla \epsilon = 0$.
2. Многообразие X является кэлеровым и тензор Риччи равен нулю $R_{nm} = 0$.
3. X имеет группу голономии $SU(3)$.
4. Многообразие X является Кэлеровым и на нем существует голоморфная нигде не исчезающая форма Ω степени 3.

Многообразия, удовлетворяющие одному из этих условий, называются многообразиями Калаби-Яу. Мы не будем подробно останавливаться на доказательстве эквивалентности этих определений, об этом можно прочитать, например, в [29–31]. Далее мы обсудим только некоторые полезные свойства.

Через голоморфную нигде неисчезающую форму Ω выражается форма объёма Калаби-Яу как $\Omega \wedge \bar{\Omega}$, а значит, и объем самого многообразия.

$$\text{Vol}(X) = \int_X \Omega \wedge \bar{\Omega}. \quad (1.24)$$

В рамках теории струн ключевую роль играет анализ когомологий шестимерных компактных многообразий Калаби-Яу. Процедура компактификации, основанная на идеях Калуцы-Клейна, предполагает разложение полей десятимерной супергравитации по базису собственных функций операторов, входящих в кинетическую часть лагранжиана, с последующим интегрированием по компактным измерениям. В результате возникает эффективная четырёхмерная теория, спектр масс в которой определяется собственными значениями указанных операторов. В низкоэнергетическом приближении наиболее существенны безмассовые моды, соответствующие нулевым собственным значениям. Эти моды описываются решениями уравнений Лапласа и Дирака на многообразии Калаби-Яу X , откуда и возникает необходимость описания когомологий на X .

Когомологии де Рама

Для начала напомним определение дифференциала де Рама. Это отображение на пространстве форм

$$d : E^r \rightarrow E^{r+1}, \quad (1.25)$$

которое действует на форму $A \in E^r$ как

$$d(A_{i_1, \dots, i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}) := \frac{\partial A_{i_1, \dots, i_r}}{\partial x_{i_{r+1}}} dx^{i_{r+1}} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}. \quad (1.26)$$

Легко проверяется, что квадрат дифференциала де Рама равен нулю, отсюда следует, что образ (замкнутые формы) содержится в ядре (точные формы): $\text{Im } d \subset \text{Ker } d$. Таким образом, возникает естественное определение когомологий де Рама H^r :

$$H^r := \text{Ker } d / \text{Im } d. \quad (1.27)$$

Проще говоря, элементы $\omega \in H^r$ имеют вид дифференциала некоторой формы, по модулю точной формы: $\omega \sim \omega + d\alpha$, $d\omega = 0$.

На пространстве дифференциальных форм на комплексном многообразии можно ввести

спаривание при помощи метрики g :

$$\langle A, B \rangle := \int_X g^{i_1 j_1} \dots g^{i_n j_n} A_{i_1 \dots i_n} B_{j_1 \dots j_n} \sqrt{\det g} \cdot d^d x = \int_X (A, B) \sqrt{\det g} \cdot d^d x. \quad (1.28)$$

Выражение для спаривания можно переписать, введя оператор звезды Ходжа $\star$:

$$\langle A, B \rangle = \int_X A \wedge \star B, \quad (1.29)$$

который отображает (p, q) формы на $(n - p, n - q)$ формы. Теперь, используя спаривание (1.28), определим сопряженный дифференциал:

$$\langle d^\dagger A, B \rangle := \langle A, dB \rangle. \quad (1.30)$$

Заметим, что если дифференциал де Рама d повышает порядок формы на единицу, то сопряженный дифференциал $d^\dagger$ понижает на единицу. А значит, их произведение не меняет порядок формы. Это позволяет определить лапласиан, сужение которого на функции будет совпадать с обычным оператором Лапласа:

$$\Delta_d := dd^\dagger + d^\dagger d. \quad (1.31)$$

Следующая теорема позволяет отождествить кохомологии на многообразии Калаби-Яу с нулевыми модами лапласиана. Согласно теореме о разложении Ходжа оказывается, что произвольная форма на компактном римановом многообразии может быть представлена в виде

$$\alpha = \alpha_0 + d\beta + d^\dagger \gamma, \quad (1.32)$$

где α_0 гармоническая, то есть $\Delta_d \alpha_0 = 0$. Причём это разложение единственно. Отсюда следует замечательный факт, что пространство кохомологий на компактном римановом многообразии отождествляется с пространством нулевых мод лапласиана: $H \simeq \text{Ker } \Delta_d$.

Напомним также, что дифференциал де Рама можно разложить в сумму дифференциалов Дольбо ∂ и $\bar{\partial}$:

$$d = \partial + \bar{\partial}, \quad (1.33)$$

относительно которых имеется разложение пространства дифференциальных форм (1.15).

По дифференциалам Дольбо можно аналогичным образом построить операторы Лапласа:

$$\Delta_{\partial} = \partial\partial^* + \partial^*\partial, \quad \Delta_{\bar{\partial}} = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}. \quad (1.34)$$

Оказывается, что в случае, когда многообразие X является Кэлеровым, определенные выше лапласианы выражаются через (1.31) как

$$\Delta_{\partial} = \Delta_{\bar{\partial}} = \frac{1}{2}\Delta_d. \quad (1.35)$$

Видно, что лапласианы, определённые по дифференциалам Дольбо также не меняют градуировку дифференциальных форм. А из связи нулевых мод оператора Лапласа с когомологиями мы заключаем, что для них имеется аналогичное (1.15) разложение

$$H^n(X) = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}(X). \quad (1.36)$$

Остается понять, какие из пространств когомологий являются независимыми для случая, когда X является многообразием Калаби-Яу. На пространстве когомологий действует инволюция сопряжения, которая отображает $H^{p,q} \rightarrow H^{q,p}$, а также звезда Ходжа $\star : H^{p,q} \rightarrow H^{n-p,n-q}$. Так как $\star^2 = \pm 1$, мы можем отождествить

$$H^{p,q}(X) \simeq H^{q,p}(X), \quad H^{q,p}(X) \simeq H^{n-q,n-p}(X). \quad (1.37)$$

Введем теперь числа Ходжа как размерности пространства когомологий

$$h_{p,q} = \dim H^{p,q}(X). \quad (1.38)$$

Эти числа часто объединяют в так называемый ромб Ходжа:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & h_{0,0} & & \\ & & & & & & \\ & & & & h_{1,0} & & h_{0,1} \\ & & & & & & \\ h_{2,0} & & & & h_{1,1} & & h_{0,2} \\ & & & & & & \\ h_{3,0} & & h_{2,1} & & h_{1,2} & & h_{0,3} \\ & & & & & & \\ & & h_{3,1} & & h_{2,2} & & h_{1,3} \\ & & & & & & \\ & & h_{3,2} & & h_{2,3} & & \\ & & & & & & \\ & & & & h_{3,3} & & \end{array} \quad (1.39)$$

Из наших рассуждений следует, что независимые и ненулевые числа Ходжа это h_{11}, h_{21} , и h_{p0} , $p = 0, \dots, 3$. Оказывается, что голоморфные и гармонические формы $H^{p,0}$ являются ковариантно постоянными, а значит $h_{10} = h_{20} = 0$. В тоже время у нас существует единственный ковариантно-постоянный спинор, а значит $h_{0,0} = 1$. Голоморфная форма объема на Калаби-Яу является элементом $\Omega \in H^{3,0}(X)$ и определена с точностью до константы, а значит $h_{30} = 1$. Таким образом, многообразие Калаби-Яу определяется двумя числами Ходжа h_{11} и h_{21} , которые связаны между собой при зеркальной симметрией, о которой речь пойдет в следующей главе. Ромб Ходжа для многообразий Калаби-Яу сильно упрощается:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & 1 & & \\
& & & & 0 & & 0 \\
& & & 0 & & h_{1,1} & 0 \\
1 & & h_{2,1} & & & h_{1,2} & 1 \\
& & 0 & & h_{2,2} & & 0 \\
& & 0 & & 0 & & \\
& & & & 1 & &
\end{array} \tag{1.40}$$

Более того, он является симметричным по отношению к отражениям относительно вертикали и горизонтали. А зеркальная симметрия действует как отражение относительно диагоналей.

1.4 Пространство модулей Калаби-Яу

Теперь возникает задача описания пространства когомологий $H^{1,1}(X)$ и $H^{2,1}(X)$, которые отвечают нулевым модам лапласиана, то есть безмассовым полям. Оказывается, что пространства когомологий изоморфны деформациям Кэлеровой и комплексной структуры на X . Множества таких деформаций называются пространством модулей Кэлеровых $M_K(X)$ и комплексных структур $M_C(X)$ [32]. Поговорим об этом подробнее.

Рассмотрим бесконечно малые деформации метрики, при которых многообразие X остается Риччи-плоским:

$$R_{mn}(g) = 0, \quad R_{mn}(g + \delta g) = 0. \tag{1.41}$$

При этом нас будут интересовать преобразования, которые не сводятся к заменам координат. Для этого можно зафиксировать "калибровку" $\nabla^m \delta g_{mn} = 0$. Теперь, если разложить до первого порядка уравнение $R_{mn}(g + \delta g) = 0$ и взять след, то мы получим следующее уравнение

на вариацию метрики:

$$\Delta_L \delta g_{mn} := \nabla^2 \delta g_{mn} + 2R_{mn}^{kl} \delta g_{kl} = 0. \quad (1.42)$$

Оператор Δ_L , введённый выше, называется оператором Лейхнеровича. Проанализируем подробнее уравнение (1.42). Для этого отдельно рассмотрим деформации $\delta g_{i\bar{j}}$ и δg_{ij} . Оказывается, что $\delta g_{i\bar{j}}$ связаны с деформациями кэлеровой структуры, а δg_{ij} с деформацией комплексной структуры.

Действительно, из условия $\Delta_L \delta g_{i\bar{j}} = 0$ можно получить уравнение $(\Delta \delta g)_{i\bar{j}} = 0$. Значит, деформации метрики $\delta g_{i\bar{j}}$ можно отождествить с гармоническими (1,1) формами. Тогда установим следующее соответствие между деформациями метрики $\delta g_{i\bar{j}}$ и деформациями кэлеровой формы ω :

$$\delta g_{i\bar{j}} \mapsto \delta_a \omega_{i\bar{j}} \in H^{1,1}(X), \quad a = 1, \dots, h_{11}. \quad (1.43)$$

А также, используя (анти)голоморфную форму Ω можно сопоставить:

$$\delta_l g_{ij} \mapsto \delta_l g_{ij} g^{j\bar{k}} \Omega_{\bar{k}m\bar{s}} \in H^{1,2}(X), \quad l = 1, \dots, h_{12}. \quad (1.44)$$

Таким образом, гармонические формы типа $H^{1,1}(X)$ можно отождествить с пространством модулей (деформаций) кэлеровой структуры $H^{1,1}(X) \sim M_K(X)$, а формы из $H^{1,2}$ с модулями комплексной структуры $H^{1,2}(X) \sim M_C(X)$. Возникает важная задача вычисления метрики на пространстве модулей, которая будет входить в лагранжиан низкоэнергетического предела супергравитации.

Метрика на пространстве модулей комплексных структур возникает следующим образом. Обозначим элементы $(b_l)_{i\bar{j}\bar{k}} \in H^{1,2}(X)$, $l = 1, \dots, h_{12}$. Тогда введем

$$G_{l\bar{s}} := \int_X g^{i\bar{i}} g^{j\bar{j}} \delta_l g_{ij} \delta_{\bar{s}} g_{i\bar{j}} \sqrt{-g} d^6 x = \frac{1}{\|\Omega\|^2} \int_X b_l \wedge \bar{b}_{\bar{s}}. \quad (1.45)$$

Воспользуемся равенством для голоморфной формы Ω : $\partial_l \Omega = \lambda_l \Omega + b_l$, где λ_l некоторая константа. Оно проверяется напрямую. Здесь использовано, что пространство форм $H^{3,0}(X)$ одномерно, поэтому первое слагаемое пропорционально самой форме Ω . Тогда метрику (1.45) можно переписать как

$$G_{l\bar{s}} = \partial_l \bar{\partial}_{\bar{s}} \log \int_X \Omega \wedge \bar{\Omega}. \quad (1.46)$$

Из последнего равенства видно, что метрика на пространстве модулей комплексных структур

является кэлеровой. Экспонента кэлерова потенциала равна

$$e^{-K_C(X)} = \int_X \Omega \wedge \bar{\Omega}. \quad (1.47)$$

На самом деле, пространство $M_C(X)$ является специальным кэлеровым многообразием и на нём возникает специальная геометрия [13].

Здесь мы приходим к задаче вычисления специальной геометрии на пространстве модулей комплексных $M_C(X)$ и кэлеровых структур $M_K(X)$ для многообразия Калаби-Яу. Эффективный способ вычисления метрики на $M_C(X)$ был разработан К.Р. Алешкиным и А.А. Белавиным в серии работ [33–38]. Однако, столь же эффективный алгоритм для вычисления специальной геометрии на пространстве кэлеровых модулей $M_K(X)$ до сих пор отсутствовал.

Решение этой проблемы предоставляет зеркальная симметрия, которая постулирует существование зеркального партнёра Y для исходного многообразия X . Поскольку специальная геометрия на пространстве комплексных структур $M_C(Y)$ зеркального многообразия Y известна, она может быть отождествлена с искомой специальной геометрией на $M_K(X)$. Данному вопросу посвящена глава 2.

В главе 3 рассматривается дуальность между многообразиями Калаби-Яу и калибровочными линейными сигма-моделями (КЛСМ). Ключевая идея заключается в том, что статистическая сумма КЛСМ вычисляет специальную геометрию на пространстве кэлеровых модулей $M_K(X)$ соответствующего многообразия Калаби-Яу. Эта гипотеза была первоначально высказана Джокерсом и соавторами в работе [20].

1.5 Пример: квинтика

Одним из самых простых примеров трехмерных комплексных многообразий Калаби-Яу является Квинтика. Пусть $[x_1, \dots, x_5]$ - однородные координаты в проективном пространстве $\mathbb{P}^4$. Как мы упомянули выше, само пространство $\mathbb{P}^4$ является комплексным многообразием. Определим теперь гиперповерхность $X \subset \mathbb{P}^4$ уравнением

$$W_0 = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 = 0. \quad (1.48)$$

Заметим, что однородность многочлена $W_0(x)$ гарантирует, что уравнение $W_0(x) = 0$ действительно задаёт гиперповерхность комплексной размерности 3 в проективном пространстве.

Чтобы увидеть, что X является многообразием Калаби-Яу, предъявим голоморфную форму старшей степени. Если в качестве координат на X выбрать x_1, x_2, x_3 , то форму можно

записать следующим образом

$$\Omega = \frac{x_4 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3}{\partial_5 W_0}. \quad (1.49)$$

Тот факт, что $\deg W_0 = 5$ гарантирует, что форма Ω хорошо определена в $\mathbb{P}^4$ и не имеет полюсов. В качестве Кэлеровой метрики можно выбрать сужение метрики Фубини-Штуди на X :

$$g_{i\bar{j}} = \frac{1}{\sum_{s=1}^5 |x_s|^2} \left(\delta_{i\bar{j}} - \frac{x_i \bar{x}_j}{\sum_{s=1}^5 |x_s|^2} \right). \quad (1.50)$$

Легко получить кэлеров потенциал для этой метрики. Он равен

$$K = \log (|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + |x_4|^2 + |x_5|^2). \quad (1.51)$$

Обсудим теперь, как устроено пространство модулей комплексных и кэлеровых структур на X . Ясно, что разные полиномы степени 5 будут задавать различные Калаби-Яу, так как будет меняться форма Ω . Так, если добавлять к W_0 мономы степени 5, которые не являются заменами координат в $\mathbb{P}^4$ (то есть не пропорциональны $\partial_i W_0$), то мы получим различные в смысле комплексной структуры многообразия. Помимо x_i^5 таких мономов существует 101 штука. Вот их полный список с точностью до перестановки:

$$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5, \quad x_1^3 x_2^2, \quad x_1^3 x_2 x_3, \quad x_1^2 x_2^2 x_3, \quad x_1^2 x_2 x_3 x_4 \quad (1.52)$$

в количестве: $1 + 20 + 30 + 30 + 20 = 101$. Таким образом, $h_{21} = 101$.

Пространство гармонических форм степени $(1, 1)$ имеет размерность $h_{11} = 1$, так как единственная такая форма порождается формой Фубини-Штуди.

Таким образом, возникает целое семейство квинтики, которое определяется нулями многочлена $\sum_{i=1}^5 x_i^5$ вместе с 101 деформацией:

$$\mathcal{Q} = \left\{ (x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{P}^4 \mid W_{\mathcal{Q}}(x, \varphi) := x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + \sum_{s=1}^{101} \varphi_l e_l(x) = 0 \right\}. \quad (1.53)$$

Параметры φ_l играют роль модулей комплексной структуры. Более общий класс таких многообразий [11, 39] будет рассмотрен в следующей главе.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится группа абелевых фазовых симметрий многочлена $W_0(x)$. Заметим, что многочлен не изменяется, если каждую переменную x_i независимо умножить на корень пятой степени из единицы: $x_i \rightarrow \omega_i x_i$, $\omega_i^5 = 1$. Однако, в проективном пространстве уже диагонально действует группа $\mathbb{Z}_5 : [x_1, \dots, x_5] \rightarrow [\omega x_1, \dots, \omega x_5], \omega^5 =$

1. Таким образом, полная группа фазовых симметрий многочлена W_0 есть $\mathbb{Z}_5^4$. Но, нас интересует не просто группа симметрии полинома, а группа, сохраняющая само многообразие Калаби-Яу X . Для этого достаточно потребовать сохранения голоморфной $(3,0)$ формы, или, эквивалентно $\prod_i x_i$. Такая группа будет называться максимально допустимой. Мы будем обозначать её $SL(W_0)$. В случае квинтики она равна $SL(W_0) = \mathbb{Z}_5^3$, так как необходимо наложить дополнительное условие на группу фазовых симметрий: $\prod_i \omega_i = 1$.

Оказывается, что теперь можно рассматривать различные орбифолды гиперповерхности $\mathcal{Q}$ по подгруппам $SL(W_0)$. Некоторые из них будут образовывать зеркальные пары, о чем и пойдет речь в следующей главе.

Глава 2

Зеркальная симметрия и многообразия Калаби-Яу

Зеркальная симметрия предполагает геометрическую связь между парой алгебраических многообразий и изучается на протяжении десятилетий.

В соответствии с основной гипотезой, для зеркальной пары трёхмерных многообразий Калаби-Яу (X, Y) существует изоморфизм между их когомологиями, который выражается соотношением:

$$H^{p,q}(X) \cong H^{3-p,q}(Y). \quad (2.1)$$

Как было показано в главе 1, многообразия Калаби-Яу X и Y являются комплексными и кэлеровыми. Их комплексная и кэлерова структуры допускают непрерывные деформации. Это приводит к образованию пространств модулей комплексных структур $M_C(X)$ и кэлеровых структур $M_K(X)$ [32]. В силу отождествления пространств модулей с когомологиями

$$H^{2,1}(X) \sim M_C(X) \quad H^{1,1} \sim M_K(X), \quad (2.2)$$

зеркальную симметрию можно понимать как совпадение специальной геометрии [13] на пространствах модулей.

$$M_C(X) \simeq M_K(Y), \quad M_K(X) \simeq M_C(Y). \quad (2.3)$$

А значит и числа Ходжа связаны как:

$$h_{21}(X) = h_{11}(Y), \quad h_{21}(Y) = h_{11}(X). \quad (2.4)$$

Исторически одна из трактовок зеркальной симметрии возникла в работе Грина и Плесера [30]. Они рассматривали орбифолды семейства Квинтики $\mathcal{Q}$ по различным подгруппам

G "максимально допустимой" группы фазовой симметрии. В случае квинтики она равна $\mathbb{Z}_5^3$. В их оригинальной статье рассмотрено шесть различных орбифолдов. Удивительным оказалось то, что эти орбифолды разбиваются на зеркальные пары, у которых совпадают числа Ходжа (2.4):

$$h_{21}(\mathcal{Q}/G) = h_{11}(\mathcal{Q}/G^*), \quad h_{11}(\mathcal{Q}/G) = h_{21}(\mathcal{Q}/G^*). \quad (2.5)$$

Как связаны группы G и G^* мы поговорим в следующей главе. Следствием этого факта являлась двойственность пространств комплексных и кэлеровых структур для пары Калаби-Яу. Мы детально обсудим этот пример в конце этой главы.

Параллельно с этим возникала похожая симметрия между киральными кольцами некоторых двумерных, $N = 2$ суперсимметричных конформных теорий поля. Такие модели имеют центральный заряд $c = 9$ и возникают как компактный сектор пространства состояний суперструны. В оригинальной статье [4] была замечена симметрия между киральными-киральными (c, c) и антикиральными-киральными (a, c) кольцами. Поля из этих колец соответствуют безмассовым состояниям струны. Этому сюжету полностью посвящена глава 4.

В этой главе и далее в тексте диссертации мы, в основном, будем рассматривать многообразия Калаби-Яу, задаваемые нулями квази-однородного полинома:

$$W_M(x) = \sum_{i=1}^5 \prod_{j=1}^5 x_j^{M_{ij}} \quad (2.6)$$

во взвешенном проективном пространстве

$$\mathbb{P}_{(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5)}^4 = \left\{ (x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{C}^5 \setminus \{0\} \mid x_i \sim \lambda^{k_i} x_i \right\}. \quad (2.7)$$

Мы рассматриваем невырожденные многочлены, то есть

$$W_M(x) = \partial_i W_M(x) = 0 \iff x_i = 0 \quad \forall i. \quad (2.8)$$

Такие полиномы часто называют *обратимыми*. В частности, это означает, что число слагаемых в нем равно числу переменных.

Многообразия, которые задаются его нулями, называются *обратимые особенности*. Полином должен удовлетворять следующим свойствам:

- (i) матрица M состоит из целочисленных элементов и обратима;

(ii) многочлен W_M квази-однородный, то есть существует набор положительных целых чисел k_i (весов проективного пространства), а также число d (степень), такие, что:

$$\sum_{j=1}^5 M_{ij} k_j = d = \sum_{i=1}^5 k_i, \quad \forall i; \quad (2.9)$$

(iii) полином W_M невырожден за пределами начала координат. Как было показано в работе [40], W_M должен быть суммой обратимых многочленов одного из трех видов: Ферма, петля или цепь:

$$\begin{aligned} x_1^{a_1} + x_2^{a_2} + \dots + x_n^{a_n} &- \text{Ферма} \\ x_1^{a_1} x_2 + x_2^{a_2} x_3 + \dots + x_n^{a_n} &- \text{Цепь} \\ x_1^{a_1} x_2 + x_2^{a_2} x_3 + \dots + x_n^{a_n} x_1 &- \text{Петля.} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Эти факты гарантируют, что уравнение $W_M(x) = 0$ определяет многообразие Калаби-Яу. В литературе такие многообразия принято называть многообразиями Калаби-Яу *типа Берглунда-Хубша* [11].

Отметим некоторые свойства матрицы M и ее обратной матрицы $B = M^{-1}$. Существует набор положительных целых чисел $\bar{k}_j$, $j = 1, \dots, 5$ и целое положительное $\bar{d}$ такие, что

$$\sum_{i=1}^5 \bar{k}_i M_{ij} = \bar{d} = \sum_{l=1}^5 \bar{k}_l, \quad \forall j. \quad (2.11)$$

Используя условия квази-однородности (2.9), (2.11) и определение обратной матрицы $\sum_l B_{il} M_{lj} = \delta_{ij}$ можно получить следующие соотношения

$$\sum_{j=1}^5 B_{ij} = \frac{k_i}{d}, \quad (2.12)$$

и

$$\sum_{i=1}^5 B_{ij} = \frac{\bar{k}_j}{\bar{d}}. \quad (2.13)$$

Заметим, что условие квази-однородности

$$W_M(\lambda^{k_i} x_i) = \lambda^d W_M(x_i), \quad (2.14)$$

необходимо для того, чтобы уравнение $W_M(x_i) = 0$ имело смысл в $\mathbb{P}_{(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5)}^4$.

Многообразие Калаби-Яу X_M допускает деформацию комплексной и Кэлэровой струк-

туры. В терминах полиномов это можно реализовать как деформацию исходного W_M некоторыми мономами. Таким образом, полное семейство многообразий X_M задаются нулями полинома

$$W(x, \varphi) = \sum_{i=1}^5 \prod_{j=1}^5 x_j^{M_{ij}} + \sum_{s=1}^h \varphi_s e_s(x), \quad (2.15)$$

где мономы e_s также квази-однородны. Они образуют базис в пространстве деформаций комплексной структуры. Параметры φ_s являются модулями комплексной структуры, а $h = h_{21}(X)$ - соответствующие число Ходжа семейства X_M ¹.

В этой главе представлена простая проверка эквивалентности между конструкцией Зеркальной симметрии Берглунда-Хубша-Кравица (БХК) и конструкцией Батырева [1].

В оригинальной работе Берглунда и Хубша [11] была предложена конструкция, согласно которой зеркальный партнёр для гиперповерхности X_M , определяемой обратимым многочленом W_M , связан с гиперповерхностью X_{M^T} , заданной нулями “транспонированного” многочлена

$$W_{M^T}(z) = \sum_{i=1}^5 \prod_{j=1}^5 x_j^{(M^T)_{ij}} \quad (2.16)$$

в другом взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}_{(\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3, \bar{k}_4, \bar{k}_5)}^4$. Авторы выдвинули гипотезу, что зеркало к X_M может быть реализовано как фактор гиперповерхности X_{M^T} по определённой подгруппе фазовой симметрии полинома W_{M^T} .

Данный подход был обобщён Кравицем [12]. Конструкция начинается с полинома W_M и соответствующей гиперповерхности X_M . Пусть $SL(M)$ — группа фазовой симметрии, сохраняющая $H^{3,0}(X_M)$, а $J_M \subseteq SL(M)$ — её подгруппа, порождённая действием $\mathbb{C}^*$ на $\mathbb{P}_{(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5)}^4$. Выбирая подгруппу $G_0 \subseteq SL(M)$, содержащую J_M , можно показать, что фактор-пространство $Z(M, G) := X_M/G$, где $G = G_0/J_M$, является орбифолдом Калаби-Яу. Здесь $G = G_0/J_M$. Аналогичная процедура применяется к “транспонированному” полиному W_{M^T} , что позволяет построить дуальный орбифолд Калаби-Яу $Z(M^T, G^*) := X_{M^T}/G^*$. Кравиц предложил критерий выбора дуальной группы G^* , обеспечивающий, что $Z(M, G)$ и $Z(M^T, G^*)$ образуют зеркальную пару в смысле изоморфизма когомологий [12]. Следует также отметить серию работ, развивающих этот подход [41–43]. Более подробное описание данной процедуры будет приведено в следующем разделе.

С другой стороны, следуя подходу В. Батырева [10], зеркальный партнёр для исходного орбифолда может быть построен следующим образом. Потенциал W_M дополняется допустимыми квази-однородными мономами, инвариантными относительно действия группы G .

¹В общем случае - “мономиальное число Ходжа”, то есть размерность пространства мономиальных деформаций.

Показатели степеней мономов расширенного потенциала определяют набор векторов $\vec{V}_a \in \mathbb{Z}^5$. После сдвига на вектор $\vec{v}_0 = (1, 1, 1, 1, 1)$ векторы $\vec{V}'_a := \vec{V}_a - \vec{v}_0$ оказываются лежащими в четырёхмерной подрешётке L , ортогональной вектору весов $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5)$. Точки $\vec{V}'_a$ образуют рефлексивный многогранник Батырева $\Delta(M, G)$, ассоциированный с орбифолдом $Z(M, G)$, и связаны с рёбрами веера, двойственного к $\Delta(M, G)$.

Построение зеркального многообразия Y для $Z(M, G)$ осуществляется в два этапа. На первом этапе строится торическое многообразие T по вееру, соответствующему многограннику $\Delta(M, G)$ [10, 44]. На втором этапе определяется однородный полином W^Y , нули которого задают гиперповерхность, являющуюся зеркальным многообразием Калаби-Яу Y .

После этого мы строим отображение торического многообразия T во взвешенное проективное пространство $\mathbb{P}^4_{(k_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3, \bar{k}_4, \bar{k}_5)}$, которое возникает в конструкции БХК. Тем самым продемонстрировано, что результат построения зеркального двойника для двух конструкций совпадает [I].

”Сильная параллель” между конструкциями зеркальной симметрии Берглунда-Хубша-Кравица и Батырева основанная на соответствии Ландау-Гинзбург/Калаби-Яу, была предположена в работе Кладера и Руана [43]. В настоящей диссертации в качестве одного из основных результатов доказывается эквивалентность этих двух конструкций путём явного построения зеркального орбифолда Калаби-Яу, определённого как обратимая особенность.

2.1 Конструкция зеркальной симметрии Берглунда-Хубша-Кравица

Рассмотрим гиперповерхность Калаби-Яу X_M заданную в $\mathbb{P}^4_{(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5)}$ нулями многочлена:

$$W_M(x) = \sum_{i=1}^5 \prod_{j=1}^5 x_j^{M_{ij}}. \quad (2.17)$$

Так как многочлен W_M обладает свойством квази-однородности, то он инвариантен относительно действия группы J_M , которая действует на однородных координатах следующим образом:

$$x_i \mapsto \omega^{k_i} x_i, \quad \omega^d = 1. \quad (2.18)$$

Группу J_M часто называют группой *квантовой симметрии*.

На самом деле, многочлен W_M имеет гораздо большую группу диагональных автоморфизмов:

$$\text{Aut}(M) := \{(\lambda_1, \dots, \lambda_5) \in (\mathbb{C}^*)^5 \mid W_M(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_5 x_5) = W_M(x_1, \dots, x_5), \forall x_i\}, \quad (2.19)$$

Порядок этой группы равен $|\text{Aut}(M)| = d$, а также $J_M \subseteq \text{Aut}(M)$. Группа $\text{Aut}(M)$ порождена элементами $q_i(M)$, которые действуют следующим образом:

$$q_i(M) : x_j \mapsto e^{2\pi i B_{ji}} x_j, \quad (2.20)$$

где $B = M^{-1}$. Действительно, генераторы $\text{Aut}(M)$ действуют на каждом слагаемом в (2.6) тривиально:

$$q_l(M) \cdot \prod_{j=1}^5 x_j^{M_{ij}} = e^{2\pi i B_{ij} M_{jl}} \prod_{l=1}^5 x_l^{M_{il}} = e^{2\pi i \delta_{il}} \prod_{l=1}^5 x_l^{M_{il}} = \prod_{l=1}^5 x_l^{M_{il}}. \quad (2.21)$$

В этих терминах генератор группы J_M можно записать как:

$$\prod_{i=1}^5 q_i(M). \quad (2.22)$$

Максимальная по включению подгруппа $\text{Aut}(M)$, сохраняющая произведение $\prod_i x_i$, называется *максимально допустимой* группой. Обозначим её как $SL(M)$. Пусть $p_s(M)$ - её генераторы. Тогда:

$$SL(M) := \left\{ p_s(M) \in \text{Aut}(M) \mid p_s(M) \cdot \prod_{j=1}^5 x_j = \prod_{j=1}^5 x_j \right\}. \quad (2.23)$$

Всевозможные подгруппы $G \subset SL(M)$ будем называть *допустимыми*. Очевидно, что $J_M \subseteq SL(M)$, так как J_M тоже сохраняет $\prod x_i$.

Стоит отметить, что согласно своему определению, гиперповерхность Калаби-Яу X_M допускает существование голоморфной (3,0) формы Ω , которая не имеет нулей. В случае Калаби-Яу из списка Берглунда-Хубша (2.6), ее можно записать следующим образом:

$$\Omega = \frac{x_5 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3}{\partial W_M(x) / \partial x_4}. \quad (2.24)$$

Тогда группа $SL(M)$ является максимальной по включению подгруппой $\text{Aut}(M)$, которая сохраняет форму Ω .

Рассмотрим теперь некоторую допустимую группу G_0 , такую, что $J_M \subseteq G_0 \subseteq SL(M)$. Определим теперь фактор-группу

$$G := G_0 / J_M. \quad (2.25)$$

Теперь можно определить орбифолд Калаби-Яу X как

$$X := Z(M, G) = X_M/G. \quad (2.26)$$

В общем случае, конструкция Берглунда-Хубша-Кравица стартует с квази-однородного, обратимого многочлена W_M и группы G_0

$$J_M \subseteq G_0 \subseteq SL(M) \subseteq \text{Aut}(M). \quad (2.27)$$

Полное семейство орбифолда X определяется уравнением $\{W^X = 0\} \subseteq \mathbb{P}_{(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5)}^4/G$. Многочлен W_X определён как:

$$W^X(x, \varphi) = \sum_{i=1}^5 \prod_{j=1}^5 x_j^{M_{ij}} + \sum_{l=1}^{h_X} \varphi_l \prod_{j=1}^5 x_j^{S_{lj}}. \quad (2.28)$$

Здесь φ_l – модули деформаций комплексной структуры, а $h_X := h_{21}(X)$ – число Ходжа. Мономы

$$e_l := \prod_{j=1}^5 x_j^{S_{lj}} \quad (2.29)$$

в формуле (2.28) также являются квази-однородными, так как $\sum_j S_{lj} k_j = d$, и инвариантными относительно действия группы G . Они принадлежат G -инвариантному подкольцу в кольце Милнора [4]:

$$R = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_5] / \left\langle \frac{\partial W_M}{\partial x_j} \right\rangle \quad (2.30)$$

Обозначим моном со степенями $S_{h_X, i} = 1$, который играет выделенную роль, как e_{h_X} :

$$e_{h_X} = \prod_{i=1}^5 x_i. \quad (2.31)$$

Стоит отметить, что мономы e_l в формуле (2.28) являются подмножеством в базисе деформаций комплексной структуры e_s , $s = 1, \dots, h$ (см. (2.15)) исходного семейства Калаби-Яу X_M . Если обозначить генераторы группы G_0 как ρ_s , тогда легко видеть, что

$$\rho_s \cdot \prod_{j=1}^5 x_j^{S_{lj}} = \prod_{j=1}^5 x_j^{S_{lj}}, \quad l = 1, \dots, h_X. \quad (2.32)$$

Теперь можно провести аналогичные рассуждения, но начиная с многочлена W_{M^T} с

транспонированной матрицей степеней. Определим группы $J_{M^T} \subseteq G_0^* \subseteq SL(M^T) \subseteq \text{Aut}(M^T)$. Напомним, что многочлен

$$W_{M^T}(z) = \sum_{i=1}^5 \prod_{j=1}^5 z_j^{M_{ji}}, \quad (2.33)$$

имеющий степень $\bar{d} = \sum_j \bar{k}_j M_{ji}$, задает многообразие Калаби-Яу X_{M^T} в другом взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}_{(\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3, \bar{k}_4, \bar{k}_5)}^4$. Веса $\bar{k}_i$, естественно, удовлетворяют условию Калаби-Яу: $\sum_i \bar{k}_i = \bar{d}$.

Определив фактор-группу $G^* := G_0^T / J_{M^T}$, мы получим орбифолд Калаби-Яу

$$Z(M^T, G^*) := X_{M^T} / G^*. \quad (2.34)$$

Ясно, что группы G и G^* можно выбирать по-разному. Тогда возникает вопрос: возможно ли так выбрать группу G^* для заданной группы G , и если да, то как, чтобы многообразия $Z(M, G)$ и $Z(M^T, G^*)$ образовали зеркальную пару?

Ответ на этот вопрос дал Кравиц [12]. Его конструкция позволяет определить генераторы группы G_0^T . А, именно, они строятся при помощи показателей степеней S_{li} инвариантных мономов (2.29) следующим образом

$$\rho_l^T := \prod_{i=1}^5 q_i(M^T)^{S_{li}}, \quad (2.35)$$

где $q_i(M^T)$ – это генераторы допустимой группы $\text{Aut}(M^T)$ действующие на координатах z_j в $\mathbb{P}_{(\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3, \bar{k}_4, \bar{k}_5)}^4$ как

$$q_i(M^T) : z_j \mapsto e^{2\pi i B_{ij}} z_j. \quad (2.36)$$

Отсюда следует, что группа G_0^T действует на координатах z_j следующим образом:

$$\rho_l^T : z_j \mapsto e^{2\pi i \sum_i S_{li} B_{ij}} z_j. \quad (2.37)$$

Тогда полное семейство зеркального орбифолда $Z(M^T, G^*)$ задается нулями многочлена

$$W^{Z(M^T, G^*)}(z, \psi) = \sum_{i=1}^5 \prod_{j=1}^5 z_j^{M_{ji}} + \sum_{m=1}^{h_Y} \psi_m \prod_{j=1}^5 z_j^{R_{mj}}, \quad (2.38)$$

где ψ_m – модули комплексной структуры семейства $Z(M^T, G^*)$. Мономы-деформации $\bar{e}_m :=$

$\prod_{j=1}^5 z_j^{R_{mj}}$ инвариантны относительно действия группы G_0^T (2.37):

$$\rho_l^T \cdot \bar{e}_m = e^{2\pi i \sum_{ij} B_{ij} S_{li} R_{mj}} \prod_{j=1}^5 z_j^{R_{mj}} = \prod_{j=1}^5 z_j^{R_{mj}}. \quad (2.39)$$

Показатели степеней S_{li} и R_{mj} можно интерпретировать как целочисленные векторы $(\vec{S}_l)_j = S_{lj}$ и $(\vec{R}_m)_i = R_{mi}$, состоящие из пяти компонент. Условие инвариантности (2.39) можно переписать в терминах спаривания этих векторов при помощи матрицы B как [I]

$$(\vec{S}_l, \vec{R}_m) = \sum_{i,j=1}^5 B_{ij} S_{li} R_{mj} \in \mathbb{Z}. \quad (2.40)$$

Эти соотношения сильно ограничивают набор возможных решений, так как матрицы S и R состоят из целых и неотрицательных компонент². В то же время, элементы матрицы B рациональны.

Принимая во внимание условия квази-однородности

$$\sum_{i=1}^5 R_{mi} \bar{k}_i = \bar{d}, \quad (2.41)$$

можно заключить, что уравнения (2.40) имеют конечное число неотрицательных решений. Обозначим их число как h_Y .

Теорема Чиодо-Руана [45] утверждает, что орбифолды $Z(M, G)$ и $Z(M^T, G^*)$ образуют зеркальную пару на уровне гомологий

$$H^{p,q}(Z(M, G), \mathbb{C}) = H^{3-p,q}(Z(M^T, G^*), \mathbb{C}). \quad (2.42)$$

Таким образом, конструкция Берглунда-Хубша-Кравица позволяет определить многочлен $W^{Z(M^T, G^*)}$, который задает полное семейство орбифолда Калаби-Яу $Z(M^T, G^*)$.

²Стоит отметить, что в общем случае деформации комплексной структуры не обязательно исчерпываются только мономиальными деформациями. Будет приведен пример орбифолда квинтики, когда полиномиальное число Ходжа меньше, чем полное число $h_{2,1}$. В общем случае можно допустить лорановские решения, которых тоже конечное число.

2.2 Конструкция Батырева: построение зеркала, проверка эквивалентности двух конструкций

Для начала дадим некоторые важные определения из торической геометрии, которые возникают в конструкции зеркальной симметрии Батырева.

Пусть L - это решетка в $\mathbb{R}^d$, то есть это - некоторая дискретная подгруппа, изоморфная $L \simeq \mathbb{Z}^d$. Тогда *выпуклый рациональный конус* определяется как

$$\sigma = \{a_1 \vec{v}_1 + \dots + a_k \vec{v}_k \mid a_i \geq 0\}, \quad (2.43)$$

где $\vec{v}_i \in L$. Конус σ называется *строго выпуклым*, если $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$.

Также определим *веер* Σ как набор строго выпуклых конусов, удовлетворяющих двум условиям

- Каждая грань конуса в Σ - тоже конус в Σ .
- Каждые два конуса в Σ пересекаются по граням одного из них.

Одномерные конуса обозначаются как $\Sigma(1) \subset \Sigma$ и называются *ребрами веера*. Фактически эти конусы образуются векторами из решетки $\vec{v}_i \in L$. В дальнейшем удобно отождествлять конусы $\rho \in \Sigma(1)$ и их генераторы среди $\vec{v}_i$. То есть можно зафиксировать, что $\Sigma(1) = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$.

Для дальнейших рассуждений нам потребуется понятие *выпуклого рационального многогранника* Δ . Он строится по векторам решетки $\vec{v}_i \in L$ и определяется следующим образом

$$\Delta = \left\{ \sum_i x_i \vec{v}_i \mid 0 \leq x_i \leq 1, \sum_i x_i = 1 \right\}. \quad (2.44)$$

Батырев предложил использовать *рефлексивные* многогранники [10]. Многогранник Δ называется рефлексивным (или многогранником Батырева), если

- Все его грани коразмерности 1 лежат в гиперплоскостях вида $\{x_i \mid \sum_i a_i x_i = 1, a_i \in \mathbb{Z}\}$.
- Его внутренность содержит начало координат: $0 \in \text{Int}(\Delta)$.

Как следствие - единственная внутренняя точка с целочисленными координатами - это ноль. В дальнейшем мы не будем останавливаться на доказательстве рефлексивности рассматриваемых нами многогранников. Во всех случаях эти условия будут выполняться.

Полярно двойственный многогранник Δ^* к исходному Δ определяется как

$$\Delta^* = \{ \vec{y} \in \mathbb{R}^d \mid \forall \vec{x} \in \Delta \quad (\vec{y}, \vec{x}) \geq -1 \}. \quad (2.45)$$

Легко видеть, Δ^* - тоже рефлексивный. Более того, $(\Delta^*)^* = \Delta$.

Идея, предложенная В. Батыревым [10], заключалась в том, чтобы рассмотреть торические многообразия (T_Δ, T_{Δ^*}) , построенные по паре многогранников (Δ, Δ^*) . Целочисленные точки многогранника Δ соответствуют сечениям антиканонического расслоения над T . Оказывается, что гиперповерхности (X, Y) , задаваемые нулями общих сечений антиканонических расслоений в T_Δ и T_{Δ^*} образуют зеркальную пару [43]. В следующем разделе, в частности, мы продемонстрируем способ построения торического многообразия по многограннику.

В качестве примера рассмотрим рефлексивный многогранник на рисунке 2.1. Видно, что все целочисленные точки Δ лежат на границе, а единственная точка с целыми координатами внутри - это ноль. Согласно условиям (2.45) можно определить полярно-двойственный многогранник Δ^* .

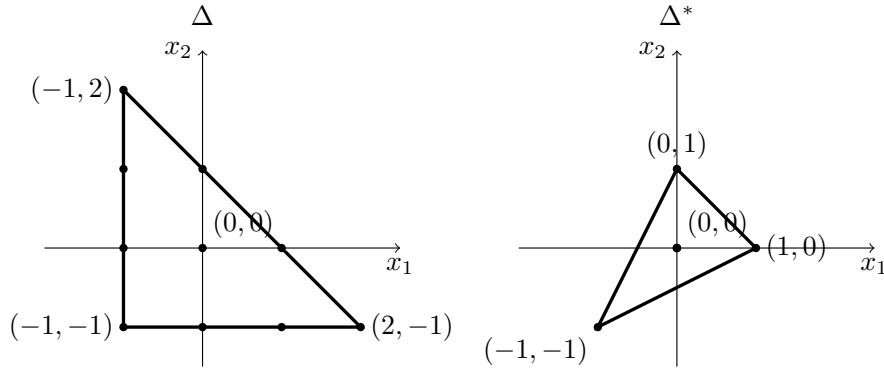


Рис. 2.1: Рефлексивный многогранник Δ и его полярно-двойственный Δ^* .

Построение зеркала по конструкции Батырева

Далее в этом разделе, следуя подходу Батырева [10], будет построен зеркальный двойник Y для орбифолда $Z(M, G)$ как гиперповерхность в торическом многообразии [1]. Будет найден явный вид зеркального многочлена W^Y как функции однородных координат в торическом многообразии. Также будет показано, что зеркальная гиперповерхность Y эквивалентна орбифолду Калаби-Яу $Z(M^T, G^*)$ (2.38) во взвешенном проективном пространстве, который был получен по конструкции Берглунда-Хубша-Кравица. Это будет сделано в два шага.

Первый шаг – это построение торического многообразия. Чтобы его построить, начнем с обратимого квази-однородного многочлена W_M (2.28) с деформациями e_l . Перепишем его в виде

$$W^X(x, \varphi) = \sum_{i=1}^5 \prod_{j=1}^5 x_j^{M_{ij}} + \sum_{l=1}^{h_X} \varphi_l \prod_{j=1}^5 x_j^{S_{lj}} = \sum_{a=1}^{h_X+5} C_a \prod_{j=1}^5 x_j^{V_{aj}}. \quad (2.46)$$

Показатели степеней V_{aj} являются компонентами целочисленных векторов: $V_{aj} = (\vec{V}_a)_j$. Они равны:

$$V_{aj} = \begin{cases} M_{aj}, & 1 \leq a \leq 5 \\ S_{a-5,j}, & 6 \leq a \leq h \end{cases} \quad (2.47)$$

а вектор $\vec{V}_{h_X+5}$ имеет компоненты $(1, 1, 1, 1, 1)$. Из условия

$$\sum_{i=1}^5 V_{ai} k_i = d \quad (2.48)$$

следует, что векторы $\vec{V}'_a := \vec{V}_a - \vec{V}_{h_X+5}$ лежат в четырехмерной решетке $L \subset \mathbb{Z}^5$. Более точно: они принадлежат подрешетке L , определенной по группе G .

Эти векторы $\vec{V}'_a$ соответствуют решеточным точкам рефлексивного многогранника $\Delta(M, G)$. Они также соответствуют ребрам веера Σ^* дуального рефлексивного многогранника (2.45) [10, 44]. Веер определяет торическое многообразие T . Построим его. Векторы $\vec{V}'_a$, $a = 1, \dots, h_X + 4$, будучи четырехмерными, удовлетворяют h_X линейным соотношениям

$$\sum_{a=1}^{h_X+4} Q_{la} \vec{V}'_a = 0, \quad l = 1, \dots, h_X, \quad (2.49)$$

где коэффициенты Q_{la} целые³.

Решения уравнений (2.49) имеют следующий вид [35]

$$Q_{la} = \begin{cases} S_{lj} B_{ja}, & 1 \leq a \leq 5 \\ -\delta_{l,a-5}, & a > 5. \end{cases} \quad (2.50)$$

Числа Q_{la} являются весами действия группы тора $(\mathbb{C}^*)^{h_X}$. Зная их, мы можем определить торическое многообразие T как [44]

$$T = \frac{\mathbb{C}^{h_X+4} - Z}{(\mathbb{C}^*)^{h_X}}, \quad (2.51)$$

где Z это $(\mathbb{C}^*)^{h_X}$ -инвариантное подмножество [44]. Абелева группа $(\mathbb{C}^*)^{h_X}$ действует на координатах в T как

$$y_a \mapsto \lambda^{Q_{la}} y_a, \quad l = 1, \dots, h_X; \quad a = 1, \dots, h_X + 4. \quad (2.52)$$

Тогда зеркальное многообразие Калаби-Яу Y будет задаваться как гиперповерхность в

³Можно допустить рациональные коэффициенты. Очевидно, что из целых можно легко получить рациональные и наоборот.

торическом многообразии T . А, именно, Y определяется как решения уравнения $W^Y(y) = 0$, где $W^Y(y)$ - инвариантный относительно действия группы тора $(\mathbb{C}^*)^{h_X}$ многочлен⁴. Многочлен W^Y невырожден и имеет следующие условия однородности по отношению к действию группы тора [35], [IV]:

$$W^Y(\lambda^{Q_{l1}} y_1, \dots, \lambda^{Q_{lh_X+4}} y_{h_X+4}) = W^Y(y_1, \dots, y_{h_X+4}), \quad l = 1, \dots, h_X - 1, \quad (2.53)$$

$$W^Y(\lambda^{Q_{h_X1}} y_1, \dots, \lambda^{Q_{h_X h_X+4}} y_{h_X+4}) = \lambda W^Y(y_1, \dots, y_{h_X+4}). \quad (2.54)$$

Будем искать его как сумму квази-однородных мономов:

$$W^Y(y) = \sum_{b=1}^{h_Y+5} \tilde{C}_b \prod_{a=1}^{h_X+4} y_a^{N_{ba}}. \quad (2.55)$$

Показатели степеней N_{ba} это неотрицательные целые числа. Мы уже знаем 5 инвариантных мономов следующего вида

$$P_i = \prod_{a=1}^{h_X+4} y_a^{V_{ai}} = \prod_{j=1}^5 y_j^{M_{ji}} \times \prod_{l=1}^{h_X-1} y_{l+5}^{S_{li}} = \prod_{j=1}^5 y_j^{(M^T)_{ij}} \times \prod_{l=1}^{h_X-1} y_{l+5}^{S_{li}}, \quad (2.56)$$

здесь $i = 1, \dots, 5$. Легко проверить, что мономы инвариантны относительно действия $(\mathbb{C}^*)^{h_X}$, так как $\sum_a Q_{la} V_{ai} = 0$. Также, мы знаем еще один инвариантный моном

$$\bar{e}_{h_Y} = \prod_{a=1}^{h_X+4} y_a. \quad (2.57)$$

Остальные слагаемые в W^Y можно искать в следующем виде

$$\bar{e}_m = \prod_{a=1}^{h_X+4} y_a^{N_{ma}} = \prod_{j=1}^5 y_j^{N_{mj}} \times \prod_{l=1}^{h_X-1} y_{l+5}^{N_{m,l+5}}. \quad (2.58)$$

Из инвариантности $\bar{e}_m$ относительно действия $(\mathbb{C}^*)^{h_X}$ мы получаем, что показатели степеней N_{mi} должны удовлетворять следующим соотношениям

$$B_{ji} S_{lj} N_{mi} - N_{m,l+5} = \delta_{l,h_X}. \quad (2.59)$$

⁴В данном случае W^Y является общим сечением (произвольной линейной комбинацией сечений) антиканонического расслоения над T .

Так как числа $N_{m,l+5}$ должны быть целыми, мы получаем условия на числа N_{mi} :

$$B_{ji}S_{lj}N_{mi} \in \mathbb{Z}, \quad (2.60)$$

что в точности совпадает с условием на показатели степеней R_{mi} из конструкции БХК (2.40).

Используя факт, что $S_{h_X,j} = 1$ и соотношения (2.13) для матрицы B мы получаем из (2.59) для $l = h_X$

$$N_{mj}\bar{k}_j = \bar{d}. \quad (2.61)$$

Таким образом, как следует из (2.60) и (2.61) мы заключаем, что эти уравнения имеют такие же решения как и соотношения (2.40) из подхода БХК. Тогда

$$N_{mi} = R_{mi}. \quad (2.62)$$

Оставшиеся показатели степеней мы получаем, используя формулу (2.59)

$$N_{m,l+5} = S_{lj}B_{ji}R_{mi}. \quad (2.63)$$

Таким образом, мы наконец находим явный вид многочлена W^Y , нули которого определяют зеркальное многообразие Y согласно конструкции Батырева:

$$W^Y(y_1, \dots, y_{h_X+4}) = \sum_{i=1}^5 \prod_{j=1}^5 y_j^{M_{ji}} \prod_{l=1}^{h_X-1} y_{l+5}^{S_{li}} + \sum_{m=1}^{h_Y} \psi_m \prod_{j=1}^5 y_j^{R_{mj}} \prod_{l=1}^{h_X-1} y_{l+5}^{(S_{lj}B_{ji}R_{mi})}. \quad (2.64)$$

Это один из основных результатов работы [I].

Стоит отметить, что так определенное многообразие Калаби-Яу Y является пространством суперсимметричных вакуумов некоторой двумерной, линейной, калибровочной сигма-модели (КЛСМ) на сфере. Координаты y_l играют роль скалярных компонент кирального суперполя. Единственное отличие в том, что многообразие вакуумов Y определяется критическими точками некоторого инвариантного многочлена, входящего в суперпотенциал:

$$Y = \left\{ (y_1, \dots, y_{h_X+5}) \in T \mid \frac{\partial F(y_1, \dots, y_{h_X+5})}{\partial y_a} = 0, \quad \forall a = 1, \dots, h_X + 5 \right\}, \quad (2.65)$$

$$F(\lambda^{Q_{l,1}} y_1, \dots, \lambda^{Q_{l,h_X+5}} y_{h_X+5}) = F(y_1, \dots, y_{h_X+5}), \quad \forall l = 1, \dots, h_X. \quad (2.66)$$

Этому будет отдельно посвящена целая глава 4. А пока обсудим как это связано с най-

денным нами многочленом (2.64). Как было показано Виттеном [46], многочлен $F(y)$ имеет специальный вид. Так как каждое слагаемое обязательно содержит "поле" y_{h_X+5} , которое соответствует вектору $V_{h_X+5,i} = 1$, то его можно записать как

$$F(y_1, \dots, y_{h_X+5}) = y_{h_X+5} \cdot W^Y(y_1, \dots, y_{h_X+4}). \quad (2.67)$$

Тогда многообразие (2.65), которое задается критическими точками многочлена $F(y)$, можно определить как множество решений следующей системы:

$$Y = \left\{ (y_1, \dots, y_{h_X+5}) \in T \mid W^Y(y_1, \dots, y_{h_X+4}) = 0, \quad y_{h_X+5} = 0 \right\}, \quad (2.68)$$

где W^Y нами уже найден (2.64).

Перейдем теперь к связи конструкции Батырева с конструкцией БХК. Чтобы увидеть это соответствие, мы введём новые координаты [1]:

$$(y_1, \dots, y_{h_X+4}) \mapsto (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5), \quad (2.69)$$

где

$$z_j = y_j \prod_{l=1}^{h_X-1} y_{l+5}^{S_{li}B_{ij}}, \quad 1 \leq j \leq 5. \quad (2.70)$$

Замена координат (2.69) отображает торическое многообразие T в фактор взвешенного проективного пространства $\mathbb{P}_{(\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3, \bar{k}_4, \bar{k}_5)}^4 / G^*$. Действительно, абелева группа $(\mathbb{C}^*)^{h_X}$ действует на z_j как

$$z_j \mapsto \lambda^{Q_{sj} + Q_{s,l+5}S_{li}B_{ij}} z_j = \lambda^{S_{sm}B_{mj} - \delta_{sl}S_{li}B_{ij}} z_j = z_j, \quad s = 1, \dots, h_X - 1. \quad (2.71)$$

И, в силу факта, что $S_{h_X j} = 1$ и свойства матрицы B (2.13),

$$z_j \mapsto \lambda^{S_{h_X m}B_{mj}} z_j = \lambda^{\sum_m B_{mj}} z_j = \lambda^{\nu_j} z_j, \quad (2.72)$$

где $\nu_j := \bar{k}_j / \bar{d}$.

Легко показать, что многочлен W^Y может быть переписан в новых координатах как

$$W^Y(z) = \sum_{i=1}^5 \prod_{j=1}^5 z_j^{(M^T)_{ij}} + \sum_{m=1}^{h_Y} \psi_m \prod_{j=1}^5 z_j^{R_{mj}}, \quad (2.73)$$

что совпадает с результатом, полученным согласно конструкции Берглунда-Хубша-Кравица

(2.38).

Таким образом, в этой главе была продемонстрирована простая проверка эквивалентности двух зеркальных партнеров, полученных по конструкциям Берглунда-Хубша-Кравица и Батырева. А именно, стартуя с обратимого многочлена W_M , допустимой группы G взвешенного проективного пространства $\mathbb{P}^4_{(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5)}$ мы получили зеркало в другом проективном пространстве $\mathbb{P}^4_{(\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3, \bar{k}_4, \bar{k}_5)}$. Следуя подходу Батырева, мы построили торическое многообразие и нашли явный вид зеркального многочлена W^Y . И, наконец, мы показали связь между торическим многообразием и взвешенным проективным пространством. Результат этих двух конструкций совпадает. Этот подход был продемонстрирован в работе [III] на примере орби-фолдов квинтки. Обсудим эти примеры подробнее.

2.3 Пример: орбифолды квинтки

Простейшим примером многообразия Калаби-Яу, заданного во взвешенном проективном пространстве нулями обратимого многочлена, является квинтика с числами Ходжа $h_{21}(\mathcal{Q}) = 101$ и $h_{11}(\mathcal{Q}) = 1$. Как мы и обсуждали в предыдущей главе, полное семейство получается добавлением к исходному многочлену типа "Ферма": $W_0 = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5$ деформаций:

$$\mathcal{Q} = \left\{ (x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{P}^4 \mid W_{\mathcal{Q}}(x, \varphi) := x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + \sum_{s=1}^{101} \varphi_s e_s(x) = 0 \right\}, \quad (2.74)$$

Действительно, добавление различных мономов пятой степени меняет комплексную структуру многообразия $\mathcal{Q}$, так как не является заменами координат в проективном пространстве. Эти мономы e_l лежат в кольце Милнора, которое в данном случае равно: $R = \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_5]}{\langle x_1^4, \dots, x_5^4 \rangle}$, и имеют степень не выше 3:

$$e_l = \prod_{i=1}^5 x_i^{S_{li}} \quad 0 \leq S_{li} \leq 3. \quad (2.75)$$

Мы уже приводили их полный список (1.52):

$$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5, \quad x_1^3 x_2^2, \quad x_1^3 x_2 x_3, \quad x_1^2 x_2^2 x_3, \quad x_1^2 x_2 x_3 x_4 \quad (2.76)$$

в количестве: $1 + 20 + 30 + 30 + 20 = 101$.

Напомним, что пространство Кэлеровых форм имеет размерность $h_{11} = 1$.

В нашем случае матрица степеней диагональна, и равна $M = 5I$, где I - единичная матрица. А также $W_M = W_{M^T} \equiv W_0$. Исходный полином $W_0(x)$ имеет группу квантовой симметрии $J_{5I} = \mathbb{Z}_5[1, 1, 1, 1, 1]$. Полная группа симметрии полинома есть $\text{Aut}(5I) = \mathbb{Z}_5^5$ с

Таблица 2.1: Орбифолды квинтики. Числа Ходжа записаны для орбифолда $\mathcal{Q}/G$

G	G^*	h_{21}	h_{11}
1	$\mathbb{Z}_5[0, 1, 0, 0, 4] \oplus \mathbb{Z}_5[0, 0, 1, 0, 4] \oplus \mathbb{Z}_5[0, 0, 0, 1, 4]$	101	1
$\mathbb{Z}_5[0, 1, 1, 4, 4]$	$\mathbb{Z}_5[0, 1, 4, 0, 0] \oplus \mathbb{Z}_5[0, 0, 0, 1, 4]$	17	21
$\mathbb{Z}_5[0, 1, 2, 3, 4]$	$\mathbb{Z}_5[0, 1, 3, 1, 0] \oplus \mathbb{Z}_5[0, 1, 1, 0, 3]$	21	1
$\mathbb{Z}_5[0, 0, 0, 1, 4]$	$\mathbb{Z}_5[0, 1, 4, 0, 0] \oplus \mathbb{Z}_5[0, 3, 0, 1, 1]$	49	5

генераторами, действующими как $q_i(5I) : x_i \mapsto e^{2\pi i/5} x_i$. А группа, сохраняющая произведение $\prod_{i=1}^5 x_i$ есть

$$SL(5I) = \mathbb{Z}_5^4 = \mathbb{Z}_5[1, 0, 0, 0, 4] \oplus \mathbb{Z}_5[0, 1, 0, 0, 4] \oplus \mathbb{Z}_5[0, 0, 1, 0, 4] \oplus \mathbb{Z}_5[0, 0, 0, 1, 4]. \quad (2.77)$$

Она содержит диагональ $J_{5I} = \mathbb{Z}_5[1, 1, 1, 1, 1]$, а факторгруппа равна

$$SL'(5I) := SL(5I)/J_{5I} = \mathbb{Z}_5[0, 1, 0, 0, 4] \oplus \mathbb{Z}_5[0, 0, 1, 0, 4] \oplus \mathbb{Z}_5[0, 0, 0, 1, 4]. \quad (2.78)$$

Зеркальным многообразием к семейству квинтики (1.53) будет орбифолд по максимально допустимой группе $SL'(5I) \simeq \mathbb{Z}_5^3$, который представляет собой однопараметрическое семейство:

$$\mathcal{Q}^* = \mathcal{Q}/\mathbb{Z}_5^3 = \left\{ (y_1, \dots, y_5) \in \mathbb{P}^4/\mathbb{Z}_5^3 \mid W_{\mathcal{Q}^*}(y, \varphi) := y_1^5 + y_2^5 + y_3^5 + y_4^5 + y_5^5 + \psi \prod_{i=1}^5 y_i = 0 \right\}. \quad (2.79)$$

Числа Ходжа, очевидно, зеркально двойственны к исходному семейству $\mathcal{Q}$: $h_{21}(\mathcal{Q}^*) = h_{11}(\mathcal{Q}) = 1$, и $h_{11}(\mathcal{Q}^*) = h_{21}(\mathcal{Q}) = 101$.

В работе Грина и Плессера [30] были приведены три зеркальные пары орбифолдов квинтики по различным допустимым группам. Они представлены в таблице 2.1.

В этой главе мы построим их явно. А именно, пользуясь конструкцией БХК, напомним многочлены, которыми задаются зеркальные семейства и сравним это с конструкцией Батырева.

Орбифолд (17,21)

В качестве первого примера рассмотрим орбифолд с числами Ходжа (17,21). Он соответ-

ствуется второй строке в таблице 2.1.

$$X = \frac{\mathcal{Q}}{\mathbb{Z}_5[0, 1, 1, 4, 4]} \quad ; \quad Y = \frac{\mathcal{Q}}{\mathbb{Z}_5[0, 1, 4, 0, 0] \oplus \mathbb{Z}_5[0, 0, 0, 1, 4]}, \quad (2.80)$$

с числами Ходжа $h_{21}(X) = h_{11}(Y) = 17$ и $h_{11}(X) = h_{21}(Y) = 21$.

Семейство Калаби-Яу X задается нулями многочлена

$$W_X(x) = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + \sum_{l=1}^{17} \varphi_l e_l(x) = \sum_{a=1}^{22} C_a \prod_{j=1}^5 x_j^{V_{aj}}, \quad (2.81)$$

где $e_l(x) := \prod_{i=1}^5 x_i^{S_{li}}$ инвариантны относительно действия $\mathbb{Z}_5[1, 1, 1, 1, 1] \oplus \mathbb{Z}_5[0, 1, 1, 4, 4]$. Они равны:

$$\begin{aligned} e_1 &= x_2^3 x_3^2, \quad e_2 = x_2^2 x_3^3, \quad e_3 = x_4^2 x_5^3, \quad e_4 = x_4^3 x_5^2, \quad e_5 = x_1^3 x_2 x_4, \quad e_6 = x_1^3 x_3 x_4, \quad e_7 = x_1^3 x_3 x_5, \\ e_8 &= x_1^3 x_2 x_5, \quad e_9 = x_1 x_2^2 x_4^2, \quad e_{10} = x_1 x_3^2 x_5^2, \quad e_{11} = x_1 x_3^2 x_4^2, \quad e_{12} = x_1 x_2^2 x_5^2, \quad e_{13} = x_1 x_2 x_3 x_4^2, \\ e_{14} &= x_1 x_2 x_3 x_5^2, \quad e_{15} = x_1 x_2^2 x_4 x_5, \quad e_{16} = x_1 x_3^2 x_4 x_5, \quad e_{17} = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Согласно конструкции Берглунда–Хубша–Кравица зеркальное Калаби-Яу строится как орбифолд $Y = \mathcal{Q}/G^*$. Группа G^* определяется генераторами $q(l) = \prod_{i=1}^5 q_i(5I)^{S_{li}}$, где S_{li} — степени мономов $e_l(x)$ в (2.82), а $q_i(5I)$ порождают группы $\mathbb{Z}_5[1, 0, 0, 0, 0], \dots, \mathbb{Z}_5[0, 0, 0, 0, 1]$. Иначе говоря, группу G^* порождена аддитивными группами $\mathbb{Z}_5[S_{l1}, S_{l2}, S_{l3}, S_{l4}, S_{l5}]$ по модулю действия $\mathbb{Z}_5[1, 1, 1, 1, 1]$. В данном случае у группы G^* два генератора, и она равна

$$G^* = \mathbb{Z}_5[0, 1, 4, 0, 0] \oplus \mathbb{Z}_5[0, 0, 0, 1, 4]. \quad (2.83)$$

На самом деле, получить явный вид мономов - деформаций зеркала $e_m^T(z) = \prod_{i=1}^5 z_i^{R_{mi}}$ в (2.85) можно, решая уравнения (2.40), которые в данном случае упрощаются

$$\sum_i S_{li} R_{mi} = 0 \pmod{5}. \quad (2.84)$$

Решения уравнений (2.84) дают нам степени мономов. Они равны

$$e_1^T(z) = z_1 z_2^2 z_3^2, \quad e_2^T(z) = z_1 z_4^2 z_5^2, \quad e_3^T(z) = z_1^3 z_4 z_5, \quad e_4^T(z) = z_1^3 z_2 z_3, \quad e_5^T(z) = z_1 z_2 z_3 z_4 z_5. \quad (2.85)$$

Согласно конструкции Берглунда–Хубша–Кравица, зеркальный орбифолд Y определяется

как нули следующего многочлена

$$W_Y(z) = z_1^5 + z_2^5 + z_3^5 + z_4^5 + z_5^5 + \sum_{m=1}^5 \psi_m e_m^T(z). \quad (2.86)$$

Теперь, следуя подходу Батырева, мы строим зеркального двойника в торическом многообразии:

$$T = \frac{\mathbb{C}^{21} - Z}{\mathbb{C}^{*17}}. \quad (2.87)$$

Повторяя рассуждения из предыдущей главы, мы получаем, согласно (2.64), явный многочлен:

$$W_Y(y) = \sum_{i=1}^5 y_i^5 \prod_{l=1}^{16} y_{l+5}^{S_{li}} + \sum_{m=1}^{17} \psi_m \prod_{j=1}^5 y_j^{R_{mj}} \prod_{l=1}^{16} y_{l+5}^{(S_{li} R_{mi})/5}, \quad (2.88)$$

где числа S_{li} - степени мономов (2.82), а R_{mj} - степени (2.85). В данном случае замена координат имеет вид

$$z_j = y_j \prod_{l=1}^{16} y_{l+5}^{\frac{S_{lj}}{5}}, \quad (2.89)$$

после чего многочлен (2.88) переходит в (2.86), что демонстрирует на явном примере эквивалентность подходов БХК и Батырева.

Орбифолд (21,1)

Следующий пример зеркальной пары орбифолдов

$$X = \frac{Q}{\mathbb{Z}_5[0, 1, 2, 3, 4]}, \quad Y = \frac{Q}{\mathbb{Z}_5[0, 1, 3, 1, 0] \oplus \mathbb{Z}_5[0, 1, 1, 0, 3]}, \quad (2.90)$$

с числами Ходжа $h_{21}(X) = h_{11}(Y) = 21$ и $h_{11}(X) = h_{21}(Y) = 1$. Орбифолд X задается нулями многочлена

$$W_X(x) = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + \sum_{l=1}^{21} \varphi_l e_l(x) \quad (2.91)$$

а деформации $e_l(x)$ инвариантны относительно действия группы $H = \mathbb{Z}_5[1, 1, 1, 1, 1] \oplus \mathbb{Z}_5[0, 1, 2, 3, 4]$.

Их список:

$$\begin{aligned} e_1 &= x_1^3 x_3 x_4, \quad e_2 = x_1^3 x_2 x_5, \quad e_3 = x_1^2 x_2 x_3^2, \quad e_4 = x_1^2 x_2^2 x_4, \quad e_5 = x_1^2 x_3 x_5^2, \\ e_6 &= x_1^2 x_4^2 x_5, \quad e_7 = x_1 x_2 x_4^3, \quad e_8 = x_1 x_2^2 x_5^2, \quad e_9 = x_1 x_4 x_5^3, \quad e_{10} = x_1 x_3^3 x_5, \quad e_{11} = x_1 x_2^3 x_3, \\ e_{12} &= x_1 x_3^2 x_4^2, \quad e_{13} = x_3^2 x_4 x_5^2, \quad e_{14} = x_2 x_3^3 x_4, \quad e_{15} = x_2 x_3 x_5^3, \quad e_{16} = x_2 x_4^2 x_5^2, \quad e_{17} = x_2^2 x_3 x_4^2, \\ e_{18} &= x_2^2 x_3^2 x_5, \quad e_{19} = x_2^3 x_4 x_5, \quad e_{20} = x_3 x_4^3 x_5, \quad e_{21} = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Аналогично как и в прошлом случае, конструкция Берглунда–Хубша–Кравица дает нам

зеркальный орбифолд $Y = \mathcal{Q}/G^*$ по группе

$$G^* = \mathbb{Z}_5[0, 1, 3, 1, 0] \oplus \mathbb{Z}_5[0, 1, 1, 0, 3]. \quad (2.93)$$

А единственный моном, инвариантный относительно G^* есть $\prod_i z_i$. Тогда зеркало Y задается нулями следующего многочлена

$$W_Y(z) = z_1^5 + z_2^5 + z_3^5 + z_4^5 + z_5^5 + \psi z_1 z_2 z_3 z_4 z_5. \quad (2.94)$$

Перейдем к конструкции Батырева. Аналогично определяются набор векторов $\vec{V}_a$, $a = 1, \dots, 26$, и целые числа Q_{la} , $l = 1, \dots, 21$. Зеркало Y задается нулями полинома W_Y в торическом многообразии

$$T = \frac{\mathbb{C}^{25} - Z}{\mathbb{C}^{*21}}. \quad (2.95)$$

Накладывая аналогичные ограничения на степени мономов в W_Y , а также делая замену на проективные координаты получаем его явный вид, который совпадает с (2.94).

Орбифолд (49,5) Последним примером будет следующая пара орбифолдов

$$X = \frac{\mathcal{Q}}{\mathbb{Z}_5[0, 0, 0, 1, 4]} \quad h_X = 25. \quad (2.96)$$

Полное семейство Калаби-Яу X задается уравнением

$$W_X = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + \sum_{l=1}^{49} \varphi_l e_l(x). \quad (2.97)$$

В данном случае не все слагаемые e_l , инвариантны относительно $H = \mathbb{Z}_5[1, 1, 1, 1, 1] \oplus \mathbb{Z}_5[0, 0, 0, 1, 4]$, являются мономиальными деформациями. Появляются также и лорановские. Ниже представлен список мономов, которых всего 25

$$\begin{aligned} e_1 &= x_1^3 x_2^2, \quad e_2 = x_1^3 x_3^2, \quad e_3 = x_2^3 x_3^2, \quad e_4 = x_1^2 x_2^3, \quad e_5 = x_1^2 x_3^3, \quad e_6 = x_2^2 x_3^3, \\ e_7 &= x_1^3 x_2 x_3, \quad e_8 = x_1 x_2^3 x_3, \quad e_9 = x_1 x_2 x_3^3, \quad e_{10} = x_1^2 x_2^2 x_3, \quad e_{11} = x_1^2 x_2 x_3^3, \\ e_{12} &= x_1 x_2^2 x_3^2, \quad e_{13} = x_1^3 x_4 x_5, \quad e_{14} = x_2^3 x_4 x_5, \quad e_{15} = x_3^3 x_4 x_5, \quad e_{16} = x_1^2 x_2 x_4 x_5, \\ e_{17} &= x_1^2 x_3 x_4 x_5, \quad e_{18} = x_2^2 x_3 x_4 x_5, \quad e_{19} = x_1 x_2^2 x_4 x_5, \quad e_{20} = x_1 x_3^2 x_4 x_5, \quad e_{21} = x_2 x_3^2 x_4 x_5, \\ e_{22} &= x_1 x_4^2 x_5^2, \quad e_{23} = x_2 x_4^2 x_5^2, \quad e_{24} = x_3 x_4^2 x_5^2, \quad e_{25} = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5. \end{aligned} \quad (2.98)$$

В оригинальной работе Грина и Плессера [30] полное число Ходжа

$$h_{21}(X) = h_{21}^{\text{Pol.}}(X) + h_{21}^{\text{Laurent}}(X) = 49. \quad (2.99)$$

Таким образом, есть еще 24 Лорановских мономов среди деформаций исходного полинома W_0 :

$$\begin{aligned} g_1 &= x_1^{-1} x_2 x_3^3 x_4 x_5, \quad g_2 = x_1 x_2^{-1} x_3^3 x_4 x_5, \quad g_3 = x_1^3 x_2 x_3^{-1} x_4 x_5, \quad g_4 = x_1^{-1} x_2^2 x_3^2 x_4 x_5, \\ g_5 &= x_1^2 x_2^{-1} x_3^2 x_4 x_5, \quad g_6 = x_1^2 x_2^2 x_3^{-1} x_4 x_5, \quad g_7 = x_1^{-1} x_2^3 x_3 x_4 x_5, \quad g_8 = x_1 x_2^3 x_3^{-1} x_4 x_5, \\ g_9 &= x_1^3 x_2^{-1} x_3 x_4 x_5, \quad g_{10} = x_1^{-1} x_2^2 x_3^2 x_5^2, \quad g_{11} = x_2^{-1} x_3^2 x_4^2 x_5^2, \quad g_{12} = x_1^2 x_3^{-1} x_4^2 x_5^2, \\ g_{13} &= x_1^{-1} x_2 x_3 x_4^2 x_5^2, \quad g_{14} = x_1 x_2^{-1} x_3 x_4^2 x_5^2, \quad g_{15} = x_1 x_2 x_3^{-1} x_4^2 x_5^2, \quad g_{16} = x_1^{-1} x_2^2 x_4^2 x_5^2, \\ g_{17} &= x_2^2 x_3^{-1} x_4^2 x_5^2, \quad g_{18} = x_1^2 x_2^{-1} x_4^2 x_5^2, \quad g_{19} = x_1^{-1} x_4^3 x_5^3, \quad g_{20} = x_2^{-1} x_4^3 x_5^3, \\ g_{21} &= x_3^{-1} x_4^3 x_5^3, \quad g_{22} = x_1^{-1} x_2^3 x_3^3, \quad g_{23} = x_1^3 x_2^{-1} x_3^3, \quad g_{24} = x_1^3 x_2^3 x_3^{-1}. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Отметим, что наличие лорановских деформаций отвечает "твистованному сектору" с точки зрения $N = 2$ суперконформной теории поля. Об этом мы поговорим в главе 4, однако, кратко отметим: чтобы явно получить все деформации, отвечающие киральным полям, необходимо решать уравнения взаимной локальности (4.110). Роль зарядов q_i играют степени мономов S_{li} , а векторы w_i - элементы допустимой группы.

По конструкции БХК зеркальное Калаби-Яу определяется как

$$Y = \frac{Q}{\mathbb{Z}_5[0, 1, 4, 0, 0] \oplus \mathbb{Z}_5[0, 3, 0, 1, 1]}, \quad h_Y = 5, \quad (2.101)$$

и задается нулями полинома

$$W_Y = \sum_{j=1}^5 z_j^5 + \psi_1 z_4^2 z_5^3 + \psi_2 z_4^3 z_5^2 + \psi_3 z_1 z_2 z_3 z_5^2 + \psi_4 z_1 z_2 z_3 z_4^2 + \psi_5 z_1 z_2 z_3 z_4 z_5. \quad (2.102)$$

Со стороны конструкции Батырева зеркальный орбифолд реализуется как гиперповерхность в торическом многообразии

$$T = \frac{\mathbb{C}^{29} - Z}{\mathbb{C}^{*25}}. \quad (2.103)$$

Аналогичные приведенным выше вычисления дают явный вид полинома в проективных координатах, который совпадает с (2.102).

Также вычисления дают два дополнительных монома $z_4 z_5^4$ и $z_4^4 z_5$, но они лежат в ядре

кольца Милнора [4] $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_5]/\frac{\partial W_0}{\partial z_i}$.

Результаты построения по двум конструкциям совпадают.

Глава 3

Калибровочная линейная сигма-модель и многообразие Калаби-Яу

В данной главе рассматривается дуальность между Калаби-Яу X и двумерными калибровочными линейными сигма-моделями Y (КЛСМ), а также способ вычисления специальной геометрии на пространстве кэлеровых модулей Калаби-Яу. Изложены результаты работы [III].

3.1 Специальная геометрия

В рамках теории суперструн безмассовые моды полей соответствуют модулям комплексной и кэлеровой структур компактного многообразия Калаби-Яу X . Как отмечалось в главе 1 настоящей диссертации, специальная кэлерова метрика на пространствах модулей $M_C(X)$ (комплексных структур) и $M_K(X)$ (кэлеровых структур) входит в лагранжиан эффективной теории супергравитации. Это обуславливает актуальность задачи явного вычисления специальной геометрии на пространствах модулей.

Методика расчёта этой метрики на пространстве модулей комплексных структур для многообразий Калаби-Яу, заданных в виде гиперповерхностей во взвешенных проективных пространствах и допускающих полиномиальные деформации, была разработана А.А. Белавиным и К.Р. Алешкиным в работе [33]. Что касается вычисления специальной геометрии на пространстве модулей кэлеровых структур $M_K(X)$, ключевой подход основывается на гипотезе зеркальной симметрии, рассмотренной в предыдущей главе. Действительно, ведь наличие зеркального двойника Y , в частности, предполагает изоморфизм

$$M_K(X) \simeq M_C(Y). \quad (3.1)$$

Тогда специальная геометрия на пространстве комплексных структур зеркала $M_C(Y)$ определяет специальную геометрию на пространстве модулей кэлеровых структур $M_K(X)$ исходного Калаби-Яу X .

Альтернативный метод нахождения специальной кэлеровой геометрии на $M_K(Y)$ был предложен в работе [20]. Х. Джокерс и его соавторы выдвинули гипотезу, связывающую кэлеров потенциал K_K^Y на пространстве модулей кэлеровых структур многообразия Калаби-Яу Y с статистической суммой Z_Y некоторой $N = (2, 2)$ суперсимметричной калибровочной линейной сигма-модели (КЛСМ), для которой Y является пространством вакуумов. Данная гипотеза постулирует следующее равенство (далее - JKLMR - гипотеза):

$$e^{-K_K^Y} = Z_Y. \quad (3.2)$$

Статсумма Z_Y модели была вычислена аналитически с помощью техники суперсимметричной локализации [18, 19] (см. также [47]). Окончательное выражение для Z_Y было представлено в виде контурного интеграла.

Из зеркальной симметрии следует совпадение кэлеровых потенциалов:

$$K_K^Y = K_C^X. \quad (3.3)$$

Тогда гипотезу (3.2) можно переформулировать в зеркальной форме

$$e^{-K_C^X} = Z_Y. \quad (3.4)$$

Связь между Калаби-Яу и КЛСМ, также как и справедливость гипотезы (3.4) была установлена для Квинтики [35], для Калиби-Яу типа Ферма, имеющих только полиномиальные деформации [34], а также в ряде примеров многообразия, не относящегося к классу Ферма [IV], [36].

Однако, в работе [48] было замечено, что в остальных случаях, когда Калаби-Яу X имеет смешанный тип, то есть состоит из мономов типа Ферма, цепь или петля, JKLMR - гипотеза (3.4) не выполнена. Дело в том, что при вычислении статсуммы Z_Y могут возникать лишние слагаемые (так называемая проблема лишних полюсов), и в правой части формулы (3.4) появятся дополнительные члены. Об этом смотрите также в [49].

В работе [III] продемонстрирована справедливость гипотезы (3.4) для случая, когда Калаби-Яу X представляет собой зеркало некоторого семейства орбифолдов Калаби-Яу Y , лежащих во взвешенном проективном пространстве $\bar{\mathbb{P}}_{\vec{k}}^4$. При этом X не обязательно принадлежит к

классу Ферма. Пространство $\bar{\mathbb{P}}_k^4$, в свою очередь, допускает наличие в нем двух различных полиномов $W_{Y(1)}$ типа Ферма, и $W_{Y(2)}$ смешанного типа (цепь и Ферма), задающих орбифолды Калаби-Яу $Y(1)$ и $Y(2)$. При этом их зеркала $X(1)$ и $X(2)$, построенные по конструкции Берглунда-Хубша-Кравица [12, 42], лежат в разных взвешенных проективных пространствах $\mathbb{P}_k^4(1)$ и $\mathbb{P}_k^4(2)$. Однако, их периоды голоморфной формы Ω и Кэлеровы потенциалы пространства модулей комплексных структур совпадают [50]

$$K_C^{X(1)} = K_C^{X(2)}. \quad (3.5)$$

Соотношение (3.5) гарантирует нам выполнение JKLMR - гипотезы для Калаби-Яу $X(2)$ более общего класса. Действительно, ведь Калаби-Яу $X(1)$ имеет тип Ферма, и для него гипотеза была проверена [36], то есть выполняется равенство

$$e^{-K_C^{X(1)}} = Z_{Y(1)}. \quad (3.6)$$

Тогда, используя формулу (3.5), мы проверяем JKLMR - гипотезу в виде

$$e^{-K_C^{X(2)}} = Z_{Y(2)}. \quad (3.7)$$

Последнее равенство является проверкой зеркальной версии гипотезы для неферма Калаби-Яу $X(2)$.

В следующих разделах мы кратко сформулируем конструкцию множественных зеркал и продемонстрируем выполнение равенства (3.6), а также рассмотрим подробнее калибровочные линейные сигма-модели.

3.2 Калибровочная линейная сигма-модель

В этой главе мы подробнее поговорим про дуальность между Калаби-Яу и калибровочными линейными сигма-моделями (КЛСМ). Мы ограничимся абелевой калибровочной группой $U(1)^h$ с h векторными суперполями $(V_1, \dots, V_h)$ и N киральными суперполями $(\Phi_1, \dots, \Phi_N)$ и матрицей зарядов Q_{la} , $l = 1, \dots, h$, $a = 1, \dots, N$. На языке суперполей лагранжиан этой

модели можно записать как интеграл по нечетным переменным θ :

$$L = \int d^4\theta \left(\sum_{i=1}^N \overline{\Phi}_i e^{Q_{ia} V_a} \Phi_i - \sum_a \frac{1}{2e_a^2} \overline{\Sigma}_a \Sigma_a \right) + \frac{1}{2} \left(- \int d^2\tilde{\theta} \sum_{a=1}^k t_a \Sigma_a + \int d^2\theta W(\Phi) + \text{h.c.} \right). \quad (3.8)$$

Здесь введены следующие обозначения. Вторые производные векторных суперполей обозначены

$$\Sigma := \overline{D_+} D_- V. \quad (3.9)$$

Комплексные константы связи $t_a = r_a - i\theta_a$ зависят от параметров Файе — Илиопулоса r_a и тэта углов θ_a . Эти параметры являются модулями кэлеровых деформаций пространства суперсимметричных вакуумов. Суперпотенциал киральных суперполей $W(\Phi)$ является калибровочно-инвариантным.

После разложения суперполей по компонентам и интегрирования по вспомогательным полям можно выделить потенциал скалярных полей y_a :

$$U(\phi) = \sum_{l=1}^h \frac{e_l^2}{2} \left(\sum_{a=1}^N Q_{al} |y_a|^2 - r_l \right)^2 + \frac{1}{4} \sum_{a=1}^N \left| \frac{\partial F_Y}{\partial y_a} \right|^2. \quad (3.10)$$

Пусть для простоты $N = h + 5$. Пространство суперсимметричных вакуумов Y КЛСМ задается минимумом этого потенциала:

$$Y = \left\{ (y_1, \dots, y_N) \mid \sum_{a=1}^N Q_{al} |y_a|^2 = r_l, l = 1, \dots, h, \frac{\partial F}{\partial y_a} = 0 \right\} / U(1)^h. \quad (3.11)$$

Калибровочная группа $U(1)^h$ действует на координатах y_a матрицей зарядов Q_{la} .

Как мы видим, многообразие вакуумов (3.11) задается как критические точки многочлена F_Y внутри пространства, заданного как гамильтонова редукция:

$$\tilde{T} = \left\{ (y_1, \dots, y_N) \mid \sum_{a=1}^N Q_{al} |y_a|^2 = r_l, l = 1, \dots, h \right\} / U(1)^h. \quad (3.12)$$

Как известно, пространство (3.12) изоморфно торическому многообразию (2.51) (на самом деле является его альтернативным определением [51]):

$$\tilde{T} \simeq \frac{\mathbb{C}^N - Z}{(\mathbb{C}^*)^h}, \quad (3.13)$$

где числа Q_{la} - это веса действия тора $(\mathbb{C}^*)^h$. Действительно, действие тора на координатах y_j можно разбить на действие $\mathbb{R}_+$ и действие $U(1)^h$. То есть, сначала мы фиксируем модуль $|y_a|$ уравнением $\sum_{a=1}^N Q_{al}|y_a|^2 = r_l$, а затем факторизуем по действию группы $U(1)^h$.

При определённом выборе зарядов калибровочной группы, например, как в (2.50)

$$Q_{la} = \begin{cases} S_{lj}B_{ja}, 1 \leq a \leq 5 \\ -\delta_{l,a-5}, a > 5 \end{cases} \quad (3.14)$$

мы заключаем, пространство суперсимметричных вакуумов Y является зеркалом некоторого семейства Калаби-Яу из списка Берглунда-Хубша, которое определяется нулями деформированного многочлена

$$W^X(x, \varphi) = \sum_{i=1}^5 \prod_{j=1}^5 x_j^{M_{ij}} + \sum_{l=1}^{h_X} \varphi_l \prod_{j=1}^5 x_j^{S_{lj}}. \quad (3.15)$$

Действительно, ведь это в точности повторяет рассуждение из главы 2.2, где мы строили зеркало к гиперповерхности (3.15) по конструкции Батырева. В этом случае мы знаем выражение для потенциала F_Y , чьи критические точки определяют вакуум КЛСМ. Он имеет вид $F_Y = y_{h+5}W_Y$, где W_Y определен как в (2.64).

Таким образом, пространство вакуумов (3.11) является многообразием Калаби-Яу, которое мы строили в главе 2 (см. формулы (2.65)). Далее мы рассмотрим случай $N = h + 5$.

Статистическая сумма КЛСМ на сфере S^2 была вычислена методом суперсимметричной локализации [18, 19] и дается формулой

$$Z_{S^2}(r, \theta) = \sum_m \int_{\mathbb{R}} \prod_{l=1}^h \frac{d\sigma_l}{2\pi} e^{-4\pi i r_l \sigma_l - i\theta_l m_l} \prod_{a=1}^{h+5} Z_{\Phi_a}, \quad (3.16)$$

где детерминанты киральных полей равны

$$Z_{\Phi_a} = \frac{\Gamma\left(\frac{q_a}{2} - \sum_{l=1}^h Q_{la}\left(i\sigma_l + \frac{m_l}{2}\right)\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{q_a}{2} + \sum_{l=1}^h Q_{la}\left(i\sigma_l - \frac{m_l}{2}\right)\right)}. \quad (3.17)$$

Суммирование ведется по всем целочисленным m_l . Выражение $e^{-4\pi i r_l \sigma_l - i\theta_l m_l}$ имеет смысл классического действия. Стоит отметить, что статсумма не зависит от выбора потенциала F_Y , также как и от констант связи e_l . А, значит, она не зависит от модулей комплексной структуры многообразия Калаби-Яу Y .

Сделав замену переменных $\tau_l = i\sigma_l$ и введя обозначения $z_l = e^{-(2\pi r_l + i\theta_l)}$, статистическую

сумму можно переписать в виде (3.16)

$$Z_Y = \sum_{\bar{m} \in \Lambda} \prod_{l=1}^h \int_{\mathcal{C}_\uparrow} \frac{d\tau_l}{(2\pi i)} \left(z_l^{-(\tau_l - \frac{m_l}{2})} \bar{z}_l^{-(\tau_l + \frac{m_l}{2})} \right) \prod_{a=1}^{h+5} \frac{\Gamma\left(\frac{q_a}{2} + \sum_{l=1}^h Q_{la} \left(\tau_l - \frac{m_l}{2}\right)\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{q_a}{2} - \sum_{l=1}^h Q_{la} \left(\tau_l + \frac{m_l}{2}\right)\right)}. \quad (3.18)$$

Контур интегрирования $\mathcal{C}_\uparrow$ идет вдоль мнимой оси. Напомним, что $l = 1, \dots, h$, $a = 1, \dots, h+5$. Множество суммирования $\bar{m} = \{m_1, \dots, m_h\} \in \Lambda$ определяется условием:

$$m_l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad m_l Q_{la} \in \mathbb{Z}. \quad (3.19)$$

В следующих разделах мы вычислим интегралы в статистической сумме и установим равенство с экспонентой кэлерава потенциала.

3.3 Множественные зеркала и периоды на Калаби-Яу

Некоторые взвешенные проективные пространства допускают задание нескольких многообразий Калаби-Яу при помощи обратимых многочленов, которые отвечают разным типам из классификации [40]. Например, обыкновенное $\mathbb{P}^4$ допускает задание Калаби-Яу типа Ферма (обыкновенная квинтика)

$$\{y_1^5 + y_2^5 + y_3^5 + y_4^5 + y_5^5 = 0\} \subset \mathbb{P}^4 \quad (3.20)$$

и гиперповерхности типа Ферма + цепь

$$\{y_1^4 y_2 + y_2^4 + y_3^5 + y_4^5 + y_5^5 = 0\} \subset \mathbb{P}^4 \quad (3.21)$$

Фактически, эти гиперповерхности принадлежат одному семейству и отличаются выбором точки пространства модулей.

В общем случае, пусть гиперповерхность $Y(M)$ задается квази-однородным многочленом

$$W_M(y) = \sum_{i=1}^5 \prod_{j=1}^5 y_j^{M_{ij}} \quad (3.22)$$

во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}_{(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5)}^4$. А полное семейство Калаби-Яу Y

определяется многочленом $W_M(y)$ вместе с допустимыми мономиальными деформациями

$$W_Y(y, \varphi) = \sum_{i=1}^5 \prod_{j=1}^5 y_j^{M_{ij}} + \sum_{l=1}^{h_Y} \psi_l \prod_{j=1}^5 y_j^{T_{lj}}. \quad (3.23)$$

Как и раньше, параметры ψ_l являются модулями комплексной структуры на Y .

Итак, существуют взвешенные проективные пространства $\mathbb{P}_{\vec{k}}^4$, которые допускают наличие двух полиномов различного типа $W_{M(1)}$ и $W_{M(2)}$. Нули этих полиномов определяют многообразия Калаби-Яу $Y(M(1))$ и $Y(M(2))$. Тогда их зеркала $X(M^T(1))$ и $X(M^T(2))$, построенные по Берглунду-Хубшу-Кравицу, будут лежать в других разных взвешенных проективных пространствах $\mathbb{P}_{\vec{k}(1)}^4$ и $\mathbb{P}_{\vec{k}(2)}^4$. Как было установлено в работе [50], периоды и Кэлэровы потенциалы на пространстве модулей комплексных структур этих Калаби-Яу совпадают:

$$K_C^{X(1)} = K_C^{X(2)}. \quad (3.24)$$

Наглядно эта конструкция продемонстрирована в виде схемы на рисунке 3.1.

$$\begin{array}{ccc} & Y(1), Y(2) \subset \bar{\mathbb{P}}_{\vec{k}}^4 & \\ \swarrow & & \searrow \\ X(1) \subset \mathbb{P}_{\vec{k}}^4(1) & \xleftrightarrow{K_C^{X(1)} = K_C^{X(2)}} & X(2) \subset \mathbb{P}_{\vec{k}}^4(2) \end{array}$$

Рис. 3.1: Конструкция множественных зеркал. Многообразие $X(1)$ может задаваться многочленом типа "Ферма". А многообразие $X(2)$ может иметь более общий, смешанный тип из списка Берглунда-Хубша.

Если $M(1)$ и $M(2)$ это матрицы степеней многочленов типа Ферма $W_{M(1)}$ и полинома смешанного типа $W_{M(2)}$, тогда, чтобы эти полиномы определяли гиперповерхности в $\bar{\mathbb{P}}_{\vec{k}}^4$, достаточно потребовать

$$\sum_{j=1}^5 M(1)_{ij} k_j = \sum_{j=1}^5 M(2)_{ij} k_i = d = \sum_{i=1}^5 k_i. \quad (3.25)$$

Мономы-деформации комплексной структуры для каждого из этих многочленов обозначим как

$$e_m(1) = \prod_{j=1}^5 y_j^{T_{mj}(1)}, \quad e_m(2) = \prod_{j=1}^5 y_j^{T_{mj}(2)}, \quad (3.26)$$

Выберем теперь некоторую подгруппу G_Y в допустимой группе (2.23) так, чтобы она была допустимой для обоих многочленов $W_{Y(1)}$ и $W_{Y(2)}$ и рассмотрим пару орбифолдов

$Y(M(\alpha))/G_Y$, $\alpha = 1, 2$. Обозначим также $B_{ij}(\alpha) = M_{ij}^{-1}(\alpha)$, где $\alpha = 1, 2$.

Согласно конструкции Берглунда-Хубша-Кравица [11, 12], зеркала для каждого из орби-фолдов $Y(M(\alpha))/G_Y$ будут определяться нулями многочленов

$$W_{X(\alpha)}(x, \varphi) = \sum_{i=1}^5 \prod_{j=1}^5 x_j^{M_{ij}^T(\alpha)} + \sum_{l=1}^{h_X} \varphi_l \prod_{j=1}^5 x_j^{S_{lj}(\alpha)} = 0 \quad (3.27)$$

уже в двух различных проективных пространствах $\mathbb{P}_{\vec{k}(\alpha)}^4$. Так как эти многообразия (орби-фолды) являются зеркальными к одному и тому же семейству $Y(\alpha)$, то они и называются *множественными зеркалами*.

Как было показано нами в разделе 2.1 и в работе [I], степени будут связаны правилами "скалярных произведений":

$$(\vec{S}_l(\alpha), \vec{T}_m(\alpha)) := \sum_{i,j=1}^5 B_{ij}(\alpha) S_{li}(\alpha) T_{mj}(\alpha) \in \mathbb{Z}. \quad (3.28)$$

Из этих уравнений (3.28) и из того, что векторы $\vec{T}_m(1)$, и $\vec{T}_m(2)$ линейно выражаются через одни и те же базисные векторы $\vec{V}_a$ с целыми коэффициентами следует совпадение выражений [50]

$$S_{li}(1) B_{ij}^T(1) = S_{li}(2) B_{ij}^T(2). \quad (3.29)$$

На самом деле, как было показано в работе [41], множественные зеркала бирационально эквивалентны.

Эти выражения (3.29) интересны тем, что именно они входят в формулы для периодов на Калаби-Яу. Мы не будем подробно останавливаться на технике их вычислений, так как это совершенно не является целью данной диссертации. Однако приведем несколько важных формул и определений.

Периоды на многообразиях Калаби-Яу

Для семейства Калаби-Яу X , которое задается нулями $W_M(x, \varphi)$, периоды голоморфной нигде неисчезающей формы Ω определяются через контурные интегралы [33]

$$\sigma_{\vec{\mu}}(\varphi) = \oint_{\Gamma_{\vec{\mu}}} e^{-W_M(x, \varphi)} d^5 x. \quad (3.30)$$

Количество циклов $\Gamma_{\vec{\mu}}$ равно $2h_{12}(X) + 2$, а это, в свою очередь, равно размерности подкольца Милнора (2.30), состоящего из мономов степени 1, d , $2d$ и $3d$.

Периоды были вычислены в работе [36] и выражаются следующими формулами:

$$\sigma(\alpha)_{\vec{\mu}(\alpha)}(\varphi) = \sum_{n_l \in \Sigma_{\vec{\mu}(\alpha)}} \prod_{i=1}^5 \frac{\Gamma\left(\sum_j (n_l S(\alpha)_{lj} + 1) B_{ji}(\alpha)\right)}{\Gamma\left(\sum_j (\mu_j + 1) B_{ji}(\alpha)\right)} \prod_{l=1}^{h_X} \frac{\varphi_l^{n_l}}{n_l!} \quad (3.31)$$

Множество $\Sigma_{\vec{\mu}(\alpha)}$ определено следующим образом. Числа n_l лежат в $\Sigma_{\vec{\mu}(\alpha)}$, если существуют такие целые числа p_k , что:

$$n_l S(\alpha)_{lj} = (\vec{\mu}(\alpha))_j + \sum_k p_k M(\alpha)_{kj}. \quad (3.32)$$

Числа $(\vec{\mu}(\alpha))_j$ являются степенями полиномиальных деформаций, образующих базис в кольце Милнора, определяемого многочленами $W_{X(\alpha)}$.

Как можно видеть, формула для периода зависит только от выражений, входящих в уравнения (3.29). А это и означает, что периоды у "множественных зеркал" совпадают [50]:

$$\sigma(1)_{\vec{\mu}(1)}(\varphi) = \sigma(2)_{\vec{\mu}(2)}(\varphi), \quad (3.33)$$

Отсюда также следует совпадение Кэлеровых потенциалов пространства модулей комплексных структур у двух зеркал $X(1)$ и $X(2)$, которые выражаются через эти периоды как:

$$e^{-K_C^{X(\alpha)}(\varphi, \bar{\varphi})} = \sum_{|\vec{\mu}(\alpha)|=0, \dots, 2d-1} (-1)^{|\vec{\mu}|/d} \prod_{i=1}^5 \frac{\Gamma((\mu_j + 1) B_{ji}(\alpha))}{\Gamma(1 - (\mu_j + 1) B_{ji}(\alpha))} |\sigma_{\vec{\mu}(\alpha)}(\varphi)|^2. \quad (3.34)$$

То есть, согласно [50], получаем совпадение кэлеровых потенциалов

$$e^{-K_C^{X(1)}} = e^{-K_C^{X(2)}}. \quad (3.35)$$

Равенство (3.35) позволит проверить JKLMR-гипотезу для неферма Калаби-Яу $X(2)$. В самом деле, так как для Ферма Калаби-Яу $X(1)$ она была доказана, то мы можем переписать гипотезу в виде:

$$Z_{Y(2)} = e^{-K_C^{X(1)}}. \quad (3.36)$$

При этом, если $X(2)$ будет являться одним из множественных зеркал для многообразия типа Ферма $Y(1)$, то это будет гарантировать отсутствие лишних слагаемых при вычислении $Z_{Y(2)}$.

3.4 Проверка JKLMR гипотезы

Вернемся к рассмотрению точного выражения для статистической суммы двумерной КЛ-СМ на сфере. (3.16)

$$Z_Y = \sum_{\vec{m} \in \Lambda} \prod_{l=1}^h \int_{\mathcal{C}_\uparrow} \frac{d\tau_l}{(2\pi i)} \left(z_l^{-(\tau_l - \frac{m_l}{2})} \bar{z}_l^{-(\tau_l + \frac{m_l}{2})} \right) \prod_{a=1}^{h+5} \frac{\Gamma\left(\frac{q_a}{2} + \sum_{l=1}^h Q_{la} \left(\tau_l - \frac{m_l}{2}\right)\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{q_a}{2} - \sum_{l=1}^h Q_{la} \left(\tau_l + \frac{m_l}{2}\right)\right)}. \quad (3.37)$$

Согласно JKLMR-гипотезе [20], данной КЛСМ в "геометрической фазе" ($z_l \rightarrow +\infty$) [46] может быть сопоставлено семейство Калаби-Яу X типа Берглунда-Хубша, заданное во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}_{\vec{k}}^4$ уравнением

$$W_X(x, \varphi) = \sum_{i=1}^5 \prod_{j=1}^5 x_j^{M_{ij}} + \sum_{l=1}^{h_X} \varphi_l \prod_{j=1}^5 x_j^{S_{lj}} = \sum_{a=1}^{h_X+5} C_a \prod_{j=1}^5 x_j^{V_{aj}} = 0. \quad (3.38)$$

При этом пространство вакуумов Y данной сигма-модели представляет собой зеркальное многообразие Калаби-Яу для гиперповерхности X . Как было отмечено в разделе 3.2, заряды калибровочной группы определяются согласно (2.50), (см. также [35]). Напомним, что они образуют целочисленный базис в пространстве линейных соотношений между векторами - показателями степеней $W_X(x, \varphi)$.

$$\sum_{a=1}^{h_X+5} Q_{la} \vec{V}_a = 0, \quad l = 1, \dots, h_X. \quad (3.39)$$

JKLMR гипотеза [20] утверждает равенство:

$$Z_Y = e^{-K_C^X}. \quad (3.40)$$

При подстановке конкретного выражения для зарядов (2.50), статсумма переписывается как

$$Z_Y = \sum_{\vec{m} \in \Lambda} \int_{\mathcal{C}_l} \frac{d^h \tau}{(2\pi i)^h} \frac{1}{z_l^{(\tau_l - \frac{m_l}{2})} \bar{z}_l^{(\tau_l + \frac{m_l}{2})}} \prod_{l=1}^h \frac{\Gamma\left(\frac{q_{l+5}}{2} - \left(\tau_l - \frac{m_l}{2}\right)\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{q_{l+5}}{2} + \left(\tau_l + \frac{m_l}{2}\right)\right)} \times \\ \times \prod_{i=1}^5 \frac{\Gamma\left(\frac{q_i}{2} + \sum_{l,j} (\tau_l - \frac{m_l}{2}) S_{lj} B_{ji}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{q_i}{2} - \sum (\tau_l + \frac{m_l}{2}) S_{lj} B_{ji}\right)}. \quad (3.41)$$

Напомним точное выражение для кэлера потенциала пространства модулей комплекс-

ных структур исходного Калаби-Яу X [36]:

$$e^{-K(\varphi, \bar{\varphi})} = \sum_{|\vec{\mu}|=0, \dots, 2d-1} (-1)^{|\vec{\mu}|/d} \prod_{i=1}^5 \frac{\Gamma((\mu_j + 1) B_{ji})}{\Gamma(1 - (\mu_j + 1) B_{ji})} |\sigma_{\vec{\mu}}(\varphi)|^2, \quad (3.42)$$

где период равен:

$$\sigma_{\vec{\mu}}(\varphi_1, \dots, \varphi_h) = \sum_{\{n_l\} \in \Sigma_{\vec{\mu}}} \prod_{i=1}^5 \frac{\Gamma\left(\sum_j (n_l S_{lj} + 1) B_{ji}\right)}{\Gamma\left(\sum_j (\mu_j + 1) B_{ji}\right)} \prod_{l=1}^h \frac{\varphi_l^{n_l}}{n_l!}. \quad (3.43)$$

Данные ряды сходятся при $|\varphi_l| \leq 1$. В таком случае мы будем сопоставлять параметры комплексной структуры φ_l семейства X с параметрами калибровочной линейной сигма-модели как

$$\varphi_l \sim 1/z_l. \quad (3.44)$$

Вычислим теперь контурные интегралы (3.41). Контур интегрирования C_l , которые идут вдоль мнимой оси, можно замкнуть в правую полуплоскость. Это дает ограничение на параметры КЛСМ:

$$|z_l| = e^{-2\pi r_l} > 1 \Leftrightarrow r_l < 0. \quad (3.45)$$

Гамма функция $\Gamma\left(\frac{q_l+5}{2} - \left(\tau_l - \frac{m_l}{2}\right)\right)$ в числителе формулы (3.41) имеет полюс при

$$\begin{aligned} \frac{q_l+5}{2} - \left(\tau_l - \frac{m_l}{2}\right) &= -n_l, \\ \tau_l &= n_l + \frac{m_l}{2} + \frac{q_l+5}{2}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

где $n_l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Данный полюс лежит в правой полуплоскости. Заметим также, что оставшиеся пять гамма-функций в формуле (3.41) тоже могут иметь полюса в правой полуплоскости. Действительно, когда аргумент выражения

$$\Gamma\left(\frac{q_i}{2} + \sum_j \left(\tau_l - \frac{m_l}{2}\right) S_{lj} B_{ji}\right) \quad (3.47)$$

целый отрицательный, то возникает дополнительный полюс. Положение полюса на комплексной плоскости зависит от знаков выражения $S_{lj} B_{ji}$. Необходимо потребовать, чтобы дополнительные полюса лежали в левой полуплоскости. Тогда они не дадут вклад в контурный интеграл. То есть:

$$S_{lj} B_{ji} \geq 0, \quad \forall l, j, i. \quad (3.48)$$

Вычислим интегралы в этом предположении. Тогда мы должны учесть только вычеты в точках (3.46).

Применяя теорему Коши, мы приходим к сумме вычетов в соответствующих полюсах

$$\begin{aligned}
Z_Y &= \sum_{m_l \in \Lambda, n_l} \prod_{l=1}^h z_l^{-n_l - \frac{q_l+5}{2}} \bar{z}_l^{-(n_l+m_l) - \frac{q_l+5}{2}} \frac{(-1)^{n_l}}{n_l! \Gamma\left(1 - \frac{q_l+5}{2} + n_l + m_l + \frac{q_l+5}{2}\right)} \times \\
&\quad \times \prod_{i=1}^5 \frac{\Gamma\left(\frac{q_i}{2} + \sum_{l,j} n_l S_{lj} B_{ji} + \sum_{l,j} \frac{q_l+5}{2} S_{lj} B_{ji}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{q_i}{2} - \sum_{l,j} (n_l + m_l) S_{lj} B_{ji} - \sum_{l,j} \frac{q_l+5}{2} S_{lj} B_{ji}\right)} = \\
&= \left(\prod_{l=1}^h (z_l \bar{z}_l)^{-\frac{q_l+5}{2}} \right) \sum_{n_l, \bar{n}_l} (-1)^{n_l} \prod_{l=1}^h \frac{z_l^{-n_l}}{n_l!} \frac{\bar{z}_l^{-\bar{n}_l}}{\bar{n}_l!} \prod_{i=1}^5 \frac{\Gamma\left(\frac{q_i}{2} + \sum_{l,j} n_l S_{lj} B_{ji} + \sum_{l,j} \frac{q_l+5}{2} S_{lj} B_{ji}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{q_i}{2} - \sum_{l,j} \bar{n}_l S_{lj} B_{ji} - \sum_{l,j} \frac{q_l+5}{2} S_{lj} B_{ji}\right)}.
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Здесь мы обозначили $\bar{n}_l = n_l + m_l$. Выберем R - заряды, согласно условию из работы Э. Виттена [46]:

$$\sum_{a=1}^{h+5} q_a V_{ai} = 2. \tag{3.50}$$

Общее решение этого уравнения может быть выражено через произвольные параметры x_l как

$$q_a = 2\delta_{a,h+5} + \sum_{l=1}^h Q_{la} x_l. \tag{3.51}$$

Подставляя (3.51) в выражение для Z_Y получаем

$$Z_Y = \left(\prod_{l=1}^h |z_l|^{-q_l+5} \right) \sum_{n_l, \bar{n}_l} (-1)^{n_l} \prod_{l=1}^h \frac{z_l^{-n_l}}{n_l!} \frac{\bar{z}_l^{-\bar{n}_l}}{\bar{n}_l!} \prod_{i=1}^5 \frac{\Gamma\left(\sum_{l,j} (n_l S_{lj} + 1) B_{ji}\right)}{\Gamma\left(1 - \sum_{l,j} (\bar{n}_l S_{lj} + 1) B_{ji}\right)} \tag{3.52}$$

Рассмотрим множество суммирования более детально. Когда гамма-функция в знаменателе формулы (3.52) имеет полюс, тогда соответствующее слагаемое равно нулю. Это происходит в случае, когда аргумент целый отрицательный:

$$1 - \sum_{l,j} (\bar{n}_l S_{lj} + 1) B_{ji} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}. \tag{3.53}$$

Или, эквивалентно

$$\sum_{l,j} ((n_l + m_l) S_{lj} + 1) B_{ji} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \tag{3.54}$$

Тогда множество суммирования по n_l и $\bar{n}_l$ можно задать следующим условием. Пусть

существуют такие целые числа p_k и μ_j , что

$$n_l S_{lj} = \mu_j + p_k M_{kj}. \quad (3.55)$$

Обозначим такое множество $\Sigma_{\vec{\mu}}$. Следовательно $n_l, \bar{n}_l \in \Sigma_{\vec{\mu}}$, где $\Sigma_{\vec{\mu}}$ совпадает с множеством суммирования в выражении для периодов (3.43).

Упростим выражение для Z_Y . Подставим известную формулу для гамма-функции

$$\frac{1}{\Gamma\left(1 - \sum_{l,j} (\bar{n}_l S_{lj} + 1) B_{ji}\right)} = \pi^{-1} \sin\left(\pi \sum_{l,j} (\bar{n}_l S_{lj} + 1) B_{ji}\right) \Gamma\left(\sum_{l,j} (\bar{n}_l S_{lj} + 1) B_{ji}\right) \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \sin \pi \left(\sum_{l,j} (\bar{n}_l S_{lj} + 1) B_{ji} \right) &= \sin \pi \left(\sum_{l,j} (\mu_j + \sum_{s=1}^5 p_s M_{sj} + 1) B_{ji} \right) = \\ &= \sin \pi \left(\sum_j (\mu_j + 1) B_{ji} + p_i \right) = (-1)^{p_i} \sin \pi \left(\sum_j (\mu_j + 1) B_{ji} \right) = \\ &= (-1)^{p_i} \frac{\pi}{\Gamma\left(\sum_j (\mu_j + 1) B_{ji}\right) \Gamma\left(1 - \sum_j (\mu_j + 1) B_{ji}\right)} = \\ &= (-1)^{p_i} \pi \frac{\Gamma\left(\sum_j (\mu_j + 1) B_{ji}\right)}{\Gamma\left(1 - \sum_j (\mu_j + 1) B_{ji}\right)} \cdot \frac{1}{\Gamma^2\left(\sum_j (\mu_j + 1) B_{ji}\right)} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Тогда статистическая сумма переписывается как

$$\begin{aligned} Z_Y &= \left(\prod_{l=1}^h |z_l|^{-q_{l+5}} \right) \sum_{n_l, \bar{n}_l \in \Sigma_{\vec{\mu}}} (-1)^{n_l} \prod_{l=1}^h \frac{z_l^{-n_l}}{n_l!} \frac{\bar{z}_l^{-\bar{n}_l}}{\bar{n}_l!} \prod_{i=1}^5 \Gamma\left(\sum_{l,j} (n_l S_{lj} + 1) B_{ji}\right) \times \\ &\quad \Gamma\left(\sum_{l,j} (\bar{n}_l S_{lj} + 1) B_{ji}\right) (-1)^{p_i} \frac{\Gamma\left(\sum_j (\mu_j + 1) B_{ji}\right)}{\Gamma\left(1 - \sum_j (\mu_j + 1) B_{ji}\right)} \cdot \frac{1}{\Gamma^2\left(\sum_j (\mu_j + 1) B_{ji}\right)} = \\ &\quad \left(\prod_{l=1}^h |z_l|^{-q_{l+5}} \right) \sum_{|\vec{\mu}|=0, \dots, 2d-1} (-1)^{|\vec{\mu}|/d} \prod_{i=1}^5 \frac{\Gamma((\mu_j + 1) B_{ji})}{\Gamma(1 - (\mu_j + 1) B_{ji})} |\sigma_{\vec{\mu}}(z^{-1})|^2, \end{aligned} \quad (3.58)$$

где

$$\sigma_{\vec{\mu}}(z^{-1}) = \sum_{\{n_l\} \in \Sigma_{\vec{\mu}}} \prod_{i=1}^5 \frac{\Gamma\left(\sum_j (n_l S_{lj} + 1) B_{ji}\right)}{\Gamma\left(\sum_j (\mu_j + 1) B_{ji}\right)} \prod_{l=1}^h \frac{z_l^{-n_l}}{n_l!} \quad (3.59)$$

Чтобы получить равенство между статистической суммой и Кэлеровым потенциалом, необходимо связать модули комплексной структуры φ_l и модули Кэлеровой структуры z_l зеркала

Y как

$$\varphi_l = \frac{1}{z_l}. \quad (3.60)$$

Тогда мы получим следующее равенство

$$Z_Y = \left(\prod_{l=1}^h |\varphi_l|^{q_{l+5}} \right) e^{-K_X(\varphi)} = e^{-\tilde{K}_X(\varphi)}, \quad (3.61)$$

где кэлеров потенциал переопределён с точностью до голоморфного и антиголоморфного слагаемого:

$$\tilde{K}_X(\varphi) = K_X(\varphi) - \sum_{l=1}^h q_{l+5} \log \varphi_l - \sum_{l=1}^h q_{l+5} \log \bar{\varphi}_l \quad (3.62)$$

Естественно $\tilde{K}_X(\varphi)$ определяет ту же метрику, что и $K_X(\varphi)$.

Таким образом, мы проверили JKLMR - гипотезу в предположении, что выражение $S_{li}B_{ij}$ для исходного Калаби-Яу X неотрицательно. На самом деле это доказательство является достаточно общим. Альтернативное рассуждение приведено в работе [49]. Перейдем к обсуждению случаев, когда условие $S_{li}B_{ij} \geq 0$ выполняется.

Данное ограничение остается верным, например, в случае, когда Калаби-Яу X имеет тип Ферма. Действительно, ведь тогда матрица степеней полинома W_X диагональна, то её обратная матрица равна $B_{ij} = \delta_{ij} \frac{1}{a_i}$, где $a_i > 0$. А значит $B_{ij} > 0$. Ограничение также выполнено для различных орбифолдов гиперповерхностей Калаби-Яу типа Ферма, которые допускают только полиномиальные деформации со строго неотрицательными степенями $S_{li} \geq 0$.

Более интересным представляется случай, когда Калаби-Яу $X = X(1)$ представляет собой орбифолд многообразия, не относящегося к классу Ферма. В этом случае матрица степеней полинома недиагональна. Тогда матрица $B_{ij}(1)$ может содержать отрицательные элементы. Однако зеркальное Калаби-Яу $Y(1)$ может лежать во взвешенном проективном пространстве, которое допускает задание Калаби-Яу $Y(2)$ типа Ферма, содержащее только полиномиальные деформации. Тогда его зеркальный орбифолд $X(2)$ также имеет тип Ферма. Более того, периоды и Кэлеровы потенциалы многообразий $X(1)$ и $X(2)$ совпадают, а значит совпадают и выражения:

$$S_{li}(1)B_{ij}(1) = S_{li}(2)B_{ij}(2). \quad (3.63)$$

Тогда $S_{li}(2)B_{ij}(2) \geq 0$, так как это выражение соответствует орбифолду Ферма типа с полиномиальными деформациями. А значит и $S_{li}(1)B_{ij}(1) \geq 0$, то есть выполняется предположение, в котором доказана JKLMR-гипотеза. Таким образом, JKLMR-гипотеза доказана для широкого класса орбифолдов Калаби-Яу $X(1)$ неферма типа. Продемонстрируем эту

конструкцию в следующем разделе на конкретных примерах.

3.5 Пример: JKLMR гипотеза для орбифолдов квинтики

Рассмотрим в качестве $Y(1)$ орбифолд Квинтики в $\mathbb{P}^4$

$$W_1(y) = y_1^5 + y_2^5 + y_3^5 + y_4^5 + y_5^5 + \sum_{m=1}^{h_Y} \prod_{j=1}^5 y_j^{T(1)_{mj}}. \quad (3.64)$$

В пространстве $\mathbb{P}^4$ можно также задать многообразие Калаби-Яу $Y(2)$ смешанного типа полиномом

$$W_2(y) = y_1^4 y_2 + y_2^5 + y_3^5 + y_4^5 + y_5^5 + \sum_{m=1}^{h_Y} \prod_{j=1}^5 y_j^{T(2)_{mj}}. \quad (3.65)$$

Мономы $\prod_{j=1}^5 y_j^{T(\alpha)_{mj}}$ инвариантны относительно действия некоторой группы G_Y . Мы рассмотрим два примера групп G_Y , по которым будет сделан орбифолд $Y(\alpha)/G_Y$. Важно, чтобы группа G_Y была допустимой группой симметрии как полинома W_1 , так и W_2 .

Рассмотрим теперь зеркала этих орбифолдов. По конструкции БХК 2.1 нам нужно транспонировать матрицу степеней многочленов W_1 и W_2 . Многочлен W_1 не меняется при транспонировании матрицы степеней. Тогда зеркало $X(1)$ определяется в $\mathbb{P}^4$ уравнением

$$\tilde{W}_1(x) = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + \sum_{l=1}^{h_X} \prod_{j=1}^5 x_j^{S(1)_{lj}}. \quad (3.66)$$

Где степени деформаций $S(1)_{li}$ зеркала могут быть найдены, в данном случае, согласно условию (3.28)

$$\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 S_{li} T_{mi} \in \mathbb{Z}. \quad (3.67)$$

Однако зеркальное многообразие $X(2)$ задается согласно условию (2.9) в другом взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}_{(5,3,4,4,4)}^4$ многочленом [3]

$$\tilde{W}_2(x) = x_1^4 + x_1 x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + \sum_{l=1}^{h_X} \prod_{j=1}^5 x_j^{S(2)_{lj}}. \quad (3.68)$$

Ниже мы продемонстрируем совпадение периодов у двух орбифолдов множественных зеркал $X(1)/G_{X(1)}$ и $X(2)/G_{X(2)}$, для двух примеров групп симметрий G_Y . Допустимые группы $G_{X(1)}$ и $G_{X(2)}$ являются дуальными к G_Y и могут быть определены по ней [I]. Отсюда будет следовать справедливость доказательства JKLMR - гипотезы для Калаби-Яу $X(2)$ неферма

типа в виде

$$e^{-K_C^{X(2)}} = Z_{Y(2)}. \quad (3.69)$$

В качестве примера рассмотрим описанные нами в разделе 2.3 орбиболды. Первый пример соответствует исходному орбиболду по группе $G_Y = \mathbb{Z}_5[0, 0, 1, 4, 0]$ (случай 49,5 из 2.3 только с мономиальными деформациями):

$$Y(\alpha)/\mathbb{Z}_5[0, 0, 1, 4, 0], \quad h_Y = 25 \quad (3.70)$$

В семействе (3.65) остаются только мономы $\prod_{j=1}^5 y_j^{T(2)_{mj}}$ инвариантные относительно группы $G_Y = \mathbb{Z}_5[0, 0, 1, 4, 0]$. Они были описаны в [II]. Зеркальные пары расположены в двух разных взвешенных проективных пространствах

$$X(1)/G_{X(1)} \subset \mathbb{P}^4, \quad h_X = 5, \quad (3.71)$$

и

$$X(2)/G_{X(2)} \subset \mathbb{P}_{(5,3,4,4,4)}^4, \quad h_X = 5. \quad (3.72)$$

Мономы-деформации комплексной структуры для $X(1)/G_{X(1)}$ и $X(2)/G_{X(2)}$ имеют вид

$$x_3^2 x_4^3, x_3^3 x_4^2, x_1 x_2 x_4^2 x_5, x_1 x_2 x_3^2 x_5, x_1 x_2 x_3 x_4 x_5. \quad (3.73)$$

Обратные матрицы степеней полиномов $\tilde{W}_1$ и $\tilde{W}_2$ таковы

$$B(1)_{ji} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}, \quad B(2)_{ji} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/20 & 1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}. \quad (3.74)$$

Видно, что матрица B в случае Калаби-Яу неферма типа имеет отрицательные элементы. В этом случае, при вычислении интегралов в статсумме Z_Y дуальной калибровочной сигма-модели, может возникать проблема лишних полюсов, описанная выше. Как мы продемонстрируем, выражения входящие в статсумму и периоды в случае, когда Калаби-Яу неферма типа является одним из множественных зеркал наряду с другим Ферма многообразием, такой проблемы не возникает.

Действительно, в рассматриваемом случае выражения $S(\alpha)_{li}B(\alpha)_{ji}$, где $S(\alpha)_{li}$ - это степени мономов деформаций (3.73) для двух орбифолдов Калаби-Яу $X(1)/G_{X(1)}$ и $X(2)/G_{X(2)}$ совпадают, как и предполагалось согласно результату работы [50]

$$S(1)_{li}B(1)_{ji} = S(2)_{li}B(2)_{ji} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 2/5 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 0 & 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 2/5 & 0 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}. \quad (3.75)$$

Отсюда мы получаем совпадение периодов, а также выражений для Кэлера потенциала у двух множественных зеркал

$$e^{-K_C^{X(1)}} = e^{-K_C^{X(2)}}. \quad (3.76)$$

Более того, выражение для статистической суммы дуальной калибровочной сигма модели для неферма Калаби-Яу $X(2)$ в силу неотрицательности выражений (3.75) не будет содержать лишних полюсов в правой полуплоскости. Тем самым, справедливы все рассуждения из раздела 3.4, и мы получаем выполнение равенства

$$Z_{Y(2)} = e^{-K_C^{X(2)}}. \quad (3.77)$$

Второй пример также взят из предыдущей главы (см. также [II]). Исходный орбифолд это

$$Y(\alpha)/\mathbb{Z}_5[1, 1, 4, 4, 0], \quad h_Y = 17. \quad (3.78)$$

Аналогично, зеркала расположены в тех же проективных пространствах

$$X(1)/G_{X(1)} \subset \mathbb{P}^4, \quad h_X = 5, \quad (3.79)$$

$$X(2)/G_{X(2)} \subset \mathbb{P}_{(5,3,4,4,4)}^4, \quad h_X = 5. \quad (3.80)$$

Деформации полиномов $\tilde{W}_1$, и $\tilde{W}_2$ следующие:

$$x_1^2 x_2^2 x_5, x_3^2 x_4^2 x_5, x_3 x_4 x_5^3, x_1 x_2 x_5^3, x_1 x_2 x_3 x_4 x_5. \quad (3.81)$$

Получаем, что выражения, входящие в формулы для периодов и статсуммы, равны

$$S(1)_{li}B(1)_{ji} = S(2)_{li}B(2)_{ji} = \begin{pmatrix} 2/5 & 2/5 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 2/5 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1/5 & 1/5 & 3/5 \\ 1/5 & 1/5 & 0 & 0 & 3/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}. \quad (3.82)$$

Следовательно, для орбифолда $X(2)/G_{X(2)}$ справедливы рассуждения из раздела 3.4, так как выражения (3.82) неотрицательны. Тогда

$$Z_{Y(2)} = e^{-K_C^{X(2)}}. \quad (3.83)$$

Заметим, что полное семейство Калаби-Яу $X(2)$, задаваемое в $\mathbb{P}_{(5,3,4,4,4)}^4$ нулями многочлена

$$\tilde{W}_2(x) = x_1^4 + x_1x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5, \quad (3.84)$$

имеет число Ходжа $h_{21} = 28$. Это означает, что существует 28 допустимых деформаций многочлена $\tilde{W}_2$ вида

$$\prod_{j=1}^5 x_j^{S(2)_{lj}}. \quad (3.85)$$

Среди них содержатся мономы $x_1^4x_3x_4$ и $x_1^4x_3^2$. Легко видеть, что они дают отрицательный вклад в произведение матриц

$$S(2)_{li}B(2)_{ij}. \quad (3.86)$$

В таком случае при расчёте интегралов, входящих в статистическую сумму Z_Y для соответствующей калибровочной линейной сигма-модели, появляются дополнительные полюса в правой полуплоскости, что вызывает проблему, упомянутую ранее.

Тем не менее, справедливость гипотезы остается в силе, если ограничиться на определённые классы семейств многообразий Калаби-Яу. В частности, это условие выполняется для случая, когда многообразие Калаби-Яу X представляет собой нетривиальное зеркало для семейства орбифолдов Ферма. При этом факторизация по допустимой группе симметрий $G_{X(2)}$ убирает мономы, ответственные за возникновение нежелательных вкладов в Z_Y .

В рамках данной главы ставилась задача проиллюстрировать конструкции зеркальной симметрии, решив проблему нахождения специальной геометрии на пространстве модулей кэлеровых структур многообразия Калаби-Яу. Было приведено доказательство зеркального

аналога JKLMR-гипотезы, утверждающего эквивалентность специальной геометрии на пространстве модулей комплексных структур X и статистической суммы Z_Y дуальной калибровочной сигма-модели. Результат получен для многообразий Калаби-Яу смешанного типа из классификации Берглунда-Хубша при условии наложения ограничений на допустимые деформации.

Глава 4

$N = 2$ суперконформные теории поля и компактификация в теории суперструн

Двумерные квантовые теории поля с дополнительной алгеброй конформной симметрии Вирасоро возникают в большом числе задач современной физики, начиная с описания критических явлений в магнетиках, заканчивая симметриями в теории струн. В этой главе сначала мы обсудим общеизвестные определения и свойства конформных теорий поля. Этому посвящены разделы с 4.1 по 4.6. Затем, в разделах 4.7-4.12 будут рассмотрены $N = 2$ суперконформные теории поля, возникающие как компактный сектор в теории суперструн.

4.1 Конформные теории поля

Теория поля в двумерии является конформной, если тензор энергии-импульса имеет нулевой след:

$$T^\mu_\mu = 0. \quad (4.1)$$

В комплексных координатах на плоскости $(z, \bar{z})$ тензор энергии-импульса в общем случае имеет три независимые компоненты: T_{zz} , $T_{z\bar{z}}$ и $T_{\bar{z}\bar{z}}$. След в этом случае равен

$$T_z^z + T_{\bar{z}}^{\bar{z}} = T_{z\bar{z}} + T_{\bar{z}z} = 2T_{z\bar{z}} = 0. \quad (4.2)$$

Из условия сохранения Нётеровского тока $\partial T_{z,\bar{z}} = \bar{\partial} T_{z\bar{z}} = 0$ следует, что соответствующая компонента является голоморфным (и антиголоморфным) током: $T_{zz} = T(z)$ и $T_{\bar{z}\bar{z}} = \bar{T}(\bar{z})$.

Важную роль играют *локальные поля* $\Phi(z, \bar{z})$. Они образуют операторную алгебру, кото-

рая определяется в терминах *операторного разложения*:

$$\Phi_1(z)\Phi_2(w) = \sum_k C_{12}^k(z-w)\Phi_k(w) + \dots \quad (4.3)$$

Здесь мы написали формулу для голоморфных составляющих конформных полей. Операторная алгебра является центральным элементом конформного бутстрапа, разработанного А. Белавиным, А. Поляковым и А. Замолотчиковым в их знаменитой работе [16]. Сформулируем аксиомы конформного бутстрапа:

- Все поля модели должны быть взаимно локальны, то есть их операторное разложение должно иметь тривиальную монодромию.
- Операторная алгебра замкнута и ассоциативна.

Поля в физических конформных теориях должны удовлетворять этим аксиомам. В этой главе мы остановимся на минимальных моделях супер-алгебры Вирасоро, которые являются составным элементом для построения полей компактного сектора теории суперструн. В подобных моделях выполняются аксиомы конформного бутстрапа.

Модели конформной теории поля имеют бесконечномерную алгебру симметрии Вирасоро. Ее генераторы L_n могут быть получены как моды тензора энергии-импульса:

$$T(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{L_n}{z^{n+2}}. \quad (4.4)$$

Используя операторное разложение

$$T(z)T(w) = \frac{c}{12(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{z-w}\partial T(w) + \dots, \quad (4.5)$$

можно получить коммутационные соотношения алгебры Вирасоро:

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3-m)\delta_{m,-n}. \quad (4.6)$$

Параметр c называется центральным зарядом. С точки зрения действия алгебры Вирасоро, пространство состояний нашей теории будет раскладываться в сумму неприводимых представлений. Неприводимое представление можно задавать при помощи *примарного состояния*

Φ_Δ - старшего вектора в представлении. Оно удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} L_0 \Phi_\Delta &= \Delta \Phi_\Delta \\ L_{-n} \Phi_\Delta &= 0, \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Параметр Δ называется конформной размерностью. Можно также получить операторное разложение тензора энергии-импульса с примарным полем

$$T(w) \Phi_\Delta(z, \bar{z}) = \frac{\Delta \Phi_\Delta(z, \bar{z})}{(w - z)^2} + \frac{\partial_z \Phi_\Delta(z, \bar{z})}{w - z} + \dots \tag{4.8}$$

Представление старшего веса $\mathcal{V}_\Delta$ будет порождено следующими векторами:

$$\mathcal{V}_\Delta = \langle L_{-n_1} \dots L_{-n_s} \Phi_\Delta \rangle, \quad n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_s. \tag{4.9}$$

Заметим, что пока все формулы написаны нами в голоморфном секторе. На самом деле полной алгеброй конформной симметрии является произведение голоморфной и антиголоморфной копии алгебры Вирасоро: $\text{Vir} \times \bar{\text{Vir}}$, которые действуют независимо. Примарные поля в данном случае будут иметь голоморфную и антиголоморфную часть:

$$\Phi_{\Delta, \bar{\Delta}}(z, \bar{z}) = \Phi_\Delta(z) \bar{\Phi}_{\bar{\Delta}}(\bar{z}). \tag{4.10}$$

При конформных преобразованиях $(z, \bar{z}) \rightarrow f(z, \bar{z})$ примарное поле изменяется как

$$\Phi_{\Delta, \bar{\Delta}}(f(z), \bar{f}(\bar{z})) = \left(\frac{\partial f(z)}{\partial z} \right)^{-\Delta} \left(\frac{\partial \bar{f}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \right)^{-\bar{\Delta}} \Phi_{\Delta, \bar{\Delta}}(z, \bar{z}) \tag{4.11}$$

Алгебра Вирасоро может быть расширена до супер-алгебры. Напомним её свойства в следующем разделе.

4.2 $N = 2$ алгебра Вирасоро

Суперсимметричным $N = 2$ расширением алгебры Вирасоро является алгебра, порожденная тензором энергии-импульса $T(z)$, двумя супер-токами $G^\pm(z)$, а также $U(1)$ -током

$J(z)$ [52–54]. Операторные разложения имеют следующий вид [55]:

$$\begin{aligned}
T(z)G^\pm(w) &= \frac{3/2}{(z-w)^2}G^\pm(w) + \frac{1}{z-w}\partial G^\pm(w) + \dots \\
T(z)J(w) &= \frac{1}{(z-w)^2}J(w) + \frac{1}{(z-w)}\partial J(w) + \dots, \\
G^+(z)G^-(w) &= \frac{2c/3}{(z-w)^3} + \frac{2}{(z-w)^2}J(w) + \frac{2}{z-w}T(w) + \frac{1}{z-w}\partial J(w) + \dots, \\
G^\pm(z)G^\pm(w) &= 0 + \dots, \\
J(z)G^\pm(w) &= \pm \frac{1}{z-w}G^\pm(w) + \dots, \\
J(z)J(w) &= \frac{c/3}{(z-w)^2} + \dots
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Из последнего разложения видно, что ток $J(z)$ является $U(1)$ -током и может быть представлен через свободное скалярное поле $\varphi(z)$ как

$$J(z) = i\sqrt{\frac{c}{3}}\frac{\partial\phi}{\partial z}, \tag{4.13}$$

где скалярное поле имеет разложение

$$\varphi(z)\varphi(0) = -\log z + \dots \tag{4.14}$$

Эти токи могут быть разложены по своим модам, которые генерируют $N = 2$ супер-алгебру Вирасоро аналогично (4.4):

$$\begin{aligned}
G^\pm(z) &= \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \pm \nu} \frac{G_r^\pm}{z^{r+3/2}} \\
J(z) &= \sum_n \frac{J_n}{z^{n+1}}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Представления $N = 2$ алгебры Вирасоро разбиваются на два сектора: Навье-Шварца (НШ) с $r \in \mathbb{Z} + 1/2$ ($\nu = 1/2$) и Рамона (Р), в котором $r \in \mathbb{Z}$ ($\nu = 0$). Эти сектора отличаются монодромией тока $G^\pm$:

$$G^\pm(e^{2\pi i}z) = e^{\pm 2\pi i\nu}G^\pm(z), \tag{4.16}$$

Коммутационные соотношения будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
[L_n, L_m] &= (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12} (n^3 - n) \delta_{n+m,0}, \\
[J_n, J_m] &= \frac{c}{3} n \delta_{n+m,0} \\
[L_n, J_m] &= -m J_{n+m} \\
\{G_r^+, G_s^-\} &= L_{r+s} + \frac{r-s}{2} J_{r+s} + \frac{c}{6} \left(r^2 - \frac{1}{4}\right) \delta_{r+s,0}, \\
[L_n, G_r^\pm] &= \left(\frac{n}{2} - r\right) G_{r+n}^\pm, \\
[J_n, G_r^\pm] &= \pm G_{r+n}^\pm. \\
\{G_r^\pm, G_s^\pm\} &= 0
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Перейдем теперь к обсуждению представлений $N = 2$ алгебры Вирасоро. В первую очередь нас будут интересовать *унитарные* представления, в которых норма всех состояний неотрицательна:

$$\langle \Phi | \Phi \rangle \geq 0. \tag{4.18}$$

Представление старшего веса $\mathcal{H}_{\Delta,Q}$ определяется старшим вектором, который в НС-секторе уничтожается подалгеброй с положительными n и r

$$\begin{aligned}
L_n \Phi_{\Delta,Q}^{NS} = 0, \quad J_n \Phi_{\Delta,Q}^{NS} = 0, \quad n \geq 1, \quad G_r^\pm \Phi_{\Delta,Q}^{NS} = 0, \quad r \geq \frac{1}{2} \\
L_0 \Phi_{\Delta,Q}^{NS} = \Delta \Phi_{\Delta,Q}^{NS}, \quad J_0 \Phi_{\Delta,Q}^{NS} = Q \Phi_{\Delta,Q}^{NS}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Здесь Δ по-прежнему конформная размерность, а Q - $U(1)$ заряд.

Представление старшего веса в Р-секторе определяется аналогичным образом, однако условие на действие $G_r^\pm$ меняется:

$$G_n^\pm \Phi_{\Delta,Q}^R = 0, \quad n \geq 1, \quad G_0^+ \Phi_{\Delta,Q}^R = 0. \tag{4.20}$$

Из унитарности представления $N = 2$ алгебры Вирасоро вытекает ограничение на конформную размерность Δ и заряд Q . Рассмотрим сумму норм следующих состояний в НС-секторе:

$$\left| G_{-1/2}^\mp |\Phi\rangle \right|^2 + \left| G_{+1/2}^\pm |\Phi\rangle \right|^2 = \langle \Phi | \left\{ G_{1/2}^\pm, G_{-1/2}^\mp \right\} | \Phi \rangle = (2\Delta \pm Q) \langle \Phi | \Phi \rangle \geq 0. \tag{4.21}$$

Отсюда сразу вытекает неравенство на конформную размерность состояния в НС-секторе:

$$\Delta \geq \frac{|Q|}{2}. \quad (4.22)$$

Равенство $Q = 2\Delta$ достигается для так называемых *киральны-х-примарны-х* состояний, которые помимо условий (4.19) удовлетворяют также

$$G_{-1/2}^+ \Phi_{\Delta, Q} = 0, \quad (4.23)$$

а $Q = -2\Delta$ для *антикиральны-х-примарны-х*, удовлетворяющих дополнительно

$$G_{-1/2}^- \Phi_{\Delta, Q} = 0. \quad (4.24)$$

На самом деле условия, которые определяют киральные состояния (4.23) (4.24), являются достаточно важными. Во-первых, киральные состояния образуют кольцо, которое называется *киральным кольцом*. Это означает, что при слиянии двух киральных состояний справа будет возникать тоже только киральное. Более того, операторное разложение двух киральных состояний содержит только регулярные члены [29]. В этом несложно убедиться. Рассмотрим операторное разложение двух киральных примарных

$$\Phi_{\Delta_1, Q_1}^c(z) \Phi_{\Delta_2, Q_2}^c(w) = \sum_j C_{12}^j (z-w)^{\Delta_j - \Delta_1 - \Delta_2} \Psi_{\Delta_j, Q_j}^j(w). \quad (4.25)$$

Поля Ψ_{Δ_j, Q_j}^j , возникающие в правой части, не обязательно киральные примарные. Однако из закона сохранения заряда следует, что $Q_j = Q_1 + Q_2$. Учтем неравенство на конформную размерность: $\Delta_j \geq \frac{Q_j}{2}$ (которое переходит в равенство для киральных полей). Тогда

$$\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_j = \frac{Q_1}{2} + \frac{Q_2}{2} - \Delta_j \leq \frac{Q_j}{2} - \frac{|Q_j|}{2} \leq 0. \quad (4.26)$$

Отсюда видно, что операторное разложение двух киральных примарных состояний имеет только регулярные слагаемые. Это позволяет определить их произведение

$$(\Phi_{\Delta_1, Q_1}^c \cdot \Phi_{\Delta_1, Q_1}^c)(w) \equiv \lim_{z \rightarrow w} \Phi_{\Delta_1, Q_1}^c(z) \Phi_{\Delta_1, Q_1}^c(w) = \sum_j C_{12}^j \Phi_{\Delta_j, Q_j}^c(w) \quad (4.27)$$

так, что состояния, возникающие в правой части - киральные примарные. Так образуется киральное кольцо.

Рассмотрим теперь рамоновский сектор и получим условие унитарности. Из неотрицательности нормы следующего состояния

$$|G_0^-|\Phi\rangle|^2 = \langle\Phi|\{G_0^+, G_0^-\}|\Phi\rangle = \langle\Phi|L_0 - c/24|\Phi\rangle = (\Delta - c/24)\langle\Phi|\Phi\rangle \geq 0 \quad (4.28)$$

вытекает неравенство на конформную размерность в Р-секторе

$$\Delta \geq \frac{c}{24}. \quad (4.29)$$

Состояние, для которого достигается это равенство, называется *Рамоновский вакуум*.

4.3 Минимальные модели $N = 2$ алгебры Вирасоро и киральные кольца

Унитарная серия $N = (2, 2)$ суперконформных минимальных моделей M_k может быть реализована при помощи следующей косет конструкции:

$$M_k = \frac{\widehat{sl(2)_k} \times \widehat{u(1)_2}}{\widehat{u(1)_{k+2}}}. \quad (4.30)$$

Нижний индекс у алгебры Каца-Муди $\widehat{\mathfrak{g}}_k$ означает уровень. Мы не будем подробно останавливаться на косет конструкции, однако, она важна для понимания того, как устроены минимальные представления, характеры и модулярные инварианты. Подробнее о них мы поговорим в следующем разделе.

Минимальные представления нумеруются целым неотрицательным числом k и имеют центральный заряд:

$$c = \frac{3k}{k+2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.31)$$

Поля в модели строятся из голоморфных и антиголоморфных минимальных представлений $N = 2$ супералгебры Вирасоро. Для данного k существует конечное число таких представлений. Они определяются примарными состояниями (старшими векторами в представлении) Φ_q^l с параметрами $l = 0, \dots, k$ и $q = -l, -l+2, \dots, l$. В НШ секторе примарные состояния Φ_q^l имеют конформную размерность и $U(1)$ заряд:

$$\Delta_{l,q}^{NS} = \frac{l(l+2) - q^2}{4(k+2)}, \quad Q_{l,q}^{NS} = \frac{q}{k+2}, \quad (4.32)$$

а в Р секторе соответствующие конформная размерность и заряд равны

$$\Delta_{l,q}^R = \frac{l(l+2) - (q-1)^2}{4(k+2)} + \frac{1}{8}, \quad Q_{l,q}^R = \frac{q-1}{k+2} + \frac{1}{2}. \quad (4.33)$$

Киральные (4.23) и антикиральные (4.24) примарные состояния

$$\Phi_c^l \equiv \Phi_l^l, \quad \Phi_a^l \equiv \Phi_{-l}^l, \quad (4.34)$$

возникают в НШ-секторе при $q = \pm l$. Спаривая голоморфные и антиголоморфные киральные и антикиральные состояния можно получить так называемые киральные-киральные, антикиральные-киральные, киральные-антикиральные и антикиральные-антикиральные поля. Мы будем их обозначать (с,с), (а,с), (с,а) и (а,а) соответственно. Эти поля образуют киральные кольца, которые имеют важную геометрическую интерпретацию [4, 6, 15, 30].

Как будет показано далее, существует прямая связь между киральными кольцами и когомологиями на многообразии Калаби-Яу. Дело в том, что операторы $G_{-1/2}^\pm$ можно отождествить с дифференциалами Дольбо, действующими на формах, определенных на Калаби-Яу. А киральные кольца, в свою очередь, с (p, q) формами. Действительно, ведь операторы $G_{-1/2}^\pm$ нильпотентны, что позволяет определить их когомологии. Ниже представлена явная форма отождествления [29]

$$\begin{aligned} (G_{-1/2}^+, G_{+1/2}^-) &\Leftrightarrow (\partial, \partial^*), \left\{ G_{-1/2}^+, G_{+1/2}^- \right\} = 2 \left(L_0 - \frac{1}{2} J_0 \right) \Leftrightarrow \Delta_\partial, \\ (\bar{G}_{-1/2}^+, \bar{G}_{+1/2}^-) &\Leftrightarrow (\bar{\partial}, \bar{\partial}^*), \left\{ \bar{G}_{-1/2}^+, \bar{G}_{+1/2}^- \right\} = 2 \left(L_0 + \frac{1}{2} J_0 \right) \Leftrightarrow \Delta_{\bar{\partial}}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Это позволяет связать поля и формы

$$\begin{aligned} \text{киральные поля} &\iff \text{замкнутые формы} \\ \text{киральные примарные поля} &\iff \text{гармонические формы} . \end{aligned} \quad (4.36)$$

Если обозначить размерность киральных колец с соответствующими зарядами как $d_{a,c}(-Q, \bar{Q})$ и $d_{(c,c)}(Q, \bar{Q})$, то имеется их связь с числами Ходжа:

$$d_{(a,c)}(-Q, \bar{Q}) = \dim H^{Q, \bar{Q}}(X). \quad (4.37)$$

Зеркальная симметрия с точки зрения $N = 2$ конформных теорий поля может рассматриваться как изоморфизм киральных колец [4]. В главе 4.12 мы сравниваем эти пространства

для конкретного примера многообразия Калаби-Яу X .

Для дальнейших рассуждений удобно ввести дополнительный индекс $s = 0, 1, 2, 3$, который нумерует сектор и фермионное число. Значения $s = 0$ и $s = 2$ соответствуют сектору НШ и фермионным числам равным $F = 0$ и $F = 1$ соответственно. Аналогично вводятся $s = 1$ и $s = 3$. Тогда представление $\mathcal{H}_{q,s}^l$ будет порождено старшим вектором $\Phi_{q,s}^l$ с фиксированным фермионным числом s . Его конформная размерность и заряд соответственно равны

$$\Delta_{q,s}^l = \frac{l(l+2) - q^2}{4(k+2)} + \frac{s^2}{8}, \quad Q_{q,s} = -\frac{q}{k+2} + \frac{s}{2}. \quad (4.38)$$

Тогда область допустимых значений квантовых чисел l, q, s оказывается:

$$0 \leq l \leq k, \quad -l \leq q \leq l, \quad 0 \leq s \leq 3, \quad l + q + s = 0 \pmod{2}. \quad (4.39)$$

Однако полезно расширить область допустимых параметров. В работе [56] был установлен изоморфизм минимальных представлений старшего веса $N = 2$ супералгебры Вирасоро:

$$\mathcal{H}_{q,s}^l \simeq \mathcal{H}_{q+(k+2),s+2}^{k-l}, \quad \mathcal{H}_q^l \simeq \mathcal{H}_{q+2(k+2),s+4}^l. \quad (4.40)$$

Он позволяет отождествить состояния

$$\Phi_q^l \simeq \Phi_{q+(k+2)}^{k-l}, \quad \Phi_q^l \simeq \Phi_{q+2(k+2)}^l. \quad (4.41)$$

С учетом этой $\mathbb{Z}_2$ симметрии мы можем считать, что область допустимых значений параметров шире:

$$0 \leq l \leq k, \quad -(k+1) \leq q \leq (k+2), \quad 0 \leq s \leq 3, \quad l + q + s = 0 \pmod{2}. \quad (4.42)$$

Теперь чтобы строить модели $N = (2, 2)$ суперконформной теории поля нам необходимо правильным образом спаривать голоморфные и антиголоморфные состояния. Алгеброй симметрии модели будет произведение голоморфного и антиголоморфной копии супералгебры Вирасоро: $S\text{Vir} \otimes S\bar{\text{Vir}}$. Здесь нам может помочь подход *модулярного бутстрапа*, в котором правила спаривания считаются с модулярно-инвариантной статистической суммы.

4.4 Модулярный бутстрап и спектр конформной теории поля

Рассмотрим конформную теорию поля на торе. Пусть τ - модулярный параметр, который можно понимать как отношение двух фундаментальных периодов на торе. Тогда статистическая сумма $N = 0$ конформной теории поля определяется следующим стандартным выражением:

$$Z(\tau) = \text{Tr}_{\mathcal{H}} e^{2\pi i [\tau(L_0 - \frac{c}{24}) - \bar{\tau}(\bar{L}_0 - \frac{c}{24})]}, \quad (4.43)$$

где $\mathcal{H}$ - пространство состояний модели, которое можно разбить в прямую сумму представлений старшего веса:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\Delta, \bar{\Delta}} N_{\Delta, \bar{\Delta}} \mathcal{V}_{\Delta} \otimes \mathcal{V}_{\bar{\Delta}}. \quad (4.44)$$

Здесь множитель $N_{\Delta, \bar{\Delta}}$ - целый неотрицательный. Он равен кратности вхождения соответствующего представления. Введем теперь характер представления алгебры Вирасоро

$$\chi_{\Delta}(\tau) = \text{Tr}_{\mathcal{V}_{\Delta}} q^{L_0 - \frac{c}{24}}, \quad q = e^{2\pi i \tau}, \quad \text{Im}(\tau) > 0. \quad (4.45)$$

Теперь можно переписать статистическую сумму (4.43) в виде билинейной комбинации характеров:

$$Z(\tau) = \sum_{\Delta, \bar{\Delta}} N_{\Delta, \bar{\Delta}} \cdot \chi_{\Delta}(\tau) \bar{\chi}_{\bar{\Delta}}(\bar{\tau}). \quad (4.46)$$

Задача состоит в том, чтобы статистическая сумма модели конформной теории поля обладала модулярной инвариантностью, то есть инвариантностью относительно группы преобразований $PSL(2, \mathbb{Z})$. Эту группу можно задать двумя генераторами

$$T : \tau \mapsto \tau + 1, \quad S : \tau \mapsto -\frac{1}{\tau}. \quad (4.47)$$

В рациональной конформной теории поля характеры образуют конечномерное представление модулярной группы и линейно преобразуются под её действием. Пусть у нас имеется конечное число представлений старшего веса $\mathcal{V}_j$, $j = 1, 2, \dots, J$, а соответствующие характеры занумерованы как $\chi_j, \bar{\chi}_{\bar{j}}$. Если теперь записать условия $PSL(2, \mathbb{Z})$ - инвариантности в терминах характеров, то получатся следующие выражения:

$$\begin{aligned} \chi_j \left(-\frac{1}{\tau} \right) &= \sum_{j'} S_{jj'} \chi_{j'}(\tau) \\ \chi_j(\tau + 1) &= e^{2\pi i (\Delta_j - \frac{c}{24})} \chi_j(\tau) = \sum_{j'} T_{jj'} \chi_{j'}(\tau). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Заметим, что матрицы T и S являются унитарными. Матрица S играет очень важную роль. В частности, через неё выражаются коэффициенты слияния двух примарных полей (формула Верлинде [57]).

Теперь условие модулярной инвариантности статсуммы: $Z(\tau + 1) = Z(-1/\tau) = Z(\tau)$ можно записать как уравнение на коэффициенты $N_{jj'}$ в формуле (4.46):

$$SNS^\dagger = TNT^\dagger = N. \quad (4.49)$$

Таким образом возникает задача классификации модулярно-инвариантных статсумм (4.46), или, иными словами, матриц спаривания $N_{j,\bar{j}}$. В следующей главе мы подробно остановимся на случае $N = 2$ минимальных моделей.

4.5 Характеры минимальных моделей

В этой главе мы кратко обсудим свойства характеров, выпишем классификацию модулярно-инвариантных статистических сумм (*ADE классификация*) и обсудим спектр локальных полей в $N = 2$ минимальной модели. Характер представления с фиксированным фермионным числом s в случае $N = 2$ супералгебры Вирасоро определяется как

$$\chi_{q,s}^l(\tau, \theta, \epsilon) = e^{-2\pi i \epsilon} \text{Tr}_{\mathcal{H}_{q,s}^l} e^{2\pi i \theta J_0} e^{2\pi i \tau (L_0 - \frac{c}{24})}. \quad (4.50)$$

Из косект конструкции (4.30) следует, что характеры $N = 2$ минимальной модели $\chi_{q,s}^l$ выражаются через характеры аффинной $\widehat{sl(2)}_k$, которые мы обозначим как $\widehat{\chi}_l^{sl(2)}$, а также через характеры $\widehat{u(1)}$.

Характер аффинной $\widehat{u(1)}_n$ на уровне n может быть записан через тэта-функцию уровня n :

$$\chi_m^{\widehat{u(1)}_n}(\tau) = \frac{\Theta_{m,n}(\tau)}{\eta(\tau)}. \quad (4.51)$$

где

$$\Theta_{m,n}(\tau) := \sum_{j \in \mathbb{Z} + \frac{m}{2n}} q^{kj^2}, \quad (4.52)$$

а η -функция Дедекинда равна

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n). \quad (4.53)$$

Тогда из косет-реализации минимальной модели

$$\frac{\widehat{sl}(2)_k \times \widehat{u}(1)_2}{\widehat{u}(1)_{k+2}}. \quad (4.54)$$

следует следующее соотношение на характеры:

$$\chi_l^{\widehat{sl(2)_k}}(\tau) \Theta_{s,2}(\tau) = \sum_{q=-(k+1)}^{k+2} \Theta_{q,k+2}(\tau) \chi_{q,s}^l(\tau). \quad (4.55)$$

Используя это соотношение (4.55) можно вывести модулярные преобразования характеров и ADE классификацию. Заметим, что нас в первую очередь интересуют преобразования характеров относительно генератора $S : \tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$, так как инвариантность относительно $T : \tau \mapsto \tau + 1$ накладывает только ограничение на целочисленность спина:

$$\Delta - \bar{\Delta} \in \mathbb{Z}. \quad (4.56)$$

Запишем S и T - преобразования для характеров $\widehat{sl(2)_k}$ и для тэта-функций уровня n :

$$\begin{aligned} \chi_l^{\widehat{sl(2)_k}}\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{\frac{2}{k+2}} \sum_{l'=0}^k \sin\left(\pi \frac{(l+1)(l'+1)}{k+2}\right) \chi_{l'}^{\widehat{sl(2)_k}}(\tau), \\ \chi_l^{\widehat{sl(2)_k}}(\tau+1) &= \exp\left(2\pi i \frac{l(l+2)}{4(k+2)}\right) \chi_l^{\widehat{sl(2)_k}}(\tau) \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} \Theta_{q,n}\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{-i\tau} \sum_{q'=-n+1}^n \frac{1}{\sqrt{2n}} \exp\left(-\pi i \frac{qq'}{n}\right) \Theta_{q',n}(\tau), \\ \Theta_{q,n}(\tau+1) &= \exp\left(2\pi i \frac{q^2}{4n}\right) \Theta_{q,n}(\tau). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Рассмотрим теперь соотношение между характерами (4.55). Заменяя в левой и правой части $\tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}$ и используя формулы (4.57) и (4.58) мы получаем модулярные преобразования характеров $N = 2$ минимальной модели:

$$\begin{aligned} \chi_{l,s}^l(\tau+1, \theta, \epsilon) &= \exp\left(i2\pi \left(\Delta_{l,q} - \frac{c}{24}\right)\right) \chi_{q,s+2}^l(\tau, \theta, \epsilon), \\ \chi_{q,s}^l\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{\theta}{\tau}, \epsilon + \frac{c\theta^2}{6\tau}\right) &= \sum_{l'q',s'} S_{l,q,s}^{l',q',s'} \chi_{l',s'}^{l'}(\tau, \theta, \epsilon), \end{aligned} \quad (4.59)$$

где S - матрица равна

$$S_{l,q,s}^{l',q',s'} = \sqrt{\frac{2}{k+2}} \sin\left(\pi \frac{(l+1)(l'+1)}{k+2}\right) \exp\left(i\pi \frac{qq'}{k+2}\right) \exp\left(i\pi \frac{ss'}{2}\right). \quad (4.60)$$

Отсюда видно замечательное свойство S -матрицы. При действии модулярной группы характеры $N = 2$ минимальной модели преобразуются независимо по индексам l , q и s . Как было показано Д. Гепнером [58] в общем случае модулярно-инвариантная статистическая сумма имеет следующий вид

$$Z(\tau) = \sum_{l, \bar{l}=0}^k \sum_{\substack{q, \bar{q}=-(k+1); \\ l+q+s=0, \bar{l}+\bar{q}+\bar{s}=0 \bmod 2}}^{k+2} \sum_{s, \bar{s}=0}^3 N_{l, \bar{l}} M_{q, \bar{q}} L_{s, \bar{s}} \chi_{q, s}^l(\tau) \bar{\chi}_{\bar{q}, \bar{s}}^{\bar{l}}(\bar{\tau}), \quad (4.61)$$

Матрицы $N_{l, \bar{l}}$, $M_{q, \bar{q}}$, $L_{s, \bar{s}}$ соответствуют модулярно-инвариантным статистическим суммам аффинной $\widehat{sl(2)}_k$ и тэта систем уровней $k+2$ и 2 соответственно (также см. [59, 60]). Заметим, что такая факторизация матриц спаривания - прямое следствие независимости преобразований по индексам l, q, s , которое мы обсудили выше.

4.6 ADE классификация

Самая важная среди этих матриц - $N_{l, \bar{l}}$. Она была найдена Капелли, Ициксоном и Зюбером [61] при решении задачи поиска модулярных инвариантов конформных теорий поля, имеющих алгебру симметрии $\widehat{sl(2)}$.

Они нашли полный список, который называется *ADE классификация*.

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_{k+1}), k \geq 1 : & \sum_{l=0}^k \chi_l \bar{\chi}_l \\ (\mathbf{D}_{2j+2}), k = 4j : & \sum_{l=0}^{j-1} |\chi_{2l} + \chi_{k-2l}|^2 + 2\chi_{k/2} \bar{\chi}_{k/2}, \\ (\mathbf{D}_{2j+1}), k = 4j - 2 : & \sum_{l=0}^{k/2} |\chi_{2l}|^2 + \sum_{l=0}^{k/2-1} \chi_{2l+1} \bar{\chi}_{k-2l-1}, \\ (\mathbf{E}_6), k = 10 : & |\chi_0 + \chi_6|^2 + |\chi_3 + \chi_7|^2 + |\chi_4 + \chi_{10}|^2, \\ (\mathbf{E}_7), k = 16 : & |\chi_0 + \chi_{16}|^2 + |\chi_4 + \chi_{12}|^2 + |\chi_6 + \chi_{10}|^2 + |\chi_8|^2 + (\chi_2 + \chi_{14}) \bar{\chi}_8 + \chi_8 (\bar{\chi}_2 + \bar{\chi}_{14}), \\ (\mathbf{E}_8), k = 28 : & |\chi_0 + \chi_{10} + \chi_{18} + \chi_{28}|^2 + |\chi_6 + \chi_{12} + \chi_{16} + \chi_{22}|^2, \end{aligned} \quad (4.62)$$

Он включает простейший диагональный инвариант типа $\mathbf{A}_{k+1}$ для всех целых уровней $k \geq 1$. Для четных k возникает две серии недиагональных инвариантов типа $\mathbf{D}$: $\mathbf{D}_{2j+2}$ для $k = 4j$, и $\mathbf{D}_{2j+1}$ для $k = 4j - 2$. Помимо этой бесконечной серии существует три исключительных случая: $\mathbf{E}_6$, $\mathbf{E}_7$, и $\mathbf{E}_8$ для $k = 10, 16$, и 28 соответственно. Альтернативное доказательство ADE классификации см. в [62]

В (4.61) параметр q принимает все возможные значения: $q = -(k+1), \dots, (k+2)$ и зависит от l только через условие четности: $l+q = 0 \pmod{2}$. Однако, минимальные представления $N=2$ супералгебры Вирасоро определены только при $q = -l, -l+2, \dots, l$. Чтобы правильно интерпретировать остальные слагаемые в статистической сумме, мы используем изоморфизм, который мы упоминали выше:

$$\mathcal{H}_q^l \simeq \mathcal{H}_{q+(k+2)}^{k-l}, \quad \mathcal{H}_q^l \simeq \mathcal{H}_{q+2(k+2)}^l. \quad (4.63)$$

Тогда мы отождествляем состояния (4.41)

$$\Phi_q^l \simeq \Phi_{q+(k+2)}^{k-l}, \quad \Phi_q^l \simeq \Phi_{q+2(k+2)}^l, \quad (4.64)$$

также как и характеры

$$\chi_q^l(\tau) = \chi_{q+(k+2)}^{k-l}(\tau), \quad \chi_q^l(\tau) = \chi_{q+2(k+2)}^l(\tau). \quad (4.65)$$

Ниже в тексте, особенно в главе 4.12 с примерами, могут возникать состояния Φ_q^l с $|q| > l$. Они должны быть отождествлены с $\Phi_{q\pm(k+2)}^{k-l}$. Более того, мы ограничимся рассмотрением диагональных матриц M и L .

Модулярная инвариантность статистической суммы предполагает, в частности, что $Z(\tau+1) = Z(\tau)$. Откуда немедленно следует, что поля в теории с модулярно-инвариантной статсуммой имеют целый спин: $\Delta - \bar{\Delta} \in \mathbb{Z}$. Как будет показано в приложении В, такие поля являются взаимно локальными.

Спектр $N = (2, 2)$ минимальной модели для данного k состоит из полей:

$$\Psi_q^{l, \bar{l}}(z, \bar{z}) = \Phi_q^l(z) \bar{\Phi}_q^{\bar{l}}(\bar{z}), \quad (4.66)$$

где правый и левый индексы l и $\bar{l}$ связаны согласно ADE классификации (4.62). Учитывая правила отождествления (4.41) мы можем считать, что параметр заряда q пробегает полный набор значений:

$$q = -(k+1), \dots, (k+2), \quad q+l = 0 \pmod{2}. \quad (4.67)$$

Стоит отметить, что некоторые ADE инварианты могут быть разложены [63] как: $4_D = 1_A \otimes 1_A$, $10_E = 1_A \otimes 2_A$ и $28_E = 1_A \otimes 3_A$.

Пример: спектр $\mathbf{E}_7$ минимальной модели

Продemonстрируем спектр минимальной модели $\mathbf{E}_7$ уровня $k = 16$ в качестве примера.

Статистическая сумма соответствующей $\widehat{sl}(2)$ аффинной алгебры:

$$Z_{E_7} = |\chi_0 + \chi_{16}|^2 + |\chi_4 + \chi_{12}|^2 + |\chi_6 + \chi_{10}|^2 + |\chi_8|^2 + (\chi_2 + \chi_{14}) \bar{\chi}_8 + \chi_8 (\bar{\chi}_2 + \bar{\chi}_{14}) \quad (4.68)$$

Набор примарных полей в секторе Невьё-Шварца показан в таблице:

Таблица 4.1: Спектр E_7 минимальной модели. НШ сектор

Слагаемое в Z_{E_7}	Поле: $\Phi_q^l \bar{\Phi}_{\bar{q}}^{\bar{l}}$	Область q
$ \chi_0 + \chi_{16} ^2$	$\Phi_0^0 \bar{\Phi}_0^{16}, \Phi_0^{16} \bar{\Phi}_0^0$ $\Phi_0^0 \bar{\Phi}_0^0$ $\Phi_q^{16} \bar{\Phi}_q^{16}$ $\Phi_{q-18}^{16} \bar{\Phi}_q^{16}, \Phi_q^{16} \bar{\Phi}_{q-18}^{16}$	$q = -16, \dots, 16$ $q = 2, \dots, 16$
$ \chi_4 + \chi_{12} ^2$	$\Phi_q^4 \bar{\Phi}_q^{12}, \Phi_q^{12} \bar{\Phi}_q^4$ $\Phi_q^4 \bar{\Phi}_q^4$ $\Phi_q^{12} \bar{\Phi}_q^{12}$ $\Phi_{q-18}^{12} \bar{\Phi}_q^{12}, \Phi_q^{12} \bar{\Phi}_{q-18}^{12}$	$q = -4, \dots, 4$ $q = -4, \dots, 4$ $q = -12, \dots, 12$ $q = 6, \dots, 12$
$ \chi_6 + \chi_{10} ^2$	$\Phi_q^6 \bar{\Phi}_q^{10}, \Phi_q^{10} \bar{\Phi}_q^6$ $\Phi_q^6 \bar{\Phi}_q^6$ $\Phi_q^{10} \bar{\Phi}_q^{10}$ $\Phi_{q-18}^{10} \bar{\Phi}_q^{10}, \Phi_q^{10} \bar{\Phi}_{q-18}^{10}$	$q = -6, \dots, 6$ $q = -6, \dots, 6$ $q = -10, \dots, 10$ $q = 8, 10$
$ \chi_8 ^2$	$\Phi_q^8 \bar{\Phi}_q^8$	$q = -8, \dots, 8$
$(\chi_2 + \chi_{14}) \bar{\chi}_8 + \chi_8 (\bar{\chi}_2 + \bar{\chi}_{14})$	$\Phi_q^2 \bar{\Phi}_q^8, \Phi_q^8 \bar{\Phi}_q^2$ $\Phi_q^{14} \bar{\Phi}_q^8, \Phi_q^8 \bar{\Phi}_q^{14}$ $\Phi_{q-18}^{14} \bar{\Phi}_q^8, \Phi_q^8 \bar{\Phi}_{q-18}^{14}$ $\Phi_{q+18}^{14} \bar{\Phi}_q^8, \Phi_q^8 \bar{\Phi}_{q+18}^{14}$	$q = -2, \dots, 2$ $q = -8, \dots, 8$ $q = 4, \dots, 8$ $q = -4, \dots, -8$

В первом столбце находится соответствующее слагаемое в статистической сумме, которое связано с полями в следующем столбце. Заметим, что некоторые поля имеют левый и правые состояния с разными зарядами: $\bar{q} = q \pm (k + 2)$. Это может возникать из-за правил

отождествления (4.41). Аналогичным образом можно выписать примарные поля в секторе Рамона.

4.7 Орбифолды произведений минимальных моделей и компактификация

Теория суперструн, в частности, является конформной теорией поля на мировом листе. Критическая размерность $d = 10$, при которой сокращается конформная аномалия, связана с центральным зарядом этой теории как $c = \frac{3}{2}d$. Пространственно-временной сектор должен содержать бозоны X^μ (с центральным зарядом $c_{\text{bos}} = 1$ у каждого) и фермионы ψ^μ (с центральным зарядом $c_{\text{ferm}} = \frac{1}{2}$ у каждого). Индекс μ соответствует пространству Минковского и пробегает $\mu = 0, 1, 2, 3$. Тогда полный центральный заряд складывается из следующих величин:

$$c = \frac{3}{2}d = 15 = \underbrace{4 \cdot 1}_{\text{бозоны}} + \underbrace{4 \cdot \frac{1}{2}}_{\text{фермионы}} + \underbrace{9}_{\text{N=2 CFT}}. \quad (4.69)$$

Итак, для описания компактного сектора теории суперструн нам необходимо строить модели $N = (2, 2)$ суперсимметричной конформной теории поля с центральным зарядом $c = 9$.

В качестве примера таких моделей можно рассмотреть произведения $N = (2, 2)$ минимальных моделей супералгебры Вирасоро:

$$M_{\vec{k}} = \prod_{i=1}^r M_{k_i}, \quad \sum_{i=1}^r \frac{3k_i}{k_i + 2} = 9. \quad (4.70)$$

На самом деле это не единственный пример теории компактного сектора суперструны. Существуют более сложные теории (так называемые модели Казама-Сузуки), основанные на косет конструкции [64]. Однако, в данной диссертации мы остановимся на рассмотрении составных (композитных) моделей вида (4.70). Каждый фактор в произведении M_{k_i} - это минимальная модель с конкретным модулярным инвариантом из списка ADE (4.62). Орбифолды таких составных моделей можно рассматривать как сигма-модели на многообразиях Калаби-Яу [14, 58, 65].

Явная связь между орбифолдами композитных моделей и гиперповерхностями Калаби-Яу была установлена в работах [66, 67]. По модулярному инварианту в каждой минимальной

модели M_{k_i} можно восстановить элементарный полином W_i . Тогда многообразие Калаби-Яу будет задаваться нулями многочлена $W(x) = \sum_{i=1}^r W_i(x_i)$ или системой полиномиальных уравнений в проективных пространствах [68]. Такие элементарные многочлены были классифицированы Арнольдом в рамках теории катастроф [69] (см. также [70]):

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{k_i+1} : \quad & W_i(x_i) = x_i^{k_i+2} \\
\mathbf{D}_{k_i/2+2} : \quad & W_i(x_i, y_i) = x_i^{(k_i+2)/2} + x_i y_i^2 \\
\mathbf{E}_6 : \quad & W_i(x_i, y_i) = x_i^3 + y_i^4 \\
\mathbf{E}_7 : \quad & W_i(x_i, y_i) = x_i^3 + x_i y_i^3 \\
\mathbf{E}_8 : \quad & W_i(x_i, y_i) = x_i^3 + y_i^5.
\end{aligned} \tag{4.71}$$

Чтобы убедиться в этом соответствии, можно установить связь между кольцами Милнора (2.30) многочленов $W_i(x)$ и киральными кольцами $N = (2, 2)$ модели орбифолда [4]. Например, компактификация на квинтике (1.53) соответствует модели $(3_A)^5$, то есть произведению пяти минимальных моделей с $k = 3$ и с $\mathbf{A}$ типом модулярного инварианта.

Рассмотрим диагональную подалгебру, действующую на пространствах состояний композитной модели. Её генераторы определяются как

$$L_{orb,n} = \sum_i L_{(i),n}, \quad J_{orb,n} = \sum_i J_{(i),n}, \quad G_{orb,r}^\pm = \sum_i G_{(i),r}^\pm. \tag{4.72}$$

Чтобы теперь определить пространство состояний в составной модели, достаточно рассмотреть произведение полей из каждой копии M_{k_i} , принадлежащих одному и тому же сектору (Невьё-Шварца или Рамона). Например, примарные поля определяются как

$$\Psi_{\vec{q}}^{\vec{l}, \vec{\bar{l}}}(z, \bar{z}) = \prod_i \Psi_{q_i}^{l_i, \bar{l}_i}(z, \bar{z}), \tag{4.73}$$

где левые и правые числа $l_i, \bar{l}_i$ связаны согласно ADE классификации, описанной выше. Напомним, что мы ведём рассуждение только в секторе Невьё-Шварца, так как состояния из сектора Рамона легко получаются при помощи действия спектрального потока, который мы обсудим позднее.

Группы симметрии составных моделей

Орбифолд определяется по допустимой группе. G_{adm} [11, 12]. Это подгруппа в группе

полной абелевой симметрии композитной модели M_k^- :

$$G_{\text{tot}} = \prod_{i=1}^r G_i = \left\{ \prod_i \hat{g}_i^{w_i}, w_i \in \mathbb{Z}, \hat{g}_i = \exp(i2\pi J_{(i),0}) \right\}. \quad (4.74)$$

Как видно из определения, эта группа оставляет инвариантными поля с целым зарядом. Рассмотрим подробнее зависимость выбора группы G_{tot} от конкретного модулярного инварианта (4.62) в каждой копии M_{k_i} .

В серии типа $\mathbf{D}_{2j+2}$ при $k = 4j$, также как в $\mathbf{E}_7$ и $\mathbf{E}_8$ параметры $l_i, \bar{l}_i$ пробегают только четные значения. Тогда заряды q_i примарного состояния тоже могут быть только четными. Так как оператор $J_{0,(i)}$ действует как $\frac{q_i}{k_i+2}$, это означает, что соответствующий элемент $w_i \in G_i$ определен по модулю $(k_i + 2)/2$. Тогда полная группа изоморфна группе остатков $G_i \simeq \mathbb{Z}_{(k_i+2)/2}$ [71]. Для модулярных инвариантов типа $\mathbf{A}_{k_i+1}$ и $\mathbf{D}_{2j+1}$ при $k_i = 4j - 2$, также как и для исключительной $\mathbf{E}_6$, нет такого ограничения на четности зарядов. Тогда соответствующая группа равна $G_i \simeq \mathbb{Z}_{(k_i+2)}$.

Случай диагональных инвариантов [72] соответствует группе $G_{\text{tot}} = \prod_{i=1}^r \mathbb{Z}_{k_i+2}$ и соответствует компактификации на гиперповерхности типа Ферма $\sum_{i=1}^5 x_i^{k_i+5}$. Ниже в тексте будет удобно считать элементы группы $w_i \in \mathbb{Z}_{(k_i+2)/2}$ *четными* элементами в $\mathbb{Z}_{k_i+2}$. Мы подробнее объясним это ограничение в разделе 4.10.

Напомним, что в разделе 2.1 были введены группы симметрии для полинома типа Берглунда-Хубша W_M . Группа полной симметрий составной модели G_{tot} соответствует полной группе фазовой симметрии полинома $\text{Aut}(M)$ (см.(2.19)). В случае Ферма многочленов $\sum_{i=1}^5 x_i^{k_i+5}$ и компактификации на моделях с $\mathbf{A}$ инвариантами эти группы в точности совпадают: $G_{\text{tot}} \simeq \text{Aut}(M) = \prod_{i=1}^5 \mathbb{Z}_{k_i+2}$. Причем матрица степеней диагональна $M = \text{diag}(k_1+2, \dots, k_5+2)$. Однако, чтобы получить группу симметрии гиперповерхности Калаби-Яу X , нужно наложить условие сохранения голоморфной формы старшей степени Ω на X . Так возникало условие *допустимой группы* (2.23).

Естественным образом возникает и условие на *допустимую группу* модели орбифолда:

$$G_{\text{adm}} = \left\{ \vec{w} = (w_1, \dots, w_r) \left| \begin{array}{l} w_i \in G_i, \quad \sum_i \frac{w_i}{k_i+2} \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \right\}. \quad (4.75)$$

Ограничение

$$\sum_i \frac{w_i}{k_i+2} \in \mathbb{Z}, \quad (4.76)$$

которое определяет допустимую группу, есть ничто иное, как условие того, что (с,с) (или

(a,c)) поля, имеющие заряды $(3, 0)$ и $(0, 3)$ (или $(3, 0)$ и $(0, -3)$) остаются взаимно локальными с остальными полями орбифолда. Они также являются голоморфными и антиголоморфными токами спина $3/2$. Условие (4.76) необходимо, так как эти токи отождествляются с голоморфными и антиголоморфными нигде неисчезающими $(3, 0)$ и $(0, 3)$ формами на гиперповерхности Калаби-Яу, как мы и обсуждали в предыдущей главе. Киральные кольца, построенные по этим токам, одномерные, как и соответствующие им когомологии:

$$h_{30}(X) = h_{03}(X) = d_{(a,c)}(3, 0) = d_{(a,c)}(0, -3) = 1. \quad (4.77)$$

См. также [73]. Мы явно построим эти токи в разделе (4.12).

Стоит отметить, что в случае нечетного числа моделей r , также как при выборе модулярного инварианта типа $\mathbf{A}_{k_i+1}$, $\mathbf{D}_{2j+1}$, или $\mathbf{E}_6$ в каждой копии M_{k_i} , существует элемент $\vec{w} = (1, \dots, 1) \in G_{\text{adm}}$. Для четных r или если в какой-то модели выбран инвариант типа $\mathbf{D}_{2j+2}$, $\mathbf{E}_7$, или $\mathbf{E}_8$ (тогда соответствующий w_i четный и определен по модулю $k_i + 2$ как мы обсудили выше), простейшим решением условия допустимости (4.76) будет $\vec{w} = (2, \dots, 2)$.

4.8 Построение твистованных состояний и спектральный поток

Когда допустимая группа зафиксирована, мы можем расширить исходное пространство полей составной модели, добавляя *твистованные* поля. Это первый шаг нашей конструкции полей в модели орбифолда. Второй шаг - выбрать среди полей орбифолда взаимно локальные (или квази-локальные). Квази-локальность может возникать, так как мы также хотим рассматривать поля из сектора Рамона, где допускается ± 1 монодромия корреляционных функций. Эта процедура аналогична случаю составных моделей с модулярными инвариантами $\mathbf{A}$ типа, рассмотренному в [72, 74].

Для осуществления первого шага мы будем использовать конструкцию построения примарных состояний при помощи спектрального потока [72, 75, 76]. Он возникает следующим образом.

Спектральный поток является автоморфизмом $N = 2$ супералгебры Вирасоро [77]:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_r^\pm &= U^{-t} G_r^\pm U^t = G_{r \pm t}^\pm, \\ \tilde{J}_n &= U^{-t} J_n U^t = J_n + \frac{c}{3} t \delta_{n,0}, \\ \tilde{L}_n &= U^{-t} L_n U^t = L_n + t J_n + \frac{c}{6} t^2 \delta_{n,0}. \end{aligned} \quad (4.78)$$

При значениях $t \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ спектральный поток отображает секторы Невьё-Шварца и Рамона

друг в друга. Для $t \in \mathbb{Z}$ он действует внутри НШ или Р секторов.

В минимальном, интегрируемом представлении $N = 2$ супералгебры Вирасоро, порожденном киральным примарным состоянием Φ_c^l , возникает так называемый *экстремальный вектор* [56, 72]:

$$E_-^l = G_{\frac{1}{2}-l}^- \dots G_{-\frac{1}{2}}^- \Phi_c^l, \quad (4.79)$$

который уничтожается следующей борелевской подалгеброй:

$$\begin{aligned} G_r^+ E_-^l &= 0, \quad r \geq \frac{1}{2} + l, \quad G_r^- E_-^l = 0, \quad r \geq -\frac{1}{2} - l, \\ J_n E_-^l &= L_n E_-^l = 0, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Экстремальный вектор E_-^l является старшим вектором в твистованном представлении. Это представление изоморфно представлению старшего веса, порожденному антикиральным состоянием Φ_a^l . Чтобы установить этот изоморфизм, нужно подействовать оператором спектрального потока, который в данном случае является сплетающим:

$$U^l E_-^l \simeq \Phi_a^l. \quad (4.81)$$

Для проверки справедливости (4.81) достаточно подействовать нужными генераторами $N = 2$ алгебры.

При помощи такой процедуры можно строить все примарные состояния. Например, твистованное состояние:

$$V_t^l = U^t G_{-t+\frac{1}{2}}^- \dots G_{-\frac{1}{2}}^- \Phi_c^l, \quad 0 \leq t \leq l \quad (4.82)$$

изоморфно примарному Φ_q^l с $q = l - 2t$ в модели M_k . Выражение можно переписать в более удобном виде, используя свойства спектрального потока:

$$V_t^l = (U G_{-\frac{1}{2}}^-)^t \Phi_c^l, \quad 0 \leq t \leq l. \quad (4.83)$$

Для нашей конструкции нам необходимо расширить область допустимых параметров t . А именно, состояние

$$V_t^l = (U G_{-\frac{1}{2}}^-)^{t-l-1} U (U G_{-\frac{1}{2}}^-)^l \Phi_c^l, \quad l+1 \leq t \leq k+1 \quad (4.84)$$

дает реализацию спектральным потоком примарного состояния в секторе Невьё-Шварца: $\Phi_{\tilde{q}}^{\tilde{l}}$, где $\tilde{l} = k - l$, $\tilde{q} = k + 2 + l - 2t$. Ясно, что состояния в секторе Рамона можно получить,

действуя оператором $U^{\frac{1}{2}}$ на состояния из НШ сектора.

Заметим, что при $t = k + 2$ мы получаем состояние, которое должно быть отождествлено с исходным киральным примарным Φ_c^l . Хотя оно получено как твистованное. С этой точки зрения спектральный поток обладает свойством периодичности.

$$U^{k+2} \simeq 1, \quad (4.85)$$

тогда параметр t определен по модулю $k + 2$. Более наглядно орбита действия спектрального потока на состояниях показана на рисунке (4.1).

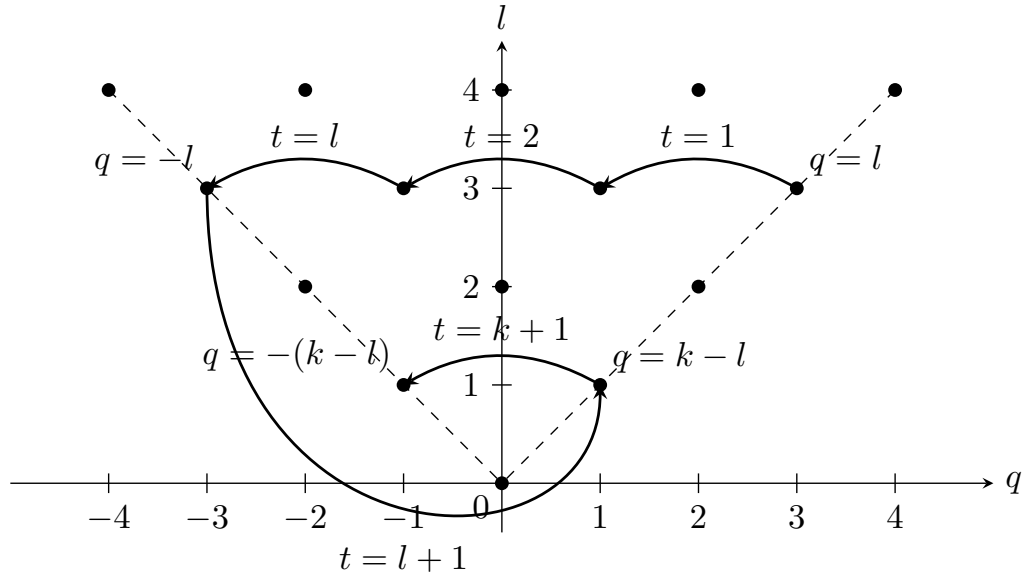


Рис. 4.1: Пример действия спектрального потока для модели с $k = 4$. Точки отвечают примарным состояниям. На прямых $q = l$ и $q = -l$ лежат киральные примарные и антикиральные примарные состояния. Спектральный поток начинается с кирального. При $t = l$ приходит в антикиральное. Далее переходит в киральное примарное с $\tilde{l} = k - l$. Орбита действия спектрального потока заканчивается в антикиральном состоянии. При $t = k + 2$ оказываемся в исходной точке.

Спектральный поток очень просто действует на характеры. А именно, характер кирального представления χ_c^l при действии спектрального потока изменяется как

$$\chi_t^l(\tau, \theta, \epsilon) = \chi_c^l \left(\tau, \theta + t, \epsilon - \frac{1}{6}t^2\tau c - \frac{1}{3}t\theta c \right). \quad (4.86)$$

При этом характер твистованного представления χ_t^l совпадает с характером представления, порожденного примарным состоянием Φ_q^l при $q = l - 2t$, как и следовало ожидать из формул (4.83) и (4.84). Стоит отметить, что мотивация использования реализации примарных состояний при помощи спектрального потока, в частности, следует из того, что характеры,

возникающие в статистической сумме (4.61), уже являются твистованными, согласно соотношению (4.86)

Характер модуля, порожденного киральным примарным состоянием, был явно найден в работе [78]. Он выражается через тэта-функции

$$\chi_c^l(\tau, \theta) = q^{\frac{l}{2(k+2)} - \frac{c}{24}} u^{\frac{l}{(k+2)}} \frac{\eta(q^{(k+2)})^3}{\eta(q)^3} \frac{\vartheta_{1,0}(uq^{1/2}, q)}{\vartheta_{1,0}(uq^{1/2}, q^{(k+2)})} \frac{\vartheta_{1,0}(-q^{l+1}, q^{(k+2)})}{\vartheta_{1,0}(u^{-1}q^{l+1/2}, q^{(k+2)})}. \quad (4.87)$$

Мы подробнее обсуждаем характеры в приложении A.

В терминах реализации примарных состояний спектральным потоком, поле $\Phi_q^l(z)\bar{\Phi}_q^{\bar{l}}(\bar{z})$ из минимальной модели M_k с определенным ADE инвариантом может быть записано следующим образом [71]

$$\Psi_{t,\bar{t}}^{l,\bar{l}}(z, \bar{z}) = V_t^l(z)\bar{V}_{\bar{t}}^{\bar{l}}(\bar{z}). \quad (4.88)$$

Заметим, что в отличие от полей серии $\mathbf{A}_{k+1}$, параметры спектрального потока t и $\bar{t}$ у левых и правых состояний могут отличаться, в то время как их заряды совпадают по модулю отождествления (4.41): $q = l - 2t = \bar{q} = \bar{l} - 2\bar{t}$. Это происходит из-за возможного отличия параметров l и $\bar{l}$.

4.9 Взаимная локальность

Теперь мы будем использовать реализацию спектральным потоком (4.83), (4.84), (4.88) для построения твистованных состояний в модели орбифолда из состояний композитной модели для каждого элемента допустимой группы $\vec{w} \in G_{\text{adm}}$. В НШ секторе твистованное примарное поле имеет следующий вид

$$\Psi_{\vec{t}+\vec{w},\vec{\bar{t}}}^{\vec{l},\vec{\bar{l}}}(z, \bar{z}) = V_{\vec{t}+\vec{w}}^{\vec{l}}(z)\bar{V}_{\vec{\bar{t}}}^{\vec{\bar{l}}}(\bar{z}), \quad (4.89)$$

где

$$\bar{V}_{\vec{\bar{t}}}^{\vec{\bar{l}}}(\bar{z}) = \prod_i^r \bar{V}_{\bar{t}_i}^{\bar{l}_i}(\bar{z}), \quad \bar{V}_{\bar{t}_i}^{\bar{l}_i}(z) = \left(UG_{-\frac{1}{2}}^{-1}\right)_i^{\bar{t}_i} \bar{\Phi}_c^{\bar{l}_i}(z), \quad 0 \leq \bar{t}_i \leq \bar{l}_i \quad (4.90)$$

и

$$V_{\vec{t}+\vec{w}}^{\vec{l}}(z) = \prod_{i=1}^r V_{t_i+w_i}^{l_i}(z), \quad (4.91)$$

где

$$V_{t_i+w_i}^{l_i}(z) = \begin{cases} \left(UG_{-\frac{1}{2}}^{-}\right)_i^{t_i+w_i} \Phi_c^{l_i}(z), & \text{if } 0 \leq t_i + w_i \leq l_i, \\ \left(UG_{-\frac{1}{2}}^{-}\right)_i^{t_i+w_i-l_i-1} U_i \left(UG_{-\frac{1}{2}}^{-}\right)_i^{l_i} \Phi_c^{l_i}(z), & \text{if } l_i + 1 \leq t_i + w_i \leq k_i + 2. \end{cases} \quad (4.92)$$

Следующий шаг - потребовать взаимную локальность таких полей (4.89). Таким образом мы можем определить спектр модели орбифолда.

Рассмотрим два твистованных поля:

$$\begin{aligned} \Psi_{\vec{t}_1+\vec{w}_1, \vec{t}_1}^{\vec{l}_1, \vec{l}_1}(z, \bar{z}), \quad \Psi_{\vec{t}_2+\vec{w}_2, \vec{t}_2}^{\vec{l}_2, \vec{l}_2}(0, 0), \\ \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in G_{\text{adm}} \end{aligned} \quad (4.93)$$

и вычислим фазовый множитель $\exp(i\theta)$, возникающий из-за монодромии $z \rightarrow e^{i\theta}z$. Для упрощения вычислений фазового множителя можно использовать представление свободным бозонным полем $\phi_i(z)$ оператора спектрального потока и $U(1)$ тока $J_{(i)}(z)$:

$$J_{(i)}(z) = i\sqrt{\frac{k_i}{k_i+2}}\partial\phi_i(z), \quad U_i(z) = \exp\left(i\sqrt{\frac{k_i}{k_i+2}}\phi_i(z)\right) \quad (4.94)$$

Тогда примарное состояние в каждом факторе M_{k_i} композитной модели может быть представлено как

$$\Phi_{q_i}^{l_i}(z) = \exp\left(i\frac{q_i}{\sqrt{k_i(k_i+2)}}\phi_i(z)\right) \hat{\Phi}_{q_i}^{l_i}(z), \quad (4.95)$$

где состояние $\hat{\Phi}_{q_i}^{l_i}(z)$ не заряжено относительно тока $J_i(z)$. Полное примарное поле в модели M_{k_i} это произведение необходимых голоморфных и антиголоморфных факторов. Оно может быть представлено в аналогичном виде.

Мы полагаемся на взаимную локальность полей в исходной композитной модели. Это следует из модулярной инвариантности статистической суммы в каждой компоненте M_{k_i} , которая подразумевает, что разность конформных размерностей $\Delta_{l_i, q_i} - \Delta_{\bar{l}_i, q_i}$ - целое число.

Таким образом, чтобы найти $\exp(i\theta)$ нам необходимо вычислить фазовый множитель в операторном произведении:

$$\exp\left[i\sum_i\left(\sqrt{\frac{k_i}{k_i+2}}w_{1i} + \frac{q_{1i}}{\sqrt{k_i(k_i+2)}}\right)\phi_i(z)\right] \times$$

$$\times \exp \left[i \sum_j \left(\sqrt{\frac{k_j}{k_j + 2}} w_{2j} + \frac{q_{2j}}{\sqrt{k_j (k_j + 2)}} \right) \phi_j(0) \right]. \quad (4.96)$$

Применяя известный результат для экспонент свободных скалярных полей:

$$: \exp \left(i \sum_i \alpha_i \phi_i(z) \right) :: \exp \left(i \sum_j \gamma_j \phi_j(0) \right) := z^{\sum_i \alpha_i \gamma_i} : \exp \left(i \sum_j \alpha_j \phi_j(z) + \gamma_j \phi_j(0) \right) : \quad (4.97)$$

мы легко находим фазовый множитель и получаем уравнения взаимной локальности [71]:

$$\sum_{i=1}^r \frac{w_{1i} (q_{2i} - w_{2i}) + w_{2i} (q_{1i} - w_{1i})}{k_i + 2} \in \mathbb{Z}. \quad (4.98)$$

Эти уравнения аналогичны уравнениям, полученным для композитных моделей типа **A** в работах [72, 74]. Таким образом, недиагональное спаривание полей 4.89 по индексам $\vec{l}, \vec{\bar{l}}$, возникающее в моделях с **D** и **E** типами инвариантов, влияет на уравнения взаимной локальности только посредством допустимой четности зарядов q_i .

Твистованное поле в P секторе может быть получено действием спектрального потока:

$$\prod_i U_i^{\frac{1}{2}} \bar{U}_i^{\frac{1}{2}} \Psi_{t_i + w_i, \bar{t}_i}^{l_i, \bar{l}_i}(z, \bar{z}). \quad (4.99)$$

Таким образом, решая уравнения взаимной локальности (4.98) с учетом допустимых q_i , мы можем явно найти все поля в модели орбифолда.

4.10 Зеркальная симметрия и взаимная локальность

Решения уравнений (4.98) могут быть получены при помощи анализа конструкции спектрального потока для зеркального орбифолда [74, 79].

Для этого рассмотрим зеркальную версию формул (4.89). Зеркальный спектральный поток стартует с антикирального примарного поля. Таким образом, зеркальная реализация примарных состояний дается выражениями:

$$\tilde{V}_t^l = \left(U^{-1} G_{-\frac{1}{2}}^+ \right)^{l-t} \Phi_a^l, \quad 0 \leq t \leq l, \quad (4.100)$$

$$\tilde{V}_t^l = \left(U^{-1} G_{-\frac{1}{2}}^+ \right)^{k+1-t} U^{-1} \left(U^{-1} G_{-\frac{1}{2}}^+ \right)^l \Phi_a^l, \quad l+1 \leq t \leq k+1. \quad (4.101)$$

Это позволяет получить зеркальную реализацию примарных полей из НШ сектора (4.89)

в форме $\tilde{\Psi}_{\vec{t}+\vec{w},\vec{t}}^{\vec{l},\vec{l}}(z,\bar{z}) = \tilde{V}_{\vec{t}+\vec{w}}^{\vec{l}}(z)\bar{V}_{\vec{t}}^{\vec{l}}(\bar{z})$, где

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{\vec{t}+\vec{w}}^{\vec{l}}(z) &= \prod_{i=1}^r V_{t_i+w_i}^{l_i}(z), \\ \tilde{V}_{t_i+w_i}^{l_i}(z) &= \begin{cases} \left(U^{-1}G_{-\frac{1}{2}}^+\right)_i^{l_i-t_i-w_i} \Phi_a^{l_i}(z), & \text{if } 0 \leq t_i + w_i \leq l_i, \\ \left(U^{-1}G_{-\frac{1}{2}}^+\right)_i^{k_i+1-t_i-w_i} U_i^{-1} \left(U^{-1}G_{-\frac{1}{2}}^+\right)_i^{l_i} \Phi_a^{l_i}(z), & \text{if } l_i + 1 \leq t_i + w_i \leq k_i + 1. \end{cases}\end{aligned}\quad (4.102)$$

В свою очередь $\bar{V}_{\vec{t}}^{\vec{l}}(\bar{z})$ остается определённой также, как в (4.90).

Сделаем инволюцию

$$G^\pm(z) \rightarrow G^\mp(z), J(z) \rightarrow -J(z), U(z) \rightarrow U^{-1}(z), T(z) \rightarrow T(z), \quad (4.103)$$

генераторов голоморфной супералгебры Вирасоро. Поле $\tilde{\Psi}_{\vec{t}+\vec{w},\vec{t}}^{\vec{l},\vec{l}}(z,\bar{z})$ принимает старую форму

$$\begin{aligned}\Psi_{\vec{t}+\vec{w}^*,\vec{t}}^{\vec{l},\vec{l}}(z,\bar{z}) &= V_{\vec{t}+\vec{w}^*}^{\vec{l}}(z)\bar{V}_{\vec{t}}^{\vec{l}}(\bar{z}), \\ V_{\vec{t}+\vec{w}^*}^{\vec{l}}(z) &= \prod_{i=1}^r V_{t_i+w_i^*}^{l_i}(z), \\ V_{t_i+w_i^*}^{l_i}(z) &= \begin{cases} \left(UG_{-\frac{1}{2}}^-\right)_i^{t_i+w_i^*} \Phi_c^{l_i}(z), & w_i^* = l_i - 2t_i - w_i, \\ \left(UG_{-\frac{1}{2}}^-\right)_i^{t_i+w_i^*-l_i-1} U_i \left(UG_{-\frac{1}{2}}^-\right)_i^{l_i} \Phi_c^{l_i}(z), & w_i^* = k_i + 2 + l_i - 2t_i - w_i \simeq l_i - 2t_i - w_i. \end{cases}\end{aligned}\quad (4.104)$$

Единственное отличие состоит в том, что поле оказывается твистованным элементом другой группы

$$\vec{w}^* = \vec{q} - \vec{w} \in G_{\text{adm}}^*. \quad (4.105)$$

Векторы (4.105) в самом деле образуют группу, так как с точки зрения операторной алгебры модели орбифолда векторы $\vec{q}$ сохраняются, в то время как векторы $\vec{w}$ аддитивны. Ясно, что группа G_{adm}^* также является допустимой, так как примарные поля, соответствующие дифференциальным формам веса $(3, 0)$ и $(0, 3)$ на многообразии Калаби-Яу находятся среди взаимно локальных полей. Таким образом, выражение (4.104) может быть интерпретировано как поле в модели орбифолда, которая построена по другой группе:

$$\Psi_{\vec{t}+\vec{w}^*,\vec{t}}^{\vec{l},\vec{l}}(z,\bar{z}) \in M_{\vec{k}}/G_{\text{adm}}^*. \quad (4.106)$$

Эта модель орбифолда изоморфна модели $M_{\vec{k}}/G_{\text{adm}}$ согласно нашей конструкции. Взаимно

локальные поля в модели $M_{\vec{k}}/G_{\text{adm}}$ нумеруются элементами двойственной группы $\vec{w}^* = \vec{q} - \vec{w} \in G_{\text{adm}}^*$ и наоборот. Более того, как мы увидим, эта модель является зеркальной к исходной модели с группой G_{adm} .

Таким образом, мы описали зеркальную конструкцию спектрального потока для примарных полей из сектора Невьё-Шварца. Чтобы построить поля в секторе Рамона, можно применить оператор спектрального потока к полям из НШ сектора:

$$\prod_i U_i^{\frac{1}{2}} \bar{U}_i^{\frac{1}{2}} \Psi_{t_i + w_i^*, \bar{t}_i}^{l_i, \bar{l}_i}(z, \bar{z}). \quad (4.107)$$

Теперь вернемся к уравнениям взаимной локальности (4.98). Беря во внимание определение элементов дуальной группы (4.105), уравнения (4.98) могут быть переписаны как

$$\sum_{i=1}^r \frac{w_{1i} w_{2i}^* + w_{2i} w_{1i}^*}{k_i + 2} \in \mathbb{Z}. \quad (4.108)$$

Уравнения (4.108) должны выполняться для произвольных пар твистов $\vec{w}_1, \vec{w}_1^*$ и $\vec{w}_2, \vec{w}_2^*$. Тогда они остаются верными, например, для случая, когда $\vec{w}_2^* = 0$. Тогда (4.108) эквивалентно

$$\sum_{i=1}^r \frac{w_i w_i^*}{k_i + 2} \in \mathbb{Z}, \quad \vec{w} \in G_{\text{adm}}, \quad \vec{w}^* \in G_{\text{adm}}^*. \quad (4.109)$$

Таким образом, поле с зарядом $\vec{q}$, находящееся в твистованном секторе $\vec{w} \in G_{\text{adm}}$, является взаимно локальным с остальными полями орбифолда $M_{\vec{k}}/G_{\text{adm}}$ если

$$\sum_{i=1}^r w_i \frac{q_i - w_i}{k_i + 2} \in \mathbb{Z}. \quad (4.110)$$

Двойственная группа

Если составная модель состоит только из минимальных моделей типа **A**, уравнения (4.109) являются ничем иным, как определением дуальной по Берглунду-Хубшу-Кравицу группы для полиномов типа Ферма $\sum_{i=1}^5 x_i^{k_i+2}$ [11, 12], [I]. Таким образом, в этом случае, группа G_{adm}^* является дуальной по БХК к группе G_{adm} . Это напрямую следует из уравнений (2.37), которые определяют действие двойственной группы.

В случае, когда композитная модель состоит из минимальных моделей произвольного типа, уравнения (4.109) могут быть интерпретированы как определяющие обобщение дуальной

группы по Берглунду-Хубшу-Кравицу. Более точно, дуальная группа определяется как [71]

$$G_{\text{adm}}^* = \left\{ \vec{w}^* = \vec{q} - \vec{w} \mid \vec{w} \in G_{\text{adm}}; \sum_{i=1}^r \frac{w_i w_i^*}{k_i + 2} \in \mathbb{Z}; \sum_{i=1}^r \frac{w_i^*}{k_i + 2} \in \mathbb{Z} \right\} \subset G_{\text{tot}}. \quad (4.111)$$

Зафиксировав допустимую группу G_{adm} и найдя все возможные элементы двойственной группы (4.109), мы определим полный набор зарядов взаимно локальных полей в моделях орби-фолда $M_{\vec{k}}/G_{\text{adm}}$ и $M_{\vec{k}}/G_{\text{adm}}^*$:

$$\vec{q} = \vec{w} + \vec{w}^*, \quad \vec{w} \in G_{\text{adm}}, \quad \vec{w}^* \in G_{\text{adm}}^*. \quad (4.112)$$

Отметим, что эти уравнения, а также конструкция локальных полей во взаимно-дуальных моделях орбифолда $M_{\vec{k}}/G_{\text{adm}}$ и $M_{\vec{k}}/G_{\text{adm}}^*$, согласованы с инвариантами типа **D** и **E**.

Действительно, в рамках компоненты M_{k_i} допустимые значения зарядов q_i определяются типом модулярного инварианта. Для инвариантов, относящихся к типам **A** _{k_i+1} , **D** _{$2j+1$} и **E**₆, величины q_i , а также элементы w_i и w_i^* , могут принимать любые целые значения по модулю $k_i + 2$.

Иная ситуация возникает для инвариантов типа **D** _{$2j+2$} , **E**₇ и **E**₈. Хотя элементы w_i и w_i^* по-прежнему определены по модулю $k_i + 2$, их множество значений ограничивается четными числами: $w_i, w_i^* \equiv 0 \pmod{2}$ при условии их действия в соответствии с (4.74). Это означает, что эффективно эти элементы принадлежат группе $\mathbb{Z}_{(k_i+2)/2}$. Аналогичное ограничение на четность накладывается и на допустимые значения зарядов, что было подробно рассмотрено в разделе 4.7 (так как в случае этих модулярных инвариантов допускаются только четные l , а значит и q).

Данное ограничение, накладывающее условие четности на элементы $w_i \in G_{\text{adm}}$ и $w_i^* \in G_{\text{adm}}^*$ внутри группы $\mathbb{Z}_{k_i+2}$, важно для обеспечения непротиворечивости действия групп G_{adm} и G_{adm}^* путем сдвига параметров спектрального потока в контексте зеркальной симметрии $M_{\vec{k}}/G_{\text{adm}} \leftrightarrow M_{\vec{k}}/G_{\text{adm}}^*$.

Таким образом, показано, что определение двойственной группы и построение дуальной модели орбифолда (модели зеркального двойника) допускает естественное обобщение на составные модели с произвольным модулярным инвариантом.

4.11 Зеркальная симметрия двойственных орбифолдов и алгоритм построения киральных колец

В этом разделе мы продемонстрируем, что взаимно-двойственные модели $M_{\vec{k}}/G_{\text{adm}}$ и $M_{\vec{k}}^*/G_{\text{adm}}^*$ являются зеркальными друг к другу, то есть имеют изоморфные пространства состояний. Для этого мы покажем изоморфизм киральных колец $((c,c))$ исходной модели $M_{\vec{k}}/G_{\text{adm}}^*$ кольцам $((a,c))$ для модели $M_{\vec{k}}/G_{\text{adm}}$.

Киральные-киральные $((c,c))$ поля для каждой модели орбифолда могут быть найдены при помощи следующего анализа. Согласно обсуждению выше, мы строим поля в НШ секторе, применяя оператор спектрального потока к полям композитной модели только в голоморфном секторе. Тогда антиголоморфный фактор (c,c) -поля в орбифолде должен быть киральным примарным состоянием $\bar{\Phi}_{\vec{c}}^{\vec{l}}$ с зарядом $\vec{q} = \vec{l}$. Тогда полное (c,c) поле может быть представлено как

$$\Psi_{\vec{t}+\vec{w},0}^{\vec{l},\vec{l}}(z,\bar{z}) = V_{\vec{t}+\vec{w}}^{\vec{l}}(z)\bar{\Phi}_{\vec{c}}^{\vec{l}}(\bar{z}). \quad (4.113)$$

Его голоморфный фактор может быть недиагональным по индексу l_i , но должен быть тоже киральным-примарным состоянием. Нетрудно видеть, что это происходит если

$$t_i + w_i = 0 \bmod k_i + 2, \quad \text{или} \quad t_i + w_i = l_i + 1 \bmod k_i + 2, \quad (4.114)$$

где t_i ограничены условием того, что до твистования заряды голоморфного и антиголоморфного состояния совпадают: $q_i = l_i - 2t_i = \bar{l}_i$ (так как заряды в рассматриваемой составной модели удовлетворяют этому условию).

Применяя аналогичные аргументы, мы можем найти полные (a,c) поля в модели орбифолда. Они должны иметь форму (4.113), с такими же ограничениями на t_i , однако их голоморфный фактор должен быть антикиральным примарным состоянием. Это происходит при

$$t_i + w_i = k_i + 1 \bmod k_i + 2, \quad \text{or} \quad t_i + w_i = l_i \bmod k_i + 2. \quad (4.115)$$

Здесь важно отметить, что в отличие от моделей **A** серии, состояния в голоморфном секторе композитной модели могут быть уже твистованными при нетвистованных состояниях в антиголоморфном секторе (то есть киральных примарных состояниях). Поэтому параметры t_i появляются в формулах.

Беря во внимание конструкцию спектрального потока (4.89) и её зеркальную версию (4.104), а также соотношение (4.105), легко видеть, что (c,c) -поле $V_{\vec{t}+\vec{w}}^{\vec{l}}\bar{V}_{\vec{0}}^{\vec{l}}$ в исходной модели

возникает как (а,с)-поле $V_{\vec{t}+\vec{w}^*}^{\vec{l}} \bar{V}_0^{\vec{l}}$ в дуальной модели. При этом векторы твистов связаны следующим образом [71]:

$$\begin{aligned} t_i + w_i = l_i + 1 & \leftrightarrow t_i + w_i^* = q_i + 2t_i - l_i - 1 = -1 \simeq k_i + 1 \\ t_i + w_i = k_i + 2 & \leftrightarrow t_i + w_i^* = q_i + 2t_i = l_i. \end{aligned} \quad (4.116)$$

Аналогично получаем, что (а,с) поля в исходной модели соответствуют (с,с) полям в дуальной в случае, если векторы твистов связаны как:

$$\begin{aligned} t_i + w_i = l_i & \leftrightarrow t_i + w_i^* = q_i + 2t_i - l_i = 0 \\ t_i + w_i = k_i + 1 & \leftrightarrow t_i + w_i^* = q_i + 2t_i - (k_i + 1) \simeq l_i + 1. \end{aligned} \quad (4.117)$$

В формулах (4.116), (4.117) мы использовали, что векторы w_i определены по модулю $k_i + 2$.

Стоит отметить, что эти соотношения были получены в предположении, что $q_i \leq l_i$. В случае, когда заряды превосходят $q_i > l_i$ нужно отождествить поля согласно формулам (4.41). Заряды изменятся как $\tilde{q}_i = q_i + (k_i + 2)$. Однако это не повлияет на условия на зеркальный твист, в силу того, что $w_i^* = q_i - w_i \simeq q_i + (k_i + 2) - w_i = \tilde{q}_i - w_i$. Тогда условия (4.116),(4.117) переписываются с заменой $\tilde{l}_i = k - l_i$, и $\tilde{q}_i = \tilde{l}_i - 2\tilde{t}_i$.

Это доказывает изоморфизм киральных колец, который можно понимать как зеркальную симметрию моделей [4].

4.12 Пример модели орбифолда с недиагональным модулярным инвариантом

В данном разделе на конкретных примерах рассматривается процедура построения пространства локальных полей для орбифолдов составной модели с недиагональным модулярным инвариантом. Мы рассмотрим две зеркальные пары орбифолдов модели $(1_A)^1(16_E)^3$, которая является произведением одной модели с инвариантом типа **A** при $k = 1$ и трех моделей уровня $k = 16$ с **E**₇ модулярным инвариантом (4.62).

Первая зеркальная пара орбифолдов задается взаимно двойственной парой групп

$$G = \langle (2, 2, 2, 2) \rangle, \quad G^* = \langle (2, 2, 2, 2), (1, 0, 0, 12), (1, 2, 4, 6), (0, 0, 4, 14) \rangle, \quad (4.118)$$

где вектор $(2, 2, 2, 2)$ это генератор первой группы, а векторы $(2, 2, 2, 2)$, $(1, 0, 0, 12)$, $(1, 2, 4, 6)$, $(0, 0, 4, 14)$ являются генераторами второй группы. Для этой пары моделей мы выписываем

(а,с) поля согласно формулам (4.89)-(4.92). Как и отмечалось выше, элементы w_i при $i = 2, 3, 4$ могут принимать только четные значения, так как эти компоненты соответствуют инварианту $\mathbf{E}_7$.

С геометрической точки зрения такие модели орбифолдов соответствуют компактификации на многообразии Калаби-Яу X , которое определено как пересечение двух гиперповерхностей в $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$ [80, 81]:

$$\begin{aligned} W_1(x) &= x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0 \\ W_2(x, y) &= x_1 y_1^3 + x_2 y_2^3 + x_3 y_3^3 = 0, \end{aligned} \quad (4.119)$$

где $x_i \in \mathbb{P}^3$ и $y_i \in \mathbb{P}^2$. Числа Ходжа данного многообразия: $h^{2,1}(X) = h^{1,2}(X) = 35$, $h^{2,2}(X) = h^{1,1}(X) = 8$, $h^{0,0}(X) = h^{0,3}(X) = h^{3,0}(X) = h^{3,3}(X) = 1$. Эта модель орбифолда была рассмотрена Д. Гепнером [82] как первый шаг в его конструкции модели суперструнной компактификации с тремя поколениями. Ниже мы будем сравнивать коомологии де Рама на X с соответствующими киральными кольцами.

(а,с) поля зеркальной модели орбифолда, очевидно, совпадают с коомологиями де Рама для зеркального многообразия Калаби-Яу, которое является ничем иным как орбифолдом многообразия X по "максимально допустимой" группе G^* .

Результаты представлены в таблицах 4.2, 4.3 [71]. Везде использованы обозначения для полей

$$\Phi_{(q_1, q_2, q_3, q_4)}^{(l_1, l_2, l_3, l_4)} \bar{\Phi}_{(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3, \bar{q}_4)}^{(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3, \bar{l}_4)} := \prod_i \Phi_{q_i}^{l_i} \bar{\Phi}_{\bar{q}_i}^{\bar{l}_i}. \quad (4.120)$$

Проясним структуру таблиц, приведенных ниже. Первые два столбца содержат количество (а,с) полей с зарядами (Q_L, Q_R) и соответствующие коомологии де Рама для Калаби-Яу. Нетвистованное поле из составной модели, которое расположено в предпоследнем столбце, имеет следующую форму: $\Phi_{\vec{q}}^{\vec{l}} \bar{\Phi}_{\vec{c}}^{\vec{\bar{l}}}$. Набор зарядов $\vec{q}$ голоморфного состояния совпадает с зарядами антиголоморфного кирального состояния, то есть $q_i = \bar{l}_i$. В случае когда $q_i > l_i$, соответствующее поле должно быть отождествлено согласно правилу отражения (4.41) (см. об этом также в А). В столбце "Поле" расположены (а,с) поля в модели орбифолда, твистованные элементом группы $\vec{w}$ из последнего столбца.

Таблица 4.2: (а,с) поля в модели $(1_A)^1(16_E)^3$ с $G = \langle (2, 2, 2, 2) \rangle$.

Кол-во.	$H^{p,q}$	(Q_L, Q_R)	#	Поле: $\Phi_a^{\vec{l}} \bar{\Phi}_c^{\vec{l}}$	Получено из: $\Phi_{\vec{q}}^{\vec{l}} \bar{\Phi}_c^{\vec{l}}$	$\vec{w} \in G$
1	$H^{0,0}$	(0,0)	1	$I \times \bar{I}$		
8	$H^{1,1}$	(-1,1)	1	$\Phi_a^{(0,6,6,6)} \bar{\Phi}_c^{(0,6,6,6)}$	$\Phi_c^{(0,6,6,6)} \bar{\Phi}_c^{(0,6,6,6)}$	(0, 6, 6, 6)
		(-1,1)	1	$\Phi_a^{(1,4,4,4)} \bar{\Phi}_c^{(1,4,4,4)}$	$\Phi_c^{(1,4,4,4)} \bar{\Phi}_c^{(1,4,4,4)}$	(1, 4, 4, 4)
		(-1,1)	3	$\Phi_a^{(1,8,2,2)} \bar{\Phi}_c^{(0,2,8,8)}$	$\Phi_{(0,2,8,8)}^{(0,8,14,14)} \bar{\Phi}_c^{(0,2,8,8)}$	(2, 14, 14, 14)
		(-1,1)	3	$\Phi_a^{(0,8,8,2)} \bar{\Phi}_c^{(1,2,2,8)}$	$\Phi_{(1,2,2,8)}^{(1,8,8,14)} \bar{\Phi}_c^{(1,2,2,8)}$	(2, 14, 14, 14)
1	$H^{0,3}$	(0,3)	1	$I \times \bar{\Phi}_c^{(1,16,16,16)}$	$\Phi_{(1,16,16,16)}^{(1,0,0,0)} \bar{\Phi}_c^{(1,16,16,16)}$	(2, 8, 8, 8)
35	$H^{1,2}$	(-1,2)	1	$\Phi_a^{(0,6,6,6)} \bar{\Phi}_c^{(1,10,10,10)}$	$\Phi_{(1,10,10,10)}^{(1,6,6,6)} \bar{\Phi}_c^{(1,10,10,10)}$	(2, 8, 8, 8)
		(-1,2)	1	$\Phi_a^{(1,4,4,4)} \bar{\Phi}_c^{(0,12,12,12)}$	$\Phi_{(0,12,12,12)}^{(0,4,4,4)} \bar{\Phi}_c^{(0,12,12,12)}$	(2, 8, 8, 8)
		(-1,2)	3	$\Phi_a^{(1,12,0,0)} \bar{\Phi}_c^{(0,4,16,16)}$	$\Phi_{(0,4,16,16)}^{(0,12,0,0)} \bar{\Phi}_c^{(0,4,16,16)}$	(2, 8, 8, 8)
		(-1,2)	3	$\Phi_a^{(0,10,4,4)} \bar{\Phi}_c^{(1,6,12,12)}$	$\Phi_{(1,6,12,12)}^{(1,10,4,4)} \bar{\Phi}_c^{(1,6,12,12)}$	(2, 8, 8, 8)
		(-1,2)	3	$\Phi_a^{(1,0,6,6)} \bar{\Phi}_c^{(0,16,10,10)}$	$\Phi_{(0,16,10,10)}^{(0,0,6,6)} \bar{\Phi}_c^{(0,16,10,10)}$	(2, 8, 8, 8)
		(-1,2)	6	$\Phi_a^{(1,8,4,0)} \bar{\Phi}_c^{(0,8,12,16)}$	$\Phi_{(0,8,12,16)}^{(0,8,4,0)} \bar{\Phi}_c^{(0,8,12,16)}$	(2, 8, 8, 8)
		(-1,2)	6	$\Phi_a^{(0,12,6,0)} \bar{\Phi}_c^{(1,4,10,16)}$	$\Phi_{(1,4,10,16)}^{(1,12,6,0)} \bar{\Phi}_c^{(1,4,10,16)}$	(2, 8, 8, 8)
		(-1,2)	6	$\Phi_a^{(0,10,8,0)} \bar{\Phi}_c^{(1,6,8,16)}$	$\Phi_{(1,6,8,16)}^{(1,10,8,0)} \bar{\Phi}_c^{(1,6,8,16)}$	(2, 8, 8, 8)
35	$H^{2,1}$	(-1,2)	6	$\Phi_a^{(0,8,6,4)} \bar{\Phi}_c^{(1,8,10,12)}$	$\Phi_{(1,8,10,12)}^{(1,8,6,4)} \bar{\Phi}_c^{(1,8,10,12)}$	(2, 8, 8, 8)
		(-2,1)	1	$\Phi_a^{(1,10,10,10)} \bar{\Phi}_c^{(0,6,6,6)}$	$\Phi_{(0,6,6,6)}^{(0,10,10,10)} \bar{\Phi}_c^{(0,6,6,6)}$	(2, 8, 8, 8)
		(-2,1)	1	$\Phi_a^{(0,12,12,12)} \bar{\Phi}_c^{(1,4,4,4)}$	$\Phi_{(1,4,4,4)}^{(1,12,12,12)} \bar{\Phi}_c^{(1,4,4,4)}$	(2, 8, 8, 8)
		(-2,1)	3	$\Phi_a^{(0,4,16,16)} \bar{\Phi}_c^{(1,12,0,0)}$	$\Phi_{(1,12,0,0)}^{(1,4,16,16)} \bar{\Phi}_c^{(1,12,0,0)}$	(2, 8, 8, 8)
		(-2,1)	3	$\Phi_a^{(1,6,12,12)} \bar{\Phi}_c^{(0,10,4,4)}$	$\Phi_{(0,10,4,4)}^{(0,6,12,12)} \bar{\Phi}_c^{(0,10,4,4)}$	(2, 8, 8, 8)
		(-2,1)	3	$\Phi_a^{(0,16,10,10)} \bar{\Phi}_c^{(1,0,6,6)}$	$\Phi_{(1,0,6,6)}^{(1,16,10,10)} \bar{\Phi}_c^{(1,0,6,6)}$	(2, 8, 8, 8)
		(-2,1)	6	$\Phi_a^{(0,8,12,16)} \bar{\Phi}_c^{(1,8,4,0)}$	$\Phi_{(1,8,4,0)}^{(1,8,12,16)} \bar{\Phi}_c^{(1,8,4,0)}$	(2, 8, 8, 8)
		(-2,1)	6	$\Phi_a^{(1,4,10,16)} \bar{\Phi}_c^{(0,12,6,0)}$	$\Phi_{(0,12,6,0)}^{(1,4,10,16)} \bar{\Phi}_c^{(0,12,6,0)}$	(2, 8, 8, 8)
8	$H^{2,2}$	(-2,2)	1	$\Phi_a^{(0,12,12,12)} \bar{\Phi}_c^{(0,12,12,12)}$	$\Phi_c^{(0,12,12,12)} \bar{\Phi}_c^{(0,12,12,12)}$	(0, 12, 12, 12)
		(-2,2)	1	$\Phi_a^{(1,10,10,10)} \bar{\Phi}_c^{(1,10,10,10)}$	$\Phi_c^{(1,10,10,10)} \bar{\Phi}_c^{(1,10,10,10)}$	(1, 10, 10, 10)
		(-2,2)	3	$\Phi_a^{(0,14,14,8)} \bar{\Phi}_c^{(1,8,8,14)}$	$\Phi_{(1,8,8,14)}^{(1,2,2,8)} \bar{\Phi}_c^{(1,8,8,14)}$	(2, 2, 2, 2)
		(-2,2)	3	$\Phi_a^{(1,14,8,8)} \bar{\Phi}_c^{(0,8,14,14)}$	$\Phi_{(0,8,14,14)}^{(0,2,8,8)} \bar{\Phi}_c^{(0,8,14,14)}$	(2, 2, 2, 2)
1	$H^{3,3}$	(-3,3)	1	$\Phi_a^{(1,16,16,16)} \bar{\Phi}_c^{(1,16,16,16)}$	$\Phi_c^{(1,16,16,16)} \bar{\Phi}_c^{(1,16,16,16)}$	(1, 16, 16, 16)

Таблица 4.3: (а,с) поля для зеркала модели $(1_A)^1(16_E)^3$, группа G^* .

Кол-во.	$H^{p,q}$	(Q_L, Q_R)	#	Поле: $\Phi_a^{\vec{l}} \bar{\Phi}_c^{\vec{l}}$	Получено из: $\Phi_{\vec{q}}^{\vec{l}} \bar{\Phi}_c^{\vec{l}}$	$w^* \in G^*$
1	$H^{0,0}$	(0,0)	1	$I \times \bar{I}$		
35	$H^{1,1}$	(-1,1)	1	$\Phi_a^{(0,6,6,6)} \bar{\Phi}_c^{(0,6,6,6)}$	$\Phi_c^{(0,6,6,6)} \bar{\Phi}_c^{(0,6,6,6)}$	(0,6,6,6)
		(-1,1)	1	$\Phi_a^{(1,4,4,4)} \bar{\Phi}_c^{(1,4,4,4)}$	$\Phi_c^{(1,4,4,4)} \bar{\Phi}_c^{(1,4,4,4)}$	(1,4,4,4)
		(-1,1)	3	$\Phi_a^{(0,4,4,10)} \bar{\Phi}_c^{(0,4,4,10)}$	$\Phi_c^{(0,4,4,10)} \bar{\Phi}_c^{(0,4,4,10)}$	(0,4,4,10)
		(-1,1)	3	$\Phi_a^{(1,0,0,12)} \bar{\Phi}_c^{(1,0,0,12)}$	$\Phi_c^{(1,0,0,12)} \bar{\Phi}_c^{(1,0,0,12)}$	(1,0,0,12)
		(-1,1)	3	$\Phi_a^{(1,0,6,6)} \bar{\Phi}_c^{(1,0,6,6)}$	$\Phi_c^{(1,0,6,6)} \bar{\Phi}_c^{(1,0,6,6)}$	(1,0,6,6)
		(-1,1)	6	$\Phi_a^{(0,0,6,12)} \bar{\Phi}_c^{(0,0,6,12)}$	$\Phi_c^{(0,0,6,12)} \bar{\Phi}_c^{(0,0,6,12)}$	(0,0,6,12)
		(-1,1)	6	$\Phi_a^{(0,0,8,10)} \bar{\Phi}_c^{(0,0,8,10)}$	$\Phi_c^{(0,0,8,10)} \bar{\Phi}_c^{(0,0,8,10)}$	(0,0,8,10)
		(-1,1)	6	$\Phi_a^{(0,4,6,8)} \bar{\Phi}_c^{(0,4,6,8)}$	$\Phi_c^{(0,4,6,8)} \bar{\Phi}_c^{(0,4,6,8)}$	(0,4,6,8)
		(-1,1)	6	$\Phi_a^{(1,0,4,8)} \bar{\Phi}_c^{(1,0,4,8)}$	$\Phi_c^{(1,0,4,8)} \bar{\Phi}_c^{(1,0,4,8)}$	(1,0,4,8)
1	$H^{0,3}$	(0,3)	1	$I \times \bar{\Phi}_c^{(1,16,16,16)}$	$\Phi_{(1,16,16,16)}^{(1,0,0,0)} \bar{\Phi}_c^{(1,16,16,16)}$	(2, 8, 8, 8)
8	$H^{1,2}$	(-1,2)	1	$\Phi_a^{(0,6,6,6)} \bar{\Phi}_c^{(1,10,10,10)}$	$\Phi_{(1,10,10,10)}^{(1,6,6,6)} \bar{\Phi}_c^{(1,10,10,10)}$	(2, 8, 8, 8)
		(-1,2)	1	$\Phi_a^{(1,4,4,4)} \bar{\Phi}_c^{(0,12,12,12)}$	$\Phi_{(0,12,12,12)}^{(0,4,4,4)} \bar{\Phi}_c^{(0,12,12,12)}$	(2, 8, 8, 8)
		(-1,2)	3	$\Phi_a^{(1,2,2,8)} \bar{\Phi}_c^{(1,8,8,14)}$	$\Phi_{(1,8,8,14)}^{(1,14,14,8)} \bar{\Phi}_c^{(1,8,8,14)}$	(1, 14, 14, 2)
		(-1,2)	3	$\Phi_a^{(0,2,8,8)} \bar{\Phi}_c^{(0,8,14,14)}$	$\Phi_{(0,8,14,14)}^{(0,14,8,8)} \bar{\Phi}_c^{(0,8,14,14)}$	(0, 12, 12, 12)
8	$H^{2,1}$	(-2,1)	1	$\Phi_a^{(1,10,10,10)} \bar{\Phi}_c^{(0,6,6,6)}$	$\Phi_{(0,6,6,6)}^{(0,10,10,10)} \bar{\Phi}_c^{(0,6,6,6)}$	(2, 8, 8, 8)
		(-2,1)	1	$\Phi_a^{(0,12,12,12)} \bar{\Phi}_c^{(1,4,4,4)}$	$\Phi_{(1,4,4,4)}^{(1,12,12,12)} \bar{\Phi}_c^{(1,4,4,4)}$	(2, 8, 8, 8)
		(-2,1)	3	$\Phi_a^{(1,8,8,14)} \bar{\Phi}_c^{(1,2,2,8)}$	$\Phi_{(1,2,2,8)}^{(1,8,8,2)} \bar{\Phi}_c^{(1,2,2,8)}$	(1, 14, 14, 2)
		(-2,1)	3	$\Phi_a^{(0,8,14,14)} \bar{\Phi}_c^{(0,2,8,8)}$	$\Phi_{(0,2,8,8)}^{(0,8,2,2)} \bar{\Phi}_c^{(0,2,8,8)}$	(0, 14, 2, 2)
1	$H^{3,0}$	(-3,0)	1	$\Phi_a^{(1,16,16,16)} \times \bar{I}$	$\Phi_{(0,0,0,0)}^{(0,16,16,16)} \times \bar{I}$	(2, 8, 8, 8)
35	$H^{2,2}$	(-2,2)	1	$\Phi_a^{(0,12,12,12)} \bar{\Phi}_c^{(0,12,12,12)}$	$\Phi_c^{(0,12,12,12)} \bar{\Phi}_c^{(0,12,12,12)}$	(0,12,12,12)
		(-2,2)	1	$\Phi_a^{(1,10,10,10)} \bar{\Phi}_c^{(1,10,10,10)}$	$\Phi_c^{(1,10,10,10)} \bar{\Phi}_c^{(1,10,10,10)}$	(1,10,10,10)
		(-2,2)	3	$\Phi_a^{(0,4,16,16)} \bar{\Phi}_c^{(0,4,16,16)}$	$\Phi_c^{(0,4,16,16)} \bar{\Phi}_c^{(0,4,16,16)}$	(0,4,16,16)
		(-2,2)	3	$\Phi_a^{(0,10,10,16)} \bar{\Phi}_c^{(0,10,10,16)}$	$\Phi_c^{(0,10,10,16)} \bar{\Phi}_c^{(0,10,10,16)}$	(0,10,10,16)
		(-2,2)	3	$\Phi_a^{(1,6,12,12)} \bar{\Phi}_c^{(1,6,12,12)}$	$\Phi_c^{(1,6,12,12)} \bar{\Phi}_c^{(1,6,12,12)}$	(1,6,12,12)
		(-2,2)	6	$\Phi_a^{(0,8,12,16)} \bar{\Phi}_c^{(0,8,12,16)}$	$\Phi_c^{(0,8,12,16)} \bar{\Phi}_c^{(0,8,12,16)}$	(0,8,12,16)
		(-2,2)	6	$\Phi_a^{(1,4,10,16)} \bar{\Phi}_c^{(1,4,10,16)}$	$\Phi_c^{(1,4,10,16)} \bar{\Phi}_c^{(1,4,10,16)}$	(1,4,10,16)
		(-2,2)	6	$\Phi_a^{(1,6,8,16)} \bar{\Phi}_c^{(1,6,8,16)}$	$\Phi_c^{(1,6,8,16)} \bar{\Phi}_c^{(1,6,8,16)}$	(1,6,8,16)
		(-2,2)	6	$\Phi_a^{(1,8,10,12)} \bar{\Phi}_c^{(1,8,10,12)}$	$\Phi_c^{(1,8,10,12)} \bar{\Phi}_c^{(1,8,10,12)}$	(1,8,10,12)
1	$H^{3,3}$	(-3,3)	1	$\Phi_a^{(1,16,16,16)} \bar{\Phi}_c^{(1,16,16,16)}$	$\Phi_c^{(1,16,16,16)} \bar{\Phi}_c^{(1,16,16,16)}$	(1, 16, 16, 16)

Следующая зеркальная пара орбифолдов задаётся парой взаимно-двойственных групп

$$\tilde{G} = \langle (2, 2, 2, 2), (0, 6, 12, 0) \rangle, \quad \tilde{G}^* = \langle (2, 2, 2, 2), (0, 4, 4, 10), (0, 4, 10, 4) \rangle, \quad (4.121)$$

где опять, мы определили группы генераторами.

Мы опять выписываем (а,с) поля для первого орбифолда и связываем их с когомологиями де Рама для многообразия Калаби-Яу Y , которое определено как орбифолд пересечения гиперповерхностей (4.119) по группе $\tilde{G}$ в $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3/\tilde{G}$: Числа Ходжа: $h^{2,1}(Y) = h^{1,2}(Y) = 23$, $h^{2,2}(Y) = h^{1,1}(Y) = 14$, $h^{0,0}(Y) = h^{0,3}(Y) = h^{3,0}(Y) = h^{3,3}(Y) = 1$.

(а,с) поля зеркальной модели орбифолда соответствуют когомологиям де Рама для зеркального многообразия Калаби-Яу, которое определено как орбифолд исходного (4.119) по дуальной группе $\tilde{G}^*$.

Результат представлен в таблицах 4.4,4.5.

Таблица 4.4: (а,с) поля модели $(1_A)^1(16_E)^3$ с группой $\tilde{G} = \langle (2, 2, 2, 2), (0, 6, 12, 0) \rangle$.

Кол-во.	$H^{p,q}$	(Q_L, Q_R)	#	Поле: $\Phi_a^{\vec{l}} \bar{\Phi}_c^{\vec{l}}$	Получено из: $\Phi_{\vec{q}}^{\vec{l}} \bar{\Phi}_{\vec{q}}^{\vec{l}}$	$\vec{w} \in \tilde{G}$
1	$H^{0,0}$	(0,0)	1	$I \times \bar{I}$		
14	$H^{1,1}$	(-1,1)	1	$\Phi_a^{(0,6,6,6)} \bar{\Phi}_c^{(0,6,6,6)}$	$\Phi_c^{(0,6,6,6)} \bar{\Phi}_c^{(0,6,6,6)}$	(0, 6, 6, 6)
		(-1,1)	1	$\Phi_a^{(1,4,4,4)} \bar{\Phi}_c^{(1,4,4,4)}$	$\Phi_c^{(1,4,4,4)} \bar{\Phi}_c^{(1,4,4,4)}$	(1, 4, 4, 4)
		(-1,1)	3	$\Phi_a^{(1,8,2,2)} \bar{\Phi}_c^{(0,2,8,8)}$	$\Phi_{(0,2,8,8)}^{(0,8,14,14)} \bar{\Phi}_c^{(0,2,8,8)}$	(2, 14, 14, 14)
		(-1,1)	3	$\Phi_a^{(0,8,8,2)} \bar{\Phi}_c^{(1,2,2,8)}$	$\Phi_{(1,2,2,8)}^{(1,8,8,14)} \bar{\Phi}_c^{(1,2,2,8)}$	(2, 14, 14, 14)
		(-1,1)	6	$\Phi_a^{(0,6,12,0)} \bar{\Phi}_c^{(0,6,12,0)}$	$\Phi_c^{(0,6,12,0)} \bar{\Phi}_c^{(0,6,12,0)}$	(0,6,12,0)
1	$H^{0,3}$	(0,3)	1	$I \times \bar{\Phi}_c^{(1,16,16,16)}$	$\Phi_{(1,16,16,16)}^{(1,0,0,0)} \bar{\Phi}_c^{(1,16,16,16)}$	(2, 8, 8, 8)
23	$H^{1,2}$	(-1,2)	1	$\Phi_a^{(0,6,6,6)} \bar{\Phi}_c^{(1,10,10,10)}$	$\Phi_{(1,10,10,10)}^{(1,6,6,6)} \bar{\Phi}_c^{(1,10,10,10)}$	(2, 8, 8, 8)
		(-1,2)	1	$\Phi_a^{(1,4,4,4)} \bar{\Phi}_c^{(0,12,12,12)}$	$\Phi_{(0,12,12,12)}^{(0,4,4,4)} \bar{\Phi}_c^{(0,12,12,12)}$	(2, 8, 8, 8)
		(-1,2)	3	$\Phi_a^{(1,12,0,0)} \bar{\Phi}_c^{(0,4,16,16)}$	$\Phi_{(0,4,16,16)}^{(0,12,0,0)} \bar{\Phi}_c^{(0,4,16,16)}$	(2, 8, 8, 8)
		(-1,2)	3	$\Phi_a^{(0,10,4,4)} \bar{\Phi}_c^{(1,6,12,12)}$	$\Phi_{(1,6,12,12)}^{(1,10,4,4)} \bar{\Phi}_c^{(1,6,12,12)}$	(2, 8, 8, 8)
		(-1,2)	3	$\Phi_a^{(1,0,6,6)} \bar{\Phi}_c^{(0,16,10,10)}$	$\Phi_{(0,16,10,10)}^{(0,0,6,6)} \bar{\Phi}_c^{(0,16,10,10)}$	(2, 8, 8, 8)
		(-1,2)	6	$\Phi_a^{(0,12,6,0)} \bar{\Phi}_c^{(1,4,10,16)}$	$\Phi_{(1,4,10,16)}^{(1,12,6,0)} \bar{\Phi}_c^{(1,4,10,16)}$	(2, 8, 8, 8)
		(-1,2)	3	$\Phi_a^{(0,8,2,8)} \bar{\Phi}_c^{(1,8,8,14)}$	$\Phi_{(1,8,8,14)}^{(1,8,14,8)} \bar{\Phi}_c^{(1,8,8,14)}$	(2, 8, 14, 2)
		(-1,2)	3	$\Phi_a^{(0,2,8,8)} \bar{\Phi}_c^{(1,8,8,14)}$	$\Phi_{(1,8,8,14)}^{(1,14,8,8)} \bar{\Phi}_c^{(1,8,8,14)}$	(2, 14, 8, 2)
23	$H^{2,1}$	(-2,1)	1	$\Phi_a^{(1,10,10,10)} \bar{\Phi}_c^{(0,6,6,6)}$	$\Phi_{(0,6,6,6)}^{(0,10,10,10)} \bar{\Phi}_c^{(0,6,6,6)}$	(2, 8, 8, 8)
		(-2,1)	1	$\Phi_a^{(0,12,12,12)} \bar{\Phi}_c^{(1,4,4,4)}$	$\Phi_{(1,4,4,4)}^{(1,12,12,12)} \bar{\Phi}_c^{(1,4,4,4)}$	(2, 8, 8, 8)
		(-2,1)	3	$\Phi_a^{(0,4,16,16)} \bar{\Phi}_c^{(1,12,0,0)}$	$\Phi_{(1,12,0,0)}^{(1,4,16,16)} \bar{\Phi}_c^{(1,12,0,0)}$	(2, 8, 8, 8)
		(-2,1)	3	$\Phi_a^{(1,6,12,12)} \bar{\Phi}_c^{(0,10,4,4)}$	$\Phi_{(0,10,4,4)}^{(0,6,12,12)} \bar{\Phi}_c^{(0,10,4,4)}$	(2, 8, 8, 8)
		(-2,1)	3	$\Phi_a^{(0,16,10,10)} \bar{\Phi}_c^{(1,0,6,6)}$	$\Phi_{(1,0,6,6)}^{(1,16,10,10)} \bar{\Phi}_c^{(1,0,6,6)}$	(2, 8, 8, 8)
		(-2,1)	6	$\Phi_a^{(1,4,10,16)} \bar{\Phi}_c^{(0,12,6,0)}$	$\Phi_{(0,12,6,0)}^{(0,4,10,16)} \bar{\Phi}_c^{(0,12,6,0)}$	(2, 8, 8, 8)
		(-2,1)	3	$\Phi_a^{(1,8,14,8)} \bar{\Phi}_c^{(0,8,8,2)}$	$\Phi_{(0,8,8,2)}^{(0,8,2,8)} \bar{\Phi}_c^{(0,8,8,2)}$	(2, 8, 2, 14)
		(-2,1)	3	$\Phi_a^{(1,14,8,8)} \bar{\Phi}_c^{(0,8,8,2)}$	$\Phi_{(0,8,8,2)}^{(0,2,8,8)} \bar{\Phi}_c^{(0,8,8,2)}$	(2, 2, 8, 14)
1	$H^{3,0}$	(-3,0)	1	$\Phi_a^{(1,16,16,16)} \times \bar{I}$	$\Phi_{(0,0,0,0)}^{(0,16,16,16)} \times \bar{I}$	(2, 8, 8, 8)
14	$H^{2,2}$	(-2,2)	1	$\Phi_a^{(0,12,12,12)} \bar{\Phi}_c^{(0,12,12,12)}$	$\Phi_c^{(0,12,12,12)} \bar{\Phi}_c^{(0,12,12,12)}$	(0, 12, 12, 12)
		(-2,2)	1	$\Phi_a^{(1,10,10,10)} \bar{\Phi}_c^{(1,10,10,10)}$	$\Phi_c^{(1,10,10,10)} \bar{\Phi}_c^{(1,10,10,10)}$	(1, 10, 10, 10)
		(-2,2)	3	$\Phi_a^{(0,14,14,8)} \bar{\Phi}_c^{(1,8,8,14)}$	$\Phi_{(1,8,8,14)}^{(1,2,2,8)} \bar{\Phi}_c^{(1,8,8,14)}$	(2, 2, 2, 2)
		(-2,2)	3	$\Phi_a^{(1,14,8,8)} \bar{\Phi}_c^{(0,8,14,14)}$	$\Phi_{(0,8,14,14)}^{(0,2,8,8)} \bar{\Phi}_c^{(0,8,14,14)}$	(2, 2, 2, 2)
		(-2,2)	6	$\Phi_a^{(1,10,16,4)} \bar{\Phi}_c^{(1,10,16,4)}$	$\Phi_c^{(1,10,16,4)} \bar{\Phi}_c^{(1,10,16,4)}$	(1, 10, 16, 4)
1	$H^{3,3}$	(-3,3)	1	$\Phi_a^{(1,16,16,16)} \bar{\Phi}_c^{(1,16,16,16)}$	$\Phi_c^{(1,16,16,16)} \bar{\Phi}_c^{(1,16,16,16)}$	(1, 16, 16, 16)

Таблица 4.5: (а,с) поля модели $(1_A)^1(16_E)^3$ с группой $\tilde{G}^* = \langle (2, 2, 2, 2), (0, 4, 4, 10), (0, 4, 10, 4) \rangle$

Кол-во.	$H^{p,q}$	(Q_L, Q_R)	#	Поле: $\Phi_a^{\vec{l}} \bar{\Phi}_c^{\vec{l}}$	Получено из: $\Phi_{\vec{q}}^{\vec{l}} \bar{\Phi}_{\vec{q}}^{\vec{l}}$	$\vec{w}^* \in \tilde{G}^*$
1	$H^{0,0}$	(0,0)	1	$I \times \bar{I}$		
23	$H^{1,1}$	(-1,1)	1	$\Phi_a^{(0,6,6,6)} \bar{\Phi}_c^{(0,6,6,6)}$	$\Phi_c^{(0,6,6,6)} \bar{\Phi}_c^{(0,6,6,6)}$	(0,6,6,6)
		(-1,1)	1	$\Phi_a^{(1,4,4,4)} \bar{\Phi}_c^{(1,4,4,4)}$	$\Phi_c^{(1,4,4,4)} \bar{\Phi}_c^{(1,4,4,4)}$	(1,4,4,4)
		(-1,1)	3	$\Phi_a^{(0,4,4,10)} \bar{\Phi}_c^{(0,4,4,10)}$	$\Phi_c^{(0,4,4,10)} \bar{\Phi}_c^{(0,4,4,10)}$	(0,4,4,10)
		(-1,1)	3	$\Phi_a^{(1,0,6,6)} \bar{\Phi}_c^{(1,0,6,6)}$	$\Phi_c^{(1,0,6,6)} \bar{\Phi}_c^{(1,0,6,6)}$	(1,0,6,6)
		(-1,1)	3	$\Phi_a^{(1,0,0,12)} \bar{\Phi}_c^{(1,0,0,12)}$	$\Phi_c^{(1,0,0,12)} \bar{\Phi}_c^{(1,0,0,12)}$	(1,0,0,12)
		(-1,1)	6	$\Phi_a^{(0,0,6,12)} \bar{\Phi}_c^{(0,0,6,12)}$	$\Phi_c^{(0,0,6,12)} \bar{\Phi}_c^{(0,0,6,12)}$	(0,0,6,12)
		(-1,1)	3	$\Phi_a^{(0,8,2,8)} \bar{\Phi}_c^{(0,8,8,2)}$	$\Phi_{(0,8,8,2)}^{(0,8,14,8)} \bar{\Phi}_c^{(0,8,8,2)}$	(0,8,14,14)
		(-1,1)	3	$\Phi_a^{(0,2,8,8)} \bar{\Phi}_c^{(0,8,8,2)}$	$\Phi_{(0,8,8,2)}^{(0,14,8,8)} \bar{\Phi}_c^{(0,8,8,2)}$	(0,14,8,14)
1	$H^{0,3}$	(0,3)	1	$I \times \bar{\Phi}_c^{(1,16,16,16)}$	$\Phi_{(1,16,16,16)}^{(1,0,0,0)} \bar{\Phi}_c^{(1,16,16,16)}$	(2, 8, 8, 8)
14	$H^{1,2}$	(-1,2)	1	$\Phi_a^{(0,6,6,6)} \bar{\Phi}_c^{(1,10,10,10)}$	$\Phi_{(1,10,10,10)}^{(1,6,6,6)} \bar{\Phi}_c^{(1,10,10,10)}$	(2, 8, 8, 8)
		(-1,2)	1	$\Phi_a^{(1,4,4,4)} \bar{\Phi}_c^{(0,12,12,12)}$	$\Phi_{(0,12,12,12)}^{(0,4,4,4)} \bar{\Phi}_c^{(0,12,12,12)}$	(2, 8, 8, 8)
		(-1,2)	6	$\Phi_a^{(0,12,6,0)} \bar{\Phi}_c^{(1,4,10,16)}$	$\Phi_{(1,4,10,16)}^{(1,12,6,0)} \bar{\Phi}_c^{(1,4,10,16)}$	(2, 8, 8, 8)
		(-1,2)	3	$\Phi_a^{(0,2,8,8)} \bar{\Phi}_c^{(0,8,14,14)}$	$\Phi_{(0,8,14,14)}^{(0,14,8,8)} \bar{\Phi}_c^{(0,8,14,14)}$	(0, 14, 2, 2)
		(-1,2)	3	$\Phi_a^{(1,2,2,8)} \bar{\Phi}_c^{(1,8,8,14)}$	$\Phi_{(1,8,8,14)}^{(1,14,14,8)} \bar{\Phi}_c^{(1,8,8,14)}$	(1, 14, 14, 2)
14	$H^{2,1}$	(-2,1)	1	$\Phi_a^{(1,10,10,10)} \bar{\Phi}_c^{(0,6,6,6)}$	$\Phi_{(0,6,6,6)}^{(0,10,10,10)} \bar{\Phi}_c^{(0,6,6,6)}$	(2, 8, 8, 8)
		(-2,1)	1	$\Phi_a^{(0,12,12,12)} \bar{\Phi}_c^{(1,4,4,4)}$	$\Phi_{(1,4,4,4)}^{(1,12,12,12)} \bar{\Phi}_c^{(1,4,4,4)}$	(2, 8, 8, 8)
		(-2,1)	6	$\Phi_a^{(1,4,10,16)} \bar{\Phi}_c^{(0,12,6,0)}$	$\Phi_{(0,12,6,0)}^{(0,4,10,16)} \bar{\Phi}_c^{(0,12,6,0)}$	(2, 8, 8, 8)
		(-2,1)	3	$\Phi_a^{(0,8,14,14)} \bar{\Phi}_c^{(0,2,8,8)}$	$\Phi_{(0,2,8,8)}^{(0,8,2,2)} \bar{\Phi}_c^{(0,2,8,8)}$	(0, 14, 2, 2)
		(-2,1)	3	$\Phi_a^{(1,8,8,14)} \bar{\Phi}_c^{(1,2,2,8)}$	$\Phi_{(1,2,2,8)}^{(1,8,8,2)} \bar{\Phi}_c^{(1,2,2,8)}$	(1, 14, 14, 2)
1	$H^{3,0}$	(-3,0)	1	$\Phi_a^{(1,16,16,16)} \times \bar{I}$	$\Phi_{(0,0,0,0)}^{(0,16,16,16)} \times \bar{I}$	(2, 8, 8, 8)
23	$H^{2,2}$	(-2,2)	1	$\Phi_a^{(0,12,12,12)} \bar{\Phi}_c^{(0,12,12,12)}$	$\Phi_c^{(0,12,12,12)} \bar{\Phi}_c^{(0,12,12,12)}$	(0,12,12,12)
		(-2,2)	1	$\Phi_a^{(1,10,10,10)} \bar{\Phi}_c^{(1,10,10,10)}$	$\Phi_c^{(1,10,10,10)} \bar{\Phi}_c^{(1,10,10,10)}$	(1,10,10,10)
		(-2,2)	3	$\Phi_a^{(0,4,16,16)} \bar{\Phi}_c^{(0,4,16,16)}$	$\Phi_c^{(0,4,16,16)} \bar{\Phi}_c^{(0,4,16,16)}$	(0, 4, 16, 16)
		(-2,2)	3	$\Phi_a^{(1,6,12,12)} \bar{\Phi}_c^{(1,6,12,12)}$	$\Phi_c^{(1,6,12,12)} \bar{\Phi}_c^{(1,6,12,12)}$	(1, 6, 12, 12)
		(-2,2)	3	$\Phi_a^{(0,16,10,10)} \bar{\Phi}_c^{(0,16,10,10)}$	$\Phi_c^{(0,16,10,10)} \bar{\Phi}_c^{(0,16,10,10)}$	(0, 16, 10, 10)
		(-2,2)	6	$\Phi_a^{(1,4,10,16)} \bar{\Phi}_c^{(1,4,10,16)}$	$\Phi_c^{(1,4,10,16)} \bar{\Phi}_c^{(1,4,10,16)}$	(1, 4, 10, 16)
		(-2,2)	3	$\Phi_a^{(1,8,14,8)} \bar{\Phi}_c^{(1,8,8,14)}$	$\Phi_{(1,8,8,14)}^{(1,8,2,8)} \bar{\Phi}_c^{(1,8,8,14)}$	(1, 8, 2, 2)
		(-2,2)	3	$\Phi_a^{(1,14,8,8)} \bar{\Phi}_c^{(1,8,8,14)}$	$\Phi_{(1,8,8,14)}^{(1,2,8,8)} \bar{\Phi}_c^{(1,8,8,14)}$	(1, 2, 8, 2)
1	$H^{3,3}$	(-3,3)	1	$\Phi_a^{(1,16,16,16)} \bar{\Phi}_c^{(1,16,16,16)}$	$\Phi_c^{(1,16,16,16)} \bar{\Phi}_c^{(1,16,16,16)}$	(1, 16, 16, 16)

Как видно из анализа, обе модели содержат голоморфный и антиголоморфный токи заряда 3, соответствующие формам (3,0) и (0,3) на многообразии Калаби-Яу. Взаимная локальность данных токов с другими полями модели обеспечивается выполнением условия допустимой группы (4.76), сформулированного в разделе 4.7.

В завершение мы кратко рассмотрим процедуру факторизации второй модели орбифолда по группе циклических перестановок, действующей на три компоненты $\mathbf{E}_7$. Данная конструкция приводит к модели Гепнера с тремя поколениями. Для этого необходимо построить орбифолд по группе $\tilde{G}$ и провести факторизацию по циклической группе перестановок $S \simeq \mathbb{Z}_3$. Действие группы S на трёх моделях $\mathbf{E}_7$ определяется как циклическая перестановка: $l_2 \rightarrow l_3, l_3 \rightarrow l_4, l_4 \rightarrow l_2$. Результирующая модель $(1)^1(16)^3/(\tilde{G} \times S)$ содержит 9 поколений (киральных-киральных полей) и 6 антипоколений (антикиральных-киральных полей). Таким образом, представлена явная конструкция полей компактного сектора в модели суперструнной компактификации Гепнера с тремя поколениями. Соответствующие поля приведены в таблице 4.6.

Таблица 4.6: (с,с) и (а,с) поля в модели с тремя поколениями

Кол-во.	(Q_L, Q_R)	Поля: $\Phi_c^{\vec{l}} \bar{\Phi}_c^{\vec{l}}$ или $\Phi_a^{\vec{l}} \bar{\Phi}_c^{\vec{l}}$
9	(1,1)	$\Phi_c^{(0,6,6,6)} \bar{\Phi}_c^{(0,6,6,6)}$
	(1,1)	$\Phi_c^{(1,4,4,4)} \bar{\Phi}_c^{(1,4,4,4)}$
	(1,1)	$\Phi_c^{(0,4,4,10)} \bar{\Phi}_c^{(0,4,4,10)} + \text{цикл. перестановки}$
	(1,1)	$\Phi_c^{(1,0,0,12)} \bar{\Phi}_c^{(1,0,0,12)} + \text{цикл. перестановки.}$
	(1,1)	$\Phi_c^{(1,0,6,6)} \bar{\Phi}_c^{(1,0,6,6)} + \text{цикл. перестановки.}$
	(1,1)	$\Phi_c^{(0,0,6,12)} \bar{\Phi}_c^{(0,0,6,12)} + \text{цикл. перестановки.}$
	(1,1)	$\Phi_c^{(0,0,12,6)} \bar{\Phi}_c^{(0,0,12,6)} + \text{цикл. перестановки.}$
	(1,1)	$\Phi_c^{(0,8,2,8)} \bar{\Phi}_c^{(0,8,2,8)} + \text{цикл. перестановки.}$
6	(-1,1)	$\Phi_a^{(0,6,6,6)} \bar{\Phi}_c^{(0,6,6,6)}$
	(-1,1)	$\Phi_a^{(1,4,4,4)} \bar{\Phi}_c^{(1,4,4,4)}$
	(-1,1)	$\Phi_a^{(1,8,2,2)} \bar{\Phi}_c^{(0,2,8,8)} + \text{цикл. перестановки.}$
	(-1,1)	$\Phi_a^{(0,8,8,2)} \bar{\Phi}_c^{(1,2,2,8)} + \text{цикл. перестановки.}$
	(-1,1)	$\Phi_a^{(0,6,12,0)} \bar{\Phi}_c^{(0,6,12,0)} + \text{цикл. перестановки.}$
	(-1,1)	$\Phi_a^{(0,12,6,0)} \bar{\Phi}_c^{(0,12,6,0)} + \text{цикл. перестановки.}$

В этой главе была разработана явная конструкция для описания полей в орбифолдах, построенных из произведений $N = (2, 2)$ минимальных моделей типа ADE, используя аппарат спектрального потока и принципы конформного бутстрапа. Доказано, что исходная модель $M_{\vec{k}}/G_{\text{adm}}$ и её зеркальный двойник $M_{\vec{k}}/G_{\text{adm}}^*$ являются изоморфными при условии, что группы G_{adm} и G_{adm}^* удовлетворяют соотношению типа Берглунда-Хубша-Кравица. Этот результат представляет собой переформулировку в терминах конформного бутстрапа конструкции зеркальных орбифолдов, ранее полученную в рамках модулярного бутстрапа [30].

Геометрическая интерпретация орбифолдов ADE-моделей была исследована в работах [66, 67], где установлена их связь с многообразиями Калаби-Яу, реализуемыми в виде полных пересечений в взвешенных проективных пространствах. Таким образом, предложенная конструкция даёт явное описание полей в сигма-моделях, соответствующих компактификациям на таких Калаби-Яу.

Мы продемонстрировали наш подход на примере зеркальных пар орбифолдов модели $(1_A)(16_E)^3$.

Глава 5

Заключение

Основные результаты диссертационного исследования лежат в плоскости зеркальной симметрии. Мы исследовали её с геометрической точки зрения, рассмотрев два подхода к построению зеркального двойника для многообразий Калаби-Яу, которые заданы нулями обратимого полинома из семейства Берглунда-Хубша. С другой стороны, мы явно построили спектр взаимно локальных полей в моделях суперконформной теории поля с центральным зарядом, равным 9. Эти модели получаются как орбифолды произведений минимальных моделей типа ADE, которые связаны с компактификацией на Калаби-Яу. Более того, мы изучили орбифолды по взаимно-двойственным группам G_{adm} и G_{adm}^* и показали, что такие модели являются зеркалами друг другу и эквивалентны как конформные теории поля.

Конструкции зеркальной симметрии

Мы стартовали с семейства орбифолда Калаби-Яу $X = X_M/G$ по некоторой допустимой группе G . Семейство X задается в $\mathbb{P}_{\frac{4}{k}}^4/G$ нулями многочлена

$$W^X(x, \varphi) = \sum_{i=1}^5 \prod_{j=1}^5 x_j^{M_{ij}} + \sum_{l=1}^{h_X} \varphi_l \prod_{j=1}^5 x_j^{S_{lj}}. \quad (5.1)$$

Используя конструкцию Берглунда-Хубша [11] и определение зеркальной группы группы G^* , предложенное Кравицем [12], мы построили зеркальный орбифолд Калаби-Яу $Y = X_{M^T}/G^*$. Он определяется в факторе другого взвешенного проективного пространства $\mathbb{P}_{\frac{4}{k}}^4/G^*$ нулями многочлена

$$W^Y(z, \psi) = \sum_{i=1}^5 \prod_{j=1}^5 z_j^{M_{ji}} + \sum_{m=1}^{h_Y} \psi_m \prod_{j=1}^5 z_j^{R_{mj}} \quad (5.2)$$

При этом нами было показано [II],[I], что условие на взаимную двойственность групп можно переписать как связь степеней мономов деформаций, определяющих зеркальную пару (X, Y)

:

$$\left(\vec{S}_l, \vec{R}_m\right) = \sum_{i,j=1}^5 B_{ij} S_{li} R_{mj} \in \mathbb{Z} \quad (5.3)$$

Также была рассмотрена конструкция Батырева [10]. Согласно ей зеркало определяется в торическом многообразии T критическими точками некоторого однородного многочлена F_Y . Мы нашли его явный вид. Более того, зеркало $Y \subset T$ можно задавать уравнением $W_Y(y) = 0$ где многочлен W_Y мы нашли явно [I]:

$$W^Y(y_1, \dots, y_{h_X+4}) = \sum_{i=1}^5 \prod_{j=1}^5 y_j^{M_{ji}} \prod_{l=1}^{h_X-1} y_{l+5}^{S_{li}} + \sum_{m=1}^{h_Y} \psi_m \prod_{j=1}^5 y_j^{R_{mj}} \prod_{l=1}^{h_X-1} y_{l+5}^{(S_{lj} B_{ji} R_{mi})} \quad (5.4)$$

Эквивалентность двух подходов для данного класса многообразий Калаби-Яу была продемонстрирована построением отображения из T в $\mathbb{P}_{\bar{k}}^4/G$, при котором многочлен (5.4) в точности переходит в (5.2).

Калибровочная линейная сигма-модель и гипотеза JKLMR

В диссертации была продемонстрирована справедливость зеркальной версии гипотезы Джокерса и соавторов (3.2) о равенстве статистической суммы КЛСМ и экспоненты кэлера потенциала на пространстве модулей Калаби-Яу X

$$e^{-K_C^X} = Z_Y. \quad (5.5)$$

При этом многообразие X является зеркалом к пространству суперсимметричных вакуумов Y данной КЛСМ и задается как гиперповерхность в торическом многообразии. Мы явно вычислили статистическую сумму Z_Y , которая была представлена в виде контурных интегралов. Данное вычисление проведено в достаточно общем случае, однако равенство (5.5) остается верным только при соблюдении некоторых условий на матрицу степеней полинома W_M , который определяет X , и на деформации W_M .

Эти ограничения выполнены, например, когда W_M имеет типа Ферма. Мы рассмотрели более общий случай [III], когда Калаби-Яу X не относится к классу Ферма и представляет собой зеркало некоторого семейства орбифолдов Калаби-Яу Y , лежащих во взвешенном проективном пространстве $\bar{\mathbb{P}}_{\bar{k}}^4$. Пространство $\bar{\mathbb{P}}_{\bar{k}}^4$, в свою очередь, допускает задание в нём двух различных полиномов $W_{Y(1)}$ типа Ферма, и $W_{Y(2)}$ смешанного типа (цепь и Ферма), которые определяют орбифолды Калаби-Яу $Y(1)$ и $Y(2)$. При этом их зеркала $X(1)$ и $X(2)$, построенные по конструкции БХК, лежат в разных взвешенных проективных пространствах $\mathbb{P}_{\bar{k}}^4(1)$ и $\mathbb{P}_{\bar{k}}^4(2)$. Однако, они являются бирационально эквивалентными и их кэлера потенциалы

совпадают (3.5)

$$K_C^{X(1)} = K_C^{X(2)}. \quad (5.6)$$

Соотношение (3.5) гарантирует нам выполнение JKLMR - гипотезы для неферма Калаби-Яу $X(2)$:

$$e^{-K_C^{X(2)}} = Z_{Y(2)}, \quad (5.7)$$

что мы и проверили явным вычислением.

Модели двумерной $N = 2$ суперсимметричной конформной теории поля: спектр и зеркальная симметрия

Мы рассмотрели орбифолды произведений $N = 2$ минимальных моделей по допустимой группе симметрии, имеющие центральный заряд, равный 9:

$$\prod_{i=1}^r M_{k_i}/G_{\text{adm}}, \quad c = \sum_{i=1}^r \frac{3k_i}{k_i + 2} = 9. \quad (5.8)$$

В каждой минимальной модели M_{k_i} может быть выбран произвольный ADE модулярный инвариант. Мы проанализировали зависимость группы симметрии G_{adm} от конкретного модулярного инварианта в каждой M_{k_i} . Далее мы продемонстрировали явную конструкцию примарных полей в модели орбифолда, которая основана на действии спектрального потока и удовлетворении требований конформного бутстрапа. В частности, условиям взаимной локальности. Как итог, два поля

$$\begin{aligned} \Psi_{\vec{t}_1 + \vec{w}_1, \vec{t}_1}^{\vec{l}_1, \vec{l}_1}(z, \bar{z}), \quad \Psi_{\vec{t}_2 + \vec{w}_2, \vec{t}_2}^{\vec{l}_2, \vec{l}_2}(0, 0), \\ \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in G_{\text{adm}} \end{aligned} \quad (5.9)$$

являются взаимно локальными, если элементы группы твистов связаны условием

$$\sum_{i=1}^r \frac{w_{1i}(q_{2i} - w_{2i}) + w_{2i}(q_{1i} - w_{1i})}{k_i + 2} \in \mathbb{Z}. \quad (5.10)$$

Процедура зеркального спектрального потока позволяет определить поля в модели с группой G_{adm}^*

$$\Psi_{\vec{t} + \vec{w}^*, \vec{t}}^{\vec{l}, \vec{l}}(z, \bar{z}) \in M_{\vec{k}}/G_{\text{adm}}^*. \quad (5.11)$$

Оказывается, что группа G_{adm}^* состоит из элементов $\vec{w}^* = \vec{q} - \vec{w}$, где $\vec{q}$ заряд поля (5.11).

Тогда уравнения взаимной локальности переходят в

$$\sum_{i=1}^r \frac{w_i w_i^*}{k_i + 2} \in \mathbb{Z}, \quad \vec{w} \in G_{\text{adm}}, \quad \vec{w}^* \in G_{\text{adm}}^* \quad (5.12)$$

Фиксируя допустимую группу G_{adm} и находя все элементы двойственной группы согласно уравнениям (5.12), мы находим полный набор взаимно локальных полей в моделях $M_{\vec{k}}/G_{\text{adm}}$ и $M_{\vec{k}}/G_{\text{adm}}^*$. По построению эти модели являются эквивалентными, а также образуют зеркальную пару. Чтобы убедиться в этом, мы доказали изоморфизм между (c, c) $((a, c))$ кольцами исходной модели с группой G_{adm} и (a, c) $((c, c))$ кольцами модели с группой G_{adm}^* .

Стоит отметить, что вся эта конструкция согласована с инвариантами типа **D** и **E**. Этот подход был продемонстрирован на примере модели Гепнера $(1_A)^1(16_E)^3$.

Геометрически такие орбифолды связаны с многообразиями Калаби-Яу, которые определяются как полные пересечения гиперповерхностей в произведении проективных пространств. Многочлены, которые задают эти Калаби-Яу, также имеют ADE классификацию.

С феноменологической точки зрения это отвечает спектру локальных, безмассовых полей в компактном секторе теории суперструн.

Наша явная конструкция полей в модели орбифолда может быть расширена до построения физических состояний в моделях теории струн типа *II* и гетеротической струны [28, 83, 84]. Более того, можно надеяться, что явная конструкция полей, описанная выше, позволит вычислять корреляционные функции следуя подходу, описанному в [85].

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность и признательность своему научному руководителю Белавину Александру Абрамовичу за наставничество и поддержку на протяжении бакалавриата, магистратуры и аспирантуры, за возможность заниматься актуальной и интересной наукой. Автор безмерно благодарен своим родителям: Ереминой Татьяне Викторовне и Еремину Андрею Анатольевичу, а также бабушкам и дедушке за воспитание, помощь и поддержку на протяжении всей жизни. Автор выражает особенную благодарность бабушке Нине. Автор благодарен своей жене Ереминой Альбине за понимание и поддержку. Автор также благодарен своему брату Еремину Андрею за дружбу и поддержку.

Автор благодарен всем своим преподавателям и старшим коллегам: Литвинову Алексею Викторовичу, Пархоменко Сергею Евгеньевичу, Пугаю Ярославу Петровичу, Маршакову Андрею Владимировичу, Берштейну Михаилу Александровичу, Лашкевичу Михаилу Юрьевичу, Басалаеву Алексею Андреевичу, Лебедеву Дмитрию Ростиславовичу, Герасимову Антону Андреевичу, Редкозубову Вадиму Витальевичу, Киселеву Валерию Валерьевичу, Алешкину Константину Романовичу за полезные дискуссии и замечания, наставничество и помощь.

Автор благодарен своим друзьям и коллегам: Менскому Даниилу, Жакенову Абаю, Раченкову Дмитрию, Цюцорупе Игорю, Александрову Артему, Симакову Илье и другим, с кем учился вместе, посещал семинары и конференции.

Автор выражает благодарность Автономной некоммерческой образовательной организации высшего образования «Сколковский институт науки и технологий» (Сколтех) за поддержку. Часть результатов настоящей диссертации была получена во время обучения в Сколтехе.

Приложение А

Симметрия характеров $N = 2$ минимальных моделей

В главе про минимальные модели $N = 2$ супералгебры Вирасоро мы активно использовали изоморфизм представлений $\mathcal{H}_q^l \simeq \mathcal{H}_{q+k+2}^{k-l}$, из которого следует правило отождествления примарных состояний (4.41). Продемонстрируем справедливость этого отождествления на уровне характеров минимальных представлений. Начнем с характера представления, порожденного киральным-примарным состоянием. Для него существует явная формула:

$$\chi_c^l(\tau, \theta) = q^{\frac{l}{2(k+2)} - \frac{c}{24}} u^{\frac{l}{k+2}} \frac{\eta(q^{(k+2)})^3}{\eta(q)^3} \frac{\vartheta_{1,0}(uq^{1/2}, q)}{\vartheta_{1,0}(uq^{1/2}, q^{(k+2)})} \frac{\vartheta_{1,0}(-q^{l+1}, q^{(k+2)})}{\vartheta_{1,0}(u^{-1}q^{l+1/2}, q^{(k+2)})}, \quad (\text{A.1})$$

где $u = \exp(i2\pi\theta)$, $q = \exp(i2\pi\tau)$. Тэта-функция определяется стандартным образом:

$$\begin{aligned} \vartheta_{1,0}(u, q) &= q^{1/8} \prod_{n=0}^{\infty} (1 + u^{-1}q^{n+1})(1 + uq^n)(1 - q^{n+1}) = \\ &= q^{1/8} \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{(n^2-n)/2} u^{-n}, \\ \eta(q) &= q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Нас интересует характер представления $\mathcal{H}_q^l$, порожденный старшим весом Φ_q^l . Удобно воспользоваться конструкцией спектрального потока (4.88), и отождествить состояние Φ_q^l с V_t^l для $q = l - 2t$. Тогда характер χ_t^l твистованного представления, порожденного старшим весом V_t^l , может быть записан как преобразованный характер (A.1):

$$\chi_t^l(\tau, \theta) = \chi_c^l(\tau, \theta + t\tau). \quad (\text{A.3})$$

Если теперь переформулировать правила отождествления представлений (4.41) в терми-

нах спектрального потока, то мы получим

$$V_t^l \simeq V_{t-l-1}^{k-l}. \quad (\text{A.4})$$

Таким образом, нам необходимо доказать: $\chi_t^l = \chi_{t-l-1}^{k-l}$. Запишем характер представления, порожденного V_t^l :

$$\chi_t^l(u, q) = q^{\frac{l+2tl+kt^2}{2(k+2)} - \frac{c}{24}} u^{\frac{l+tk}{(k+2)}} \frac{\eta(q^{(k+2)})^3}{\eta(q)^3} \frac{\vartheta_{1,0}(uq^{1/+t}, q)}{\vartheta_{1,0}(uq^{1/2+t}, q^{(k+2)})} \frac{\vartheta_{1,0}(-q^{l+1}, q^{(k+2)})}{\vartheta_{1,0}(u^{-1}q^{l+1/2-l}, q^{(k+2)})}, \quad (\text{A.5})$$

и

$$\begin{aligned} \chi_{t-l-1}^{k-l}(u, q) &= q^{\frac{k-l+k(t-l-1)^2}{2(k+2)} - \frac{c}{24} + \frac{(t-l-1)(k-l)}{(k+2)}} u^{\frac{k-l+(t-l-1)k}{(k+2)}} \times \\ &\times \frac{\eta(q^{(k+2)})^3}{\eta(q)^3} \frac{\vartheta_{1,0}(uq^{1/2+t-l-1}, q)}{\vartheta_{1,0}(uq^{1/2+t-l-1}, q^{(k+2)})} \frac{\vartheta_{1,0}(-q^{k-l+1}, q^{(k+2)})}{\vartheta_{1,0}(u^{-1}q^{k-t+\frac{3}{2}}, q^{(k+2)})}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Для доказательства равенства поделим один характер на другой и преобразуем выражение:

$$\begin{aligned} \frac{\chi_t^l(u, q)}{\chi_{t-l-1}^{k-l}(u, q)} &= q^{lt-l^2/2} u^l \times \\ &\times \frac{\vartheta_{1,0}(uq^{t+\frac{1}{2}}, q) \vartheta_{1,0}(-q^{l+1}, q^{k+2})}{\vartheta_{1,0}(uq^{t-l-1+\frac{1}{2}}, q) \vartheta_{1,0}(-q^{k-l+1}, q^{k+2})} \frac{\vartheta_{1,0}(uq^{t-l-1+\frac{1}{2}}, q^{k+2}) \vartheta_{1,0}(u^{-1}q^{k-t+\frac{3}{2}}, q^{k+2})}{\vartheta_{1,0}(uq^{t+\frac{1}{2}}, q) \vartheta_{1,0}(u^{-1}q^{l-t+\frac{1}{2}}, q^{k+2})} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Используя представление тэта-функции через бесконечное произведение (A.2) получаем

$$\frac{\vartheta_{1,0}(-q^{l+1}, q^{k+2})}{\vartheta_{1,0}(-q^{k-l+1}, q^{k+2})} = 1 \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} &\frac{\vartheta_{1,0}(uq^{t+\frac{1}{2}}, q)}{\vartheta_{1,0}(uq^{t-l-1+\frac{1}{2}}, q)} \frac{\vartheta_{1,0}(uq^{t-l-1+\frac{1}{2}}, q^{k+2}) \vartheta_{1,0}(u^{-1}q^{k-t+\frac{3}{2}}, q^{k+2})}{\vartheta_{1,0}(uq^{t+\frac{1}{2}}, q) \vartheta_{1,0}(u^{-1}q^{l-t+\frac{1}{2}}, q^{k+2})} = \\ &\prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1 + u^{-1}q^{\frac{1}{2}-t+n})(1 + uq^{\frac{1}{2}+n+t})}{(1 + u^{-1}q^{\frac{3}{2}+l-t+n})(1 + uq^{-\frac{1}{2}+n+t-l})} \frac{(1 + u^{-1}q^{l-t+\frac{1}{2}+(n+1)(k+2)})(1 + uq^{t-l-\frac{1}{2}+n(k+2)})}{(1 + u^{-1}q^{-t-\frac{1}{2}+(n+1)(k+2)})(1 + uq^{t+\frac{1}{2}+n(k+2)})} \times \\ &\frac{(1 + uq^{t+\frac{1}{2}+n(k+2)}) (1 + u^{-1}q^{k-t+\frac{3}{2}+n(k+2)})}{(1 + uq^{t-l-\frac{1}{2}+(n+1)(k+2)})(1 + u^{-1}q^{l-t+\frac{1}{2}+n(k+2)})}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
\prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1 + u^{-1}q^{\frac{1}{2}-t+n})(1 + uq^{\frac{1}{2}+n+t})}{(1 + u^{-1}q^{\frac{3}{2}+l-t+n})(1 + uq^{-\frac{1}{2}+n+t-l})} &= \prod_{n=1}^l \frac{1 + u^{-1}q^{\frac{1}{2}-t+n}}{1 + uq^{\frac{1}{2}+t+n-(l+1)}} = \\
\prod_{n=0}^l \frac{1 + u^{-1}q^{\frac{1}{2}-t+n}}{1 + uq^{-\frac{1}{2}+t-n}} &= \prod_{n=0}^l u^{-1}q^{\frac{1}{2}-t+n} = u^{-l-1}q^{(\frac{1}{2}-t)(l+1)+\frac{l(l+1)}{2}} =
\end{aligned} \tag{A.10}$$

и

$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1 + u^{-1}q^{l-t+\frac{1}{2}+(n+1)(k+2)})}{(1 + u^{-1}q^{l-t+\frac{1}{2}+n(k+2)})} = \frac{1}{1 + u^{-1}q^{l-t+\frac{1}{2}}}, \tag{A.11}$$

$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1 + uq^{t-l-\frac{1}{2}+n(k+2)})}{(1 + uq^{t-l-\frac{1}{2}+(n+1)(k+2)})} = 1 + uq^{t-l-\frac{1}{2}} \tag{A.12}$$

Получаем

$$\frac{\chi_t^l(u, q)}{\chi_{t-l-1}^{k-l}(u, q)} = q^{l(t-\frac{1}{2})}u^l \cdot q^{(\frac{1}{2}-t)(l+1)+\frac{l(l+1)}{2}}u^{-l-1} \cdot \frac{1 + uq^{t-l-\frac{1}{2}}}{1 + u^{-1}q^{l-t+\frac{1}{2}}} = q^{l(t-\frac{1}{2})} \cdot q^{-l(t-\frac{1}{2})} = 1 \tag{A.13}$$

Мы доказали "правило отражения" для характеров $N = 2$ минимальных моделей:

$$\chi_t^l(u, q) = \chi_{t-l-1}^{k-l}(u, q). \tag{A.14}$$

Таким образом, мы осуществили простую проверку правила отождествления примарных состояний

$$V_t^l \simeq V_{t-l-1}^{k-l}, \tag{A.15}$$

или, в терминах индексов l, q :

$$\Phi_q^l \simeq \Phi_{q+k+2}^{k-l} \tag{A.16}$$

Приложение В

Взаимная локальность полей в ADE минимальных моделях

Представление старшего веса супералгебры Вирасоро $\mathcal{H}_{q,s}^l \otimes \bar{\mathcal{H}}_{q,s}^{\bar{l}}$ порождено старшим вектором (примарным полем) $\Psi_{q,s}^{l,\bar{l}}$, которое состоит из голоморфной и антиголоморфной части, как в формуле (4.66). Индексы l и $\bar{l}$ спарены согласно ADE классификации (4.62).

Рассмотрим теперь два таких поля и покажем их взаимную локальность. Для этого распишем их операторное разложение в секторе Невьё-Шварца:

$$\begin{aligned} \Psi_{q_1}^{l_1,\bar{l}_1}(z, \bar{z}) \Psi_{q_2}^{l_2,\bar{l}_2}(0, 0) = \\ = \sum_{p,\bar{p}} \sum_{\{k,\bar{k}\}} C_{12}^{p,\bar{p},q,\{k,\bar{k}\}} z^{\Delta_{p,q}-\Delta_{l_1,q_1}-\Delta_{l_2,q_2}+K} \bar{z}^{\Delta_{\bar{p},q}-\Delta_{\bar{l}_1,q_1}-\Delta_{\bar{l}_2,q_2}+\bar{K}} \Psi_q^{p,\bar{p},\{k,\bar{k}\}}(0, 0). \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Набор индексов $\{k, \bar{k}\}$ нумерует потомков примарного поля $\Psi_q^{p,\bar{p},\{0,0\}} = \Psi_q^{p,\bar{p}}$. Без ограничения общности можно считать, что сумма начинается с примарного поля. Конформная размерность потомков отличается от размерности примарного поля на число $K = \sum_i K_i$, которое может быть целым или полуцелым. В операторном разложении (B.1) мы используем тот факт, что минимальная модель имеет замкнутую операторную алгебру. Таким образом, поля, возникающие в правой части выражения (B.1) имеют аналогичный (4.66) вид или являются потомками.

Для локальности разложения (B.1) необходимо чтобы фазовый фактор

$$\exp \left(2\pi i \left(\Delta_{p,q} - \Delta_{\bar{p},q} - (\Delta_{l_1,q_1} - \Delta_{\bar{l}_1,q_1}) - (\Delta_{l_2,q_2} - \Delta_{\bar{l}_2,q_2}) + (K - \bar{K}) \right) \right) \quad (\text{B.2})$$

был тривиальным.

Давайте покажем, что разность чисел $(K - \bar{K})$ может быть только целой. Этого будет достаточно для взаимной локальности, так как разность конформных размерностей голоморфного и антиголоморфного состояния целая. Подействуем оператором $\exp(2\pi i x J_0)$ на левую и правую часть выражения (B.1). Оператор J_0 действует на $U(1)$ - заряд. Получим следующее равенство

$$\exp\left(2\pi i x \frac{q_1 + q_2}{k + 2}\right) = \exp\left(2\pi i x \left(\frac{q}{k + 2} + n_+ - n_-\right)\right). \quad (\text{B.3})$$

Числа $n_{\pm}$ это количество фермионных операторов $G_r^{\pm}$, содержащихся в потомках $\Psi_{p,\bar{p},q}^{NS,\{k,\bar{k}\}}(0,0)$.

Закон сохранения $U(1)$ заряда подразумевает равенство

$$n_+ - n_- = \frac{q_1 + q_2 - q}{k + 2}. \quad (\text{B.4})$$

Вклад в конформную размерность потомков $K = K_{bos} + K_{ferm}$ состоит из вклада бозонных - L_{-m} и фермионных - $G_r^{\pm}$ операторов. Очевидно, $K_{bos} \in \mathbb{Z}$. Фермионная часть конформной размерности потомка может быть выражена через индексы оператора $G_r^{\pm}$:

$$K_{ferm} = \sum_i r_i^+ + r_i^- = \frac{n_+ + n_-}{2}. \quad (\text{B.5})$$

С другой стороны, используя (B.4)

$$K = K_{bos} + K_{ferm} = \frac{n_+ + n_-}{2} + \text{целое} = n_+ + \frac{q_1 + q_2 - q}{2(k + 2)} + \text{целое}. \quad (\text{B.6})$$

Первое слагаемое в операторном разложении (B.1) является примарным полем. Применяя закон сохранения $U(1)$ заряда, получаем $q = q_1 + q_2$. Отсюда следует, что $K \in \mathbb{Z}$. Значит, это не дает вклада в экспоненту взаимной локальности.

Из инвариантности статистической суммы минимальной модели относительно действия T - преобразования: $\tau \rightarrow \tau + 1$ немедленно следует, что разность конформных размерностей голоморфной и антиголоморфной части примарного поля является целым числом.

$$\Delta_{l,q} - \Delta_{\bar{l},q} \in \mathbb{Z}, \quad (\text{B.7})$$

для всех $l, \bar{l}$.

Следовательно, корреляционные функции примарных полей взаимно локальны, то есть удовлетворяют аксиомам конформного бутстрапа.

Литература

- [1] Green Michael B., Schwarz John H. Anomaly Cancellation in Supersymmetric D=10 Gauge Theory and Superstring Theory // *Phys. Lett. B.* — 1984. — Vol. 149. — P. 117–122. DOI: [10.1016/0370-2693\(84\)91565-X](#).
- [2] Vacuum configurations for superstrings / P. Candelas [et al.] // *Nucl. Phys. B.* — 1985. — Vol. 258. — P. 46–74. DOI: [10.1016/0550-3213\(85\)90602-9](#).
- [3] A Pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory / Philip Candelas [et al.] // *Nucl. Phys. B.* — 1991. — Vol. 359. — P. 21–74. DOI: [10.1016/0550-3213\(91\)90292-6](#).
- [4] Lerche Wolfgang, Vafa Cumrun, Warner Nicholas P. Chiral Rings in N=2 Superconformal Theories // *Nucl. Phys. B.* — 1989. — Vol. 324. — P. 427–474. DOI: [10.1016/0550-3213\(89\)90474-4](#).
- [5] Strominger Andrew, Yau Shing-Tung, Zaslow Eric. Mirror symmetry is T duality // *Nucl. Phys. B.* — 1996. — Vol. 479. — P. 243–259. — [hep-th/9606040](#).
- [6] Lynker Monika, Schimmrigk Rolf. Landau-Ginzburg theories as orbifolds // *Phys. Lett. B.* — 1990. — Vol. 249. — P. 237–242. DOI: [10.1016/0370-2693\(90\)91248-A](#).
- [7] An Exactly soluble superconformal theory from a mirror pair of Calabi-Yau manifolds / Philip Candelas [et al.] // *Phys. Lett. B.* — 1991. — Vol. 258. — P. 118–126. DOI: [10.1016/0370-2693\(91\)91218-K](#).
- [8] Mirror symmetry for two parameter models. 1. / Philip Candelas [et al.] // *Nucl. Phys. B.* — 1994. — Vol. 416. — P. 481–538. — [hep-th/9308083](#).
- [9] Candelas Philip, de la Ossa Xenia, Katz Sheldon H. Mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in weighted P^4 and extensions of Landau-Ginzburg theory // *Nucl. Phys. B.* — 1995. — Vol. 450. — P. 267–292. — [hep-th/9412117](#).

- [10] Batyrev Victor V. Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties // J. Alg. Geom. — 1994. — Vol. 3. — P. 493–545. — alg-geom/9310003.
- [11] Berglund Per, Hubsch Tristan. A Generalized construction of mirror manifolds // Nucl. Phys. B. — 1993. — Vol. 393. — P. 377–391. — hep-th/9201014.
- [12] Krawitz Marc. FJRW rings and Landau-Ginzburg Mirror Symmetry. — 2009. — arXiv:0906.0796 [math.AG].
- [13] Strominger Andrew. SPECIAL GEOMETRY // Commun. Math. Phys. — 1990. — Vol. 133. — P. 163–180. DOI: [10.1007/BF02096559](https://doi.org/10.1007/BF02096559).
- [14] Gepner Doron. Exactly Solvable String Compactifications on Manifolds of $SU(N)$ Holonomy // Phys. Lett. B. — 1987. — Vol. 199. — P. 380–388. DOI: [10.1016/0370-2693\(87\)90938-5](https://doi.org/10.1016/0370-2693(87)90938-5).
- [15] Candelas P., Lynker M., Schimmrigk R. Calabi-Yau manifolds in weighted P^4 // Nuclear Physics B. — 1990. — Vol. 341, no. 2. — P. 383–402. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(90\)90185-G](https://doi.org/10.1016/0550-3213(90)90185-G).
- [16] Belavin A. A., Polyakov Alexander M., Zamolodchikov A. B. Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory // Nucl. Phys. B. — 1984. — Vol. 241. — P. 333–380. DOI: [10.1016/0550-3213\(84\)90052-X](https://doi.org/10.1016/0550-3213(84)90052-X).
- [17] Gepner Doron. Yukawa Couplings for Calabi-yau String Compactification // Nucl. Phys. B. — 1988. — Vol. 311. — P. 191–204. DOI: [10.1016/0550-3213\(88\)90147-2](https://doi.org/10.1016/0550-3213(88)90147-2).
- [18] Benini Francesco, Cremonesi Stefano. Partition Functions of $\mathcal{N} = (2, 2)$ Gauge Theories on S^2 and Vortices // Commun. Math. Phys. — 2015. — Vol. 334, no. 3. — P. 1483–1527. — 1206.2356.
- [19] Exact Results in $D=2$ Supersymmetric Gauge Theories / Nima Doroud [et al.] // JHEP. — 2013. — Vol. 05. — 093 P. — 1206.2606.
- [20] Two-Sphere Partition Functions and Gromov-Witten Invariants / Hans Jockers [et al.] // Commun. Math. Phys. — 2014. — Vol. 325. — P. 1139–1170. — 1208.6244.
- [21] Polyakov Alexander M. Quantum Geometry of Bosonic Strings // Phys. Lett. B. — 1981. — Vol. 103. — P. 207–210. DOI: [10.1016/0370-2693\(81\)90743-7](https://doi.org/10.1016/0370-2693(81)90743-7).

- [22] Polyakov Alexander M. Quantum Geometry of Fermionic Strings // Phys. Lett. B. — 1981. — Vol. 103. — P. 211–213. DOI: [10.1016/0370-2693\(81\)90744-9](https://doi.org/10.1016/0370-2693(81)90744-9).
- [23] Gliozzi F., Scherk Joel, Olive David I. Supersymmetry, Supergravity Theories and the Dual Spinor Model // Nucl. Phys. B. — 1977. — Vol. 122. — P. 253–290. DOI: [10.1016/0550-3213\(77\)90206-1](https://doi.org/10.1016/0550-3213(77)90206-1).
- [24] Ramond Pierre. Dual Theory for Free Fermions // Phys. Rev. D. — 1971. — Vol. 3. — P. 2415–2418. DOI: [10.1103/PhysRevD.3.2415](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.3.2415).
- [25] Neveu A., Schwarz J. H. Tachyon-free dual model with a positive-intercept trajectory // Phys. Lett. B. — 1971. — Vol. 34. — P. 517–518. DOI: [10.1016/0370-2693\(71\)90669-1](https://doi.org/10.1016/0370-2693(71)90669-1).
- [26] Belavin A. A., Knizhnik V. G. Algebraic Geometry and the Geometry of Quantum Strings // Phys. Lett. B. — 1986. — Vol. 168. — P. 201–206. DOI: [10.1016/0370-2693\(86\)90963-9](https://doi.org/10.1016/0370-2693(86)90963-9).
- [27] Belavin A. A., Knizhnik V. G. Complex Geometry and the Theory of Quantum Strings // Sov. Phys. JETP. — 1986. — Vol. 64. — P. 214–228.
- [28] The Heterotic String / David J. Gross [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 1985. — Vol. 54. — P. 502–505. DOI: [10.1103/PhysRevLett.54.502](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.54.502).
- [29] Blumenhagen Ralph, Lüst Dieter, Theisen Stefan. Basic concepts of string theory. Theoretical and Mathematical Physics. — Heidelberg, Germany : Springer, 2013. — ISBN: [978-3-642-29496-9](https://doi.org/10.1007/978-3-642-29496-9). DOI: [10.1007/978-3-642-29497-6](https://doi.org/10.1007/978-3-642-29497-6).
- [30] Greene Brian R., Plesser M. R. Duality in Calabi-Yau Moduli Space // Nucl. Phys. B. — 1990. — Vol. 338. — P. 15–37. DOI: [10.1016/0550-3213\(90\)90622-K](https://doi.org/10.1016/0550-3213(90)90622-K).
- [31] Green Michael B., Schwarz J. H., Witten Edward. SUPERSTRING THEORY. VOL. 2: LOOP AMPLITUDES, ANOMALIES AND PHENOMENOLOGY. — 1988. — 7. — ISBN: [978-0-521-35753-1](https://doi.org/10.1016/0550-3213(91)90122-E).
- [32] Candelas Philip, de la Ossa Xenia. Moduli Space of Calabi-Yau Manifolds // Nucl. Phys. B. — 1991. — Vol. 355. — P. 455–481. DOI: [10.1016/0550-3213\(91\)90122-E](https://doi.org/10.1016/0550-3213(91)90122-E).
- [33] Aleshkin Konstantin, Belavin Alexander. A new approach for computing the geometry of the moduli spaces for a Calabi–Yau manifold // J. Phys. A. — 2018. — Vol. 51, no. 5. — 055403 P. — 1706.05342.

- [34] Aleshkin Konstantin, Belavin Alexander. Exact Computation of the Special Geometry for Calabi–Yau Hypersurfaces of Fermat Type // JETP Lett. — 2018. — Vol. 108, no. 10. — P. 705–709. — 1806.02772.
- [35] Aleshkin Konstantin, Belavin Alexander, Litvinov Alexey. JKLMR conjecture and Batyrev construction. — 2018. — 12. — 1812.00478.
- [36] Aleshkin Konstantin, Belavin Alexander. GLSM for Calabi-Yau Manifolds of Berglund-Hubsch Type // Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 2019. — Vol. 110, no. 11. — 727 P. — 1911.11678.
- [37] Aleshkin Konstantin, Belavin Alexander. Special geometry on the moduli space for the two-moduli non-Fermat Calabi–Yau // Phys. Lett. B. — 2018. — Vol. 776. — P. 139–144. — 1708.08362.
- [38] Aleshkin Konstantin, Belavin Alexander. Special geometry on the 101 dimensional moduli space of the quintic threefold // JHEP. — 2018. — Vol. 03. — 018 P. — 1710.11609.
- [39] Klemm Albrecht, Schimmrigk Rolf. Landau-Ginzburg string vacua // Nucl. Phys. B. — 1994. — Vol. 411. — P. 559–583. — hep-th/9204060.
- [40] Kreuzer Maximilian, Skarke Harald. On the classification of quasihomogeneous functions // Commun. Math. Phys. — 1992. — Vol. 150. — 137 P. — hep-th/9202039.
- [41] Shoemaker Mark. Birationality of Berglund-Huebsch-Krawitz Mirrors // Commun. Math. Phys. — 2014. — Vol. 331, no. 2. — P. 417–429. — 1209.5016.
- [42] Kelly Tyler L. Berglund–Hübsch–Krawitz mirrors via Shioda maps // Adv. Theor. Math. Phys. — 2013. — Vol. 17, no. 6. — P. 1425–1449. DOI: [10.4310/ATMP.2013.v17.n6.a8](https://doi.org/10.4310/ATMP.2013.v17.n6.a8).
- [43] Clader Emily, Ruan Yongbin. Mirror Symmetry Constructions. — 2018. — 1412.1268.
- [44] Mirror symmetry / K. Hori [et al.]. — Providence, USA : AMS, 2003. — Vol. 1 of Clay mathematics monographs.
- [45] Chiodo Alessandro, Ruan Yongbin. LG/CY correspondence: The state space isomorphism // Advances in Mathematics. — 2011. — Vol. 227, no. 6. — P. 2157–2188. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870811001356>.
- [46] Witten Edward. Phases of N=2 theories in two-dimensions // Nucl. Phys. B. — 1993. — Vol. 403. — P. 159–222. — hep-th/9301042.

- [47] Gerchkovitz Efrat, Gomis Jaume, Komargodski Zohar. Sphere Partition Functions and the Zamolodchikov Metric // JHEP. — 2014. — Vol. 11. — 001 P. — 1405.7271.
- [48] Artem'ev A. A., Kochergin I. V. On the Calculation of the Special Geometry for a Calabi—Yau Loop Manifold and Two Constructions of the Mirror Manifold // JETP Lett. — 2020. — Vol. 112, no. 5. — P. 263–268. DOI: [10.1134/S0021364020170051](https://doi.org/10.1134/S0021364020170051).
- [49] Kochergin I. V. Calabi-Yau manifolds in weighted projective spaces and their mirror gauged linear sigma models // Phys. Rev. D. — 2022. — Vol. 105, no. 6. — 066008 P. — 2112.06335.
- [50] Belavin Alexander, Belavin Vladimir, Koshevoy Gleb. Periods of the multiple Berglund—Hübsch—Krawitz mirrors // Lett. Math. Phys. — 2021. — Vol. 111, no. 4. — 93 P. — 2012.03320.
- [51] Cox D. A., Katz S. Mirror symmetry and algebraic geometry. — 2000.
- [52] Friedan Daniel, Qiu Zong-an, Shenker Stephen H. Superconformal Invariance in Two-Dimensions and the Tricritical Ising Model // Phys. Lett. B. — 1985. — Vol. 151. — P. 37–43. DOI: [10.1016/0370-2693\(85\)90819-6](https://doi.org/10.1016/0370-2693(85)90819-6).
- [53] Di Vecchia P., Petersen J. L., Yu M. On the Unitary Representations of N=2 Superconformal Theory // Phys. Lett. B. — 1986. — Vol. 172. — P. 211–215. DOI: [10.1016/0370-2693\(86\)90837-3](https://doi.org/10.1016/0370-2693(86)90837-3).
- [54] Boucher Wayne, Friedan Daniel, Kent Adrian. Determinant Formulae and Unitarity for the N=2 Superconformal Algebras in Two-Dimensions or Exact Results on String Compactification // Phys. Lett. B. — 1986. — Vol. 172. — 316 P. DOI: [10.1016/0370-2693\(86\)90260-1](https://doi.org/10.1016/0370-2693(86)90260-1).
- [55] Belavin Alexander, Spodyneiko Lev. N = 2 superconformal algebra in NSR string and Gepner approach to space-time supersymmetry in ten dimensions. — 2015. — 7. — 1507.01911.
- [56] Feigin B. L., Semikhatov A. M., Tipunin I. Yu. Equivalence between chain categories of representations of affine $sl(2)$ and N=2 superconformal algebras // J. Math. Phys. — 1998. — Vol. 39. — P. 3865–3905. — hep-th/9701043.
- [57] Verlinde Erik. Fusion rules and modular transformations in 2D conformal field theory // Nuclear Physics B. — 1988. — Vol. 300. — P. 360–376. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(88\)90603-7](https://doi.org/10.1016/0550-3213(88)90603-7).

- [58] Gepner Doron. On the Spectrum of 2D Conformal Field Theories // Nucl. Phys. B. — 1987. — Vol. 287. — P. 111–130. DOI: [10.1016/0550-3213\(87\)90098-8](https://doi.org/10.1016/0550-3213(87)90098-8).
- [59] Gepner Doron, Qiu Zong-an. Modular Invariant Partition Functions for Parafermionic Field Theories // Nucl. Phys. B. — 1987. — Vol. 285. — 423 P. DOI: [10.1016/0550-3213\(87\)90348-8](https://doi.org/10.1016/0550-3213(87)90348-8).
- [60] Gepner Doron. New Conformal Field Theories Associated with Lie Algebras and their Partition Functions // Nucl. Phys. B. — 1987. — Vol. 290. — P. 10–24. DOI: [10.1016/0550-3213\(87\)90176-3](https://doi.org/10.1016/0550-3213(87)90176-3).
- [61] Cappelli Andrea, Itzykson C., Zuber J. B. The ADE Classification of Minimal and $A_1(1)$ Conformal Invariant Theories // Commun. Math. Phys. — 1987. — Vol. 113. — 1 P. DOI: [10.1007/BF01221394](https://doi.org/10.1007/BF01221394).
- [62] Gannon Terry. The Cappelli-Itzykson-Zuber A-D-E classification // Rev. Math. Phys. — 2000. — Vol. 12. — P. 739–748. — math/9902064.
- [63] Fuchs Jurgen, Klemm Albrecht, Schmidt Michael G. Orbifolds by cyclic permutations in Gepner type superstrings and in the corresponding Calabi-Yau manifolds // Annals Phys. — 1992. — Vol. 214. — P. 221–257. DOI: [10.1016/S0003-4916\(05\)80001-6](https://doi.org/10.1016/S0003-4916(05)80001-6).
- [64] Kazama Yoichi, Suzuki Hisao. New $N=2$ Superconformal Field Theories and Superstring Compactification // Nucl. Phys. B. — 1989. — Vol. 321. — P. 232–268. DOI: [10.1016/0550-3213\(89\)90250-2](https://doi.org/10.1016/0550-3213(89)90250-2).
- [65] Gepner Doron. Space-Time Supersymmetry in Compactified String Theory and Superconformal Models // Nucl. Phys. B. — 1988. — Vol. 296. — 757 P. DOI: [10.1016/0550-3213\(88\)90397-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(88)90397-5).
- [66] Gepner Models With Arbitrary Affine Invariants and the Associated Calabi-yau Spaces / Jurgen Fuchs [et al.] // Phys. Lett. B. — 1989. — Vol. 232. — P. 317–322. DOI: [10.1016/0370-2693\(89\)90750-8](https://doi.org/10.1016/0370-2693(89)90750-8).
- [67] Lynker M., Schimmrigk. R. ADE quantum Calabi-Yau manifolds // Nuclear Physics B. — 1990. — Vol. 339. — P. 121–157.
- [68] Batyrev Victor V., Borisov Lev A. On Calabi-Yau complete intersections in toric varieties. — 1994. — 12. — alg-geom/9412017.

- [69] Arnold Vladimir, Varchenko Alexander, Gusein-Zade Sabir. Singularities of Differentiable Maps. — Birkhäuser Boston, 1985.
- [70] Vafa Cumrun, Warner Nicholas P. Catastrophes and the Classification of Conformal Theories // Phys. Lett. B. — 1989. — Vol. 218. — P. 51–58. DOI: [10.1016/0370-2693\(89\)90473-5](https://doi.org/10.1016/0370-2693(89)90473-5).
- [71] Eremin Boris, Parkhomenko Sergej. Explicit construction of states in orbifolds of products of $N = 2$ Superconformal ADE Minimal models. — 2025. — 6. — arXiv:2506.21992.
- [72] Belavin Alexander, Belavin Vladimir, Parkhomenko Sergey. Explicit construction of $N=2$ SCFT orbifold models. Spectral flow and mutual locality // Nucl. Phys. B. — 2022. — Vol. 982. — 115891 P. — 2206.03472.
- [73] Superconformal Algebras and String Compactification on Manifolds with $SU(N)$ Holonomy / Tohru Eguchi [et al.] // Nucl. Phys. B. — 1989. — Vol. 315. — P. 193–221. DOI: [10.1016/0550-3213\(89\)90454-9](https://doi.org/10.1016/0550-3213(89)90454-9).
- [74] Parkhomenko Sergej. Spectral flow construction of mirror pairs of CY orbifolds // Nucl. Phys. B. — 2022. — Vol. 985. — 116005 P. — 2208.11612.
- [75] Belavin A.A., Parkhomenko S.E. Explicit construction of $N=2$ Superconformal Orbifolds // Theor. Math. Phys. — 2021. — Vol. 209:1.
- [76] Belavin Alexander, Parkhomenko Sergey. Mirror symmetry and new approach to constructing orbifolds of Gepner models // Nucl. Phys. B. — 2024. — Vol. 998. — 116431 P. — 2311.15403.
- [77] Schwimmer A., Seiberg N. Comments on the $N=2$, $N=3$, $N=4$ Superconformal Algebras in Two-Dimensions // Phys. Lett. B. — 1987. — Vol. 184. — P. 191–196. DOI: [10.1016/0370-2693\(87\)90566-1](https://doi.org/10.1016/0370-2693(87)90566-1).
- [78] Resolutions and characters of irreducible representations of the $N=2$ superconformal algebra / B. L. Feigin [et al.] // Nucl. Phys. B. — 1998. — Vol. 536. — P. 617–656. — hep-th/9805179.
- [79] Parkhomenko Sergej. Conformal bootstrap and mirror symmetry of states in Gepner models // JHEP. — 2024. — Vol. 11. — 104 P. — 2407.07555.
- [80] Schimmrigk Rolf. A new construction of a three-generation Calabi-Yau manifold // Physics Letters B. — 1987. — Vol. 193, no. 2. — P. 175–180. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(87\)91218-4](https://doi.org/10.1016/0370-2693(87)91218-4).

- [81] [Complete Intersection Calabi-Yau Manifolds](#) / P. Candelas [et al.] // [Nucl. Phys. B.](#) — 1988. — Vol. 298. — 493 P. DOI: [10.1016/0550-3213\(88\)90352-5](#).
- [82] Gepner Doron. String Theory on Calabi-yau Manifolds: The Three Generations Case. — 1987. — 12. — [hep-th/9301089](#).
- [83] [Lynker Monika, Schimmrigk Rolf. Heterotic String Compactification on \$N = 2\$ Superconformal Theories With \$c = 9\$](#) // [Phys. Lett. B.](#) — 1988. — Vol. 208. — P. 216–220. DOI: [10.1016/0370-2693\(88\)90420-0](#).
- [84] [Belavin Alexander, Parkhomenko Sergej. Conformal bootstrap and Heterotic string Gepner models](#) // [Nucl. Phys. B.](#) — 2024. — Vol. 1006. — 116654 P. — [2406.15144](#).
- [85] Feigin B. L., Semikhatov A. M., Tipunin I. Yu. A Semiinfinite construction of unitary $N=2$ modules. — 2000. — 4. — [hep-th/0004066](#).