

ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ИМ. Л.Д. ЛАНДАУ РАН  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

На правах рукописи  
УДК 538.935

Лункин Алексей Владимирович

**СТРУКТУРА НЕ-ФЕРМИЖИДКОСТНОГО ОТКЛИКА  
В МОДЕЛИ САЧДЕВА-ЙЕ-КИТАЕВА  
С ВОЗМУЩЕНИЕМ**

Специальность 01.04.02 —  
«Теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук  
Фейгельман Михаил Викторович

Черноголовка — 2022

## Оглавление

	Стр.
<b>Введение</b> . . . . .	<b>5</b>
<b>Глава 1. Модель Сачдева-Йе-Китаева</b> . . . . .	<b>14</b>
1.1 Гамильтониан и действие модели SYK . . . . .	14
1.2 Седловые уравнения и их симметрии . . . . .	16
1.3 Функция Грина при нулевой температуре . . . . .	18
1.4 Заключение . . . . .	21
<b>Глава 2. Локализация флуктуаций в модели SYK с</b> <b>    квадратичным возмущением</b> . . . . .	<b>22</b>
2.1 Введение . . . . .	22
2.2 Модель . . . . .	22
2.3 Адиабатическое действие . . . . .	24
2.4 Седловое решение . . . . .	26
2.5 Флуктуации . . . . .	27
2.6 Фазовая диаграмма . . . . .	28
2.7 Заключение . . . . .	28
<b>Глава 3. Скорость поглощения при модуляции амплитуды</b> <b>    возмущения</b> . . . . .	<b>31</b>
3.1 Введение . . . . .	31
3.2 Модель . . . . .	31
3.3 Флуктуационный пропагатор в задаче без накачки . . . . .	34
3.4 Поглощение в линейном режиме . . . . .	36
3.5 Поглощение в присутствии накачки . . . . .	38
3.6 Заключение . . . . .	41
<b>Глава 4. Кинетика в модели SYK</b> . . . . .	<b>43</b>
4.1 Введение . . . . .	43
4.2 Модель . . . . .	44
4.3 Флуктуации около седлового решения модели SYK . . . . .	45

4.3.1	Седловые уравнения . . . . .	46
4.3.2	Седловое многообразие . . . . .	48
4.4	Квадратичное действие для мягких мод . . . . .	50
4.5	Электрический и тепловой транспорт в случае произвольной частоты . . . . .	52
4.5.1	Уравнения непрерывности . . . . .	52
4.5.2	Гидродинамический режим . . . . .	55
4.5.3	Высокочастотный режим . . . . .	56
4.6	Заключение . . . . .	57
<b>Глава 5. Эффект бабочки в модели SYK . . . . .</b>		<b>59</b>
5.1	Введение . . . . .	59
5.2	Модель и основные свойства. . . . .	59
5.3	Поведение ОТОС на больших временах . . . . .	62
5.4	Заключение . . . . .	67
<b>Заключение . . . . .</b>		<b>68</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>		<b>70</b>
<b>Приложение А. Вычисление квадратичного действия и восприимчивости . . . . .</b>		<b>75</b>
A.1	Эффективное действие . . . . .	75
A.2	Разложение $S_2$ в ряд Тейлора . . . . .	76
A.2.1	Частотное представление . . . . .	76
A.2.2	3 порядка разложения по степеням $u(x)$ . . . . .	77
A.2.3	Вычисление $S^{(1)}$ . . . . .	78
A.2.4	Вычисление $S^{(2)}$ . . . . .	79
A.3	Квадратичное действие для мягких мод . . . . .	82
A.3.1	Действие для задачи без накачки . . . . .	83
A.3.2	Действие для задачи с накачкой . . . . .	84
A.4	Вычисление восприимчивости . . . . .	85
A.4.1	Вычисление $\frac{i}{2}\langle[S^{(1)}]^2\rangle$ . . . . .	86
A.4.2	Вычисление $\left\{\frac{i}{2}\langle[S^{(1)}]^2\rangle\right\}_f^{(2)}$ . . . . .	86
A.4.3	Восприимчивость: главный вклад . . . . .	87
A.4.4	Восприимчивость: добавка за счёт накачки . . . . .	88

А.5 Нагревание . . . . .	88
А.6 Модификация седлового действия . . . . .	90

## Введение

Началом теории электронных многочастичных систем можно считать работу Энрико Ферми [1]. В работе Ферми описана термодинамика системы состоящей из большого числа невзаимодействующих частиц, находящихся в ограниченном объёме. При этом частицы удовлетворяли определённой квантовой статистике: никакие две частицы не могли занимать одно и то же квантовое состояния. В последствии эта модель получила название модель "Ферми-газа" т.к. в модели рассматриваются невзаимодействующие частицы а сами частицы получили название "фермионы". Самый известный фермион – электрон. Термодинамические свойства этой модели совпадают с термодинамическими свойствами многих металлов при низкой температуре. Эта модель легла в основу модели Зомерфельда [2], благодаря которой была объяснена проводимость и теплопроводность металлов. Тем не менее, несмотря на всю предсказательную силу, модель Ферми имеет существенный недостаток: в ней не учтено взаимодействие электронов друг с другом, которое неминуемо имеется т.к. электрон заряженная частица.

Следующее существенное продвижение в теории электронных систем было получено в работе Льва Ландау [3]. Он показал, что низко-энергетическое возбуждение системы с отталкивающим взаимодействием, может быть представлено как сумма элементарных возбуждений. Эти элементарные возбуждения обладают всеми свойствами частиц поэтому их называли квазичастицы. Таким образом Ландау показал, что даже в присутствии взаимодействия многие свойства системы похожи на свойства невзаимодействующей системы. Модель Ландау получила название "Ферми-жидкость" т.к. учитывала взаимодействие. Основным свойством ферми-газа, которое позволило Ландау построить теорию ферми-жидкости является наличие большой (больше чем все другие энергетические масштабы задачи) энергии Ферми. Энергия Ферми для ферми-газа определена следующим образом: это изменение энергии основного состояния при добавление к системе ещё одного фермиона.

Притягивающее взаимодействие приводит к появлению фазового перехода в сверхпроводящее состояние, при температуре ниже критической. При температурах выше критического система находится в металлическом состоянии

которое может быть описано теорией ферми-жидкости. Первая модель, описывающая эти эффекты была предложена Бардином, Купером и Шриффером в работе [4]. Для их модели также важно то, что энергия ферми превосходит другие масштабы в задаче.

Теория Ландау и теория Бардина, Купера, Шриффера (БКШ) легли в основу теории металлов. Однако, со временем, были обнаружены сверхпроводники с аномально высокой температурой перехода в сверхпроводящее состояние [5]. Свойства этих веществ выше температуры перехода напоминают металлические, но не могут быть описаны в рамках теории ферми-жидкости. Например, сопротивление этих веществ линейной зависит от температуры, в то время как для ферми-жидкости эта зависимость квадратичная. При этом такое поведение не может быть объяснено взаимодействием с фононами.

К сожалению, полноценной модели, предсказывающей свойства таких веществ, пока не существует. Очевидно, лишь то, что взаимодействие должно играть решающую роль в такой модели. Однако, далеко не все модели со взаимодействием допускают аналитическое решение. Одной из моделей с сильным взаимодействием и с возможностью аналитического описания является модель Сачдева-Йе-Китаева (SYK).

Модель SYK была предложена Алексеем Китаевым в 2015г. на устном докладе, [6] работа появилась несколько позже. В модели рассматривается нульмерный объект (квантовая точка), в которой существует  $N \gg 1$  врожденных одночастичных уровней, которые могут занимать майорановские фермионы. Таким образом взаимодействие полностью определяет динамику системы. В этой модели матричные элементы взаимодействия представляются случайными независимыми гауссовыми величинами с нулевым средним и масштабом дисперсии  $J$ . При нулевой температуре, можно выделить два важных интервала времён: 1) короткие времена  $1 \ll J\tau \ll N$  2) и длинные  $N \ll J\tau$ . На коротких временах, для описания модели можно воспользоваться средне-полевым подходом. На длинных временах, флуктуации становятся важны. Не-ферми-жидкостное поведение модели выражено в поведении функции Грина. Которая, в случае коротких времён ведёт себя как  $G(\tau) \sim \tau^{-1/2}$ ; в случае длинных  $G(\tau) \sim \tau^{-3/2}$  (см. [7]).

Естественным шагом, с точки зрения исследования систем с сильным взаимодействием, выглядит рассмотрение модели с возмущением, которое бы приво-

дило к снятию вырождения одночастичных состояний. Ранее мы рассматривали такое возмущение с характерным энергетическим масштабом  $\Gamma$ . Нами было показано [8] что при  $L\Gamma \ll J$  свойства модели не изменяются. При увеличении силы возмущения происходит фазовый переход и флуктуационные эффекты сильно подавляются, из-за этого на временах, таких что  $\Gamma^2\tau \gg J$ , функция Грина демонстрирует поведения свойственное ферми-жидкости:  $G(\tau) \sim \tau^{-1}$  (см. [8]). Возникает вопрос, можем ли мы полностью пренебречь флуктуационными эффектами в силу их малости? Ответ на этот вопрос получен в данной работе.

Другой аспект, с точки зрения которого модель SYK интересна для изучения, являются её хаотичные свойства. Хаотичные свойства классической системы проявляются в неустойчивости траектории движения по отношению к малым изменениям начальных условий. Чувствительность системы к начальным условиям была отмечена А. Пуанкаре при изучении неустойчивости в задаче трёх тел. Позднее эта задача изучалась А. Ляпуновым. Термин "Эффект бабочки" был предложен Э. Лоренцом, который обнаружил подобную неустойчивость, при моделировании атмосферных явлений. Эффект выражен в том, что расстояние между изначально очень близкими траекториями системы со временем растёт экспоненциально т.е.

$$\{q(t), p(0)\} = \frac{\partial q(t)}{\partial q(0)} \sim e^{\lambda_L t}. \quad (1)$$

Выше  $\{\dots, \dots\}$ -скобка Пуассона для данной системы,  $p$  и  $q$  канонически сопряжённые импульс и координата соответственно. Показатель  $\lambda_L$  называют экспонентой Ляпунова. Эта формула также может быть обобщена на случай квантовых систем. В таком случае экспонента Ляпунова может быть получена, по аналогии, из коррелятора следующего вид:

$$\langle [q(t), p(0)]^2 \rangle \sim e^{\lambda_L t}. \quad (2)$$

Из формулы (2) следует, что для вычисления экспоненты Ляпунова нам необходимо вычислять корреляторы аномально упорядоченные во времени. В английской литературе их называют out-of-time ordered correlator (ОТОС). Связь подобных корреляторов с хаотичным поведением системы была впервые отмечена в работе [9]. В общем случае мы можем рассматривать не только сопряжённые

пары операторов но и корреляторы вида:

$$F(t_1, t_2, t_3, t_4) = \langle X_1(t_1)X_2(t_2)X_3(t_3)X_4(t_4) \rangle, \quad (3)$$

где  $X_i$ -произвольные операторы. Мы будем полагать, что  $t_1 \approx t_3 > t_2 \approx t_4$ . Изучение таких корреляторов позволяет характеризовать хаотичные свойства системы а также понять распространение информации в квантовой системе [10; 11].

Для экспериментального изучения ОТОС нам нужно "переместиться" в прошлое, создать возмущение и посмотреть к чему оно приведёт по сравнению с тем, что мы видели до этого. Подобный опыт, для классической системы, был описан в рассказе Р. Брэдбери "И грянул гром", главные герои которого, отправившись в далёкое прошлое и убив там бабочку, увидели разительное отличие в их мире по возвращению назад. Оказывается, что подобный "эксперимент" может быть реализован. Современные управляемые квантовые системы, имеющие большое число степеней свободы, позволяют изучать подобные корреляторы. Полностью контролируя систему, мы можем изменить знак Гамильтониана, определяющего эволюцию. После такой замены, система эффективно начнёт двигаться назад во времени. Подобный эксперимент был поставлен группой Google Quantum Ai [12].

Для достаточно большого класса систем указанный коррелятор (3) обладает универсальным поведением. А именно:

$$\frac{F(t_1, t_2, t_3, t_4)}{\langle X_1(t_1)X_3(t_3) \rangle \langle X_2(t_2)X_4(t_4) \rangle} \approx 1 - \frac{1}{C} e^{\lambda_L(t_1 - t_2)}. \quad (4)$$

Где как и раньше параметр  $\lambda_L$  – экспонента Ляпунова данной квантовой системы. При этом  $C \gg 1$ , обычно это условие связано с возможностью применения квазиклассического описания. Для таких систем можно получить общую оценку на экспоненту Ляпунова (далее  $\hbar = 1$ ):

$$\lambda_L \leq 2\pi T. \quad (5)$$

Это оценка была получена в работе [13]. Одним из примеров, для которой эта оценка насыщается, является модель SYK.

Следующую вопрос, который естественно задать: как ведёт себя этот коррелятор в случае  $t_1 - t_2 \sim \lambda_L^{-1} \ln C$ ? Время  $t_E = \lambda_L^{-1} \ln C$  называют временем Эренфеста. В случае модели SYK ответ на этот вопрос был получен в работе [14] в которой было показано, что при  $t - t_E \gg \lambda_L^{-1}$  коррелятор  $F$  стремится к 0. В работе [15] было рассмотрено поведение ОТОС для нульмерных фермионных систем на временах больших чем время Эренфеста. В работе было показано, что такой коррелятор может быть вычислен универсальным способом, исходя из поведения коррелятора на малых временах (4) и парных корреляционных функций.

В общем случае для нульмерных систем мы можем отметить, что на временах  $t \ll t_E$ , коррелятор изменяется экспоненциально, но этот рост подавлен фактором  $C^{-1}$ , таким образом, несмотря на быстрый рост, коррелятор слабо отличается от единицы. На временах  $t - t_E \gg \lambda_L^{-1}$  значение коррелятора стремится к нулю.

Что следует ожидать для системы с ненулевой пространственной размерностью? Предположим, что операторы  $X_2$  и  $X_4$  действуют в точке  $\mathbf{r}_2$ . Точку  $\mathbf{r}_1$  и время действия операторов  $X_1$  и  $X_3$  мы будем менять, вычисляя при этом ОТОС. В результате, при фиксированной разнице времени  $t_1 - t_2$  мы можем разделить систему на две области: 1) область развивающегося хаоса с  $F = const$ ; 2) область развитого хаоса с  $F \rightarrow 0$ . В частности, точки на достаточно большом удалении относятся к области 1. Область 2 появляется только при  $t_1 - t_2 \geq t_E$ . Эти области разделяет граница (фронт), которая со временем движется с постоянной скоростью, что приводит к увеличению области 2. Подобный сценарий распространения информации для систем с локальным гамильтонианом был описан в [10], при этом наличие подобного фронта встречалось и в других моделях, например [16; 17]. Скорость этого движения, вообще говоря, зависит от направления т.к. информация о возмущении в системе распространяется баллистически.

В данной работе мы исследуем поведение системы, состоящей из гранул, динамика в каждой из них описывается гамильтонианом модели SYK; при этом существует туннелирование между гранулами. Мы покажем что сценарий, упомянутый выше, применим для описания поведения ОТОС в нашей системе. Нами также впервые вычислена скорость распространения фронта в обобщении

модели SYK. Предложенный способ вычисления может быть также применён и к другим моделям основанным на модели SYK.

**Структура диссертационной работы** Глава 1 посвящена введению в модель SYK. В этой главе представлено вычисление функции Грина на седловом уровне и с учётом сильных флуктуаций. В дальнейшем флуктуации будут играть центральную роль в этой работе.

В главе 2 введена модель с квадратичным возмущением и описана его роль в подавлении флуктуаций. Это подавление происходит за счёт появления локализованных уровней в эффективном гамильтониане флуктуаций. Главы 1 и 2 служат введением, описанные в них результаты не выносятся на защиту.

В главе 3 описано влияние флуктуаций на поглощение энергии системы при модулировании амплитуды квадратичного возмущения. Восприимчивость имеет резонансный вид, с частотой резонанса равной переходу между уровнями в эффективном гамильтониане флуктуаций. Нами также исследуется поглощение системы при наличии накачки на резонансной частоте.

В главе 4 мы обобщаем модель на случай системы с ненулевой размерностью и исследуем кинетические коэффициенты. Нами были найдены проводимость и теплопроводность системы как функция импульса и частоты. Существует два режима поведения системы. При низких частотах, много меньших температуры, в системе наблюдается локальное равновесие и транспорт системы диффузный. В случае больших частот, превосходящих температуру, в системе могут существовать возбуждения с медленным затуханием. Одно из таких возбуждений – волны плотности с почти линейным спектром. Такие волны напоминают нулевой звук в ферми-жидкости, однако имеют другую природу.

В главе 5 мы исследуем хаотичные свойства обобщения модели SYK. Мы показываем, что информация о приложенном возмущении распространяется баллистически в системе и вычисляем скорость этого распространения.

**Целью** данной работы является изучения свойств не-ферми-жидкостной модели связанных с диссипацией, кинетикой и квантовым хаосом.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Построить действие для мягких мод для задачи с возмущением, амплитуда которого зависит от времени.

2. Исходя из полученного действия определить пропагатор флуктуаций и различные функции отклика.
3. Исходя из выведенного действия, найти восприимчивость системы на модуляцию гамильтониана.
4. Для случая моделей с ненулевой размерностью построить уравнения непрерывности и найти выражение для токов, вызванных источниками.
5. Изучить поведение восприимчивости в различных режимах.
6. Изучить поведение аномально упорядоченной корреляционной функции, определяющей хаотичные свойства изучаемой модели.

#### **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Вычислена восприимчивость в модели Сачдева-Йе-Китаева с возмущением при модуляции амплитуды квадратичного возмущения. Показано, что мнимая часть восприимчивости имеет резонансное поведение с положением резонанса равной частоте перехода между уровнями эффективного гамильтониана флуктуаций.
2. Получены транспортные коэффициенты для обобщения модели Сачдева-Йе-Китаева на случай системы с ненулевой размерностью. Изучены свойства теплопроводности, проводимости и коэффициента Зеебека.
3. Изучено поведение аномально упорядоченного коррелятора, в том числе на временах больших чем время Эренфеста, для обобщения модели Сачдева-Йе-Китаева на случай системы с ненулевой размерностью. Исходя из свойств коррелятора вычислена скорость распространения информации в системе о приложенном возмущении.

#### **Научная новизна:**

1. Впервые получено выражение для поглощения энергии в модели SYK с квадратичным возмущением при модуляции амплитуды возмущения.
2. Впервые вычислены кинетические коэффициенты как функции произвольного импульса и частоты в обобщении модели SYK на случай систем с ненулевой размерности. Обнаружены существование медленно затухающих возбуждений с большой энергией.
3. Впервые исследовано поведение аномально-упорядоченного во времени коррелятора в обобщении модели SYK на случай систем с ненулевой размерностью. А также впервые вычислена скорость распространения информации в системе.

**Актуальность исследования, и его научная и практическая значимость.**

Модель Сачдева-Йе-Китаева представляет живой интерес с точки зрения изучения свойств не-ферми-жидкостной системы, а также квантового хаоса. Обе затронутые темы активно изучаются в научном сообществе в течение последних лет; поэтому изучения роли флуктуаций в этих процессах являются актуальной и интересной задачей.

Изучение роли флуктуаций мотивировано их центральным местом в описании не-ферми-жидкостных явления в модели SYK.

Изучение хаотичных свойств в обобщении модели SYK мотивировано тем, что сама по себе модель SYK является исключительной в этом вопросе: она является максимально хаотичной. С другой стороны, современные технологии позволяют изучать свойства распространения информации на искусственных квантовых системах.

**Степень достоверности и апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на:

- Конференция *Landau Days 2021*, Черногоровка, Россия, 28 июня – 01 июля 2021 г.; доклад «Non-equilibrium Sachdev-Ye-Kitaev model with quadratic perturbations»

Кроме этого, все результаты докладывались на научных семинарах учёного совета ИТФ им. Л.Д. Ландау РАН.

**Личный вклад.** Все результаты, приведённые в данной диссертационной работе, получены лично автором или при его непосредственном участии.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в следующих работах:

1. *Lunkin A., Feigel'man M.* Non-equilibrium Sachdev-Ye-Kitaev model with quadratic perturbation // *SciPost Physics*. — 2022. — янв. — т. 12, № 1. — с. 031. — DOI: [10.21468/SciPostPhys.12.1.031](https://doi.org/10.21468/SciPostPhys.12.1.031).
2. *Лункин А.* Эффект бабочки в системе квантовых точек в модели Сачдева-Йе-Китаева // *Письма в ЖЭТФ*. — 2022. — февр. — т. 115, № 5. — с. 328. — DOI: [10.31857/S123456782205010X](https://doi.org/10.31857/S123456782205010X).
3. *Lunkin A., Feigel'man M.* High-frequency transport and zero-sound in an array of SYK quantum dots // *arXiv:2112.11500*. — 2021.

Работы изданы в 2 печатных изданиях, 2 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и приложения. Полный объём диссертации составляет 93 страницы с 4 рисунками. Список литературы содержит 39 наименований.

## Глава 1. Модель Сачдева-Йе-Китаева

В этой главе будут изложены основные свойства модели SYK. Мы начнём с рассмотрения Гамильтониана и седловых уравнений. Затем покажем, что из-за асимптотической симметрии, в задаче присутствует сильно-флуктуирующая мода, аналитическому описанию которой посвящена последняя часть этой главы. Все результаты этой части взяты из работ: [6; 7; 18].

### 1.1 Гамильтониан и действие модели SYK

Гамильтониан модели SYK имеет следующий вид:

$$H = \frac{1}{4!} \sum_{ijkl=0}^N J_{ijkl} \chi_i \chi_j \chi_k \chi_l. \quad (1.1)$$

Здесь  $\chi_i$  - оператор майорановского фермиона ( $i \in (1, \dots, N)$  и  $N \gg 1$ ). Оператор задан следующим коммутационным соотношением:

$$\{\chi_i, \chi_j\} = 1. \quad (1.2)$$

Существует обобщение модели SYK на случай обычных фермионов, детальный обзор её свойств дан в работе [19]. Однако, полученные нами результаты качественно применимы к обеим моделям.

Амплитуды взаимодействия  $J_{ijkl}$  являются независимыми гауссовыми величинами. Их среднее равно нулю, а дисперсия задана соотношением:

$$\overline{J_{ijkl}^2} = \frac{6J^2}{N^3}. \quad (1.3)$$

Как тензоры, величины  $J_{\dots}$  антисимметричны по своим индексам.

Мы начнём наше изучение этой модели с вычисления функции Грина в мнимом времени. Для этого нам потребуется написать действие в следующем

виде:

$$S_{SYK} = \int_0^\beta d\tau \left( \frac{1}{2} \sum_i \chi_i(\tau) \partial_\tau \chi_i(\tau) + H \right). \quad (1.4)$$

Используя это действие, мы можем выполнить усреднение по беспорядку. Стоит отметить, что вместо усреднение свободной энергии, соответствующей данному действию мы выполним усреднение стат.суммы. Разница между этими двумя средними проявляется лишь при температурах порядка температуры стекольного перехода, которая экспоненциально мала по параметру  $N$ , см. ([6]). Более того, не известно имеется ли вообще в данной модели переход в стекольное состояние, см. [20]. После усреднения, действие имеет вид:

$$S_{SYK} = \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_0 \left( \frac{1}{2} \sum_i \chi_i(\tau) \sigma(\tau_1, \tau_0) \chi_i(\tau_0) - \frac{J^2}{8N^3} \left[ \sum_i \chi_i(\tau_1) \chi_i(\tau_0) \right]^4 \right). \quad (1.5)$$

Здесь мы также ввели обозначение:  $\sigma(\tau_1, \tau_0) \equiv \delta'(\tau_1 - \tau_0)$ . Мы введём поле, определённое как:

$$G(\tau_1, \tau_0) = -\frac{1}{N} \sum_l \chi_l(\tau_1) \chi_l(\tau_0) \quad (1.6)$$

Далее мы будем работать с этим полем, для этого мы сделаем его свободным, введя в действие множитель Лагранжа:  $\Sigma(\tau_1, \tau_0)$ . Используя новые поля, запишем действие для задачи как:

$$S_{SYK} = \frac{N}{2} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_0 \left( -\frac{J^2}{4} G^4(\tau_1, \tau_0) + \Sigma(\tau_1, \tau_0) \sum_l \chi_l(\tau_1) \chi_l(\tau_0) + \{-\sigma(\tau_1, \tau_0) + \Sigma(\tau_1, \tau_0)\} G(\tau_1, \tau_0) \right). \quad (1.7)$$

Теперь действие стало квадратичным относительно полей  $\chi$  и мы можем по ним проинтегрировать, получив действие записанное в терминах полей  $G$  и  $\Sigma$ .

$$S_{SYK} = \frac{N}{2} \text{tr} \ln(-\hat{\Sigma}) - \frac{N}{2} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_0 \left( \frac{J^2}{4} G^4(\tau_1, \tau_0) - \{-\sigma(\tau_1, \tau_0) + \Sigma(\tau_1, \tau_0)\} G(\tau_1, \tau_0) \right). \quad (1.8)$$

Это действие пропорционально большому параметру  $N$ , что даёт нам возможность воспользоваться методом среднего поля.

## 1.2 Седловые уравнения и их симметрии

Для удобства изложения, перейдём к безразмерной переменной  $\theta$  определённой как:

$$\theta \equiv \frac{2\pi\tau}{\beta}. \quad (1.9)$$

Мы также пере-нормируем поля следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma(\tau_1, \tau_0) &\equiv J^2 \left( \frac{2\pi}{\beta J} \right)^{3/2} \sigma(\theta_1, \theta_0) & \Sigma(\tau_1, \tau_0) &\equiv J^2 \left( \frac{2\pi}{\beta J} \right)^{3/2} \Sigma(\theta_1, \theta_0) \\ G(\tau_1, \tau_0) &\equiv \left( \frac{2\pi}{\beta J} \right)^{1/2} G(\theta_1, \theta_0) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Используя эти поля, мы можем переписать действие (1.8) в виде:

$$\begin{aligned} S_{SYK} &= \frac{N}{2} \text{tr} \ln(-\hat{\Sigma}) + \\ &- \frac{N}{2} \int_0^{2\pi} d\theta_1 d\theta_0 \left( \frac{1}{q} G^q(\theta_1, \theta_0) - \{-\sigma(\theta_1, \theta_0) + \Sigma(\theta_1, \theta_0)\} G(\tau_1, \tau_0) \right). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Мы ввели параметр  $q$ , который в нашем случае принимает значение  $q = 4$ , однако, иногда, этот параметр полезно использовать в общем виде, в частности для размерной регуляризации.

Как было сказано выше, в силу условия  $N \gg 1$  мы можем рассмотреть седловые уравнения, которые являются результатом вариации действия по полям  $\Sigma$  и  $G$  соответственно:

$$\begin{aligned} \int d\theta \Sigma(\theta_1, \theta) G(\theta, \theta_0) &= -\delta(\theta_1 - \theta_0) \\ \Sigma(\theta_1, \theta_0) &= G^{q-1}(\theta_1, \theta_0) + \sigma(\theta_1, \theta_0). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Эти уравнения точно решить нельзя. Однако, они существенно упрощаются в пределе  $\beta J \gg 1$ . В этом случае мы можем пренебречь членом с  $\sigma(\theta_1, \theta_0)$  для достаточно большой разнице "времен"  $\theta_1 - \theta_0 \gg \frac{1}{\beta J}$ . В результате, в низкотемпературном пределе, седловые уравнения принимают вид:

$$\int d\theta \Sigma(\theta_1, \theta) G(\theta, \theta_0) = -\delta(\theta_1 - \theta_0) \quad \Sigma(\theta_1, \theta_0) = G^{q-1}(\theta_1, \theta_0). \quad (1.13)$$

Эти уравнения обладают огромной группой симметрии. Каждое преобразование задано произвольной монотонной периодической функцией  $\varphi(\theta)$  ( $\varphi(\theta) = \varphi(\theta + 2\pi)$ ). Используя произвольное решение  $G(\theta_1, \theta_0)$  этих уравнений мы можем "подействовать" преобразованием симметрии на него по следующему правилу, для получения нового решения:

$$G(\theta_1, \theta_2) \mapsto [\varphi'(\theta_1)\varphi'(\theta_0)]^\Delta G(\varphi(\theta_1), \varphi(\theta_2)). \quad (1.14)$$

Тут мы ввели обозначение  $\Delta = \frac{1}{q}$ .

В силу независимости Гамильтониан от времени, из всех решений седловых уравнений, мы должны выбрать трансляционно-инвариантное по времени. Это решение имеет вид:

$$G_s(\theta_1, \theta_0) = -b^\Delta |\theta_{10}^2|^{-\Delta} \text{sgn}(\theta_{10}) \quad (1.15)$$

Где мы ввели обозначения:  $\theta_{10} = 2 \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_0}{2}\right)$  и  $b = \frac{(1-2\Delta) \tan(\pi\Delta)}{2\pi}$ . Группа симметрий этого решения задана следующими дробно-линейными преобразованиями:

$$e^{i\varphi(\theta)} \equiv \frac{ae^{i\theta} + b}{\bar{b}e^{i\theta} + \bar{a}} \quad |a|^2 - |b|^2 = 1 \quad (1.16)$$

Как мы видим, эта группа гораздо меньше группы симметрий седлового уравнения. (1.13).

Обычно такое поведение свидетельствует о наличии мягкой (Голдстоуновской) моды. Однако, наши уравнения являются приближёнными, даже при  $w = 0$  мы пренебрегли членом  $\sigma$  а значит симметрия которую мы обнаружили является асимптотической, подобное встречается при работе с  $\sigma$ -моделями [21]. В нашем случае, это означает что вместо взятия всего функционального интеграла по полям  $G$  и  $\Sigma$  нам требуется проинтегрировать только по полям,

которые являются решением седловых уравнений (1.13). Многообразие таких полей можно задать следующим образом: все такие поля получены с помощью преобразования симметрии (1.14), которое применили к седловому решению (1.15). Переход от интегрирования по всем полям к интегрированию по полям лежащим на определённом многообразии не точен, он верен в силу того, что флуктуации в направлении перпендикулярному многообразию подавлены в  $\beta J$  раз [6]. Действие на этом многообразии имеет вид:

$$S_{soft} = -\frac{\alpha_S N}{J} \int_0^\beta Sch \{ e^{i\varphi(\tau)}, \tau \} d\tau \quad Sch \{ f(\tau), \tau \} = \left( \frac{f''}{f'} \right)' - \frac{1}{2} \left( \frac{f''}{f'} \right)^2 \quad (1.17)$$

Здесь параметр  $\alpha_S$  может быть найден численно. Это действие было получено в работах: [6; 18].

### 1.3 Функция Грина при нулевой температуре

В этой секции мы рассмотрим случай, в котором температура нашей системы равна нулю. Впервые, метод, изложенный далее был опубликован в работе [7].

Для начала отметим, что теперь мы имеем дело с репараметризациями не окружности а прямой. В таком случае действие примет вид:

$$S_{soft} = -\frac{\alpha_S N}{J} \int_{-\infty}^{\infty} Sch \{ f(\tau), \tau \} d\tau \quad (1.18)$$

Соответственно изменится и вид поля  $G$ :

$$G_{\tau_1, \tau_0}[f(\tau)] = -b^\Delta \left[ \frac{f'(\tau_1)f'(\tau_0)}{J^2 |f(\tau_1) - f(\tau_0)|^2} \right]^\Delta \quad (1.19)$$

В силу монотонности репараметризации удобно работать с полем  $\phi$ , определённым как:

$$f(\tau)' \equiv e^{\phi(\tau)} \quad (1.20)$$

Нас интересует поведение функции Грина фермионов, которая может быть получена как среднее от поля  $G$ . Таким образом, нас будут интересовать средние вида:

$$\langle (G_{\tau_1, \tau_0}[f(\tau)])^n \rangle = \left( -\frac{b^\Delta}{J^{2\Delta}} \right)^n \int \mathcal{D}\phi \left[ \frac{e^{\phi(\tau_1)} e^{\phi(\tau_0)}}{\left| \int_{\tau_0}^{\tau_1} e^{\phi(\tau)} d\tau \right|^2} \right]^{n\Delta} \times \exp \left\{ -\frac{M}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\phi')^2 d\tau \right\} \quad (1.21)$$

Мы также ввели параметр  $M \equiv \alpha_S N/J$ .

Мы можем вычислить этот функциональный интеграл точно, используя аналогию между ним и задачей одномерной квантовой механики. Однако, для начала мы должны избавиться от калибровочной инвариантности выраженной в симметрии вида:  $\phi \mapsto \phi + a$ . Мы можем зафиксировать калибровку, выбрав  $\phi(\tau_0) = 0$ . Нам также понадобится вспомогательный интеграл вида:

$$a^{-n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dx x^{n-1} e^{-ax}. \quad (1.22)$$

Здесь  $\Gamma(n)$  - гамма функция Эйлера. Используя этот интеграл, мы можем записать функциональный интеграл в виде:

$$\langle (G_{\tau_1, \tau_0}[f(\tau)])^n \rangle = \left( -\frac{b^\Delta}{J^{2\Delta}} \right)^n \int_0^\infty \frac{dx}{\Gamma(2n\Delta)} x^{2n\Delta-1} \times \int \mathcal{D}\phi e^{n\Delta\phi(\tau_1)} \exp \left\{ -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{M}{2} (\phi')^2 d\tau - x \int_{\tau_0}^{\tau_1} e^{\phi(\tau)} d\tau \right\} \quad (1.23)$$

Функциональный интеграл выше связан с квантово-механической задачей, гамильтониан которой имеет вид:

$$\hat{H}_x = -\frac{\partial_\phi^2}{2M} + x e^\phi \quad (1.24)$$

Используя этот гамильтониан мы можем записать наш функциональный интеграл как:

$$\langle (G_{\tau_1, \tau_0}[f(\tau)])^n \rangle = \left( -\frac{b^\Delta}{J^{2\Delta}} \right)^n \int_0^\infty \frac{dx}{\Gamma(2n\Delta)} x^{2n\Delta-1} \langle 0,0 | e^{q\Delta\hat{\phi}} \hat{U}_x(\tau_1, \tau_0) | 0 \rangle. \quad (1.25)$$

Здесь  $|0\rangle = \delta(\phi)$ . Оператор эволюции может быть записан как:

$$\hat{U}_x(\tau_1, \tau_0) = \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi} |p, x\rangle \langle p, x| e^{-\frac{p^2}{2M}(\tau_1 - \tau_0)} \quad (1.26)$$

Тут  $|p, x\rangle$ - волновая функция этого гамильтониана. В координатном представлении  $(\phi)$  она имеет вид:

$$|p, x\rangle = \sqrt{\frac{2p \sinh(2p\pi)}{\pi}} K_{2ip}(\sqrt{8xM}e^\phi) = \sqrt{\frac{2p \sinh(2p\pi)}{\pi}} \int_{-i\infty+0}^{i\infty+0} \frac{ds}{2\pi i} \Gamma(s - ip) \Gamma(s + ip) [2xM e^\phi]^{-s}. \quad (1.27)$$

Мы использовали преобразование Меллина, чтобы написать последнее равенство.

Спектр этого гамильтониана непрерывный и это является основной причиной флуктуаций.

После всех преобразований мы получаем следующее выражение для среднего:

$$\langle (G_{\tau_1, \tau_0}[f(\tau)])^n \rangle = \left( -\frac{b^\Delta}{J^{2\Delta}} \right)^n \int_0^\infty dp \frac{p \sinh(2p\pi)}{2\pi^2} \times \exp \left\{ -\frac{p^2}{2M}(\tau_1 - \tau_0) \right\} \Gamma^2(n\Delta + ip) \Gamma^2(n\Delta - ip) \quad (1.28)$$

Мы видим, что когда разница времён мала интеграл набирается на больших  $p$ . Такой режим соответствует седловому решению. При больших временах, интеграл набирается на малых  $p$  и функция Грина меняет свою асимптотику. В этом случае среднее имеет вид:

$$\langle (G_{\tau_1, \tau_0}[f(\tau)])^n \rangle \approx \left( -\frac{b^\Delta}{J^{2\Delta}} \right)^n \Gamma^4(n\Delta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\tau}{M} \right)^{-3/2} \quad (1.29)$$

Как мы видим, в режиме сильных флуктуаций все такие средние убывают как:  $\tau^{-3/2}$ , что свидетельствует о сильных флуктуациях так как степень убывания не зависит от  $n$ . При этом на коротких временах  $\langle (G_{\tau_1, \tau_0}[f(\tau)])^n \rangle \approx \langle (G_{\tau_1, \tau_0}[f(\tau)]) \rangle^n$ , что говорит о применимости седлового приближения и малых флуктуациях.

## 1.4 Заключение

В качестве краткого заключения отметим, что модель *SYK* демонстрирует не-ферми жидкостное поведение. На коротких временах оно определяется своим средне-полевым значением а на достаточно больших временах флуктуациями. В следующей главе мы проанализируем устойчивость этих свойств по отношению к возмущению, квадратичного по фермионам.

## Глава 2. Локализация флуктуаций в модели SYK с квадратичным возмущением

### 2.1 Введение

В этой главе мы рассматриваем модель SYK с квадратичным возмущением. Результат данной главы является расширением работ [22–24] в двух важных направлениях.

Во-первых, мы предлагаем метод для анализа этой модели за рамками теории возмущений и ренорм-группового подхода. Во-вторых, наш новый метод применим при конечных температурах. Мы покажем, что при увеличении силы квадратичного взаимодействия в системе происходит фазовый переход, приводящий к подавлению флуктуационных эффектов. В результате, увеличивается область применимости седловых решений, что приводит к ферми-жидкостному поведению при достаточно больших временах.

### 2.2 Модель

Гамильтониан нашей модели имеет следующий вид:

$$H = \frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,l} J_{ijkl} \chi_i \chi_j \chi_k \chi_l + \frac{i}{2!} \sum \Gamma_{ij} \chi_i \chi_j. \quad (2.1)$$

Первая часть этого гамильтониана - хорошо знакомый нам гамильтониан модели SYK. Вторая часть этого гамильтониана – квадратичное возмущение, приводит к снятию вырождения одночастичного спектра. Здесь тензоры  $(\Gamma_{ij})$  антисимметричный. Его компоненты являются случайными, независимыми гауссовыми величинами с нулевым средним и дисперсией имеющей вид:

$$\overline{\Gamma_{ij}^2} = \frac{\Gamma^2}{N} \quad (2.2)$$

Как и раньше, при усреднении по беспорядку, мы будем работать в реплично-диагональном приближении. Мы снова рассматриваем проблему используя мнимое время. Вводя поле  $G$  как в (1.6) и соответствующий множитель Лагранжа  $\Sigma(\tau, \tau')$ , выполняя усреднение по беспорядку и интегрирование по майорановским полям, мы приходим к действию вида:

$$\begin{aligned} \frac{2}{N}S = & \text{tr} \ln(-\partial_\tau - \Sigma) + \int \left[ \Sigma(\tau, \tau') G(\tau, \tau') - \frac{J^2}{4} G(\tau, \tau')^4 \right] d\tau d\tau' \\ & - \frac{\Gamma^2}{2} \int G(\tau, \tau')^2 d\tau d\tau'. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Седловые уравнения для этого действия имеют вид:

$$\begin{aligned} \int d\tau \Sigma(\tau_1, \tau) G(\tau, \tau_2) &= \delta(\tau_1 - \tau_2) \\ \Sigma(\tau_1, \tau_2) &= J^2 G^3(\tau_1, \tau_2) + \Gamma^2 G(\tau_1, \tau_2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Полагая  $\Gamma \ll J$ , мы можем пренебречь членом с  $\Gamma$  в этих уравнениях и получить функцию Грина модели SYK. Однако, при достаточно больших временах, в силу убывания функции Грина, член с  $\Gamma$  становится доминирующим. Мы можем наблюдать этот эффект при достаточно низких температурах  $T \sim T_{FL} = \frac{\Gamma^2}{J}$ . Это рассуждение не учитывает влияние мягких мод, далее мы займёмся их учётом.

Пренебрегая членом с  $\Gamma$  в действии (2.3) мы снова получаем действие модели SYK, обладающее асимптотической симметрией приводящей к наличию мягкой моды. В результате мы можем ограничить наше функциональное интегрирование на поля принадлежащие седловому многообразию. В результате действие нашей модели примет вид:

$$S[\varphi] = -\frac{\gamma}{J} \int_0^\beta \text{Sch}(e^{i\varphi(\tau)}, \tau) d\tau - \frac{N\Gamma^2}{4} \int G_\varphi(\tau_1, \tau_2)^2 d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.5)$$

Где  $G_\varphi(\tau_1, \tau_2)$  результат применения симметрии (1.14) к седловому решению (1.15),  $\gamma = \alpha_S N$ .

### 2.3 Адиабатическое действие

Для удобства мы пере-масштабируем параметры задачи следующим образом:

$$\beta \equiv \frac{J\beta}{\alpha_S N}, \quad g = \frac{b^{2\Delta} N \Gamma^2}{2 J^2} (\alpha_S N)^{2-4\Delta} = \frac{\alpha_S N^2 \Gamma^2}{4\sqrt{\pi} J^2}. \quad (2.6)$$

В этих параметрах действие (2.5) будет записано как:

$$S[\varphi] = - \int_0^\beta Sch(e^{i\varphi(\tau)}, \tau) d\tau - \frac{g}{2} \int \left( \frac{\varphi'_1 \varphi'_2}{\varphi_{12}^2} \right)^{1/2} d\tau_1 d\tau_2. \quad (2.7)$$

Теперь мы сведём взятие этого функционального интеграла к квантово-механической задаче. Для этого мы введём два новых независимых поля  $\xi(\tau) = -\ln(\varphi'(\tau))$  и  $\Xi(\tau) = [\varphi'(\tau)]^{1/2}$ , а также соответствующие Лагранжевы множители:  $\lambda(\tau)$  и  $\Lambda(\tau)$ . В результате действие примет вид:

$$S[\varphi, \xi, \lambda, \Xi, \Lambda] = \int_0^\beta \left( \frac{\xi'^2}{2} - \lambda(\varphi' - e^{-\xi}) - \frac{1}{2} e^{-2\xi} - \Lambda(\Xi - e^{-\xi/2}) \right) d\tau - \frac{g}{2} \iint \frac{\Xi(\tau_1) \Xi(\tau_2)}{|\varphi_{12}|} d\tau_1 d\tau_2. \quad (2.8)$$

Мы предполагаем, что  $\beta \gg 1$  поэтому член  $\frac{1}{2} e^{-2\xi} \sim \frac{1}{\beta^2}$  мал и мы им пренебрежём при дальнейшем рассмотрении.

Мы рассмотрим действие (2.8) используя адиабатическое приближение, полагая переменную  $\xi$  быстрой. Соответственно, вычисляя функциональный интеграл от  $e^{-S}$  по  $\xi$  мы будем предполагать, что  $\varphi'(\tau)$ ,  $\lambda(\tau)$ ,  $\Xi(\tau)$ , и  $\Lambda(\tau)$  - медленные на некотором масштабе  $\tau_*$ , который будет определён далее. В результате после интегрирования мы получим выражение в виде  $e^{-S_{eff}}$ , где

$$S_{eff}[\varphi, \lambda, \Xi, \Lambda] = \int_0^\beta (E_0(\lambda, \Lambda) - \lambda \varphi' - \Lambda \Xi) d\tau - \frac{g}{2} \iint |\varphi_{12}|^{-1} \Xi(\tau_1) \Xi(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.9)$$

и  $E_0(\lambda, \Lambda)$  это энергия основного состояния гамильтониана, описывающего движение вдоль  $\xi$ , который имеет вид:

$$\hat{H}_{\lambda, \Lambda} = -\frac{1}{2}\partial_{\xi}^2 + \Lambda e^{-\xi/2} + \lambda e^{-\xi}. \quad (2.10)$$

Этот гамильтониан имеет связанные состояния с энергиями

$$E_n = -\frac{(\kappa - 1 - 2n)^2}{32}, \quad n = 0, \dots, \left\lfloor \frac{\kappa - 1}{2} \right\rfloor, \quad (2.11)$$

где  $\kappa = -\sqrt{\frac{8}{\lambda}}\Lambda$ . Характерный масштаб на котором адиабатические переменные должны быть постоянны может быть оценён как  $\tau_* \sim (E_1 - E_0)^{-1} = \frac{8}{\kappa - 2}$ . Такая оценка корректна для гармонического осциллятора, где период осцилляций единственный временной масштаб в задаче. Мы можем использовать эту оценку для гамильтониана (2.10) в случае  $\kappa \gg 1$ . Мы увидим, что последнее условие гарантирует выполнение адиабатического приближения т.е.  $\phi'$ ,  $\lambda$ ,  $\Xi$ ,  $\Lambda$  не флуктуируют на масштабе  $\tau_*$ . Вообще говоря, в силу малости флуктуаций мы можем рассматривать их Гауссовыми.

Наша следующая цель - вывести эффективное действие для поля  $\varphi$ . Для этого мы найдём седловую точку действия (2.9) по отношению к другим переменным. Варьируя действие по  $\lambda$ ,  $\Lambda$ , и  $\Xi$  мы получим следующие уравнения:

$$\varphi' = \frac{\partial E_0}{\partial \lambda} = \frac{\kappa - 1}{32} \frac{\kappa}{\lambda}, \quad \Xi = \frac{\partial E_0}{\partial \Lambda} = -\frac{\kappa - 1}{16} \frac{\kappa}{\Lambda}, \quad (2.12)$$

$$\Lambda(\tau_1) = -g \int d\tau_2 \frac{\Xi(\tau_2)}{|\varphi_{12}|}. \quad (2.13)$$

Уравнение (2.12) позволяет выразить  $\lambda$  и  $\Lambda$  через остальные переменные; в частности из определения  $\kappa$  следует соотношение  $\Xi^2 = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \varphi'$ . Интеграл в первом члене в действии (2.9) может быть записан как

$$E_0(\lambda, \Lambda) - \lambda \varphi' - \Lambda \Xi = \frac{\kappa - 1}{32}, \quad (2.14)$$

а уравнение (2.13) принимает вид:

$$\kappa^2(\tau_1) \eta(\tau_1) = 16g \int d\tau_2 \frac{\eta(\tau_2) \sqrt{\varphi'(\tau_1) \varphi'(\tau_2)}}{|\varphi_{12}|}, \quad (2.15)$$

где  $\eta(\tau) = \sqrt{1 - \kappa^{-1}(\tau)}$ . В результате эффективное действие может быть записано как

$$S = \int_0^\beta \frac{\kappa - 1}{32} d\tau - \frac{g}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 \frac{\eta(\tau_1)\eta(\tau_2)\sqrt{\varphi'(\tau_1)\varphi'(\tau_2)}}{|\varphi_{12}|}. \quad (2.16)$$

В случае  $\kappa \gg 1$ , мы можем считать  $\eta(\tau) \approx 1$ . Полагая (а затем проверив это предположение) малость флуктуаций мы можем считать, что  $\varphi' \approx 2\pi/\beta$  и  $\kappa$  почти постоянные. В таком случае уравнение (2.15) может быть упрощено как:

$$\kappa^2 = 16g \int \frac{d\varphi(\tau_2)}{\left|2 \sin\left(\frac{\varphi(\tau_1) - \varphi(\tau_2)}{2}\right)\right|} \approx 32g \ln\left(\frac{\kappa\beta}{16\pi}\right), \quad (2.17)$$

тут мы использовали обрезку  $|\tau_1 - \tau_2| > \tau_* \approx \frac{8}{\kappa}$  для логарифмически-расходящегося интеграла. Первым членом эффективного действия (2.16) можно пренебречь ввиду его малых флуктуаций (см. дополнение). Выразим  $\varphi'$  как функцию  $\varphi$ , введя следующее обозначение,  $\varphi'(\tau) = \varepsilon(\varphi)$ . Используя это обозначение мы получим:

$$S \approx -\frac{g}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_1}{\varepsilon(\varphi_1)} \frac{d\varphi_2}{\varepsilon(\varphi_2)} \left(\frac{\varepsilon(\varphi_1)\varepsilon(\varphi_2)}{\varphi_{12}^2}\right)^{1/2}. \quad (2.18)$$

## 2.4 Седловое решение

Действие (2.18) достигает своего минимума при  $\varepsilon(\varphi) = 2\pi/\beta$  а также на конфигурациях полученных применением дробно-линейных преобразований к данной. Минимальное значение действия,  $S_{\min} \approx -\beta\kappa^2/32$ , определяет поправку к свободной энергии:  $F \approx E_0 - Ns_0T - \frac{J}{\alpha_s N} \frac{\kappa^2}{32}$ . Дифференцируя и используя выражение (2.17), мы найдём энтропию системы:

$$S(T) \approx Ns_0 - \frac{gJ}{\alpha_s NT} \quad (2.19)$$

Отметим, что энтропия обнуляется при  $T \sim \Gamma^2/J$ , что соответствует температуре при которой седловое решение модели *SYK* имеющее вид  $G_{sp}(\tau, 0) \sim -(J\tau)^{-1/2}$  (на больших временах при нулевой температуре) переходит в ферми-

жидкостное решение вида  $G(\tau, 0) \sim -(\Gamma\tau)^{-1}$ . При более низких температурах  $T \leq \Gamma^2/J$ , мы должны модифицировать наше решение следующим образом: введём верхнюю обрезку в выражении (2.17),  $|\tau_1 - \tau_2| < J/\Gamma^2$ . Тогда уравнение на  $\kappa$  примет вид:

$$\kappa^2 = 32g \ln\left(\frac{\kappa\bar{\beta}}{16\pi}\right), \quad \bar{\beta} = \frac{J}{\alpha_s N} \min\left(\beta, \frac{J}{\Gamma^2}\right). \quad (2.20)$$

## 2.5 Флуктуации

Оценим флуктуации поля  $\varepsilon(\varphi)$  в окрестности седлового решения  $\varepsilon_0 = 2\pi/\beta$  и покажем что они малы. Для простоты, будем рассматривать случай  $T \gg \Gamma^2/J$ . В дополнение к адиабатическому действию  $S$ , которое дано в выражении (2.18), нам также потребуется первая не-адиабатическая поправка. Можно показать что её вклад идентичен вкладу от производной Шварца. Рассматривая флуктуации в Фурье представлении, мы можем записать:  $\varepsilon(\varphi) = \varepsilon_0 + \frac{1}{2\pi} \sum_n \delta\varepsilon_n e^{in\varphi}$ , раскладывая эффективное действие  $S_{Sch} + S$  до второго порядка по  $\delta\varepsilon_n$  с  $n \neq 0$ , и вычисляя парный коррелятор мы получим:

$$K_\varepsilon(n) \equiv \frac{\langle \delta\varepsilon_n \delta\varepsilon_{-n} \rangle}{\varepsilon_0^2} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\varepsilon_0^2(n^2 - 1) + (g/2)\tilde{\psi}(n)} \quad (2.21)$$

где  $\tilde{\psi}(n) = \psi(n + \frac{1}{2}) - \psi(-\frac{1}{2})$  и  $\psi(x)$  это дигамма функция; тогда  $\tilde{\psi}(n) \approx \ln(n)$  при  $n \gg 1$ . Используя это выражение мы приходим к следующей оценке на малость флуктуаций:

$$\frac{\langle (\delta\varepsilon)^2 \rangle}{\varepsilon_0^2} \approx \frac{1}{\varepsilon_0 n_*} = \frac{8}{\kappa} \ll 1. \quad (2.22)$$

Таким образом флуктуации  $\varepsilon(\varphi)$  подавлены при  $\kappa \gg 8$ .

## 2.6 Фазовая диаграмма

Уменьшение параметра  $\kappa$  к значению порядка единицы приводит к усилению флуктуаций и адиабатическое приближение нарушается. При  $\kappa \sim 1$ , мы ожидаем фазовый переход в фазу для которой характерны сильные флуктуации и квадратичное возмущение не существенно на всех масштабах [22]. Используя исходные параметры модели, мы можем сказать, что переход происходит когда параметр  $\Gamma$  становится меньше чем критическое значение по порядку величины определённое как:

$$\Gamma_c \sim \frac{J}{\sqrt{\alpha_s N^2 \ln \frac{\bar{\beta}}{16\pi}}}, \quad \bar{\beta} = \frac{J}{\alpha_s N} \min\left(\frac{1}{T}, \frac{J}{\Gamma_c^2}\right), \quad (2.23)$$

Отметим, что критическое значение  $\Gamma_c = \Gamma_c(T)$  уменьшается логарифмически с уменьшением температуры  $T$  до момента когда  $T \gtrsim \frac{\Gamma_c^2(T)}{J}$ . Последующее понижение температуры не меняет значение  $\Gamma_c(T)$ . Линия  $\Gamma = \Gamma_c(T)$  и  $T = J/(\alpha_s N)$  (см. Рис. 2.1) отделяют область с сильными флуктуациями для которой характерно поведение электронной функции Грина в виде  $G_{fluc}(\tau, 0) \sim \alpha_s N (J\tau)^{-3/2}$  для достаточно больших времён  $\tau$ , от области где применимо седловое решение.

## 2.7 Заключение

В этой секции мы показали, что модель SYK с квадратичным возмущением может быть описана в терминах самосогласованного решения седловых уравнений. Наличие возмущения с характерной амплитудой  $\Gamma$  в интервале  $J/N \leq \Gamma \leq J/\sqrt{N}$  приводит к подавлению флуктуаций в системе. В результате седловые уравнения становятся применимы в большей области параметров. При достаточно высокой температуре мы видим решение характерное для модели SYK, в то время как при  $T_* \sim \Gamma^2/J$  происходит кроссовер в ферми жидкость. Мы изобразили фазовую диаграмму на рисунке 2.1. При низких температурах, в системе наблюдается фазовый переход при  $\Gamma = \Gamma_c$ , где  $\Gamma_c$  определена условием (2.23).

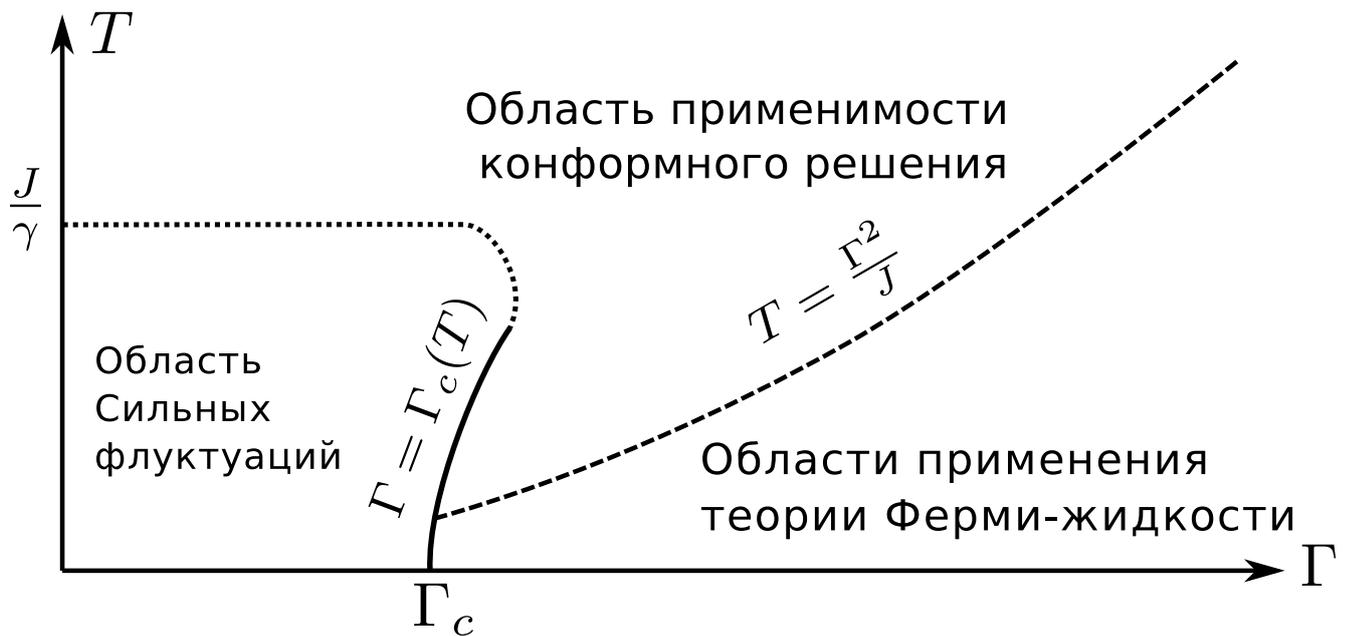


Рисунок 2.1 — Области с различным поведением функции Грина на больших временах  $\tau$ . Линии разделяющие области не строгие за исключением границы между областью с сильными флуктуациями и областью с седловым решением (сплошная линия). Это линия хорошо определена асимптотически при условии  $T \ll J/(\alpha_s N)$ . Поэтому, точка окончания этой линии, которая определяется условием  $T \sim J/(\alpha_s N)$  "расплывчата"

Результаты этой секции приводят к двум вопросам: 1) верно ли что свойства системы описываются только седловыми уравнениями и можно не думать про флуктуации? 2) Можно ли увидеть в спектральных свойствах системы уровни энергии локализованных состояний в эффективном гамильтониане? Ответы на эти вопросы будут получены в следующих главах.

## Глава 3. Скорость поглощения при модуляции амплитуды возмущения

### 3.1 Введение

В предыдущей главе мы показали, что взаимодействие между квадратичным возмущением и мягкой модой в модели SYK выражается в подавлении флуктуаций путём появления связанных состояний в спектре эффективного Гамильтониана. В данной главе мы рассмотрим эти результаты с точки зрения неравновесных свойств модели. Мы будем изучать скорость поглощения энергии системой при наличии модуляции во времени амплитуды квадратичного возмущения.

Подобные задачи хороши изучены в теории случайных матриц и мезоскопических систем [25–27]. При достаточно большой частоте (большей чем расстояние между одночастичными уровнями) скорость поглощения на данной частоте  $W(\omega)$  ведёт себя как:  $W(\omega) \sim \frac{\sigma^2}{\Delta^2} \omega^2$ , где  $\sigma$  - дисперсия матричного элемента возмущения а  $\Delta$ - среднее расстояние между уровнями. Поставленная нами задача расширяет данный подход на случай сильно-взаимодействующих систем.

### 3.2 Модель

В этой главе наша модель имеет вид:

$$H = \frac{1}{4!} \sum_{ijkl} J_{ijkl} \chi_i \chi_j \chi_k \chi_l + \frac{i}{2} \sum_{ij} \Gamma_{ij} (1 + \Phi(t)) \chi_i \chi_j. \quad (3.1)$$

При  $\Phi = 0$  модель совпадает с изученной в предыдущей главе. Модуляцию  $\Phi(t)$  мы предполагаем малой т.е  $\Phi(t) \ll 1$ .

Наша цель вычислить скорость поглощения энергии  $W(\omega)$  связанной с периодической модуляции гамильтониана  $\Phi(t)$ . Далее мы также покажем, что

наличие накачки на частоте равной энергии перехода между уровнями эффективного гамильтониана, приводит к изменению свойств поглощения системы на низких частотах. Таким образом мы полагаем, что зависимость гамильтониана от времени задана следующей формулой  $\Phi(t) = A \cos(\omega_P t) + f(t)$ . Мы планируем изучать отклик на поле  $f(t) \propto e^{-i\omega t}$ . Для начала мы сделаем несколько технических замечаний.

Мы будем использовать безразмерное время  $x \equiv \frac{2\pi t}{\beta}$  и соответствующую безразмерную частоту  $\Omega = \frac{\omega\beta}{2\pi}$ . Мы планируем изучать неравновесные свойства модели с сильным взаимодействием и потому будем использовать формализм Келдыша [28; 29]. Нам также понадобится различать поля определённые на разных частях контура, для этого мы введём индекс  $s \in \{+1, -1\}$ . Например, фермионное поле, определённое на части контура с номером  $s$  мы обозначим как  $\chi_{l,s_1}(x_1)$ . В таком случае функция Грина определена как следующее среднее  $G_{s_1,s_0}(x_1,x_0) \equiv -i \sum_l \langle \chi_{l,s_1}(x_1) \chi_{l,s_0}(x_0) \rangle$ . Седловые уравнения для данной модели записанные в пределе  $N \gg 1$ ,  $|x_1 - x_0| \gg \frac{T}{J}$  и  $\Phi = 0$  имеют вид:

$$\Sigma_{s_1,s_0}(x_1,x_0) = s_1 s_0 [J^2 G_{s_1,s_0}^3(x_1,x_0) - \Gamma^2 G_{s_1,s_0}(x_1,x_0)] \quad \Sigma \circ G = -\hat{I}. \quad (3.2)$$

Обсудим свойства модели SYK ( $\Gamma = 0$ ) в новом представлении. Для каждого решения седловых уравнения (3.2) функций вида:

$$G_{s_1,s_0}^\phi(x_1,x_0) = G_{s_1,s_0}(\phi^{s_1}(x_1), \phi^{s_0}(x_0)) [\phi^{s_1'}(u_1) \phi^{s_0'}(u_0)]^\Delta \quad (3.3)$$

будет также решением; здесь  $\phi_s$  произвольная монотонная функция и  $\Delta = \frac{1}{4}$ ;

Как и раньше из всех решений мы выбираем лишь трансляционно-инвариантное решение, которое имеет вид:  $\hat{G}(x_1,x_0) = -i \left(\frac{b}{J^2}\right)^\Delta \hat{g}(x_1 - x_0)$  где (см. [30])

$$\hat{g}(x > 0) = \left( \frac{1}{4 \sinh^2 \left(\frac{x}{2}\right)} \right)^\Delta \begin{pmatrix} e^{-i\pi\Delta} & -e^{i\pi\Delta} \\ e^{-i\pi\Delta} & -e^{i\pi\Delta} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

и  $b = 4\pi$ . Функция Грина при  $x_1 < x_0$  может быть получена из симметрии  $\hat{G}(x_1,x_0)^T = -\hat{G}(x_0,x_1)$ . Как и раньше, группа симметрий решения -  $PSL(2,\mathbb{R})$  меньше чем группа симметрий седловых уравнений (3.2) что приводит нас к ограничению функционального интеграла на седловое многообразие. Действие

для мягких мод имеет вид:

$$\begin{aligned}
S &= S_{SYK} + S_2 & S_{SYK} &= -\varepsilon_0 \sum_s \int Sch\{e^{\phi^s(x)}, x\} dx \\
S_2 &= \frac{ig}{2\varepsilon_0} \sum_{s_1, s_0} \int dx_1 dx_0 s_1 s_0 [g_{s_1, s_0}^\phi(x_1, x_0)]^2 (1 + \Phi^{s_1}(x_1))(1 + \Phi^{s_0}(x_0)) \\
g_{s_1, s_0}^\phi(x_1, x_0) &= g_{s_1, s_0}(\phi^{s_1}(x_1) - \phi^{s_0}(x_0)) [\phi^{s_1'}(x_1) \phi^{s_0'}(x_0)]^\Delta
\end{aligned}$$

Параметры действия определены как

$$\varepsilon_0 = \frac{2\pi\gamma}{\beta J}; \quad g = \frac{N\sqrt{b}\gamma\Gamma^2}{2J^2}; \quad (3.5)$$

Действие (3.5) учитывает наличие квадратичного возмущения и модуляции  $\Phi(x)$ . Отметим, что в действии модуляция на верхней и нижней части Келдышевского контура могут отличаться  $\Phi^{(+,-)}(x) = A \cos(\Omega_P x) + f^{+,-}(x)$ . Величину отличия мы будем называть квантовой компонентой поля  $f$  т.е.  $f^+(x) - f^-(x) = f^q(x)$ . Классическая компонента определена как  $f^{cl} = \frac{1}{2}(f^+(x) + f^-(x))$ . Такие обозначения удобны для вычисления восприимчивости.

Скорость поглощения энергии в единицу времени  $W(\omega)$  в присутствии модуляции вида  $f^{cl}(t) = a_\omega \cos(\omega t)$  может быть посчитана с использованием данного действия следующим способом:

$$W(\Omega) = \frac{\Omega}{2} \text{Im} \chi(\Omega); \quad \chi(\Omega) = -\frac{i}{2} \frac{\delta^2 Z_\Phi}{\delta f_\Omega^q \delta f_\Omega^{cl}} \quad Z_\Phi = \int \mathcal{D}\phi e^{iS} \quad (3.6)$$

В предыдущей главе мы показали, что флуктуации в нашей системе подавлены т.е.  $\phi^s(x) = x + u^s(x)$  и  $u^s(x) \ll 1$ . Это позволяет считать их Гауссовыми. В таком случае действие (3.5) может быть записано как:

$$\begin{aligned}
S &= S_{SYK} + S_{\tilde{\Phi}} & S_{\tilde{\Phi}} &= S_{\tilde{\Phi}}^{(0)} + S_{\tilde{\Phi}}^{(1)} + S_{\tilde{\Phi}}^{(2)} \\
S_{SYK} &= \frac{1}{2} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \left[ \hat{\mathcal{G}}_0(\Omega) \right]_{s_1, s_2}^{-1} u_{-\Omega}^{s_1} u_\Omega^{s_2} & S_{\tilde{\Phi}}^{(0)} &= i \frac{g}{2\varepsilon_0} \int \frac{d\Omega}{2\pi} L_{s_1, s_2}^{(0)}(\Omega) \tilde{\Phi}_{-\Omega}^{s_1} \tilde{\Phi}_\Omega^{s_2} \\
S_{\tilde{\Phi}}^{(1)} &= i \frac{g}{2\varepsilon_0} \int \frac{d\Omega_0 d\Omega_1}{(2\pi)^2} L_{s_1, s_2, s_3}^{(1)}(\Omega_0, \Omega_1) u_{\Omega_0}^{s_1} \tilde{\Phi}_{-\Omega_1 - \frac{\Omega_0}{2}}^{s_2} \tilde{\Phi}_{\Omega_1 - \frac{\Omega_0}{2}}^{s_3} \\
S_{\tilde{\Phi}}^{(2)} &= i \frac{g}{2\varepsilon_0} \int \frac{d\Omega_0 d\Omega_1 d\Omega_2}{(2\pi)^3} L_{s_1, s_2, s_3, s_4}^{(2)}(\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2) u_{\Omega_0}^{s_1} u_{\Omega_1}^{s_2} \tilde{\Phi}_{-\Omega_2 - \frac{\Omega_0 + \Omega_1}{2}}^{s_3} \tilde{\Phi}_{\Omega_2 - \frac{\Omega_0 + \Omega_1}{2}}^{s_4} \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Здесь мы ввели новое обозначение  $\tilde{\Phi}^\pm(x) = 1 + \Phi^\pm(x)$ ,  $\hat{L}^{(i)}$  тензоры полученные из исходного действия путём разложения в ряд Тейлора по полю  $u$  (см.

приложение A.1,A.2). Квадратичная часть действия имеет вид:

$$S_0 = S_{SYK} + S_{\tilde{\Phi}_0}^{(2)} \quad (3.8)$$

где  $S_{\tilde{\Phi}_0}^{(2)}$  обозначает член  $S_{\tilde{\Phi}}^{(2)}$  из выражения (3.7), вычисленный при  $\tilde{\Phi}_0^\pm = \tilde{\Phi}^\pm|_{f=0} = 1 + A \cos \Omega_P x$ . Удобно представить функциональный интеграл для  $Z_\Phi$  определённый в выражении (3.6) как  $Z_\Phi = \langle e^{i(S-S_0)} \rangle_0$  где  $\langle \dots \rangle_0$  обозначает усреднения с действием  $S_0$ ; разница  $S - S_0$  содержит источники необходимые для вычисления восприимчивости. Далее мы рассмотрим пропагатор для задачи без накачки.

### 3.3 Флуктуационный пропагатор в задаче без накачки

Действие для мягких мод было вычислено в приложении (A.1,A.2,A.3) и имеет следующий вид:

$$S_0 = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \hat{u}_{-\Omega}^T \begin{pmatrix} 0 & [\mathcal{G}^A(\Omega)]^{-1} \\ [\mathcal{G}^R(\Omega)]^{-1} & -\mathcal{G}^K(\Omega) [\mathcal{G}^A(\Omega)]^{-1} [\mathcal{G}^R(\Omega)]^{-1} \end{pmatrix} \hat{u}_\Omega \quad (3.9)$$

где

$$\begin{aligned} [\mathcal{G}^R(\Omega)]^{-1} &= \Omega^2 \left( \varepsilon_0 (\Omega^2 + 1) - \frac{g}{2\varepsilon_0} \psi(-\Omega) \right); \\ -\mathcal{G}^K(\Omega) [\mathcal{G}^A(\Omega)]^{-1} [\mathcal{G}^R(\Omega)]^{-1} &= i \frac{g}{2\varepsilon_0} \pi \Omega^2; \\ \psi(\Omega) &= \Psi \left( \frac{1}{2} + i\Omega \right) - \Psi \left( -\frac{1}{2} \right) \quad \Psi(z) = \partial_z \ln \Gamma(z) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Действие (3.9) не локально, поэтому функция  $[\mathcal{G}^R]^{-1}$  имеет ненулевую мнимую часть; в результате мы можем вычислить функцию распределения  $F(\Omega)$  используя соотношение:  $\mathcal{G}^K(\Omega) \equiv F(\Omega) (\mathcal{G}^R(\Omega) - \mathcal{G}^A(\Omega))$ . В нашем случае мы находим  $F(\Omega) = \coth(\pi\Omega)$ , что соответствует равновесному бозонному распределению, как и ожидалось для задачи без накачки.

При  $g \gg \varepsilon_0^2$  что эквивалентно  $T \ll \Gamma$  функция Грина бозонов  $\mathcal{G}(\Omega)$  для действия (3.9,3.10) демонстрирует "резонансное" поведение с частотой резонанса  $\pm\Omega_R$  и шириной  $\Omega_W$ . Эти параметры определены уравнением:

$$\Omega_R^2 = \frac{g}{2\varepsilon_0^2} \ln(\Omega_R); \quad \frac{\Omega_W}{\Omega_R} \approx \frac{\pi}{4\ln(\Omega_R)} \quad \frac{g}{2\varepsilon_0^2} = \frac{\sqrt{b}}{\alpha_s(4\pi)^2} \left(\frac{\Gamma}{T}\right)^2 \quad (3.11)$$

Частота  $\Omega_R$  соответствует переходу между нижними уровнями Гамильтониана 2.10 из предыдущей главы. Интересно отметить, что параметры резонанса определяются только отношением  $\frac{\Gamma}{T}$ , в то время как наибольший масштаб энергии в задаче  $J$  не входит в эти формулы.

Ниже мы будем рассматривать случай низких температур  $T \ll \Gamma$  в котором свойства пропагатора мягких мод максимально отличаются от свойств пропагатора в чистой модели SYK.

В исходных единицах измерения частота резонанса  $\omega_R$  и его ширина  $\omega_W$  даются выражением

$$\omega_R = 2\pi T \Omega_R = \frac{\Gamma}{4\alpha_s \sqrt{\pi}} \ln^{1/2} \frac{\Gamma}{T} \quad (3.12)$$

$$\omega_W = 2\pi T \Omega_W = \frac{\sqrt{\pi}}{16\alpha_s} \frac{\Gamma}{\ln^{1/2} \frac{\Gamma}{T}} \quad (3.13)$$

Добротность разноса определена как  $Q \sim \frac{\omega_R}{\omega_W} \sim \ln(\Omega_R) \sim \ln \frac{\Gamma}{T} \gg 1$ . Отметим, что этот результат специфичен для модели SYK в которой член со взаимодействием содержит 4 фермиона (SYK<sub>4</sub>). Для модели SYK<sub>2k</sub> с  $k > 2$  аналогичный вывод привёл бы к выражениям подобным (3.9,3.10) с функцией  $\psi(\Omega)$  асимптотика которой имела бы вид:  $\tilde{\psi}(\Omega) \sim \Omega^\alpha$  где  $\alpha = 4/k - 1$ ; в результате "добротность" определённая отношением  $\frac{\Omega_W}{\Omega_R} \propto \frac{\text{Im}\psi(\Omega_0)}{\text{Re}\psi(\Omega_0)} \sim O(\alpha)$  была бы порядка единицы. Случай модели SYK<sub>4</sub> специален т.к.  $\alpha = 0$ .

Резонансное поведение приводит к заметному отличию скорости поглощения по сравнению с задачей без возмущения. А также свойства системы могут быть сильно модифицированы путём приложения  $ac$  накачки с частотой  $\omega_P \approx \omega_R$ .

### 3.4 Поглощение в линейном режиме

С учётом мягких мод, восприимчивость даётся следующим выражением:

$$\chi(\Omega) = \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta f_{\Omega}^q \delta f_{\Omega}^{cl}} \left( S_{\tilde{\Phi}}^{(0)} + \frac{i}{2} \langle [S^{(1)}]^2 \rangle \right) \quad (3.14)$$

Для начала обсудим случай чистой модели SYK ( $\Gamma = 0$ ); в таком случае восприимчивость полностью определена первым слагаемым в выражении (3.14) и имеет вид:

$$\chi_{SYK}(\Omega) = \frac{2g}{\varepsilon_0} \left( \ln \left( \frac{\beta J}{2\pi} \right) - \psi(-\Omega) \right) \quad (3.15)$$

Это выражение приводит к следующему выражению для мнимой части, в исходных единицах:

$$\text{Im } \chi_{SYK}(\omega) = 2\pi T \frac{\pi g}{\varepsilon_0} \tanh \frac{\omega}{2T} = \pi^{3/2} \frac{N\Gamma^2}{J} \tanh \frac{\omega}{2T} \quad (3.16)$$

Логарифмически-большой член в выражении (3.15) связан с формальной расходимостью интеграла по  $dx_1$  в действии  $S_2$  в выражении (3.5). Эта расходимость присутствует т.к.  $g(x_1, x_0) \propto |x_1 - x_0|^{-1}$  при  $x_1 \rightarrow x_0$ . Как и раньше мы должны обрезать её на масштабе  $[\Delta x]_{min} \sim \frac{J}{T}$ . Далее мы опустим этот член в выражении для восприимчивости т.к. он не зависит от частоты.

Результат (3.16) хорошо известен в теории не-ферми-жидкостных систем [31; 32]; он также связан с линейной зависимостью сопротивления от температуры полученной в работе [30].

Учёт квадратичного члена в гамильтониане приводит к сильному модификаций флуктуаций  $u(x)$  и соответственно к изменению вида восприимчивости. Детальные вычисления  $\frac{i}{2} \langle [S^{(1)}]^2 \rangle$  изложены в приложении A.4. В результате восприимчивость имеет вид:

$$\chi(\Omega) = -\frac{2g}{\varepsilon_0} \psi(-\Omega) \left[ 1 + \frac{g}{2\varepsilon_0} \Omega^2 \mathcal{G}_{\Omega}^R \psi(-\Omega) \right] \quad (3.17)$$

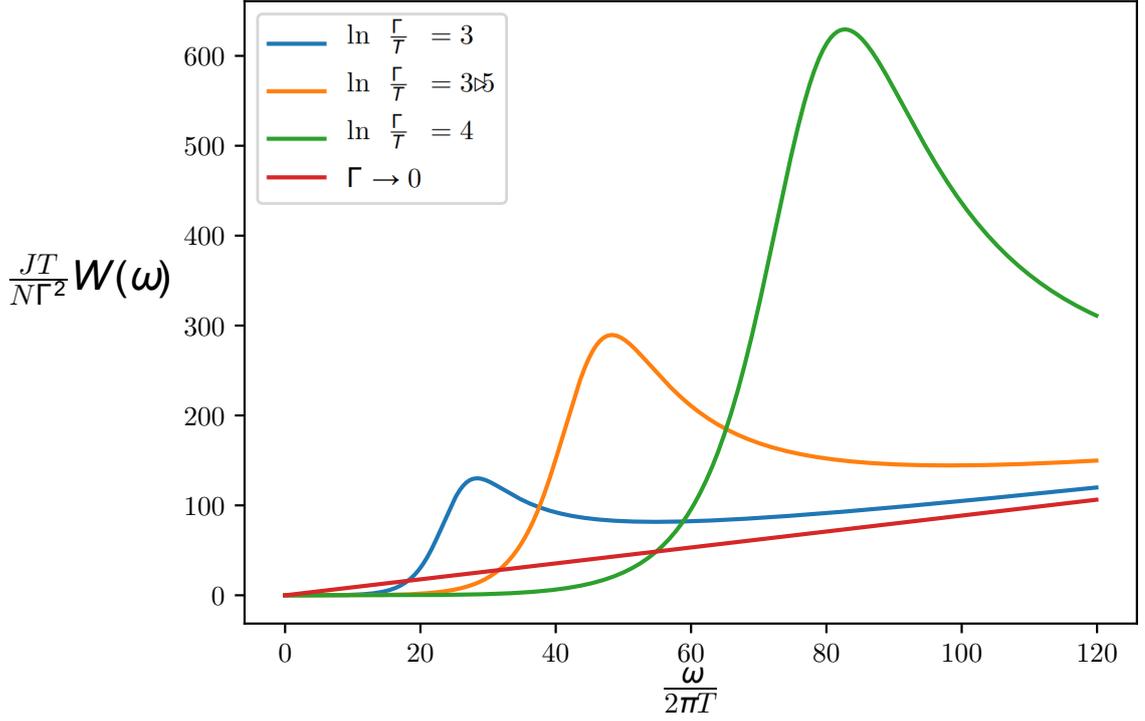


Рисунок 3.1 — Скорость поглощения при  $\Gamma/T$  и  $\Gamma \rightarrow 0$ ; резонансное усиление видно при  $\omega \approx \omega_R$ . Отметим, что при низких частотах полученный нами ответ подавлен, в этой области также необходимо учесть вклад от жёстких мод см.(3.21).

Эффект квадратичных возмущений лучше всего виден в мнимой части восприимчивости:

$$\text{Im } \chi(\Omega) = \frac{(\Omega^2 + 1)^2 \text{Im } \chi_{SYK}(\Omega)}{\left(\Omega^2 + 1 - \frac{g}{2\varepsilon_0^2} \text{Re } \psi(-\Omega)\right)^2 + \left[\frac{g}{2\varepsilon_0^2} \text{Im } \psi(-\Omega)\right]^2} \quad (3.18)$$

В режиме  $\Gamma \gg T \Leftrightarrow g \gg \varepsilon_0^2$ , выражение (3.18) имеет резонансный пик при  $\Omega \approx \Omega_R$ . При высоких частотах  $\Omega \gg \Omega_R$  результат (3.18) сводится к чистой модели SYK. В окрестности резонанса, при  $\Omega \approx \Omega_R$ , диссипация в нашей модели усилена, что выражено в выражении:

$$\frac{\text{Im } \chi(\Omega)}{\text{Im } \chi_{SYK}(\Omega)} = \left(\frac{\Omega_R}{2\Omega_W}\right)^2 = \frac{4}{\pi^2} \ln^2 \Omega_R \gg 1 \quad (3.19)$$

Частотная зависимость скорости поглощения  $W(\omega)$  определённая уравнением (3.18) показана на рисунке (3.1) для нескольких разных значений отношения  $\Gamma/T$ .

При низких частотах  $\Omega \ll \Omega_R$  диссипация полученная из уравнения (3.18) подавлена по отношению к ответу для чистой модели SYK:

$$\frac{\text{Im } \chi(\Omega)}{\text{Im } \chi_{\text{SYK}}(\Omega)} = \left( \frac{\Omega^2 + 1}{2\Omega_R \Omega_W |\psi(-\Omega)|} \right)^2 \sim \left( \frac{(2\pi T)^2 + \omega^2}{\Gamma^2} \right)^2 \quad (3.20)$$

Применимость результата (3.20) ограничена в режиме  $T \ll \Gamma$  так как он был получен без учёта изменения седлового решения, которое приводит к ферми-жидкостному поведению при  $T \leq T_{FL} = \Gamma^2/J$ . Иначе говоря, в выражении выше мы не учли жёсткие моды которые важны для кроссовера к ферми-жидкостному режиму.

Оценка вклада таких мод дана в приложении A.5, она приводит к следующей добавке к диссипативной части восприимчивости при условии  $\omega \ll T$ :

$$\text{Im } \chi_{\text{add}}(\omega) = \mathcal{C} \omega N \mathcal{M}^2 = \frac{\mathcal{C}}{(4\pi)^2} \omega N \left( \frac{T_{FL}}{T} \right)^2 \quad (3.21)$$

тут численное значение коэффициента  $\mathcal{C} \approx 234$ . При  $T \sim T_{FL}$  вклад (3.21) такого же порядка что и результат следующий из теории ферми-жидкости  $\text{Im } \chi_{FL}(\omega) \sim N\omega$ . Вклад (3.21) сопоставим с вкладом от мягких мод (3.20) при  $T \approx T_{cr} = \Gamma(\Gamma/J)^{1/5}$ . Таким образом, выражение (3.20) применимо при  $\Gamma(\Gamma/J)^{1/5} < T < \Gamma$ .

### 3.5 Поглощение в присутствии накачки

В этой секции мы рассмотрим поведение нашей системы в присутствии накачки при частоте  $\omega_P \approx \omega_R$  и с амплитудой  $A$  т.е.  $\Phi(t) = A \cos(\omega_P t) + f(t)$ . Отличие  $|\omega_P - \omega_R|$  не существенно если оно меньше чем ширина резонанса  $\omega_W$ , поэтому далее мы будем считать  $\omega_P = \omega_R$ . Мы будем интересоваться поведением системы при низких частотах  $\omega \ll \omega_W$ .

Важно отметить, что накачка приводит к тому что наша система постоянно поглощает энергию, поэтому для описания равновесного состояния необходимо учитывать также связь с внешней тепловой баней. Мы применим другой подход: рассмотрим накачку конечной длительности  $t_{\text{pump}}$  такой, что полная энергия, которую поглотила наша система  $E_{\text{abs}} = W(\omega)A^2t_{\text{pump}}$  достаточно мала т.е. изменение температуры системы  $\Delta T$  относительно мало,  $\Delta T \ll T$ . В этом отношении наш подход отличается от подхода развитого в работе [33] для системы с  $N = \infty$ , где изучался предел сильной накачки.

В нашем подходе мы изучаем отклик системы в квази-стационарном положении на частоте  $\omega$  ограниченной условием  $\omega \gg 1/t_{\text{pump}}$ . Увеличение температуры системы определяется выражением  $\Delta T = E_{\text{abs}}/C(T)$  где  $C(T)$  это теплоёмкость нашей системы. Главный вклад в теплоёмкость  $C(T)$  в интересном для нас области  $T \ll \Gamma$  связан с квадратичным возмущением в действии. Теплоёмкость  $C(T)$  может быть вычислена в седловом приближении (см. приложения A.2.3 и A.5); Соответствующее вычисление энтропии было сделано в работе [30], однако в ней не было замечено что в области  $T < \Gamma$  доминирующий вклад в теплоёмкость  $C(T)$  ведёт себя как  $\sqrt{4\pi}N\Gamma^2/JT$ . В результате, мы находим следующую цепочку неравенств на амплитуду накачки  $A$  и частоту  $\omega$ :

$$\omega_R A^2 \ln^2 \frac{\omega_R}{T} \ll \frac{1}{t_{\text{pump}}} \ll \omega \quad (3.22)$$

Наличие накачки изменяет низкочастотную восприимчивость следующим образом: во-первых модифицирует действие мягких мод ; во-вторых, создаёт поправку к выражению  $\frac{i}{2}\langle[S^{(1)}]^2\rangle$  так как  $S^{(1)}$  содержит также члены первого и второго порядка по  $\tilde{\Phi}$ . Вторая поправка мала в режиме  $\omega \ll \omega_W$  (см. приложение A.4.4) поэтому мы ей пренебрежём.

Накачка приводит к следующим поправкам к действию. Во-первых, есть "прямой" вклад в действие пропорциональный  $\sim A^2$  содержащий члены вида  $u_{-\Omega}u_{\Omega}$  в действии. Во-вторых, "косвенный" вклад который пропорциональный  $\propto A$  и множителю вида:  $u_{-\Omega}u_{\Omega+\Omega_R}$ . После интегрирования по быстрым модам  $u_{\Omega_f}$  ( $\Omega_f \approx \Omega_R$ ), мы получим ещё один вклад к действию для медленных мод. Сумма этих двух вкладов будет давать полное действия для мягких мод (см. A.3) в виде:

$$\delta_A S_{soft} = \pi \Omega_P \frac{ig}{2\varepsilon_0} \left(\frac{A}{2}\right)^2 \int \frac{d\Omega}{(2\pi)} \hat{u}_{-\Omega}^T \begin{pmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 4\Omega_P \end{pmatrix} \hat{u}_\Omega \quad (3.23)$$

Вне-диагональные члены в матрице  $2 \times 2$  в выражении (3.23) пропорциональны  $\Omega$ , в то время как аналогичный член в  $S_{soft}$ , (см. выражение (3.9)), ведут себя как  $\propto \Omega^2$ . Линейные члены по  $\Omega$  показывают наличие *трения* возникающее в силу неравновесности рассматриваемой системы. Кроме модификации квадратичного по  $u(x)$  члена в действии, накачка также приводит к появлению ненулевого среднего поля  $u$  пропорционального  $\propto A^2 t_{pump}$ , это отражает изменение температуры нашей системы  $T \rightarrow T + \Delta T$  за счёт наличия накачки, см. приложение A.5. В гармоническом приближении по  $u(x)$  которое мы использовали, среднее значение  $\langle u(x) \rangle$  не изменяет флуктуационный пропагатор, однако этот эффект будет важен в старших по  $u$  членах. Условие (3.22) гарантирует что  $\Delta T \ll T$  и соответствующий эффект мал.

В результате флуктуационный пропагатор имеет вид:

$$[\mathcal{G}^R(\Omega)]^{-1} = \Omega^2 \left( \varepsilon_0 (\Omega^2 + 1) - \frac{g}{2\varepsilon_0} \psi(-\Omega) \right) + \frac{i\pi g \Omega_P}{\varepsilon_0} \Omega \left(\frac{A}{2}\right)^2. \quad (3.24)$$

Теперь мы можем использовать выражение (3.17) чтобы найти восприимчивость  $\chi(\omega)$  по отношению к пробному полю  $f_\Omega$  при условии  $\frac{1}{T t_{pump}} \ll \Omega \ll \Omega_R$  (см. (3.22)):

$$\text{Im } \chi(\Omega) = \frac{\pi g}{\varepsilon_0} \left( \frac{\Omega_R}{\Omega} A^2 + \frac{(\Omega^2 + 1)^2}{\left| \frac{g}{2\varepsilon_0} \psi(-\Omega) \right|^2} \tanh(\pi\Omega) \right) \quad (3.25)$$

Выражение (3.25) демонстрирует наличие масштаба в задаче  $I(\Omega) = \frac{\Omega(\Omega^2+1)}{\Omega_R^2 \Omega_W}$  для амплитуды накачки  $A$ .

При  $A \ll I(\Omega)$  накачка слабая и не изменяет восприимчивость и скорость поглощения. При  $I(\Omega) \ll A$  мы можем написать, что  $\text{Im } \chi_1^A(\Omega) \approx \pi A^2 \frac{g}{\varepsilon_0} \frac{\Omega_R}{\Omega}$ . В результате скорость поглощения имеет вид:

$$W(\omega) = \frac{\omega}{2} \text{Im } \chi(\omega) = \frac{A^2}{2} N \pi^{3/2} \omega_R \frac{\Gamma^2}{J} \quad (3.26)$$

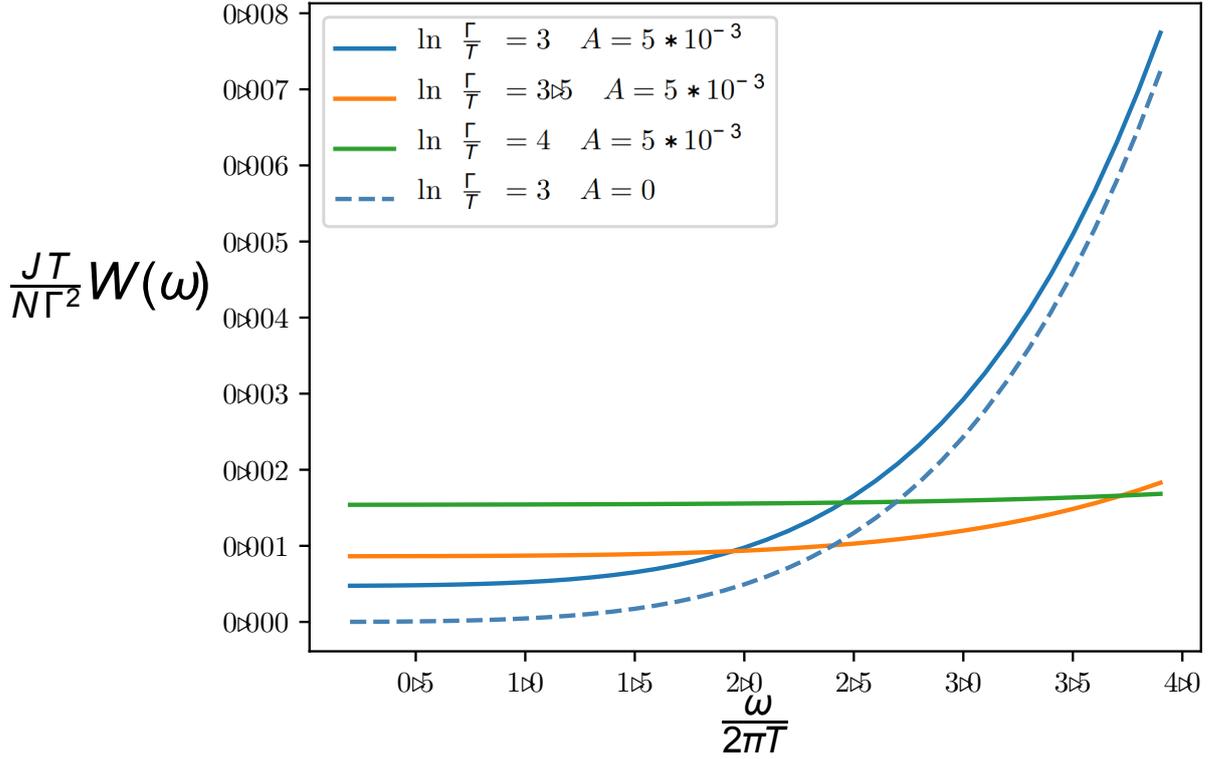


Рисунок 3.2 — Скорость поглощения на малых частотах  $\omega \ll \omega_R$  в присутствии накачки с амплитудой  $A = 5 \cdot 10^{-3}$ . Очень слабая зависимости от  $\omega$  на промежуточных частотах показывает режим "сухого трения".

Выражение  $W(\omega)$  не зависит от  $\omega$  и  $T$ , мы называем этот режим "сухим трением". На рисунке (3.2) мы изобразили поведение  $W(\omega)$  используя уравнение (3.25) для  $A = 5 \cdot 10^{-3}$  и нескольких малых значений параметра  $T/\Gamma \ll 1$ .

### 3.6 Заключение

В этой главе мы изучили поглощение энергии в модели SYK с квадратичным возмущением модулированными во времени. Не смотря на то, что на седловом уровне квадратичное возмущение мало при достаточно больших температурах  $T \gg T_{FL} = \Gamma^2/J$ , оно значительно меняет поведение флуктуаций при  $T \leq \Gamma$ . В этой области мы обнаружили универсальное поведение: флуктуации мягкой моды имеют резонанс на частоте  $\omega_R$  с шириной  $\omega_W$  заданными в выражениях (3.12,3.13) соответственно. Добротность этого резонанса имеет

вид  $Q = \frac{4}{\pi} \ln \frac{\Gamma}{T}$ . Удивительным образом обе величины  $\omega_R$  и  $\omega_W$  не зависят от наибольшего масштаба задачи  $J \gg \Gamma, T$ .

Частота  $\omega_R$  есть ни что иное, как разница уровней в эффективном гамильтониане 2.10 из прошлой главы. Тем самым нами показано что спектр эффективного гамильтониана может быть обнаружен при изучении свойств поглощения данной системы. При этом, учёт флуктуаций значительно меняет свойства системы когда  $\Gamma \gg T$

Мы также исследовали задачу при наличии накачки на частоте резонанса, тем самым его возбуждая. С точки зрения поведения на низких частотах, накачка приводит к члену в действии похожего на трение. Также накачка меняет поведение скорости поглощения энергии нашей системой при низких частотах, делая её независимой ни от частоты ни от температуры.

## Глава 4. Кинетика в модели SYK

### 4.1 Введение

В данной главе мы изучаем неравновесные свойства решётки "квантовых точек", динамика внутри каждой из точек описывается обобщением моделью SYK на случай обычных фермионов. Мы также предполагаем наличие туннелирования между точками. В данной главе, мы расширяем результаты полученные в работе [30], находя полную зависимость кинетических коэффициентов от волнового вектора и частоты приложенных внешних полей. Мы также рассматриваем случай произвольной электрон-дырочной асимметрии. В низкочастотном пределе  $\omega \ll T$  мы получаем те же результаты для электрической проводимости  $\sigma$  что и в работе [30]. Для теплопроводности  $\kappa$  мы обнаружили дополнительный вклад существенный при  $T \leq \Gamma$ . Мы покажем, что отношение Лоренца определённое как  $L = \kappa/(T\sigma)$  является не постоянным и зависит от температуры.

В случае высоких частот  $\omega \gg T$  мы нашли что в системе существует мода похожая на "нулевой звук" в ферми жидкости но совершенно другой природы. Также как и спектр нулевого звука, эта мода может быть получена из положения полюса в проводимости  $\sigma(\omega, p)$ . Теплопроводность  $\kappa(\omega, p)$  содержит два вклада. Первый пропорциональный электропроводности  $\sigma(\omega, p)$  и квадрату параметра электрон-дырочной асимметрии  $\mathcal{E}$ ; второй вклад присутствует в системе даже в случае  $\mathcal{E} = 0$ , далее мы будем называть его "внутренним" и обозначать как  $\tilde{\kappa}(\omega, p)$ . Этот вклад содержит почти без дисперсионное резонансное поведение на частоте  $\omega_0 \sim \Gamma$ , похожее на обнаруженное нами в предыдущей главе.

## 4.2 Модель

Мы изучаем систему квантовых точек. Гамильтониан этой системы имеет вид:

$$H = \sum_{\mathbf{r}} \left\{ H_{\mathbf{r}} + \sum_{\delta\mathbf{r}} \sum_{i,j} \left( t_{\mathbf{r},i;\mathbf{r}+\delta\mathbf{r},j} \psi_{\mathbf{r},i}^\dagger \psi_{\mathbf{r}+\delta\mathbf{r},j} + h.c. \right) \right\}$$

$$H_{\mathbf{r}} = \frac{1}{2!} \sum_{i,j,k,l} J_{i,j;k,l;\mathbf{r}} \mathcal{A} \left\{ \psi_{\mathbf{r},i}^\dagger \psi_{\mathbf{r},j}^\dagger \psi_{\mathbf{r},k} \psi_{\mathbf{r},l} \right\} + \sum_{0 < i,j \leq N} \Gamma_{i,j,\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r},i}^\dagger \psi_{\mathbf{r},j} \quad (4.1)$$

Здесь  $\psi_{\mathbf{r},i}$  оператор уничтожения  $i$ -ого фермиона в точке с радиус вектором  $\mathbf{r}$ . Первый член в первой строке представляет собой гамильтониан внутри точки в то время как второй член описывает туннелирование между соседними точками. Радиус вектор  $\delta\mathbf{r}$  - вектор между соседними точками (без ограничения общности, мы предполагаем, что точки образуют квадратную решётку).

В каждой точке содержится  $N \gg 1$  одночастичных состояний (обозначенных индексами  $i, j, k \dots$ ). Гамильтониан  $H_{\mathbf{r}}$  описывает динамику системы в точке  $\mathbf{r}$ . Первый член в выражение для  $H_{\mathbf{r}}$  является гамильтонианом модели SYK в случае обычных фермионов см. также [19]. Второй член в гамильтониане  $H_{\mathbf{r}}$ -квадратичное возмущение к модели SYK, снимающее вырождение одночастичного спектра. Знак  $\mathcal{A} \{ \dots \}$  обозначает взятие антисимметричного произведения операторов стоящих внутри скобок см. [19]. Тензоры  $t \dots$ ,  $J \dots$ ,  $\Gamma \dots$  как и раньше независимые гауссовы величины с нулевым средним и дисперсией в виде:

$$\overline{|J_{i,j;k,l;\mathbf{r}}|^2} = \frac{2J^2}{N^3} \quad \overline{\Gamma_{i,j,\mathbf{r}}^2} = \frac{\Gamma^2}{N} \quad \overline{t_{\mathbf{r},i;\mathbf{r}+\delta\mathbf{r},j}^2} = \frac{w^2}{N} \quad (4.2)$$

Как и раньше, мы предполагаем, что масштаб энергии описывающей взаимодействие SYK -доминирующий  $J \gg \Gamma, w$ .

Оператор зарядовой плотности и плотности энергии имеют следующий вид:

$$\mathcal{Q}_{\mathbf{r}} = \sum_i \psi_{\mathbf{r},i}^\dagger \psi_{\mathbf{r},i} - \frac{N}{2}$$

$$\mathcal{H}_{\mathbf{r}} = H_{\mathbf{r}} + \frac{1}{2} \sum_{\delta\mathbf{r}} \sum_{i,j} \left[ \left( t_{\mathbf{r},i;\mathbf{r}+\delta\mathbf{r},j} \psi_{\mathbf{r},i}^\dagger \psi_{\mathbf{r}+\delta\mathbf{r},j} + h.c. \right) + \mathbf{r} \mapsto \mathbf{r} - \delta\mathbf{r} \right] \quad (4.3)$$

В случае теплового равновесия средний заряд каждой гранулы постоянный  $\langle Q_{\mathbf{r}} \rangle = Q$ .

Для вычисления электрической проводимости мы вводим источник описывающей прижженное напряжение  $U$ . Сопряженной для этого источника величиной является заряд. При этом вычисляя электрический ток мы вычисляем поток заряда. Таким образом имея эффективное действия для напряжения мы можем вычислить токи, текущие в нашей системе. Аналогичная идея применима для вычисления теплопроводности. Мы можем ввести источник, сопряженный с плотностью энергии, так называемый потенциал Латинжера  $L$ , и получить теплопроводность из эффективного действия. В таком случае гамильтониан с источниками имеет вид:

$$H_S(t) = H + \sum_{\mathbf{r}} (Q_{\mathbf{r}} U(\mathbf{r}, t) + L(\mathbf{r}, t) \mathcal{H}_{\mathbf{r}}) \quad (4.4)$$

Цель этой главы – вывести выражение для токов вызванных наличием данных источников.

### 4.3 Флуктуации около сделового решения модели SYK

Мы снова используем технику Келдыша для изучения транспортных свойств нашей системы при конечной температуры. Определим поле  $G$  как:

$$G(t_1, t_0 | \mathbf{r}) = -\frac{i}{N} \sum_l \psi_{\mathbf{r}, l}(t_1) \psi_{\mathbf{r}, l}^\dagger(t_0) \quad (4.5)$$

Мы также введём поле  $\Sigma$  как множитель Лагранжа, чтобы сделать поле  $G$  свободным. В результате мы получим действие для задачи с источниками в виде:

$$\begin{aligned}
S = & -iN \sum_{\mathbf{r}} \int_{\mathcal{C}} dt_1 dt_0 (\Sigma(t_1, t_0 | \mathbf{r}) + \Sigma_{free}(t_1, t_0)) G(t_0, t_1 | \mathbf{r}) - iN \operatorname{tr} \log \{\hat{\Sigma}\} \\
& + iN \int_{\mathcal{C}} dt_1 dt_0 \sum_{\mathbf{r}} \left\{ \frac{J^2}{4} [G(t_1, t_0 | \mathbf{r}) G(t_0, t_1 | \mathbf{r})]^2 \right. \\
& + \left. \frac{\Gamma^2}{2} G(t_1, t_0 | \mathbf{r}) G(t_0, t_1 | \mathbf{r}) \right\} (1 + L(\mathbf{r}, t_1) + L(\mathbf{r}, t_0)) \\
& + iN w^2 \int_{\mathcal{C}} dt_1 dt_0 \sum_{\mathbf{r}, \delta \mathbf{r}} G(t_1, t_0 | \mathbf{r}) G(t_0, t_1 | \mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) \\
& \times \left( 1 + \frac{L(\mathbf{r}, t_1) + L(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}, t_1)}{2} + \frac{L(\mathbf{r}, t_0) + L(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}, t_0)}{2} \right) \\
& \times \exp \{ i\varphi^{(U)}(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}, t_1) - i\varphi^{(U)}(\mathbf{r}, t_1) - i\varphi^{(U)}(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}, t_0) + i\varphi^{(U)}(\mathbf{r}, t_0) \}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Тут мы ввели новое обозначение:  $\Sigma_{free}(t_1, t_0) \equiv \{i\partial_{t_1} + \mu\} \delta(t_1 - t_0)$ . Так как  $N \gg 1$  мы снова можем начать рассмотрение модели с седловых уравнений.

### 4.3.1 Седловые уравнения

Седловые уравнения для полей  $\Sigma$  и  $G$  могут быть получены путём вариации действия (4.6). Члены в действии возникшие за счёт возмущения квадратичного по фермионам не существенны при  $T \gg T_{FL}$ , где  $T_{FL} \equiv \max\{\frac{w^2}{J}, \frac{\Gamma^2}{J}\}$ . Нам также будет удобно перейти к безразмерной переменной  $u \equiv 2\pi T t$ . Мы также пере-нормируем поля следующим образом:

$$\begin{aligned}
G(t_1, t_0 | \mathbf{r}) & \equiv \left( \frac{2\pi T}{J} \right)^{1/2} G(u_1, u_0 | \mathbf{r}) \\
\Sigma(t_1, t_0 | \mathbf{r}) & \equiv J^2 \left( \frac{2\pi T}{J} \right)^{3/2} \Sigma(u_1, u_0 | \mathbf{r})
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Используя эти переменные, мы можем записать действие для модели SYK в виде:

$$\begin{aligned}
S_{SYK} = & -iN \operatorname{tr} \log\{\hat{\Sigma}\} \\
& -iN \sum_{\mathbf{r}} \sum_{\sigma_1, \sigma_0} \sigma_1 \sigma_0 \int du_1 du_0 \Sigma_{free, \sigma_1 \sigma_0}(u_1, u_0) G_{\sigma_1 \sigma_0}(u_0, u_1 | \mathbf{r}) \\
& +iN \sum_{\sigma_1, \sigma_0} \sigma_1 \sigma_0 \int du_1 du_0 \sum_{\mathbf{r}} \left\{ \frac{1}{4} [G_{\sigma_1 \sigma_0}(u_1, u_0 | \mathbf{r}) G_{\sigma_0 \sigma_1}(u_0, u_1 | \mathbf{r})]^2 \right. \\
& \quad \left. - \Sigma_{\sigma_1 \sigma_0}(u_1, u_0 | \mathbf{r}) G_{\sigma_0 \sigma_1}(u_0, u_1 | \mathbf{r}) \right\}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Вариация этого действия приведёт к седловым уравнениям в виде:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\sigma_1 \sigma_0}(u_1, u_0 | \mathbf{r}) = & [G_{\sigma_1 \sigma_0}(u_1, u_0 | \mathbf{r}) G_{\sigma_0 \sigma_1}(u_0, u_1 | \mathbf{r})]^{\frac{q}{2}-1} G_{\sigma_0 \sigma_1}(u_0, u_1 | \mathbf{r}) \\
\sum_{\sigma} \sigma \sigma_1 \int \Sigma_{\sigma_1 \sigma}(u_1, u | \mathbf{r}) G_{\sigma \sigma_0}(u, u_0 | \mathbf{r}) du = & -\delta_{\sigma_1, \sigma_0} \delta(u_1 - u_0)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Мы опустили член  $\Sigma_{free}$  при написании этих уравнение т.к. он мал на временах  $t \gg 1/J$  при которых мы рассматриваем данные уравнения. Как и раньше мы ввели параметр  $q$ , который в нашем случае будет равен 4. Трансляционно-инвариантное решение этих уравнений имеет вид:

$$G_{\sigma_1 \sigma_0}^{(s)}(u_1, u_0 | \mathbf{r}) = b^{\Delta} g_{\sigma_1 \sigma_0}(u_1 - u_0) \quad b = \frac{(1 - 2\Delta) \sin(2\pi\Delta)}{2\pi(\cos(2\pi\Delta) + \cosh(2\pi\mathcal{E}))} \tag{4.10}$$

Здесь мы ввели функцию  $g$  определённую как:

$$\begin{aligned}
g_{\sigma_1 \sigma_0}(u) \equiv & i e^{-i\mathcal{E}u} \left(4 \sinh^2\left(\frac{u}{2}\right)\right)^{-\Delta} \left[ \theta(u) \begin{pmatrix} -e^{-i\pi(\Delta+i\mathcal{E})} & e^{i\pi(\Delta+i\mathcal{E})} \\ -e^{-i\pi(\Delta+i\mathcal{E})} & e^{i\pi(\Delta+i\mathcal{E})} \end{pmatrix} \right. \\
& \left. + \theta(-u) \begin{pmatrix} e^{-i\pi(\Delta-i\mathcal{E})} & e^{-i\pi(\Delta-i\mathcal{E})} \\ -e^{i\pi(\Delta-i\mathcal{E})} & -e^{i\pi(\Delta-i\mathcal{E})} \end{pmatrix} \right]_{\sigma_1 \sigma_0}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Здесь  $\Delta = \frac{1}{q}$  и  $\mathcal{E} \in (-\infty, \infty)$  - параметр электрон-дырочной асимметрии, который может быть связан со средним зарядом гранулы следующим образом:

$$\mathcal{Q} = -\frac{\theta}{\pi} - \left(\frac{1}{2} - \Delta\right) \frac{\sin(2\theta)}{\sin(2\pi\Delta)} \quad e^{2\pi\mathcal{E}} \equiv \frac{\sin(2\pi\Delta + \theta)}{\sin(2\pi\Delta - \theta)} \tag{4.12}$$

Эта связь показана в работах [19; 34]. Вообще говоря, параметр  $\mathcal{E}$  не может принимать слишком большие значение. В работах [35; 36] было показано что устойчивое решение седловых уравнений в виде (4.10) может быть получено только при  $|\mathcal{E}| \leq 0.14$ .

### 4.3.2 Седловое многообразие

Решение которое мы нашли (4.10) нарушает симметрию седловых уравнений (4.9). Многообразие решений седловых уравнений может быть получена путём следующего преобразования симметрии, применённого к найденному нами решению:

$$G_{\sigma_1, \sigma_0}(u_1, u_0 | \mathbf{r}) \mapsto [F'_{\sigma_1}(u_1, \mathbf{r}) F'_{\sigma_0}(u_0, \mathbf{r})]^\Delta e^{i(\varphi_{\sigma_1}(u_1, \mathbf{r}) - \varphi_{\sigma_0}(u_0, \mathbf{r}))} \times G_{\sigma_1, \sigma_0}(F_{\sigma_1}(u_1, \mathbf{r}), F_{\sigma_0}(u_0, \mathbf{r}) | \mathbf{r}) \quad (4.13)$$

Здесь  $F_\sigma(u)$  набор монотонных функций, а функции  $\varphi_\sigma(u)$  - произвольные. Как и раньше мы редуцируем действие на поля лежащие на этом многообразии. В результате действие имеет вид:

$$S_{soft} = \int d\mathbf{r} S_{SYK, \mathbf{r}}^{(F, \varphi)} + (S - S_{SYK})|_{G=G(F, \varphi)} \quad G_{\sigma_1 \sigma_0}^{F, \varphi}(u_1, u_0 | \mathbf{r}) = b^\Delta g_{\sigma_1 \sigma_0}^{(F, \varphi)}(u_1, u_0 | \mathbf{r}) \\ g_{\sigma_1 \sigma_0}^{(F, \varphi)}(u_1, u_0 | \mathbf{r}) = [F'_{\sigma_1}(u_1, \mathbf{r}) F'_{\sigma_0}(u_0, \mathbf{r})]^\Delta e^{i(\varphi_{\sigma_1}(u_1, \mathbf{r}) - \varphi_{\sigma_0}(u_0, \mathbf{r}))} \times \\ \times g_{\sigma_1, \sigma_0}(F_{\sigma_1}(u_1, \mathbf{r}) - F_{\sigma_0}(u_0, \mathbf{r})) \quad (4.14)$$

Здесь  $S_{SYK, \mathbf{r}}^{(F, \varphi)}$  действие для мягких мод в модели SYK (отметим, что мы перешли к непрерывному пределу):

$$S_{SYK, \mathbf{r}}^{(F, \varphi)} = \sum_{\sigma} \sigma \int du \left\{ -C_E Sch \left( e^{F_\sigma(u, \mathbf{r})}, u \right) + C_Q \left( \varphi'_\sigma(u, \mathbf{r}) - \mathcal{E} F'_\sigma(u, \mathbf{r}) + \mathcal{E} \right)^2 \right\} \quad (4.15)$$

Константы в действии выражаются следующим образом через параметры модели

$$C_E = N\alpha_s \frac{2\pi T}{JV_0} \quad C_Q = NK \frac{2\pi T}{JV_0} \quad (4.16)$$

Где  $K \approx 1.04$  см. [19] и  $V_0$  это объём системы приходящийся на одну гранулу. Второй член в действии  $S_{soft}$  связан с квадратичным возмущением и туннелированием.

Наш следующий шаг состоит в том, чтобы вставить в действии для модели SYK источники. Потенциал Латинжера  $L(u)$  может быть вставлен в действии с помощью ре-параметризации, так как по теореме Нётер плотность энергии - результат вариации по ре-параметризации времени действия. Рассмотрим замену поля  $F(u)$  на  $F(\tilde{u})$ , где  $\tilde{u} = u - \int^u du' L(u')$ . В результате, мы можем записать действие (4.15) используя новую переменную:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{SYK,\mathbf{r}}^{(F,\varphi)} &= \sum_{\sigma} \sigma \int du \left\{ -C_E Sch(e^{F_{\sigma}(\tilde{u},\mathbf{r})}, u) \right. \\ &\quad \left. + C_Q (\partial_u \varphi_{\sigma}(\tilde{u},\mathbf{r}) - \mathcal{E} \partial_u F_{\sigma}(\tilde{u},\mathbf{r}) + \mathcal{E})^2 \right\} \approx \\ &\quad \sum_{\sigma} \sigma \int d\tilde{u} \left[ \frac{d\tilde{u}}{u} \right] \left\{ -C_E Sch(e^{F_{\sigma}(\tilde{u},\mathbf{r})}, \tilde{u}) \right. \\ &\quad \left. + C_Q (\partial_{\tilde{u}} \varphi_{\sigma}(\tilde{u},\mathbf{r}) - \mathcal{E} \partial_{\tilde{u}} F_{\sigma}(\tilde{u},\mathbf{r}) + \mathcal{E} \frac{du}{d\tilde{u}})^2 \right\} \approx \\ &\quad \sum_{\sigma} \sigma \int d\tilde{u} (1 - L(\tilde{u})) \left\{ -C_E Sch(e^{F_{\sigma}(\tilde{u},\mathbf{r})}, \tilde{u}) \right. \\ &\quad \left. + C_Q (\partial_{\tilde{u}} \varphi_{\sigma}(\tilde{u},\mathbf{r}) - \mathcal{E} \partial_{\tilde{u}} F_{\sigma}(\tilde{u},\mathbf{r}) + \mathcal{E} (1 + L(\tilde{u})))^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Знак " $\approx$ " обозначает что мы сохраняем только линейные члены по  $L(u)$ , ниже будет понятно, почему это достаточно.

#### 4.4 Квадратичное действие для мягких мод

Теперь мы рассмотрим квадратичное по малым флуктуаций полей  $F$  и  $\varphi$  действие. Малость этих флуктуаций определена соотношением:

$$F_\sigma(u, \mathbf{r}) = u + f_\sigma(u, \mathbf{r}) \quad f'_\sigma(u, \mathbf{r}) \ll 1 \quad \varphi'_\sigma(u, \mathbf{r}) \ll 1. \quad (4.18)$$

Мы разложим действие (4.14) до второго порядка по флуктуациям  $f$  и  $\varphi$  аналогично тому как это было сделано в предыдущих главах. В результате мы получим следующее действие в Фурье представлении:

$$\begin{aligned} S_{final} = & \frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{p}d\Omega}{(2\pi)^{d+1}} \left( \hat{\varphi}_{\mathbf{p},\Omega} - \mathcal{E}(\hat{f}_{\mathbf{p},\Omega} - \frac{i}{\Omega} \hat{L}_{\mathbf{p},\Omega}) \right)^\dagger \left[ \hat{\mathcal{G}}_0^{(\varphi)}(\Omega) \right]^{-1} \times \\ & \left( \hat{\varphi}_{\mathbf{p},\Omega} - \mathcal{E}(\hat{f}_{\mathbf{p},\Omega} - \frac{i}{\Omega} \hat{L}_{\mathbf{p},\Omega}) \right) \\ & + \frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{p}d\Omega}{(2\pi)^{d+1}} \left( \hat{f}_{\mathbf{p},\Omega} - \frac{i}{\Omega} \hat{L}_{\mathbf{p},\Omega} \right)^\dagger \left[ \hat{\mathcal{G}}_0^{(f)}(\Omega) \right]^{-1} \left( \hat{f}_{\mathbf{p},\Omega} - \frac{i}{\Omega} \hat{L}_{\mathbf{p},\Omega} \right)^\dagger \\ & - \frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{p}d\Omega}{(2\pi)^{d+1}} \left\{ \left( \hat{f}_{\mathbf{p},\Omega} - \frac{2i}{\Omega} \hat{L}_{\mathbf{p},\Omega} \right)^\dagger \hat{\Sigma}^{(f)}(\Omega) \left( \hat{f}_{\mathbf{p},\Omega} - \frac{2i}{\Omega} \hat{L}_{\mathbf{p},\Omega} \right) \right. \\ & \quad \left. + \hat{f}_{\mathbf{p},\Omega}^\dagger \left[ \hat{\Sigma}_t^{(f)}(\Omega, \mathbf{p}) - \hat{\Sigma}_t^{(f)}(\Omega, \mathbf{0}) \right] \hat{f}_{\mathbf{p},\Omega} \right\} \\ & - \frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{p}d\Omega}{(2\pi)^{d+1}} \left\{ \hat{L}_{\mathbf{p},\Omega}^\dagger \hat{\Sigma}_t^{(L,f)}(\Omega, \mathbf{p}) \hat{f}_{\mathbf{p},\Omega} + \hat{f}_{\mathbf{p},\Omega}^\dagger \hat{\Sigma}_t^{(f,L)}(\Omega, \mathbf{p}) \hat{L}_{\mathbf{p},\Omega} + \hat{L}_{\mathbf{p},\Omega}^\dagger \hat{\Sigma}^{(L,L)}(\Omega, \mathbf{p}) \hat{L}_{\mathbf{p},\Omega} \right\} \\ & - \frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{p}d\Omega}{(2\pi)^{d+1}} \left( \hat{\varphi}_{\mathbf{p},\Omega} - \mathcal{E} \hat{f}_{\mathbf{p},\Omega} + \hat{\varphi}_{\mathbf{p},\Omega}^{(U)} \right)^\dagger \hat{\Sigma}_t^{(\varphi)}(\Omega, \mathbf{p}) \left( \hat{\varphi}_{\mathbf{p},\Omega} - \mathcal{E} \hat{f}_{\mathbf{p},\Omega} + \hat{\varphi}_{\mathbf{p},\Omega}^{(U)} \right) \quad (4.19) \end{aligned}$$

Здесь  $d$  размерность нашей задачи. Мы упорядочили все наши компоненты полей и источников в вектора, состоящие из двух компонент (классической и квантовой). Например:

$$\varphi_{\mathbf{p},\Omega}^+ = \varphi_{\mathbf{p},\Omega}^{(cl)} + \frac{\varphi_{\mathbf{p},\Omega}^{(q)}}{2} \quad \varphi_{\mathbf{p},\Omega}^- = \varphi_{\mathbf{p},\Omega}^{(cl)} - \frac{\varphi_{\mathbf{p},\Omega}^{(q)}}{2}. \quad (4.20)$$

Матрицы  $\hat{\Sigma}$  и  $\left[ \hat{\mathcal{G}}_0^{(\varphi)}(\Omega) \right]^{-1}$  имеют одинаковую матричную структуру следующего вида:

$$\hat{M}_{\mathbf{p},\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & M_{(A)}(\mathbf{p},\Omega) \\ M_{(R)}(\mathbf{p},\Omega) & M_{(K)}(\mathbf{p},\Omega) \end{pmatrix} \quad M_{(A)}(\mathbf{p},\Omega) = M_{(R)}(\mathbf{p}, -\Omega) \\ (M_{(R)}(\mathbf{p},\Omega) - M_{(A)}(\mathbf{p},\Omega)) \coth(\pi\Omega) = \frac{1}{2}M_{(K)}(\mathbf{p},\Omega) \quad (4.21)$$

Последняя строка выражает флуктуационно-диссипативную теорему. Таким образом достаточно выписать лишь запаздывающую компоненту данных матриц, а все остальные можно восстановить с учётом свойств выше. Запаздывающие части соответствующих матриц имеют вид:

$$\left[ \hat{\mathcal{G}}_0^{(\varphi)}(\Omega) \right]_{(R)}^{-1} = \left[ \mathcal{G}_{0,(R)}^{(\varphi)}(\Omega) \right]^{-1} = C_Q \Omega^2 \quad \left[ \mathcal{G}_{0,(R)}^{(f)}(\Omega) \right]^{-1} = C_E \Omega^2 (\Omega^2 + 1) \\ \Sigma_{(R)}^{(f)}(\Omega) = \frac{C_\Gamma}{2} \Omega^2 \psi(\Omega) + \Sigma_{t,(R)}^{(f)}(\Omega, \mathbf{0}) \\ \Sigma_{t,(R)}^{(\varphi)}(\Omega, \mathbf{p}) = 8C_w \sum_{\delta\mathbf{r}} \left( \frac{\mathbf{p}\delta\mathbf{r}}{2} \right)^2 (\psi(\Omega) + 2) \\ \Sigma_{t,(R)}^{(f)}(\Omega, \mathbf{p}) = \frac{C_w}{2} \sum_{\delta\mathbf{r}} \left\{ \Omega^2 \psi(\Omega) + \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{p}\delta\mathbf{r}}{2} \right)^2 (2(1 + \Omega^2) + (1 + 2\Omega^2)\psi(\Omega)) \right\} \\ \Sigma_{t,(R)}^{(f,L)}(\Omega, \mathbf{p}) = -\Sigma_{t,(R)}^{(L,f)}(\Omega, \mathbf{p}) = C_w \sum_{\delta\mathbf{r}} i\Omega \left( \frac{\mathbf{p}\delta\mathbf{r}}{2} \right)^2 \psi(\Omega) \quad (4.22)$$

Здесь мы ввели две функции  $\psi(\Omega)$  и  $\tilde{\psi}(\Omega)$ , а также константы  $C_\Gamma$ ,  $C_w$ , которые определены как:

$$\psi(\Omega) = \Psi\left(\frac{1}{2} - i\Omega\right) - \Psi\left(-\frac{1}{2}\right); \quad \tilde{\psi}(\Omega) \equiv \psi(\Omega) + 2; \quad \Psi(z) = \ln'(\Gamma(z)) \\ C_\Gamma = \frac{N}{4\pi V_0} \frac{\Gamma^2}{JT} \sqrt{b} \quad C_w = \frac{N}{2\pi V_0} \frac{w^2}{JT} \sqrt{b}. \quad (4.23)$$

Мы будем предполагать, что решётка кубическая. Поэтому удобно ввести новые обозначения:

$$\tilde{C}_w \equiv C_w \sum_{\delta\mathbf{r}} 1 = 2dC_w; \quad \tilde{\sigma} \equiv C_w \frac{1}{p^2} \sum_{\delta\mathbf{r}} \left( \frac{\mathbf{p}\delta\mathbf{r}}{2} \right)^2 = C_w \frac{a^2}{2} \quad (4.24)$$

Здесь  $d$  размерность решётки и  $a$  - её постоянная.

Выражения выше для квадратичной части действия для мягких мод в присутствии источников являются главным результатом этой секции. В дальнейшем мы будем использовать это действие для вычисления кинетических свойств системы.

## 4.5 Электрический и тепловой транспорт в случае произвольной частоты

### 4.5.1 Уравнения непрерывности

Наша цель в этой секции получить выражения для токов, которые возникают в результате приложения внешних полей. Мы начнём наш вывод с записи уравнений непрерывности. Уравнения непрерывности являются частью седловых уравнений, которые выполнены т.к.  $N \gg 1$ . Для получения седловых уравнений мы должны вычислить вариацию действия (4.19) по полям  $\varphi$  и  $f$ . С другой стороны, согласно теореме Нётер, уравнения непрерывности могут быть получены с помощью вариации действия по параметрам локально задающим преобразование симметрии, а именно по:  $\tilde{\varphi}$  (калибровочная симметрия) и  $\tilde{f}$  (трансляционная инвариантность по времени), которых входят в действие линейно с полями  $\varphi$  и  $f$ . Поэтому седловые уравнения совпадают с уравнениями непрерывности. Поскольку в уравнения непрерывности источники входят линейно, нам было важно сохранить эти члены в действии, в то время как о членах более высокого порядка мы не заботились.

Варьируя действия по  $\varphi^{(q)}$  мы получаем уравнения непрерывности для зарядовой плотности в виде:

$$0 = -\frac{\delta S_{final}}{\delta \varphi_{\mathbf{p},\Omega}^{(q)\dagger}} = -\left[\mathcal{G}_{0,(R)}^{(\varphi)}(\Omega)\right]^{-1} \left(\varphi_{\mathbf{p},\Omega}^{(cl)} - \mathcal{E}(f_{\mathbf{p},\Omega}^{(cl)} - \frac{i}{\Omega}L_{\mathbf{p},\Omega})\right) + \Sigma_{t,(R)}^{(\varphi)}(\Omega, \mathbf{p}) \left(\varphi_{\mathbf{p},\Omega}^{(cl)} - \mathcal{E}f_{\mathbf{p},\Omega}^{(cl)} + \varphi_{\mathbf{p},\Omega}^{(U)}\right) \quad (4.25)$$

Аналогичным образом мы можем написать седловое уравнение для плотности энергии, варьируя по  $f^{(q)}$ :

$$0 = -\frac{\delta S_{final}}{\delta f_{\mathbf{p},\Omega}^{(q)\dagger}} = \mathcal{E} \frac{\delta S_{final}}{\delta \varphi_{\mathbf{p},\Omega}^{(q)\dagger}} - \left[\mathcal{G}_{0,(R)}^{(f)}(\Omega)\right]^{-1} \left(f_{\mathbf{p},\Omega}^{(cl)} - \frac{i}{\Omega}L_{\mathbf{p},\Omega}\right) + \Sigma_{(R)}^{(f)}(\Omega) \left(f_{\mathbf{p},\Omega}^{(cl)} - \frac{2i}{\Omega}L_{\mathbf{p},\Omega}\right) + \left[\Sigma_{t,(R)}^{(f)}(\Omega, \mathbf{p}) - \Sigma_{t,(R)}^{(f)}(\Omega, \mathbf{0})\right] f_{\mathbf{p},\Omega}^{(cl)} + \Sigma_{t,(R)}^{(f,L)}(\Omega, \mathbf{p})L_{\mathbf{p},\Omega} \quad (4.26)$$

Выражения (4.25,4.25) выглядят проще в новых переменных

$$V_{\mathbf{p},\Omega} \equiv -i\Omega \left( \varphi_{\mathbf{p},\Omega}^{(cl)} - \mathcal{E} f_{\mathbf{p},\Omega}^{(cl)} \right) \quad \tau_{\mathbf{p},\Omega} \equiv -i\Omega f_{\mathbf{p},\Omega}^{(cl)} \quad (4.27)$$

Используя эти переменные, мы запишем уравнения (4.25,4.26), в виде:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\delta S_{final}}{\delta \varphi_{\mathbf{p},\Omega}^{(q)\dagger}} = -iC_Q \Omega (V_{\mathbf{p},\Omega} + \mathcal{E} L_{\mathbf{p},\Omega}) + 8\tilde{\sigma} p^2 \frac{\tilde{\psi}(\Omega)}{-i\Omega} (V_{\mathbf{p},\Omega} + U_{\mathbf{p},\Omega}) \\ 0 &= -\frac{\delta S_{final}}{\delta f_{\mathbf{p},\Omega}^{(q)\dagger}} = \mathcal{E} \frac{\delta S_{final}}{\delta \varphi_{\mathbf{p},\Omega}^{(q)\dagger}} - iC_E \Omega (\Omega^2 + 1) (\tau_{\mathbf{p},\Omega} - L_{\mathbf{p},\Omega}) \\ &+ \frac{C_\Gamma}{2} i\Omega \psi(\Omega) (\tau_{\mathbf{p},\Omega} - 2L_{\mathbf{p},\Omega}) + \frac{\tilde{\sigma}}{4} p^2 \left( \left( (\Omega^2 + 1) \frac{\tilde{\psi}(\Omega)}{-i\Omega} + i\Omega \psi(\Omega) \right) \tau_{\mathbf{p},\Omega} + i4\Omega \psi(\Omega) L_{\mathbf{p},\Omega} \right) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Аналогичным образом, с помощью вариации по градиентам полей, мы можем получить выражение для токов заряда и энергии соответственно:

$$j_{\mathbf{p},\omega}^{(Q),\alpha} = -\frac{\delta S_{final}}{\delta (ip^\alpha f_{\mathbf{p},\Omega}^{(q)})^\dagger} \quad j_{\mathbf{p},\omega}^{(E),\alpha} = -\frac{\delta S_{final}}{\delta (ip^\alpha \varphi_{\mathbf{p},\Omega}^{(q)})^\dagger} \quad (4.29)$$

Используя эти выражения и решая уравнения непрерывности (4.28) мы найдём следующие выражения для токов через электрическое поле  $\nabla U$  и градиент потенциала Латинжера  $\nabla L$  в виде:

$$\begin{pmatrix} j_{\mathbf{p},\omega}^{(Q),\alpha} \\ j_{\mathbf{p},\omega}^{(E),\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma(\mathbf{p},\Omega) e^2 & -2\pi \mathcal{E} e \sigma(\mathbf{p},\Omega) \\ -2\pi \mathcal{E} e T \sigma(\mathbf{p},\Omega) & \tilde{\kappa}(\mathbf{p},\Omega) + (2\pi \mathcal{E})^2 T \sigma(\mathbf{p},\Omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -ip^\alpha U_{\mathbf{p},\omega} \\ -ip^\alpha T L_{\mathbf{p},\omega}^{(cl)} \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

Здесь  $e$  заряд фермиона; напомним также что  $\Omega = \omega/2\pi T$ . Левый верхний угол матрицы в выражении (4.30) показывает что проводимость системы как функция частоты и импульса определяется функцией  $e^2 \sigma(\omega, p)$ , которая имеет вид:

$$\sigma(\mathbf{p},\Omega) = \frac{8\tilde{\sigma} \tilde{\psi}(\Omega) C_Q}{-iC_Q \Omega + 8\tilde{\sigma} p^2 \frac{\tilde{\psi}(\Omega)}{-i\Omega}} \quad (4.31)$$

Напомним, что постоянные  $C_Q$  и  $\tilde{\sigma}$  были введены в (4.16) и (4.24) соответственно.

Выражения для теплопроводности (нижний правый элемент в матрице в выражении (4.30)) содержит два члена. Первый из них описывает транспорт тепла в отсутствие транспорта заряда (далее мы будем называть его "внутренним"), это выражение имеет вид:

$$\frac{\tilde{\kappa}(\mathbf{p}, \Omega)}{\tilde{\sigma} T \pi^2} = \frac{\left[ C_E(\Omega^2 + 1) - \tilde{C}\psi(\Omega) \right] \left( (\Omega^2 + 1)\tilde{\psi}(\Omega) + 5\Omega^2\psi(\Omega) \right) + 2\Omega^2\psi^2(\Omega)C_\Gamma}{-iC_E\Omega(\Omega^2 + 1) + \frac{\tilde{C}}{2}i\Omega\psi(\Omega) + \frac{\tilde{\sigma}}{4}p^2 \left( (\Omega^2 + 1)\frac{\tilde{\psi}(\Omega)}{-i\Omega} + i\Omega\psi(\Omega) \right)} \quad (4.32)$$

Где мы ввели новую постоянную  $\tilde{C}$ , см.(4.23):

$$\tilde{C} \equiv C_\Gamma + \tilde{C}_w = \frac{N\sqrt{b}}{4\pi V_0 J T} (\Gamma^2 + 4dw^2) \quad (4.33)$$

Второй член в нижнем правом углу матрицы из (4.30)) связан с транспортом заряда. Полная теплопроводность имеет вид:

$$\kappa(\mathbf{p}, \Omega) = \tilde{\kappa}(\mathbf{p}, \Omega) + (2\pi\mathcal{E})^2 T \sigma(\mathbf{p}, \Omega) \quad (4.34)$$

Наконец, члены стоящие вне главной диагонали определяют коэффициент Зеебека в нашей системе, который равен:

$$\mathcal{S} = -\frac{2\pi\mathcal{E}}{e} = -\frac{\partial S}{\partial Q} \quad (4.35)$$

где  $S$  энтропия системы. Этот результат был получен в работах [19; 34]. Далее мы рассмотрим два случая (низких  $\omega \ll T$  и высоких  $\omega \gg T$ ) частот. В каждом из них выражения для кинетических коэффициентов существенно упрощаются.

### 4.5.2 Гидродинамический режим

В режиме  $\omega \ll T$  в системе наблюдается детальное равновесие. В этой режиме проводимость и "внутренняя" теплопроводность имеют вид:

$$\sigma(\mathbf{p}, \Omega) = (2\pi)^2 \tilde{\sigma} \frac{-i\Omega C_Q}{-iC_Q\Omega + (2\pi)^2 \tilde{\sigma} p^2} \quad \tilde{\kappa}(\mathbf{p}, \Omega) = (2\pi)^2 \tilde{\sigma} T \frac{\pi^2}{8} \frac{-i\Omega [C_E + 2\tilde{C}]}{-i(C_E + \tilde{C})\Omega + \frac{\tilde{\sigma}\pi^2}{8} p^2} \quad (4.36)$$

Однородная статическая проводимость системы:

$$\sigma_0 = \sigma(\mathbf{0}, \Omega \rightarrow 0) = \pi \sqrt{b} \frac{N}{V_0} \frac{w^2}{JT} a^2. \quad (4.37)$$

Закон дисперсии проводимости и теплопроводности как функции импульса и частоты показывает диффузное поведение с коэффициентами диффузии (зарядовой и энергетической соответственно):

$$D_e = \sigma_0 \left[ \frac{\partial Q}{\partial \mu} \right]^{-1} \propto \frac{1}{T} \quad (4.38)$$

$$D_T = T \sigma_0 \frac{\pi}{16} [C_E + \tilde{C}]^{-1} \propto T \quad \text{at } T \ll \Gamma, \quad (4.39)$$

Число Лоренца  $L$ , определённое отношением теплопроводности к проводимости и температуре, в пределе нулевой частоты и импульса даётся следующей формулой (см. (4.36), (4.34), (4.16) и (4.24) ) :

$$L = \frac{\kappa(\mathbf{0}, 0)}{\sigma(\mathbf{0}, 0)} + (2\pi\mathcal{E})^2 = \frac{\pi^2}{8} \frac{C_E + 2\tilde{C}}{C_E + \tilde{C}} + (2\pi\mathcal{E})^2 = \frac{\pi^2}{8} \frac{\alpha_s + \sqrt{b} \frac{\Gamma^2 + 4dw^2}{(2\pi T)^2}}{\alpha_s + \frac{\sqrt{b}}{2} \frac{\Gamma^2 + 4dw^2}{(2\pi T)^2}} + (2\pi\mathcal{E})^2 \quad (4.40)$$

При относительно высоких температурах  $T \geq \Gamma$  теплоёмкость системы мало отличается от теплоёмкости модели SYK, в этом пределе  $C_E \gg C_\Gamma$ , и отношение Лоренца совпадают с результатами работы [37],  $L = \pi^2/8 + (2\pi\mathcal{E})^2$ . Однако, при низких температурах  $T \ll \Gamma$  теплоёмкость определяется вкладом связанным с квадратичным возмущением и туннелированием,  $C_\Gamma \gg C_E$ , в таком случае отношение Лоренца имеет вид:

$$L = \frac{\pi^2}{4} + (2\pi\mathcal{E})^2 \quad (4.41)$$

Таким образом изменение отношения Лоренца происходит при температурах  $T \sim \Gamma \gg T_{FL}$ . При таких температурах изменение седлового решение малое и весь найденный нами эффект связан с флуктуациями мягкой моды. При низких температурах  $T \leq T_{FL}$  это отношение принимает вид характерный для ферми жидкости:  $L_{FL} = \frac{\pi^2}{3}$ .

### 4.5.3 Высокочастотный режим

Время релаксации в нашей системе не превышает обратную температуру:  $1/\tau_{\text{inel}} \leq T$  поэтому при частоте  $\omega \gg T$  в системе нет локального равновесия. В этом режиме, мы обнаружили, исходя из поведения проводимости существование "почти" звуковых волн, напоминающих нулевой звук в ферми-жидкости, несмотря на абсолютно другую природу нашей системы.

Электрическая проводимость в этом режиме имеет вид:

$$\sigma(\mathbf{p}, \Omega) = 8\tilde{\sigma}C_Q \frac{i\Omega\psi(\Omega)}{C_Q\Omega^2 - 8\tilde{\sigma}p^2\psi(\Omega)} \quad \psi(\Omega) \approx \ln(|\Omega|) - i\frac{\pi}{2}\text{sign}(\Omega) \quad (4.42)$$

При  $\Omega \gg 1$  вещественная часть функции  $\psi(\Omega)$  намного большей мнимой, в результате затухание волн, спектр которых определяется полюсом проводимости из выражения (4.42), мало. Уравнение на спектр этих волн имеет вид:

$$\omega^2(p) = s^2 p^2 \ln\left(\frac{sp}{T}\right) \quad s = T \sqrt{8\frac{\sigma_0}{C_Q}} \quad (4.43)$$

Постоянная  $C_Q$  пропорциональна сжимаемости системы см. (4.16). Подстановка выражений (4.37) и (4.16) в выражение (4.43) показывает, что характерная скорость волн  $s$  не зависит от температуры:

$$s = \frac{2b^{1/4}}{K^{1/2}}aw \quad (4.44)$$

Для выполнения условия  $\omega \sim sp \gg T$ , температура системы должна быть достаточно малой,  $T \ll w$ . Отметим также что скорость  $s$  не зависит от наибольшего масштаба энергии  $J$  в системе, похожую ситуацию мы видели в предыдущей главе: частота резонанса не зависела от масштаба  $J$ .

"Внутренняя" теплопроводность в данном режиме имеет вид:

$$\tilde{\kappa}(\mathbf{p}, \Omega) = 6\tilde{\sigma}T\pi^2\psi(\Omega) \frac{i\Omega \left[ C_E\Omega^2 - (\tilde{C} - \frac{1}{3}C_\Gamma)\psi(\Omega) \right]}{C_E\Omega^2 - \frac{\tilde{C}}{2}\psi(\Omega) - \frac{\tilde{\sigma}}{2}p^2\psi(\Omega)} \quad (4.45)$$

Это выражение, как функция частоты содержит полюса который достаточны близки к резонансной частоте (см. также 3.11 ) которая в данной системе определена как

$$\Omega_0^2 = \frac{\tilde{C}}{2C_E} \ln(|\Omega_0|) \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \frac{b^{1/4}}{2\sqrt{\alpha_S}} \left[ (\Gamma^2 + 4dw^2) \ln \frac{\omega_0}{2\pi T} \right]^{1/2} \quad (4.46)$$

Скорость поглощения и закон дисперсии могут быть записаны в следующем виде. Полагая близость частоты к резонансной, мы можем записать:  $\omega_{th}(p) \equiv \text{sign}(\omega)\omega_0 + \delta\omega_{th}(p)$  :

$$\delta\omega_{th}(p) = -\frac{i\pi}{4} \frac{\omega_0}{\ln\left(\frac{\omega_0}{2\pi T}\right)} + \frac{\text{sign}(\omega)\sigma_0\omega_0}{8\pi^2 C} p^2 \quad (4.47)$$

Где  $C = C_E + \tilde{C}$ .

Эта мода непосредственно связана с резонансом, обнаруженным нами в предыдущей главе.

## 4.6 Заключение

В этой главе мы изучали систему квантовых точек с туннелированием, динамика внутри точек описывается гамильтонианом SYK с квадратичным возмущением. Мы нашли кинетические коэффициенты в данной модели как функции частоты и импульса. Мы показали что в системе есть два режима поведения:

низкочастотный и высокочастотный. Низкочастотный режим соответствует локальному равновесию и распространение заряда и энергии имеет диффузионный характер. В высокочастотном пределе затухание мало и в системе способны распространяться возмущения с почти линейным законом дисперсии связанные с переносом заряда. Нами также было показано существование резонанса в поведении теплопроводности.

## Глава 5. Эффект бабочки в модели SYK

### 5.1 Введение

В этой главе мы будем изучать аномально упорядоченный во времени коррелятор (out-of-time ordered correlation function, ОТОС) в модели аналогичной рассмотренной в предыдущей главе. Этот коррелятор описывает свойства распространения информации о приложенном возмущении. Мы покажем что в данной задаче она распространяется баллистически и найдём скорость распространения.

### 5.2 Модель и основные свойства.

Гамильтониан нашей модели имеет следующий вид:

$$H = \sum_{\mathbf{r}} \left\{ H_{\mathbf{r}} + i \sum_{\delta \mathbf{r}} \sum_{i,j} w_{\mathbf{r},i;\mathbf{r}+\delta \mathbf{r},j} \chi_{\mathbf{r},i} \chi_{\mathbf{r}+\delta \mathbf{r},j} \right\},$$

$$H_{\mathbf{r}} = \frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,l} J_{i,j,k,l;\mathbf{r}} \chi_{\mathbf{r},i} \chi_{\mathbf{r},j} \chi_{\mathbf{r},k} \chi_{\mathbf{r},l}. \quad (5.1)$$

Здесь  $\chi_{\mathbf{r}}$  – майорановские фермионы. Выбор майорановских фермионов не влияет на те свойства, которые мы будем описывать.

Компоненты тензоры  $w$  антисимметричны по индексам и являются случайными гауссовыми независимыми величинами с нулевым средним и дисперсией определяемой выражением:

$$\langle w_{\mathbf{r},i;\mathbf{r}+\delta \mathbf{r},j}^2 \rangle = \frac{w^2}{N}. \quad (5.2)$$

Мы предполагаем, что характерный масштаб взаимодействия внутри гранул много больше чем характерная амплитуда туннелирования т.е.  $J \gg w$ .

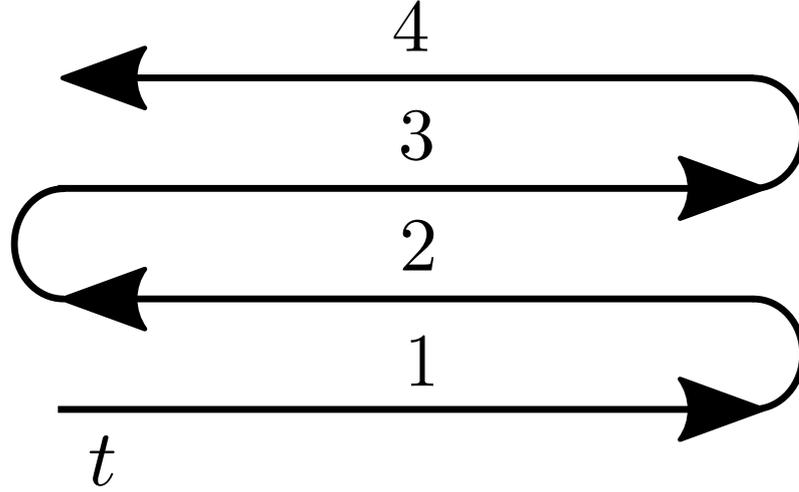


Рисунок 5.1 — Контур интегрирования для действия состоит из четырёх частей две из которых идут вперёд во времени а две назад

Для вычисления ОТОС нам придётся воспользоваться двойным контуром Келдыша (Рис. 5.1). Технические детали работы с таким контуром описаны в работах [10; 14].

Нам также понадобится различать поля определённые на разных частях контура, для этого мы введём индекс  $\sigma \in \{1,2,3,4\}$ . Тогда коррелятор, который нас интересует, будет иметь вид:

$$F(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{1}{N^2} \sum_{i, i'} \langle T_C \chi_{\mathbf{r}_1, i}^{(1)}(t_1) \chi_{\mathbf{r}_2, i'}^{(2)}(t_2) \chi_{\mathbf{r}_1, i}^{(3)}(t_3) \chi_{\mathbf{r}_2, i'}^{(4)}(t_4) \rangle \quad (5.3)$$

Здесь символ  $T_C$  - обозначает упорядочение операторов вдоль контура. Мотивация работы с такими корреляторами была изложена во введении. Действие на контуре имеет вид:

$$S = \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} \int dt \left\{ \sum_{\mathbf{r}, i} \frac{1}{2} \chi_{\mathbf{r}, i}^{(\sigma)}(t) \partial_t \chi_{\mathbf{r}, i}^{(\sigma)}(t) - H^{(\sigma)}(t) \right\}. \quad (5.4)$$

Здесь  $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1 = -\varepsilon_2 = -\varepsilon_4$  - знак "направления времени" соответствующей части двойного контура. В этой главе мы сразу запишем действие для мягких мод в этой модели:

$$S = -C_J \sum_{\mathbf{r}, \sigma} \varepsilon_\sigma \int du \text{Sch}\{e^{f_{\sigma, \mathbf{r}}, u}\} - C_w \sum_{\delta \mathbf{r}, \mathbf{r}, \sigma_1, \sigma_0} \int du_1 du_0 \varepsilon_{\sigma_1} \varepsilon_{\sigma_0} g_{\sigma_1 \sigma_0}^{(f)}(u_1, u_0 | \mathbf{r}) g_{\sigma_1 \sigma_0}^{(f)}(u_1, u_0 | \mathbf{r} + \delta \mathbf{r}). \quad (5.5)$$

Где  $C_J = \alpha_S N \frac{2\pi T}{J}$  и  $C_w = \frac{Nw^2}{4\pi JT}$  - теплоёмкость модели SYK и вклада в теплоёмкость от квадратичных членов соответственно,  $\alpha_S \approx 0.05$ . Поле  $g^{(f)}$  (при  $u_1 - u_2 > 0$ ) определено как :

$$g_{\sigma_1, \sigma_2}^{(f)}(u_1, u_0 | \mathbf{r}) = [f'_{\sigma_1, \mathbf{r}}(u_1) f'_{\sigma_0, \mathbf{r}}(u_0)]^\Delta \times g_{\sigma_1 \sigma_0}(f_{\sigma_1, \mathbf{r}}(u_1) - f_{\sigma_0, \mathbf{r}}(u_0)). \quad (5.6)$$

Функция  $g$  связана с фермионной функцией Грина. Функция Грина является матрицей  $4 \times 4$ , однако, вычисляя её в равновесии мы можем восстановить всю матрицу зная матричные элементы для  $\sigma \in \{1, 2\}$ . Таким образом интересующая нас часть функции Грина (блок с индексами 1,2) имеет следующий вид:

$$G_{\sigma_1 \sigma_0}^{(0)}(u_1, u_0 | \mathbf{r}) = b^\Delta g_{\sigma_1 \sigma_0}(u_1 - u_0), \\ g_{\sigma_1 \sigma_0}(u > 0) \equiv i \left[ \frac{s'_{(0)}(u_1) s'_{(0)}(u_0)}{(s_{(0)}(u_1) - s_{(0)}(u_0))^2} \right]^\Delta \begin{pmatrix} -e^{-i\pi\Delta} & e^{i\pi\Delta} \\ -e^{-i\pi\Delta} & e^{i\pi\Delta} \end{pmatrix}_{\sigma_1 \sigma_0} \quad (5.7)$$

Тут функция  $s_0(u) = e^u$ , такая форма записи обусловлена дальнейшими выкладками. Решение при  $u < 0$  может быть получено с помощью симметрии функции Грина:  $g_{\sigma_1 \sigma_0}(u) = -g_{\sigma_0 \sigma_1}(-u)$ . Группа симметрий уравнений превосходит группу симметрий данного решения, которая задана преобразованиями вида:

$$s_0(u) \mapsto s(u) = \frac{as_0(u) + b}{cs_0(u) + d}. \quad (5.8)$$

Одно из важных свойств производной Шварца, которая имеется в действии нашей модели, следующее: при замене  $s$  на дробно-линейное преобразование от  $s$  величина производной не изменится. Коррелятор который мы пла-

нируем вычислять имеет следующий вид, с учётом введённых обозначений:

$$\tilde{F}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \frac{\langle T_C g_{1,3}^{(f)}(u_1, u_3 | \mathbf{r}_1) g_{2,4}^{(f)}(u_2, u_4 | \mathbf{r}_2) \rangle}{\langle g_{1,3}^{(f)}(u_1, u_3 | \mathbf{r}_1) \rangle \langle g_{2,4}^{(f)}(u_2, u_4 | \mathbf{r}_2) \rangle}. \quad (5.9)$$

Мы будем работать с квадратичным действием, которое применимо при  $w \gg \frac{J}{N}$  [8; 22]. В противном случае наше рассмотрение ограничено временами  $t \ll \frac{N}{J}$  [7]. Далее мы займёмся вычислением ОТОС.

### 5.3 Поведение ОТОС на больших временах

Основная идея главы состоит в рассмотрении следующего анзаца для поля  $f(u)$ :

$$e^{f(u)} = \frac{e^u + a(u)}{b(u)e^u + 1}. \quad (5.10)$$

Где  $a(u)$  и  $b(u)$ - медленные функции. Используя такую подстановку мы можем написать выражение для поля  $g$  которое следует из выражения ниже (мы пренебрегаем производными полей  $a$  и  $b$  в силу предположения о их медленности):

$$4 \sinh^2 \left( \frac{u_1 - u_0}{2} \right) \frac{f'_{\sigma_1, \mathbf{r}}(u_1) f'_{\sigma_0, \mathbf{r}}(u_0)}{4 \sinh^2 \left( \frac{f_{\sigma_1, \mathbf{r}}(u_1) - f_{\sigma_0, \mathbf{r}}(u_0)}{2} \right)} \approx \left[ 1 + 2 \frac{a_{\sigma_1, \mathbf{r}}(u_1) - a_{\sigma_0, \mathbf{r}}(u_0)}{e^{u_1} - e^{u_0}} + 2 \frac{b_{\sigma_1, \mathbf{r}}(u_1) - b_{\sigma_0, \mathbf{r}}(u_0)}{e^{-u_1} - e^{-u_0}} \right]^{-1} \quad (5.11)$$

В выражение выше мы оставили только линейные члены по  $a$  или  $b$  с экспоненциально растущими коэффициентами, так как эти поля малы ( $a, b \propto N^{-1/2}$ ). Однако, умножив их на экспоненциально большие множители мы получим комбинацию, которая не мала. Для дальнейшей работы нам понадобится вспомогательный интеграл:

$$a^{-\gamma} = \int_0^{\infty} s^{\gamma-1} e^{-sa} \frac{ds}{\Gamma(\gamma)}. \quad (5.12)$$

Используя (5.12) дважды мы можем записать интересующий нас коррелятор в виде:

$$\begin{aligned}\tilde{F}(u_1, u_2, u_3, u_4) &= \int_0^\infty \frac{ds_o ds_e}{\Gamma(2\Delta)^2} (s_o s_e)^{2\Delta-1} e^{-s_e - s_o} \langle e^{iS_J} \rangle \\ S_J &= \sum_{\mathbf{r}} \int du \left( \hat{j}_{a,\mathbf{r}}^T(u) \hat{a}_{\mathbf{r}}(u) + \hat{j}_{b,\mathbf{r}}^T(u) \hat{b}_{\mathbf{r}}(u) \right)\end{aligned}\quad (5.13)$$

Выше мы ввели столбцы  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$  состоящие из полей  $a$  и  $b$  соответственно. Эти столбцы имеют по 4 компоненты в соответствии с ветвями контура. Столбец  $\hat{j}_a$  имеет следующий вид:

$$\hat{j}_a = -i \begin{pmatrix} \frac{-2s_o \delta(u-u_1) \delta_{\mathbf{r},\mathbf{r}_1}}{e^{u_1} - e^{u_3}} \\ \frac{-2s_e \delta(u-u_2) \delta_{\mathbf{r},\mathbf{r}_2}}{e^{u_2} - e^{u_4}} \\ \frac{2s_o \delta(u-u_3) \delta_{\mathbf{r},\mathbf{r}_1}}{e^{u_1} - e^{u_3}} \\ \frac{2s_e \delta(u-u_4) \delta_{\mathbf{r},\mathbf{r}_2}}{e^{u_2} - e^{u_4}} \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

Вектор  $\hat{j}_b$  определён аналогично.

Теперь мы можем рассмотреть действие для полей  $a$  и  $b$ . Поскольку выбранное нами поле  $f$  (5.10) локально близко к седловому, то мы можем воспользоваться квадратичным действием для вывода действия для полей  $a$  и  $b$ . Квадратичное действие удобно записать введя поле  $\delta f$  определённое как  $f = u + \delta f(u)$ . Подобное квадратичное действие было получено в предыдущих главах и имеет вид:

$$\begin{aligned}S_2 &= \frac{1}{2} \int \frac{d\Omega d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^{d+1}} \delta f_{\mathbf{p}}^\dagger(\Omega) \left[ \hat{\mathcal{G}}(\Omega, \mathbf{p}) \right]^{-1} \delta f_{\mathbf{p}}(\Omega), \\ \left[ \hat{\mathcal{G}}(\Omega, \mathbf{p}) \right]^{-1} &= \left[ \hat{\mathcal{G}}^0(\Omega) \right]^{-1} - \hat{\Sigma}(\Omega, \mathbf{p}).\end{aligned}\quad (5.15)$$

Где  $\mathcal{G}$  -функция Грина мягких мод для нашего действия,  $\mathcal{G}^0$  -функция Грина мягких мод в модели SYK,  $\Sigma$  - собственная энергетическая часть, пропорциональная  $w^2$ . Мы снова использовали матричное обозначение объединив 4 поля  $\delta f$  с разных частей контура в один вектор, мы также используем частотно-импульсное представление. Все матрицы выше имеют размер  $4 \times 4$ , однако они вычисляются для равновесной системы, с учётом соотношения между запаздывающей и опережающей функциями Грина:  $\mathcal{G}_R(\Omega) = \mathcal{G}_A(-\Omega)$  и флуктуационно-

диссипативной теоремы. Поэтому мы можем записать только запаздывающую функцию Грина (все остальные по ней восстанавливаются):

$$\begin{aligned} [\mathcal{G}_R(\Omega, \mathbf{p})]^{-1} &= [\mathcal{G}_R^0(\Omega)]^{-1} - \hat{\Sigma}_R(\Omega, \mathbf{p}), \\ \Sigma_R(\Omega, \mathbf{p}) &= \frac{C_w}{2} \sum_{\delta \mathbf{r}} \left\{ \Omega^2 \psi(\Omega) + \frac{1}{2} \sin^2 \left( \frac{\mathbf{p} \delta \mathbf{r}}{2} \right) (2(1 + \Omega^2) + (1 + 2\Omega^2) \psi(\Omega)) \right\}, \\ \psi(\Omega) &= \Psi \left( \frac{1}{2} - i\Omega \right) - \Psi \left( -\frac{1}{2} \right), \\ \Psi(z) &= \partial_z \ln \Gamma(z) \quad \mathcal{G}_R^0(\Omega) = \frac{1}{C_J \Omega^2 (\Omega^2 + 1)} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Действие для полей  $a(\Omega)$  и  $b(\Omega)$  определено для  $\Omega \ll 1$  в силу их медленности и имеет вид:

$$S_{2,ab} = \int \frac{d\Omega d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^{d+1}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger(\Omega) \left[ \hat{\mathcal{G}}(i + \Omega, \mathbf{p}) \right]^{-1} \hat{b}_{\mathbf{p}}(\Omega) \quad (5.17)$$

Имея квадратичное действие для поле  $a$  и  $b$  мы можем выполнить усреднение:

$$\langle e^{iS_j} \rangle \approx \exp\{-s_e s_o z\} \quad (5.18)$$

$$z \equiv \frac{i}{4} \frac{f_\alpha(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{C_J + \sum_{\delta \mathbf{r}} C_w \left( \frac{\pi^2}{8} - 1 \right)} \frac{\sinh \left( \frac{u_4 + u_2 - u_1 - u_3}{2} \right)}{\sinh \left( \frac{u_4 - u_2}{2} \right) \sinh \left( \frac{u_3 - u_1}{2} \right)}, \quad (5.19)$$

$$f_\alpha(\mathbf{r}) \equiv \int_{BZ} \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{r}\mathbf{p}}}{1 + \alpha \sum_{\delta \mathbf{r}} \sin^2 \left( \frac{\mathbf{p} \delta \mathbf{r}}{2} \right)}, \quad (5.20)$$

$$\alpha \equiv \frac{\sum_{\delta \mathbf{r}} C_w \frac{\pi^2}{8}}{C_J + \sum_{\delta \mathbf{r}} C_w \left( \frac{\pi^2}{8} - 1 \right)} = \left[ \frac{8\alpha_S}{d\pi^2} \left( \frac{2\pi T}{w} \right)^2 + \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \right) \right]^{-1}. \quad (5.21)$$

Знак  $\approx$  в (5.18) означает, что мы выкинули члены пропорциональные  $s_e^2$  и  $s_o^2$  т.к. они "локальны" т.е. зависят от пары времён  $u_1, u_3$  или  $u_2, u_4$ , в них нет экспоненциального роста по времени и поэтому они малы как  $1/N$ . Как и ранее  $d$ -размерность решётки. Функция  $z$  с одной стороны экспоненциально

растёт при увеличении  $u_1 - u_2$ , с другой стороны функция  $f$  экспоненциально убывает при больших  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ . Наконец, мы можем записать явную формулу для коррелятора:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(u_1, u_2, u_3, u_4) &= \int_0^\infty \frac{ds_o ds_e}{\Gamma(2\Delta)^2} (s_o s_e)^{(2\Delta)} e^{-s_e - s_o} e^{-s_e s_o z} = \\ &= \int_0^\infty \frac{s^{2\Delta-1}}{\Gamma(2\Delta)} \frac{e^{-s}}{(1+sz)^{2\Delta}} ds = \frac{U(2\Delta, 1, \frac{1}{z})}{z^{2\Delta}} \\ &= \begin{cases} 1 - 4z\Delta^2 & z \ll 1 \\ \frac{\ln(z)}{z^{2\Delta}\Gamma(2\Delta)} & z \gg 1 \end{cases}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Здесь  $U$ -вырожденная гипергеометрическая функция, однозначно определённая своими асимптотиками.

Вместе с выражением для  $z$  (5.19) это формула является главным результатом этой главы. Отметим далее важные свойства полученного результата.

Во-первых, при  $C_w = 0$  мы получаем ответ для ОТОС в модели SYK, это выражение совпадает с формулой (6.10) работы [14] и совпадает с результатом применения метода из статьи [19] к модели SYK. Отметим, что предложенный нами метод вычисления отличается от методов в упомянутых работах, совпадение результатов – указание на возможность применения нашего (5.10) анзаца для задачи с  $w \neq 0$ .

Во-вторых, интеграл  $f_\alpha(\mathbf{r})$  определяет зависимость от расстояния между операторами в корреляторе. Этот интеграл экспоненциально затухает с расстоянием, но вид затухания зависит не только от модуля  $\mathbf{r}$ , но и от направления, при не очень больших  $\alpha$  (при больших  $\alpha$  интеграл набирается на малых  $p$  и эта зависимость пропадает). Таким образом мы делаем вывод, что информация о возмущении в системе распространяется баллистически, что качественно совпадает с поведением других систем [10; 16; 17].

В-третьих, из формулы (5.22) следует, что в области с  $z \gg 1$  коррелятор – мал,  $\tilde{F} \approx 0$ , мы будем говорить что точки из этой области "знают" о приложенном возмущении; область с  $z \ll 1$  "не знает" о возмущении и в ней  $\tilde{F} \approx 1$ . Остановимся подробнее на области с  $z \sim 1$ . Зафиксировав направление, мы можем отметить, что  $z \propto e^{\lambda_L(|t_{12}| - \frac{r_{12}}{v}) - \ln(N)}$ , тут  $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \gg 1$  и  $t_{12} = t_1 - t_2 \approx t_3 - t_4$ ,  $v$ -некоторый параметр с размерностью скорости. Таким образом, граница между двумя областями движется с постоянной скоростью.

В качестве примера приведём результаты для скорости в различных предельных случаях.

В общем случае (произвольной размерности) универсальное поведение функции  $f$  из формулы (5.20) наблюдается только при  $\frac{r^2}{a^2} \gg \alpha \gg 1$ , тут  $a$ -длина ребра решётки. В таком случае  $f \sim \exp\left\{-\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\frac{r}{a}\right\}$  что соответствует скорости распространения фронта:

$$v = 2\pi T \sqrt{\frac{\alpha}{2}} a, \quad (5.23)$$

которая не зависит от направления.

В случай одномерной системы ( $\mathbf{r} = (na)$ ) асимптотическое поведение функции  $f$  следующее:

$$f_{\alpha}^{(1D)}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{|n|} & \alpha \ll 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{\alpha}}\right)^{|n|} & \alpha \gg 1 \end{cases}. \quad (5.24)$$

В двумерном случае при  $\alpha \ll 1$ :

$$f_{\alpha \ll 1}^{(2D)}(\mathbf{r}) = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{|n|+|m|} C_{|n|+|m|}^{|m|} \quad (5.25)$$

Тут вектор  $\mathbf{r} = (na, ma)$ , как мы видим эта функция сильно зависит от направления. При  $\alpha \gg 1$  функция  $f$  имеет вид:

$$f_{\alpha \gg 1}^{(2D)}(\mathbf{r}) = \frac{K_0 \left(\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\frac{r}{a}\right)}{\pi\alpha} \quad (5.26)$$

Разберём зависимость параметра  $\alpha$  от температуры. Используя формулу (5.21), мы можем отметить, что  $\alpha$  не зависит от  $J$  и определяется только параметром  $\frac{T}{w}$ . При достаточно высоких температурах  $T \gg w$ ,  $\alpha \sim \left(\frac{w}{T}\right)^2$  -зависит от температуры. В противоположном случае  $w \gg T$  параметр  $\alpha \approx \alpha_0 = \frac{\pi^2}{\pi^2-8}$  принимает универсальное значение которое не зависит ни от параметров системы ни от температуры. Стоит отметить, что  $\alpha_0 \approx 5.27$  и мы можем считать что  $\alpha_0 \gg 1$ .

## 5.4 Заключение

В представленной главе исследовалось поведение ОТОС для системы состоящей из квантовых точек. Динамика внутри точек описывается моделью  $SUK$  с характерным энергетическим масштабом  $J$ . Между точками существует туннелирование с характерной амплитудой  $w$ . Мы показали что в такой системе ляпуновская экспонента имеет своё максимальное значение  $\lambda_L = 2\pi T$ , аналогично модели  $SUK$ . Из-за наличия ненулевой размерности, изучаемый коррелятор имеет пространственную структуру: пространство можно разделить на две области 1) область "знающая" о приложенном возмущении с ( $\tilde{F} \approx 0$ ) 2) область "не знающая" о возмущении с  $F \approx 1$ . Эти области разделяет граница, которая распространяется во времени. Детали распространения, в общем случае, зависят от параметров системы и деталей решётки. Однако, при  $w \gg T$  границу можно считать сферической а её скорость распространения  $v_f = 2\pi T \sqrt{\frac{\alpha_0}{2}} a$  – зависит только от температуры и длины ребра решётки. Также отметим, что несмотря на то, что вклад с  $w$  в седловое уравнение не существенен при  $T \gg T_{FL} \sim \frac{w^2}{J}$  свойства системы сильно меняются при  $T \sim w$ . Подобный эффект был также обнаружен в предыдущих главах.

## Заключение

Целью данной диссертации было создание вклада в область научных знаний, посвященную поведению не-ферми-жидкостных систем. Мы остановились на рассмотрении модели SYK, которая с одной стороны допускает аналитический подход, а с другой демонстрирует интересные физические свойства, не похожие на поведение ферми-жидкостной системы.

Первые две главы данной диссертации являются введением в модель и её основные свойства. Особое внимание уделяется мягким модам, играющим основную роль в изучаемых нами эффектах.

Новые результаты, выносимые на защиту изложены в оставшихся главах. Так в третьей главе изучается влияние флуктуаций на скорость поглощения энергии системой. Было показано, что несмотря на незначительное влияние квадратичного возмущения на седловое решение, это возмущение значительно меняет свойства системы за счёт флуктуационных эффектов. Нами был обнаружен резонанс в скорости поглощения энергии на частоте перехода между уровнями в эффективном гамильтониане флуктуаций.

Четвертая и пятая главы посвящены изучению обобщения модели SYK на случай ненулевой пространственной размерности. В четвертой главе нами представлено изучение кинетических эффектов в данной модели. Нами были получены выражения описывающие теплопроводность и электропроводность в данной системе как функции импульса и частоты в широкой области параметров. В отличие от предыдущих работ, нами было учтено влияние возмущений на флуктуационный пропагатор. Мы показали что при температуре системы меньшей чем характерная амплитуда туннелирования в системе могут существовать медленно затухающие возбуждения.

В пятой главе диссертации, был проведен анализ упомянутой модели с точки зрения её хаотичных свойств. Нами была вычислена аномально упорядоченная во времени корреляционная функция. Данная корреляционная функция характеризует распространение информации о возмущении в системе, мы показали что это распространение баллистическое и вычислили скорость этого распространения.

При работе над диссертацией, были сформулированы новые научные вопросы, изучение которых автор хотел бы отложить для будущих исследований. Во-первых, как может быть реализована система, которая могла бы описываться предложенной моделью?

Недавние эксперименты на сильнокоррелированных электронных системах [38; 39] с почти вырожденным одночастичным спектром ("плоская зона") демонстрируют "странное" металлическое поведение для которого характерно линейная зависимость сопротивления от температуры. Подобную зависимость можно получить в модели описывающей систему квантовых точек с туннелированием, при этом динамика внутри квантовой точки описывается моделью SYK. Данный результат был получен в работе [30] в седловом приближении. В нашей работе мы показали, что такое поведение может быть реализовано для систем параметры которых находятся в куда большей области, чем это предполагалось в работе [30] .

Во-вторых, если такая система может быть реализована, то какой физический смысл имеет параметр  $N$  (число состояний в одной грануле)? Несмотря на то, что модель с гранулами выглядит искусственно нам удалось написать для неё уравнения непрерывности, которые могут быть применены для более широкого класса систем. Однако, температурная зависимость постоянных, которые определяют кинетические коэффициенты, остается не выясненной до конца, пока не понятен смысл параметра  $N$  в реальной системе.

В-третьих, какова роль жёстких флуктуаций? Рассмотрение этих флуктуаций осталось за пределами данной работы. Однако, как мы показали, для построения полного выражения для скорости поглощения энергии нам необходимо их учитывать.

## Список литературы

1. *Fermi E.* Zur Quantelung des idealen einatomigen Gases // Zeitschrift für Phys. — 1926. — т. 36, № 11/12. — DOI: [10.1007/BF01400221](https://doi.org/10.1007/BF01400221).
2. *Sommerfeld A.* Zur Elektronentheorie der Metalle auf Grund der Fermischen Statistik // Zeitschrift für Phys. — 1928. — т. 47, № 1/2. — DOI: [10.1007/bf01391052](https://doi.org/10.1007/bf01391052).
3. *Landau L.* The Theory of a Fermi Liquid // JETP. — 1956. — т. 3, № 6. — с. 920—925.
4. *Bardeen J., Cooper L. N., Schrieffer J. R.* Theory of superconductivity // Phys. Rev. — 1957. — т. 108, № 5. — DOI: [10.1103/PhysRev.108.1175](https://doi.org/10.1103/PhysRev.108.1175).
5. *Martin S., Fiory A. T., Fleming R. M., Schneemeyer L. F., Waszczak J. V.* Normal-state transport properties of  $\text{Bi}_{2+x}\text{Sr}_{2-y}\text{CuO}_{6+z}$  crystals // Phys. Rev. B. — 1990. — т. 41, № 1. — DOI: [10.1103/PhysRevB.41.846](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.41.846).
6. *Kitaev A., Suh S. J.* The soft mode in the Sachdev-Ye-Kitaev model and its gravity dual // J. High Energy Phys. — 2018. — т. 2018, № 5. — DOI: [10.1007/JHEP05\(2018\)183](https://doi.org/10.1007/JHEP05(2018)183).
7. *Bagrets D., Altland A., Kamenev A.* Sachdev–Ye–Kitaev model as Liouville quantum mechanics // Nucl. Phys. B. — 2016. — т. 911. — DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2016.08.002](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2016.08.002).
8. *Lunkin A., Kitaev A., Feigel'man M.* Perturbed Sachdev-Ye-Kitaev Model: A Polaron in the Hyperbolic Plane // Phys. Rev. Lett. — 2020. — т. 125, № 19. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.125.196602](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.125.196602).
9. *Larkin A., Ovchinnikov Y. N.* Quasiclassical method in the theory of superconductivity // Sov Phys JETP. — 1969. — т. 28, № 6. — с. 1200—1205.
10. *Aleiner I. L., Faoro L., Ioffe L. B.* Microscopic model of quantum butterfly effect: Out-of-time-order correlators and traveling combustion waves // Ann. Phys. (N. Y). — 2016. — т. 375. — DOI: [10.1016/j.aop.2016.09.006](https://doi.org/10.1016/j.aop.2016.09.006).
11. *Sekino Y., Susskind L.* Fast scramblers // J. High Energy Phys. — 2008. — т. 2008, № 10. — DOI: [10.1088/1126-6708/2008/10/065](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2008/10/065).

12. *Mi X., Roushan P., Quintana C., Mandrà S., Marshall J., Neill C., Arute F., Arya K., Atalaya J., Babbush R., Bardin J. C., Barends R., Basso J., Bengtsson A., Boixo S., Bourassa A., Broughton M., Buckley B. B., Buell D. A., Burkett B., Bushnell N., Chen Z., Chiaro B., Collins R., Courtney W., Demura S., Derk A. R., Dunsworth A., Eppens D., Erickson C., Farhi E., Fowler A. G., Foxen B., Gidney C., Giustina M., Gross J. A., Harrigan M. P., Harrington S. D., Hilton J., Ho A., Hong S., Huang T., Huggins W. J., Ioffe L. B., Isakov S. V., Jeffrey E., Jiang Z., Jones C., Kafri D., Kelly J., Kim S., Kitaev A., Klimov P. V., Korotkov A. N., Kostritsa F., Landhuis D., Laptev P., Lucero E., Martin O., McClean J. R., McCourt T., McEwen M., Megrant A., Miao K. C., Mohseni M., Montazeri S., Mruczkiewicz W., Mutus J., Naaman O., Neeley M., Newman M., Niu M. Y., O'Brien T. E., Opremcak A., Ostby E., Pato B., Petukhov A., Redd N., Rubin N. C., Sank D., Satzinger K. J., Shvarts V., Strain D., Szalay M., Trevithick M. D., Villalonga B., White T., Yao Z. J., Yeh P., Zalcman A., Neven H., Aleiner I., Kechedzhi K., Smelyanskiy V., Chen Y.* Information scrambling in quantum circuits // *Science* (80-. ). — 2021. — т. 374, № 6574. — DOI: [10.1126/science.abg5029](https://doi.org/10.1126/science.abg5029).
13. *Maldacena J., Shenker S. H., Stanford D.* A bound on chaos // *J. High Energy Phys.* — 2016. — т. 2016, № 8. — DOI: [10.1007/JHEP08\(2016\)106](https://doi.org/10.1007/JHEP08(2016)106).
14. *Maldacena J., Stanford D., Yang Z.* Conformal symmetry and its breaking in two-dimensional nearly anti-de Sitter space // *Prog. Theor. Exp. Phys.* — 2016. — т. 2016, № 12. — DOI: [10.1093/ptep/ptw124](https://doi.org/10.1093/ptep/ptw124).
15. *Gu Y., Kitaev A., Zhang P.* A two-way approach to out-of-time-order correlators // arXiv preprint. — 2021. — ArXiv:2111.12007.
16. *Nahum A., Vijay S., Haah J.* Operator Spreading in Random Unitary Circuits // *Phys. Rev. X.* — 2018. — т. 8, № 2. — DOI: [10.1103/PhysRevX.8.021014](https://doi.org/10.1103/PhysRevX.8.021014).
17. *Von Keyserlingk C. W., Rakovszky T., Pollmann F., Sondhi S. L.* Operator Hydrodynamics, OTOCs, and Entanglement Growth in Systems without Conservation Laws // *Phys. Rev. X.* — 2018. — т. 8, № 2. — DOI: [10.1103/PhysRevX.8.021013](https://doi.org/10.1103/PhysRevX.8.021013).
18. *Maldacena J., Stanford D.* Remarks on the Sachdev-Ye-Kitaev model // *Phys. Rev. D.* — 2016. — т. 94, № 10. — DOI: [10.1103/PhysRevD.94.106002](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.106002).

19. *Gu Y., Kitaev A., Sachdev S., Tarnopolsky G.* Notes on the complex Sachdev-Ye-Kitaev model // J. High Energy Phys. — 2020. — т. 2020, № 2. — DOI: [10.1007/jhep02\(2020\)157](https://doi.org/10.1007/jhep02(2020)157).
20. *Gur-Ari G., Mahajan R., Vaezi A.* Does the SYK model have a spin glass phase? // J. High Energy Phys. — 2018. — т. 2018, № 11. — DOI: [10.1007/JHEP11\(2018\)070](https://doi.org/10.1007/JHEP11(2018)070).
21. *Efetov K.* Supersymmetry in Disorder and Chaos. — 1996. — DOI: [10.1017/cbo9780511573057](https://doi.org/10.1017/cbo9780511573057).
22. *Lunkin A., Tikhonov K., Feigel'Man M.* Sachdev-Ye-Kitaev Model with Quadratic Perturbations: The Route to a Non-Fermi Liquid // Phys. Rev. Lett. — 2018. — т. 121, № 23. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.121.236601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.236601).
23. *Altland A., Bagrets D., Kamenev A.* Quantum criticality of granular Sachdev-Ye-Kitaev matter // Phys. Rev. Lett. — 2019. — т. 123, № 10. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.123.106601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.123.106601).
24. *Altland A., Bagrets D., Kamenev A.* Sachdev-Ye-Kitaev Non-Fermi-Liquid Correlations in Nanoscopic Quantum Transport // Phys. Rev. Lett. — 2019. — т. 123, № 22. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.123.226801](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.123.226801).
25. *Gor'kov L. P., Eliashberg G. M.* Minute metallic particles in an electromagnetic field // Sel. Pap. Lev P. Gor'kov. — 2014. — DOI: [10.1142/9789814366960\\_0003](https://doi.org/10.1142/9789814366960_0003).
26. *Simons B. D., Altshuler B. L.* Universal velocity correlations in disordered and chaotic systems // Phys. Rev. Lett. — 1993. — т. 70, № 26. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.70.4063](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.70.4063).
27. *Skvortsov M. A., Basko D. M., Kravtsov V. E.* Energy absorption in time-dependent unitary random matrix ensembles: Dynamic versus Anderson localization // JETP Lett. — 2004. — т. 80, № 1. — DOI: [10.1134/1.1800215](https://doi.org/10.1134/1.1800215).
28. *Keldysh L.* Diagram technique for nonequilibrium processes // Sov. Phys. JETP. — 1965. — т. 20, № 4.
29. *Kamenev A.* Field theory of non-equilibrium systems. — 2011. — DOI: [10.1017/CBO9781139003667](https://doi.org/10.1017/CBO9781139003667).

30. *Song X. Y., Jian C. M., Balents L.* Strongly Correlated Metal Built from Sachdev-Ye-Kitaev Models // Phys. Rev. Lett. — 2017. — т. 119, № 21. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.119.216601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.216601).
31. *Parcollet O., Georges A.* Non-fermi-liquid regime of a doped mott insulator // Phys. Rev. B - Condens. Matter Mater. Phys. — 1999. — т. 59, № 8. — DOI: [10.1103/PhysRevB.59.5341](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.59.5341).
32. *Varma C. M., Littlewood P. B., Schmitt-Rink S., Abrahams E., Ruckenstein A. E.* Phenomenology of the normal state of Cu-O high-temperature superconductors // Phys. Rev. Lett. — 1989. — т. 63, № 18. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.63.1996](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.63.1996).
33. *Kuhlenkamp C., Knap M.* Periodically Driven Sachdev-Ye-Kitaev Models // Phys. Rev. Lett. — 2020. — т. 124, № 10. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.124.106401](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.124.106401).
34. *Sachdev S.* Bekenstein-hawking entropy and strange metals // Phys. Rev. X. — 2015. — т. 5, № 4. — DOI: [10.1103/PhysRevX.5.041025](https://doi.org/10.1103/PhysRevX.5.041025).
35. *Azeyanagi T., Ferrari F., Massolo F. I.* Phase Diagram of Planar Matrix Quantum Mechanics, Tensor, and Sachdev-Ye-Kitaev Models // Phys. Rev. Lett. — 2018. — т. 120, № 6. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.120.061602](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.061602).
36. *Tikhanovskaya M., Guo H., Sachdev S., Tarnopolsky G.* Excitation spectra of quantum matter without quasiparticles. I. Sachdev-Ye-Kitaev models // Phys. Rev. B. — 2021. — т. 103, № 7. — DOI: [10.1103/PhysRevB.103.075141](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.103.075141).
37. *Davison R. A., Fu W., Georges A., Gu Y., Jensen K., Sachdev S.* Thermoelectric transport in disordered metals without quasiparticles: The Sachdev-Ye-Kitaev models and holography // Phys. Rev. B. — 2017. — т. 95, № 15. — DOI: [10.1103/PhysRevB.95.155131](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.95.155131).
38. *Polshyn H., Yankowitz M., Chen S., Zhang Y., Watanabe K., Taniguchi T., Dean C. R., Young A. F.* Large linear-in-temperature resistivity in twisted bilayer graphene. — 2019. — DOI: [10.1038/s41567-019-0596-3](https://doi.org/10.1038/s41567-019-0596-3).
39. *Cao Y., Chowdhury D., Rodan-Legrain D., Rubies-Bigorda O., Watanabe K., Taniguchi T., Senthil T., Jarillo-Herrero P.* Strange Metal in Magic-Angle Graphene with near Planckian Dissipation // Phys. Rev. Lett. — 2020. — т. 124, № 7. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.124.076801](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.124.076801).



## Приложение А

### Вычисление квадратичного действия и восприимчивости

#### А.1 Эффективное действие

Действие для изучаемой модели представлено в основном тексте и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
S &= S_{SYK} + S_2 \quad S_{SYK} = -\varepsilon_0 \sum_s \int \{e^{\phi^s(x)}, x\} dx \\
S_2 &= \frac{ig}{2\varepsilon_0} \sum_{s_1, s_0} \int dx_1 dx_0 s_1 s_0 [g_{s_1, s_0}^\phi(x_1, x_0)]^2 (1 + \Phi^{s_1}(x_1))(1 + \Phi^{s_0}(x_0)) \\
g_{s_1, s_0}^\phi(x_1, x_0) &= g_{s_1, s_0} (\phi^{s_1}(x_1) - \phi^{s_0}(x_0)) [\phi^{s_1'}(x_1) \phi^{s_0'}(x_0)]^\Delta \\
\varepsilon_0 &= \frac{2\pi\gamma}{\beta J} \quad g = \frac{N\sqrt{b}\gamma\Gamma^2}{2J^2} \quad \gamma = \alpha_S N \quad \alpha_s \approx 0.05 \\
\hat{g}(x) &= \left( \frac{1}{4 \sinh^2(\frac{x}{2})} \right)^\Delta \left[ \theta(x) \begin{pmatrix} e^{-i\pi\Delta} & -e^{i\pi\Delta} \\ e^{-i\pi\Delta} & -e^{i\pi\Delta} \end{pmatrix} + \theta(-x) \begin{pmatrix} -e^{-i\pi\Delta} & -e^{-i\pi\Delta} \\ e^{i\pi\Delta} & e^{i\pi\Delta} \end{pmatrix} \right] \quad (\text{A.1})
\end{aligned}$$

Наша цель вычислить восприимчивость по отношению к полю  $\Phi$ , которая определена как:

$$\chi^R(t - t') = -\frac{i}{2} \frac{\delta^2 Z_\Phi}{\delta \Phi^q(t) \delta \Phi^{cl}(t')} \quad Z_\Phi = \int \mathcal{D}\phi e^{iS} \quad (\text{A.2})$$

Мы рассмотрим предел малых флуктуаций, поэтому запишем действие в следующем виде:

$$\begin{aligned}
S &= S_{SYK} + S_{\tilde{\Phi}} \quad S_{\tilde{\Phi}} = S_{\tilde{\Phi}}^{(0)} + S_{\tilde{\Phi}}^{(1)} + S_{\tilde{\Phi}}^{(2)} \quad S_{SYK} = \frac{1}{2} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \left[ \hat{\mathcal{G}}_0(\Omega) \right]_{s_1, s_2}^{-1} u_{-\Omega}^{s_1} u_{\Omega}^{s_2} \\
S_{\tilde{\Phi}}^{(0)} &= i \frac{g}{2\varepsilon_0} \int \frac{d\Omega}{2\pi} L_{s_1, s_2}^{(0)}(\Omega) \tilde{\Phi}_{-\Omega}^{s_1} \tilde{\Phi}_{\Omega}^{s_2} \\
S_{\tilde{\Phi}}^{(1)} &= i \frac{g}{2\varepsilon_0} \int \frac{d\Omega_0 d\Omega_1}{(2\pi)^2} L_{s_1, s_2, s_3}^{(1)}(\Omega_0, \Omega_1) u_{\Omega_0}^{s_1} \tilde{\Phi}_{-\Omega_1 - \frac{\Omega_0}{2}}^{s_2} \tilde{\Phi}_{\Omega_1 - \frac{\Omega_0}{2}}^{s_3} \\
S_{\tilde{\Phi}}^{(2)} &= i \frac{g}{2\varepsilon_0} \int \frac{d\Omega_0 d\Omega_1 d\Omega_2}{(2\pi)^3} L_{s_1, s_2, s_3, s_4}^{(2)}(\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2) u_{\Omega_0}^{s_1} u_{\Omega_1}^{s_2} \tilde{\Phi}_{-\Omega_2 - \frac{\Omega_0 + \Omega_1}{2}}^{s_3} \tilde{\Phi}_{\Omega_2 - \frac{\Omega_0 + \Omega_1}{2}}^{s_4} \quad (\text{A.3})
\end{aligned}$$

Здесь мы ввели  $\tilde{\Phi}^\pm(x) = 1 + \Phi^\pm(x)$  и  $\hat{L}^{(i)}$  – тензоры, которые будут получены далее из разложение в ряд Тейлора действия  $S_2$ . Используя эти выражения,

мы получим модифицированный пропагатор мягких мод и вычислим скорость поглощения системы, определённую как  $W(\omega) = \frac{\omega}{2} \text{Im} \chi^R(\omega)$ .

## А.2 Разложение $S_2$ в ряд Тейлора

### А.2.1 Частотное представление

Мы начнём наше вычисление с представления выражения  $s_1 s_0 [g_{s_1, s_0}(x)]^2$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} s_1 s_0 [g_{s_1, s_0}(x)]^2 &= \left( \frac{1}{4 \sinh^2(\frac{x}{2})} \right)^d \left[ \theta(x) \begin{pmatrix} e^{-i\pi d} & -e^{i\pi d} \\ -e^{-i\pi d} & e^{i\pi d} \end{pmatrix} + \theta(-x) \begin{pmatrix} e^{-i\pi d} & -e^{-i\pi d} \\ e^{i\pi d} & -e^{i\pi d} \end{pmatrix} \right]_{s_1, s_0} \\ &= \int \frac{d\Omega}{2\pi} e^{-i\Omega x} \hat{L}_{s_1, s_0}(\Omega) \\ \hat{L}(\Omega) &= \left[ K_d(\Omega) \begin{pmatrix} e^{-i\pi d} & -e^{i\pi d} \\ -e^{-i\pi d} & e^{i\pi d} \end{pmatrix} + K_d(-\Omega) \begin{pmatrix} e^{-i\pi d} & -e^{-i\pi d} \\ -e^{i\pi d} & e^{i\pi d} \end{pmatrix} \right] \\ K_d(\Omega) &= \int_0^\infty \frac{d\Omega'}{2\pi} \left( \frac{1}{4 \sinh^2(\frac{x}{2})} \right)^d = \frac{\Gamma(1-2d)\Gamma(d-i\Omega)}{\Gamma(1-d-i\Omega)} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Здесь мы ввели параметр  $d = 2\Delta \rightarrow \frac{1}{2} - 0$  нам требуется этот параметр т.к. выражение  $K_d(\Omega)$  расходится при  $d = \frac{1}{2}$ . Матрица  $L(\Omega)$  играет ключевую роль в нашем вычислении. Используя выражение выше для  $S_2$  мы можем выделить члена зависящие от  $u$ , где  $u$  определено соотношением  $\phi^\pm(x) = x + u^\pm(x)$ :

$$\begin{aligned} s_1 s_0 [g_{s_1, s_0}^\phi(x_1, x_0)]^2 &= s_1 s_0 [g_{s_1, s_0}(\phi^{s_1}(x_1) - \phi^{s_0}(x_0))]^2 (\phi^{s_1'}(x_1) \phi^{s_0'}(x_0))^d = \\ &= \int \frac{d\Omega}{2\pi} e^{-i\Omega(\phi^{s_1}(x_1) - \phi^{s_0}(x_0))} (\phi^{s_1'}(x_1) \phi^{s_0'}(x_0))^d \hat{L}_{s_1, s_0}(\Omega) = \\ &= \int \frac{d\Omega}{2\pi} e^{-i\Omega(x_1 - x_0)} \hat{L}_{s_1, s_0}(\Omega) ((1 + u^{s_1'}(x_1))(1 + u^{s_0'}(x_0)))^d e^{-i\Omega(u^{s_1}(x_1) - u^{s_0}(x_0))} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Выражение в последней строчке (A.5) будет использовано для разложения в ряд Тейлора по степеням  $u(x)$ .

### A.2.2 3 порядка разложения по степеням $u(x)$

Для дальнейших вычислений нам понадобится следующее разложение в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned}
& ((1 + u^{s_1'}(x_1))(1 + u^{s_0'}(x_0)))^d e^{-i\Omega(u^{s_1}(x_1) - u^{s_0}(x_0))} \\
&= F_{s_1, s_0}^{(0)}(x_1, x_2) + F_{s_1, s_0}^{(1)}(x_1, x_2) + F_{s_1, s_0}^{(2,1)}(x_1, x_2) + F_{s_1, s_0}^{(2,2)}(x_1, x_2) \\
F_{s_1, s_0}^{(0)}(x_1, x_2) &= 1 \quad F_{s_1, s_0}^{(1)}(x_1, x_2) = d(u^{s_1'}(x_1) + u^{s_0'}(x_0)) - i\Omega(u^{s_1}(x_1) - u^{s_0}(x_0)) \\
F_{s_1, s_0}^{(2,1)} &= \frac{d(d-1)}{2} ([u^{s_1'}(x_1)]^2 + [u^{s_0'}(x_0)]^2) - \frac{\Omega^2}{2} ([u^{s_1}(x_1)]^2 + [u^{s_0}(x_0)]^2) \\
&\quad - i\Omega d(u^{s_1}(x_1)u^{s_1'}(x_1) - u^{s_0}(x_0)u^{s_0'}(x_0)) \\
F_{s_1, s_0}^{(2,2)} &= d^2 u^{s_1'}(x_1)u^{s_0'}(x_0) + \Omega^2 u^{s_1}(x_1)u^{s_0}(x_0) \\
&\quad - i\Omega d(u^{s_1}(x_1)u^{s_0'}(x_0) - u^{s_0}(x_0)u^{s_1'}(x_1)) \tag{A.6}
\end{aligned}$$

Мы разделили вклад квадратичный по  $u$  на две разные части,  $F^{(2,1)}$  и  $F^{(2,2)}$ . Каждое слагаемое входящее в  $F^{(2,1)}$  зависит только от одной переменной  $u(x_i)$ . Каждое слагаемое входящее в  $F^{(2,2)}$  зависит от двух переменных  $u(x_0)$  и  $u(x_1)$ .

Выражения для  $F^{(a)}$  связаны с  $S^{(a)}$  следующим образом:

$$S_{\tilde{\Phi}}^{(a)} = \frac{ig}{2\varepsilon_0} \sum_{s_1, s_0} \int dx_1 dx_0 \int \frac{d\Omega}{2\pi} e^{-i\Omega(x_1 - x_0)} \hat{L}_{s_1, s_0}(\Omega) F_{s_1, s_0}^{(a)}(x_1, x_2) \tilde{\Phi}^{s_1}(x_1) \tilde{\Phi}^{s_0}(x_0) \tag{A.7}$$

При этом мы разложили член квадратичный по  $u$  на два слагаемых:

$$S_{\tilde{\Phi}}^{(2)} = S_{\tilde{\Phi}}^{(2,1)} + S_{\tilde{\Phi}}^{(2,2)} \tag{A.8}$$

Выражения для  $S_{\tilde{\Phi}}^{(a)}$  с  $a = 1, 2$  будут вычислены ниже; сейчас мы рассмотрим член с  $S^{(0)}$  в более удобном представлении, записав её как матрицу в базисе классической (cl) и квантовой (q) компонентами а не  $\pm$ . В новом базисе

мы можем записать это выражение следующим образом :

$$S_{\tilde{\Phi}}^{(0)} = \frac{ig}{\varepsilon_0} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \hat{\tilde{\Phi}}_{-\Omega}^T \hat{L}(\Omega) \hat{\tilde{\Phi}}_{\Omega} \quad \hat{\tilde{\Phi}}_{\Omega} = \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_{\Omega}^{cl} \\ \tilde{\Phi}_{\Omega}^q \end{pmatrix} \quad \tilde{\Phi}^{\pm} = \tilde{\Phi}^{cl} \pm \tilde{\Phi}^q \quad (\text{A.9})$$

$$L(\Omega) = -2i \begin{pmatrix} 0 & K(-\Omega) \sin(\pi d) \\ K(\Omega) \sin(\pi d) & i \cos(\pi d) (K(-\Omega) + K(\Omega)) \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Выражение (A.9) представляет удобное выражение для вычисления восприимчивости. В следующих двух подсекциях мы выпишем выражение для  $S^{(1)}$  и  $S^{(2)}$ .

Это выражение также позволяет вычислить вклад в теплоёмкость от возмущения в седловом приближении. В таком случае выражение для теплоёмкости имеет вид:

$$C = C_{SYK} + \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{1}{2} \frac{\delta S_{\tilde{\Phi}}^{(0)}}{\delta \Phi^q(t)} \Big|_{\Phi=0} \right) = (2\pi)^2 \alpha_S N \frac{T}{J} + \frac{\partial}{\partial T} \frac{2\pi}{\beta} \frac{ig}{2\varepsilon_0} L_{q,cl}(0) \quad (\text{A.11})$$

При взятии предела  $d \rightarrow \frac{1}{2}$  мы имеем расходимость, связанную с тем что  $g^2(x) \propto |x|^{-1}$  при  $x \rightarrow 0$ . Этот интеграл расходится логарифмически и мы можем обрезать его на нижнем пределе  $x \propto \frac{T}{J}$ . В результате мы имеем:

$$C = (2\pi)^2 \alpha_S N \frac{T}{J} - \frac{\partial}{\partial T} \frac{2\pi}{\beta} \frac{g}{\varepsilon_0} \ln(\beta J) = (2\pi)^2 \alpha_S N \frac{T}{J} + \sqrt{b} \frac{N\Gamma^2}{2TJ} \quad (\text{A.12})$$

### A.2.3 Вычисление $S^{(1)}$

Для вычисления  $S^{(1)}$  мы должны представить это выражение в виде:

$$S_{\tilde{\Phi}}^{(1)} = \frac{ig}{2\varepsilon_0} \sum_{s_1, s_0} \int dx_1 dx_0 \int \frac{d\Omega_1}{2\pi} e^{-i\Omega_1(x_1-x_0)} \hat{L}_{s_1, s_0}(\Omega_1) \times \\ (du^{s_1'}(x_1) - i\Omega_1 u^{s_1}(x_1)) \tilde{\Phi}^{s_1}(x_1) \tilde{\Phi}^{s_0}(x_0) + \\ \frac{ig}{2\varepsilon_0} \sum_{s_1, s_0} \int dx_1 dx_0 \int \frac{d\Omega_1}{2\pi} e^{-i\Omega_1(x_1-x_0)} \hat{L}_{s_1, s_0}(\Omega_1) \times \\ (du^{s_0'}(x_0) + i\Omega_1 u^{s_0}(x_0)) \tilde{\Phi}^{s_1}(x_1) \tilde{\Phi}^{s_0}(x_0) \quad (\text{A.13})$$

Теперь мы должны подставить Фурье представление  $u(x)$  в это выражение, а также использовать симметрию по отношению к перестановке  $x_1$  и  $x_2$ ; В результате,

$$S_{\tilde{\Phi}}^{(1)} = \frac{g}{\varepsilon_0} \sum_{s_1, s_0} \int dx_1 dx_0 \int \frac{d\Omega_1 d\Omega}{(2\pi)^2} e^{-i\Omega_1(x_1-x_0)} \hat{L}_{s_1, s_0}(\Omega_1) \times (\Omega d + \Omega_1) e^{-i\Omega x_1} u_{\Omega}^{s_1} \tilde{\Phi}^{s_1}(x_1) \tilde{\Phi}^{s_0}(x_0). \quad (\text{A.14})$$

Чтобы сделать это выражение более симметричным, мы сделаем замену  $\Omega_1 \rightarrow \Omega_1 - \frac{\Omega}{2}$ , затем мы вычислим интегралы по  $x_i$ . В результате мы получим:

$$S_{\tilde{\Phi}}^{(1)} = \frac{g}{\varepsilon_0} \sum_{s_1, s_0} \int \frac{d\Omega_1 d\Omega}{(2\pi)^2} \hat{L}_{s_1, s_0} \left( \Omega_1 - \frac{\Omega}{2} \right) \left( \Omega(d - \frac{1}{2}) + \Omega_1 \right) u_{\Omega}^{s_1} \tilde{\Phi}_{-\Omega_1 - \frac{\Omega}{2}}^{s_1} \tilde{\Phi}_{\Omega_1 - \frac{\Omega}{2}}^{s_0} \quad (\text{A.15})$$

Наконец, мы запишем выражение (A.15) используя  $(cl, q)$  представление:

$$S^{(1)} = \frac{2g}{\varepsilon_0} \int \frac{d\Omega_1 d\Omega}{(2\pi)^2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u_{\Omega}^{cl} \\ u_{\Omega}^q \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \hat{\Phi}_{-\Omega_1 - \frac{\Omega}{2}}^T L_{I,1}(\Omega, \Omega_1) \hat{\Phi}_{\Omega_1 - \frac{\Omega}{2}} \\ \hat{\Phi}_{-\Omega_1 - \frac{\Omega}{2}}^T \tau_X L_{I,1}(\Omega, \Omega_1) \hat{\Phi}_{\Omega_1 - \frac{\Omega}{2}} \end{pmatrix} L_{I,1}(\Omega, \Omega_1) = \left( \Omega(d - \frac{1}{2}) + \Omega_1 \right) \hat{L} \left( \Omega_1 - \frac{\Omega}{2} \right) \quad (\text{A.16})$$

Эта формула завершает вывод искомого выражения. Здесь  $\tau_X$  матрица Пули  $X$  в базисе  $cl, q$ .

#### A.2.4 Вычисление $S^{(2)}$

Квадратичный член по  $u$  состоит из двух частей, каждую из которых мы вычислим по-отдельности.

## Вычисление $S^{(2,1)}$

Воспользовавшись симметриями по отношению к перестановке времён, мы можем записать выражение для  $S^{(2,1)}$  как:

$$S_{\tilde{\Phi}}^{(2,1)} = \frac{ig}{\varepsilon_0} \sum_{s_1, s_0} \int dx_1 dx_0 \int \frac{d\Omega}{2\pi} e^{-i\Omega(x_1-x_0)} \hat{L}_{s_1, s_0}(\Omega) \tilde{\Phi}^{s_1}(x_1) \tilde{\Phi}^{s_0}(x_0) \left( \frac{d(d-1)}{2} ([u^{s_1'}(x_1)]^2) - \frac{\Omega^2}{2} ([u^{s_1}(x_1)]^2) - i\Omega d(u^{s_1}(x_1)u^{s_1'}(x_1)) \right) \quad (\text{A.17})$$

Далее мы проведём вычисление похожее на описанное в секции (A.2.3). После подстановки преобразования Фурье  $u(x)$ , мы выполним сдвиг частот и интегрирование по  $x_i$ ; В результате мы получим следующее выражение:

$$S_{\tilde{\Phi}}^{(2,1)} = -\frac{ig}{\varepsilon_0} \sum_{s_1, s_0} \int \frac{d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3}{(2\pi)^3} \left( \frac{d(d-1)}{2} \Omega_0 \Omega_1 + \frac{1}{2} \left( \Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2} \right)^2 + d \left( \Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2} \right) \Omega_1 \right) \hat{L}_{s_1, s_0} \left( \Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2} \right) u_{\Omega_0}^{s_1} u_{\Omega_1}^{s_1} \tilde{\Phi}_{-\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}}^{s_1} \tilde{\Phi}_{\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}}^{s_0} \quad (\text{A.18})$$

Наконец, мы представим результат в матричном виде:

$$S_{\tilde{\Phi}}^{(2,1)} = -\frac{ig}{\varepsilon_0} \int \frac{d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3}{(2\pi)^3} \left( \frac{d(d-1)}{2} \Omega_0 \Omega_1 + \frac{1}{2} \left( \Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2} \right)^2 + d \left( \Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2} \right) \Omega_1 \right) \hat{u}_{\Omega_0}^T \begin{pmatrix} \hat{\Phi}_{-\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}}^T \hat{L}(\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}) \hat{\Phi}_{\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}} & \hat{\Phi}_{-\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}}^T \tau_X \hat{L}(\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}) \hat{\Phi}_{\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}} \\ \hat{\Phi}_{-\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}}^T \tau_X \hat{L}(\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}) \hat{\Phi}_{\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}} & \hat{\Phi}_{-\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}}^T \hat{L}(\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}) \hat{\Phi}_{\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}} \end{pmatrix} \hat{u}_{\Omega_1}^T \quad (\text{A.19})$$

Это завершает наше вычисление  $S^{(2,1)}$ .

## Вычисление $S^{(2,2)}$

Запишем выражение сразу в Фурье представлении после интегрирования по  $x_i$ :

$$S_{\tilde{\Phi}}^{(2,2)} = -\frac{ig}{2\varepsilon_0} \sum_{s_1, s_0} \int \frac{d\Omega_2 d\Omega_0 d\Omega_1}{(2\pi)^3} \left( d^2 \Omega_0 \Omega_1 - \left( \Omega_2 - \frac{\Omega_1 - \Omega_0}{2} \right)^2 + \right. \\ \left. d \left( \Omega_2 - \frac{\Omega_1 - \Omega_0}{2} \right) (\Omega_0 - \Omega_1) \right) \times \\ u_{\Omega_1}^{s_1} u_{\Omega_0}^{s_0} \hat{L}_{s_1, s_0} \left( \Omega_2 - \frac{\Omega_1 - \Omega_0}{2} \right) \tilde{\Phi}_{-\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}}^{s_1} \tilde{\Phi}_{\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}}^{s_0} \quad (\text{A.20})$$

Записав выражение выше используя матричную форму в базисе  $(cl, q)$ , мы получим:

$$S_{\tilde{\Phi}}^{(2,2)} = -\frac{ig}{2\varepsilon_0} \int \frac{d\Omega_2 d\Omega_0 d\Omega_1}{(2\pi)^3} \left( d^2 \Omega_0 \Omega_1 - \left( \Omega_2 - \frac{\Omega_1 - \Omega_0}{2} \right)^2 + \right. \\ \left. + d \left( \Omega_2 - \frac{\Omega_1 - \Omega_0}{2} \right) (\Omega_0 - \Omega_1) \right) \times \\ \hat{u}_{\Omega_1}^T \left( \begin{array}{cc} \hat{\Phi}_{-\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}}^T \hat{L}(\Omega_2 - \frac{\Omega_1 - \Omega_0}{2}) \hat{\Phi}_{\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}} & \hat{\Phi}_{-\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}}^T \hat{L}(\Omega_2 - \frac{\Omega_1 - \Omega_0}{2}) \tau_X \hat{\Phi}_{\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}} \\ \hat{\Phi}_{-\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}}^T \tau_X \hat{L}(\Omega_2 - \frac{\Omega_1 - \Omega_0}{2}) \hat{\Phi}_{\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}} & \hat{\Phi}_{-\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}}^T \tau_X \hat{L}(\Omega_2 - \frac{\Omega_1 - \Omega_0}{2}) \tau_X \hat{\Phi}_{\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}} \end{array} \right) \hat{u}_{\Omega_0} \quad (\text{A.21})$$

## Вычисление $S^{(2)}$

Наконец, мы вычислим  $S^{(2)} = S^{(2,1)} + S^{(2,2)}$ . Оба выражения  $S^{(2,1)}$  и  $S^{(2,2)}$  имеют схожую матричную структуру. Их сумма может быть представлена в следующем виде, используя 4 новые матрицы  $2 \times 2$ :

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \hat{L}_{II}^Q(\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2) & \hat{L}_{II}^A(\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2) \\ \hat{L}_{II}^R(\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2) & \hat{L}_{II}^K(\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2) \end{pmatrix} \equiv \\
& \left( d(d-1)\Omega_0\Omega_1 + \left( \Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2} \right)^2 + 2d \left( \Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2} \right) \Omega_0 \right) \times \\
& \begin{pmatrix} \hat{L}(\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}) & \tau_X \hat{L}(\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}) \\ \tau_X \hat{L}(\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}) & \hat{L}(\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}) \end{pmatrix} + \\
& \left( d^2\Omega_0\Omega_1 - \left( \Omega_2 - \frac{\Omega_1 - \Omega_0}{2} \right)^2 + d \left( \Omega_2 - \frac{\Omega_1 - \Omega_0}{2} \right) (\Omega_0 - \Omega_1) \right) \times \\
& \begin{pmatrix} \hat{L}(\Omega_2 - \frac{\Omega_1 - \Omega_0}{2}) & \hat{L}(\Omega_2 - \frac{\Omega_1 - \Omega_0}{2}) \tau_X \\ \tau_X \hat{L}(\Omega_2 - \frac{\Omega_1 - \Omega_0}{2}) & \tau_X \hat{L}(\Omega_2 - \frac{\Omega_1 - \Omega_0}{2}) \tau_X \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{A.22}$$

В результате мы можем записать  $S^{(2)}$  в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& S_{\hat{\Phi}}^{(2)} = -\frac{ig}{2\varepsilon_0} \int \frac{d\Omega_2 d\Omega_0 d\Omega_1}{(2\pi)^3} \\
& \hat{u}_{\Omega_1}^T \begin{pmatrix} \hat{\Phi}_{-\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}}^T \hat{L}_{II}^Q(\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2) \hat{\Phi}_{\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}} & \hat{\Phi}_{-\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}}^T \hat{L}_{II}^A(\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2) \hat{\Phi}_{\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}} \\ \hat{\Phi}_{-\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}}^T \hat{L}_{II}^R(\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2) \hat{\Phi}_{\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}} & \hat{\Phi}_{-\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}}^T \hat{L}_{II}^K(\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2) \hat{\Phi}_{\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}} \end{pmatrix} \hat{u}_{\Omega_0}
\end{aligned} \tag{A.23}$$

Эта часть действия приводит к двум эффектам: 1) изменению эффективного действия мягких мод и 2) дополнительный вклад в восприимчивость.

### A.3 Квадратичное действие для мягких мод

В этой секции мы покажем, что рассматриваемая нами модель состоящая из SYK<sub>4</sub> и SYK<sub>2</sub> членов, в случае  $\Gamma \gg T$ , демонстрирует свойства сильно отличающиеся от свойств чистой модели SYK. Для нахождения соответствующего вклада в действие мягких мод от члена в гамильтониане, содержащего  $\Gamma_{ij}$ , мы рассмотрим случай:  $\hat{\Phi}_\Omega = \Phi_\Omega^{\ell} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . После этой подстановки в выражение (A.23)

мы можем записать:

$$S_{\tilde{\Phi}}^{(2)} = -\frac{ig}{2\varepsilon_0} \int \frac{d\Omega_2 d\Omega_0 d\Omega_1}{(2\pi)^3} \tilde{\Phi}_{-\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}}^{cl} \tilde{\Phi}_{\Omega_2 - \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{2}}^{cl} \hat{u}_{\Omega_1}^T \hat{L}_{II}(\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2) \hat{u}_{\Omega_0}$$

$$\hat{L}_{II}(\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2) = \begin{pmatrix} [\hat{L}_{II}^Q(\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2)]_{cl,cl} & [\hat{L}_{II}^A(\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2)]_{cl,cl} \\ [\hat{L}_{II}^R(\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2)]_{cl,cl} & [\hat{L}_{II}^K(\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2)]_{cl,cl} \end{pmatrix} \quad (\text{A.24})$$

Ниже мы рассмотрим различные варианты того, как  $\Phi$  зависит от времени.

### A.3.1 Действие для задачи без накачки

В отсутствии накачки  $\tilde{\Phi}_{\Omega}^{cl} = 2\pi\delta(\Omega)$  и мы получаем следующее простое выражение для действия:

$$\delta S_{soft} = -\frac{ig}{2\varepsilon_0} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \hat{u}_{-\Omega}^T \hat{L}_{II}(\Omega, -\Omega, 0) \hat{u}_{\Omega} \quad (\text{A.25})$$

Пришло время выписать явно выражение для  $\hat{L}_{II}(\Omega, -\Omega, 0)$ :

$$\hat{L}_{II}(\Omega, -\Omega, 0) = -\frac{i\Omega^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & \psi(\Omega) \\ \psi(-\Omega) & -i\pi \end{pmatrix}$$

$$\psi(\Omega) = \Psi\left(\frac{1}{2} + i\Omega\right) - \Psi\left(-\frac{1}{2}\right) \quad \Psi(z) = \partial_z \ln \Gamma(z) \quad (\text{A.26})$$

Полное квадратичное действие для нашей модели имеет вид:

$$\delta S_{soft} = \frac{1}{2} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \hat{u}_{-\Omega}^T \begin{pmatrix} 0 & [\mathcal{G}^A(\Omega)]^{-1} \\ [\mathcal{G}^R(\Omega)]^{-1} & -\mathcal{G}^K(\Omega) [\mathcal{G}^A(\Omega)]^{-1} [\mathcal{G}^R(\Omega)]^{-1} \end{pmatrix} \hat{u}_{\Omega}$$

$$[\mathcal{G}^{R(A)}(\Omega)]^{-1} = \Omega^2 \left( \varepsilon_0 (\Omega^2 + 1) - \frac{g}{2\varepsilon_0} \psi(\pm\Omega) \right)$$

$$-\mathcal{G}^K(\Omega) [\mathcal{G}^A(\Omega)]^{-1} [\mathcal{G}^R(\Omega)]^{-1} = i \frac{g}{2\varepsilon_0} \pi \quad (\text{A.27})$$

Можно сделать два наблюдения: во-первых, функция распределения, определённая следующим соотношением  $\mathcal{G}^K(\Omega) \equiv F(\Omega) (\mathcal{G}^R(\Omega) - \mathcal{G}^A(\Omega))$  достигает своего равновесного значения:  $F(\Omega) = \coth(\pi\Omega)$ . Во-вторых, для  $g \gg \varepsilon_0^2$ , мы наблюдаем резонансное поведение на частоте  $\Omega_R \gg 1$ . Положение резонанса и поведение функции Грина в окрестности него, определяется следующим

соотношением:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 (\Omega_R^2 + 1) &= \frac{g}{2\varepsilon_0} \operatorname{Re} \psi(\Omega_R) \quad \mathcal{G}^{R(A)}(\Omega) \approx \frac{1}{2\Omega_R^3 \varepsilon_0} \frac{\operatorname{sgn}(\Omega)}{\delta\Omega \pm i\Omega_W} \\ \Omega &= \pm\Omega_R + \delta\Omega \quad \frac{\Omega_W}{\Omega_R} = -\frac{1}{2} \frac{\operatorname{Im} \psi(\Omega_R)}{\operatorname{Re} \psi(\Omega_R)} \approx \frac{\pi}{4 \ln(\Omega_R)} \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

### А.3.2 Действие для задачи с накачкой

В задаче с накачкой, мы можем записать:  $\tilde{\Phi}_\Omega = 2\pi [\delta(\Omega) + \frac{A}{2} (\delta(\Omega - \Omega_P) + \delta(\Omega + \Omega_P))]$ . В предыдущей подсекции мы описали член без  $A$ . Член линейный по  $A$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \delta^{(1)} S_{soft} &= -\frac{ig}{2\varepsilon_0} \frac{A}{2} \int \frac{d\Omega}{(2\pi)} \hat{u}_{-\Omega-\Omega_P}^T L_{P,I,1}(\Omega, \Omega_P) \hat{u}_\Omega + [\Omega_P \rightarrow -\Omega_P] \\ L_{P,I,1}(\Omega, \Omega_P) &= \left[ \hat{L}_{II}(\Omega, -\Omega - \Omega_P, \frac{\Omega_P}{2}) + \hat{L}_{II}(\Omega, -\Omega - \Omega_P, -\frac{\Omega_P}{2}) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Мы видим, что благодаря накачке медленные и быстрые моды  $u(x)$  теперь перемешаны. Для нахождения действия для медленных мод, нам необходимо выполнить интегрирование по быстрым модам, в результате мы получим:

$$\begin{aligned} \delta^{(2,1)} S_{soft} &= \frac{i}{2} \langle [\delta^{(1)} S_{soft}]^2 \rangle_{fast} = \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{g}{2\varepsilon_0} \frac{A}{2} \right]^2 &\int_{\Omega \ll \Omega_W} \frac{d\Omega}{(2\pi)} \hat{u}_{-\Omega}^T L_{P,I}(-\Omega, -\Omega_P)^T \mathcal{G}_{\Omega_P} L_{P,I}(\Omega, \Omega_P) \hat{u}_\Omega + [\Omega_P \rightarrow -\Omega_P] \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

где

$$L_{P,I}(\Omega, \Omega_P) = \frac{1}{2} (L_{P,I,1}(\Omega, \Omega_P) + L_{P,I,1}(-\Omega - \Omega_P, \Omega_P)^T) \quad (\text{A.31})$$

В главном порядке по  $\Omega/\Omega_W \ll 1$ , действие из выражения (A.30) может быть представлено, как:

$$\delta^{(2,1)} S_{soft} \approx \pi \Omega_R \frac{ig}{2\varepsilon_0} \left(\frac{A}{2}\right)^2 \int_{\Omega \ll \Omega_W} \frac{d\Omega}{(2\pi)} \hat{u}_{-\Omega}^T \begin{pmatrix} 0 & \Omega \\ -\Omega & 0 \end{pmatrix} \hat{u}_\Omega \quad (\text{A.32})$$

Член квадратичные по  $A$  приводит к следующей поправке к действию:

$$\begin{aligned} \delta^{(2,2)} S_{soft} \approx & -\frac{ig}{2\varepsilon_0} \left(\frac{A}{2}\right)^2 \int \frac{d\Omega}{(2\pi)} \hat{u}_{-\Omega}^T \left[ \hat{L}_{II}(\Omega, -\Omega, -\Omega_P) + (\Omega_P \rightarrow -\Omega_P) \right] \hat{u}_\Omega \approx \\ & \pi \Omega_P \frac{ig}{2\varepsilon_0} \left(\frac{A}{2}\right)^2 \int \frac{d\Omega}{(2\pi)} \hat{u}_{-\Omega}^T \begin{pmatrix} 0 & -2\Omega \\ 2\Omega & 4\Omega_P \end{pmatrix} \hat{u}_\Omega \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Комбинация двух вкладов, даёт следующую выражения для вклада в действие мягких мод в задаче с накачкой:

$$\delta_A S_{soft} = \pi \Omega_P \frac{ig}{2\varepsilon_0} \left(\frac{A}{2}\right)^2 \int \frac{d\Omega}{(2\pi)} \hat{u}_{-\Omega}^T \begin{pmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 4\Omega_P \end{pmatrix} \hat{u}_\Omega \quad (\text{A.34})$$

#### A.4 Вычисление восприимчивости

Относительная малость флуктуаций  $u(x)$  позволяет записать следующее выражение для восприимчивости:

$$\chi(\Omega) = \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta f_\Omega^q \delta f_\Omega^{cl}} \left( S_{\tilde{\Phi}}^{(0)} + \frac{i}{2} \langle [S^{(1)}]^2 \rangle \right) \quad (\text{A.35})$$

Выражение  $S^{(0)}$  было вычислено выше. Ниже будет вычислен второй член.

### А.4.1 Вычисление $\frac{i}{2}\langle[S^{(1)}]^2\rangle$

Воспользовавшись выражение для  $S^{(1)}$  из (A.16) и проводя усреднение, мы получаем:

$$\frac{i}{2}\langle[S^{(1)}]^2\rangle = -\left(\frac{g}{\varepsilon_0}\right)^2 \int \frac{d\Omega_1 d\Omega d\Omega_2}{(2\pi)^3} \begin{pmatrix} \hat{\Phi}_{-\Omega_1-\frac{\Omega}{2}}^T L_{I,1}(\Omega, \Omega_1) \hat{\Phi}_{\Omega_1-\frac{\Omega}{2}} \\ \hat{\Phi}_{-\Omega_1-\frac{\Omega}{2}}^T \tau_X L_{I,1}(\Omega, \Omega_1) \hat{\Phi}_{\Omega_1-\frac{\Omega}{2}} \end{pmatrix}^T \hat{\mathcal{G}}_\Omega \begin{pmatrix} \hat{\Phi}_{-\Omega_2+\frac{\Omega}{2}}^T L_{I,1}(-\Omega, \Omega_2) \hat{\Phi}_{\Omega_2+\frac{\Omega}{2}} \\ \hat{\Phi}_{-\Omega_2+\frac{\Omega}{2}}^T \tau_X L_{I,1}(-\Omega, \Omega_2) \hat{\Phi}_{\Omega_2+\frac{\Omega}{2}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.36})$$

Здесь  $\hat{\mathcal{G}}_\Omega = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_\Omega^K & \mathcal{G}_\Omega^R \\ \mathcal{G}_\Omega^A & 0 \end{pmatrix}$ . Для вычисления восприимчивости нам требуется ввести пробное поле с помощью подстановки  $\tilde{\Phi} + f$  вместо  $\tilde{\Phi}$ . Затем нам надо взять вторую вариационную производную по  $f$ ; после этого мы можем считать что поле  $\tilde{\Phi}$  содержит только классическую компоненту. Вклад квадратичный по  $f$  мы обозначим как  $\left\{\frac{i}{2}\langle[S^{(1)}]^2\rangle\right\}_f^{(2)}$  ниже мы его выпишем.

### А.4.2 Вычисление $\left\{\frac{i}{2}\langle[S^{(1)}]^2\rangle\right\}_f^{(2)}$

Согласно определению:

$$\left\{\frac{i}{2}\langle[S^{(1)}]^2\rangle\right\}_f^{(2)} = -\left(\frac{g}{\varepsilon_0}\right)^2 \int \frac{d\Omega_1 d\Omega d\Omega_2}{(2\pi)^3} \begin{pmatrix} \hat{\Phi}_{-\Omega_1-\frac{\Omega}{2}}^T L_{I,2,1}(\Omega, \Omega_1) \hat{f}_{\Omega_1-\frac{\Omega}{2}} \\ \hat{\Phi}_{-\Omega_1-\frac{\Omega}{2}}^T L_{I,2,2}(\Omega, \Omega_1) \hat{f}_{\Omega_1-\frac{\Omega}{2}} \end{pmatrix}^T \hat{\mathcal{G}}_\Omega \begin{pmatrix} \hat{\Phi}_{-\Omega_2+\frac{\Omega}{2}}^T L_{I,2,1}(-\Omega, \Omega_2) \hat{f}_{\Omega_2+\frac{\Omega}{2}} \\ \hat{\Phi}_{-\Omega_2+\frac{\Omega}{2}}^T L_{I,2,2}(-\Omega, \Omega_2) \hat{f}_{\Omega_2+\frac{\Omega}{2}} \end{pmatrix} + \\ -2 \left(\frac{g}{\varepsilon_0}\right)^2 \int \frac{d\Omega_1 d\Omega d\Omega_2}{(2\pi)^3} \begin{pmatrix} \hat{f}_{-\Omega_1-\frac{\Omega}{2}}^T L_{I,2,1}(\Omega, \Omega_1) \hat{f}_{\Omega_1-\frac{\Omega}{2}} \\ \hat{f}_{-\Omega_1-\frac{\Omega}{2}}^T L_{I,2,2}(\Omega, \Omega_1) \hat{f}_{\Omega_1-\frac{\Omega}{2}} \end{pmatrix}^T \hat{\mathcal{G}}_\Omega \begin{pmatrix} \hat{\Phi}_{-\Omega_2+\frac{\Omega}{2}}^T L_{I,1}(-\Omega, \Omega_2) \hat{\Phi}_{\Omega_2+\frac{\Omega}{2}} \\ \hat{\Phi}_{-\Omega_2+\frac{\Omega}{2}}^T \tau_X L_{I,1}(-\Omega, \Omega_2) \hat{\Phi}_{\Omega_2+\frac{\Omega}{2}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.37})$$

Здесь  $L_{I,2,1}(\Omega, \Omega_1) = L_{I,1}(\Omega, \Omega_1) + L_{I,1}(\Omega, -\Omega_1)^T$  и  $L_{I,2,2}(\Omega, \Omega_1) = \tau_X L_{I,1}(\Omega, \Omega_1) + L_{I,1}(\Omega, -\Omega_1)^T \tau_X$ . Наконец, нам надо написать этот член в более удобной форме а также использовать то, что поле  $\Phi$  имеет только классическую компоненту.

С учётом этого, мы можем записать:

$$\begin{aligned}
\left\{ \frac{i}{2} \langle [S^{(1)}]^2 \rangle \right\}_f^{(2)} &= - \left( \frac{g}{\varepsilon_0} \right)^2 \int \frac{d\Omega_1 d\Omega d\Omega_2}{(2\pi)^3} \tilde{\Phi}_{-\Omega_1 - \frac{\Omega}{2}}^{cl} \tilde{\Phi}_{-\Omega_2 + \frac{\Omega}{2}}^{cl} \hat{f}_{\Omega_1 - \frac{\Omega}{2}}^T \hat{\Pi}_{I,1}(\Omega, \Omega_1, \Omega_2) \hat{f}_{\Omega_2 + \frac{\Omega}{2}} + \\
&\quad - 2 \left( \frac{g}{\varepsilon_0} \right)^2 \int \frac{d\Omega_1 d\Omega d\Omega_2}{(2\pi)^3} \tilde{\Phi}_{\Omega_2 + \frac{\Omega}{2}}^{cl} \tilde{\Phi}_{-\Omega_2 + \frac{\Omega}{2}}^{cl} \hat{f}_{-\Omega_1 - \frac{\Omega}{2}}^T \hat{\Pi}_{I,2}(\Omega, \Omega_1, \Omega_2) \hat{f}_{\Omega_1 - \frac{\Omega}{2}} \\
\left[ \hat{\Pi}_{I,1}(\Omega, \Omega_1, \Omega_2) \right]_{s_1, s_0} &= \begin{pmatrix} [L_{I,2,1}(\Omega, \Omega_1)]_{cl, s_1} \\ [L_{I,2,2}(\Omega, \Omega_1)]_{cl, s_1} \end{pmatrix}^T \hat{\mathcal{G}}_{\Omega} \begin{pmatrix} [L_{I,2,1}(-\Omega, \Omega_2)]_{cl, s_0} \\ [L_{I,2,2}(-\Omega, \Omega_2)]_{cl, s_0} \end{pmatrix} \\
\hat{\Pi}_{I,2}(\Omega, \Omega_1, \Omega_2) &= \begin{pmatrix} L_{I,2,1}(\Omega, \Omega_1) \\ L_{I,2,2}(\Omega, \Omega_1) \end{pmatrix}^T \hat{\mathcal{G}}_{\Omega} \begin{pmatrix} [L_{I,1}(-\Omega, \Omega_2)]_{cl, cl} \\ [L_{I,1}(-\Omega, \Omega_2)]_{q, cl} \end{pmatrix} \quad (A.38)
\end{aligned}$$

Также мы выполним сдвиг частоты в первом члене, в результате мы можем записать это выражение в простой форме:

$$\begin{aligned}
\left\{ \frac{i}{2} \langle [S^{(1)}]^2 \rangle \right\}_f^{(2)} &= -2 \left( \frac{g}{\varepsilon_0} \right)^2 \int \frac{d\Omega_1 d\Omega d\Omega_2}{(2\pi)^3} \tilde{\Phi}_{\Omega_2 + \frac{\Omega}{2}}^{cl} \tilde{\Phi}_{-\Omega_2 + \frac{\Omega}{2}}^{cl} \hat{f}_{-\Omega_1 - \frac{\Omega}{2}}^T \hat{\Pi}_I(\Omega, \Omega_1, \Omega_2) \hat{f}_{\Omega_1 - \frac{\Omega}{2}} \\
\hat{\Pi}_I(\Omega, \Omega_1, \Omega_2) &= \hat{\Pi}_{I,2}(\Omega, \Omega_1, \Omega_2) + \frac{1}{2} \hat{\Pi}_{I,1} \left( \Omega_1 - \Omega_2, -\frac{\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega}{2}, \frac{\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega}{2} \right) \quad (A.39)
\end{aligned}$$

### A.4.3 Восприимчивость: главный вклад

Главный вклад в восприимчивость можно получить положив  $\tilde{\Phi}_{\Omega} = 2\pi\delta(\Omega)$  в действии выше (A.39); накачка в таком случае входит в ответ за счёт модификации действия для мягких мод. Тогда вклад выше мы можем записать как:

$$\begin{aligned}
\left\{ \frac{i}{2} \langle [S^{(1)}]^2 \rangle \right\}_f^{(2)} &= -2 \left( \frac{g}{\varepsilon_0} \right)^2 \int \frac{d\Omega}{(2\pi)} \hat{f}_{-\Omega}^T \hat{\Pi}_I(0, \Omega, 0) \hat{f}_{\Omega} \\
\hat{\Pi}_I(0, \Omega, 0) &= \frac{\Omega^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{G}_{\Omega}^A \psi^2(\Omega) \\ \mathcal{G}_{\Omega}^R \psi^2(-\Omega) & -i\pi [\mathcal{G}_{\Omega}^A \psi(\Omega) + \mathcal{G}_{\Omega}^R \psi(-\Omega)] + \mathcal{G}_{\Omega}^K \psi(-\Omega) \psi(\Omega) \end{pmatrix} \quad (A.40)
\end{aligned}$$

а восприимчивость имеет вид:

$$\boxed{\chi(\Omega) = -\frac{2g}{\varepsilon_0} \psi(-\Omega) \left[ 1 + \frac{g}{2\varepsilon_0} \Omega^2 \mathcal{G}_{\Omega}^R \psi(-\Omega) \right]} \quad (A.41)$$

Здесь мы опустили вклад связанный с логарифмической расходимостью на малых масштабах (этот вклад не зависит от частоты).

В случае отсутствия накачки восприимчивость и её мнимая часть даётся выражением:

$$\chi(\Omega) = -\frac{2g}{\varepsilon_0} \psi(-\Omega) \frac{(\Omega^2 + 1)}{(\Omega^2 + 1) - \frac{g}{2\varepsilon_0^2} \psi(-\Omega)}$$

$$\text{Im } \chi^R(\Omega) = -\frac{2g}{\varepsilon_0} \text{Im } \psi(-\Omega) \frac{(\Omega^2 + 1)^2}{\left(\Omega^2 + 1 - \frac{g}{2\varepsilon_0^2} \text{Re } \psi(-\Omega)\right)^2 + \left[\frac{g}{2\varepsilon_0^2} \text{Im } \psi(-\Omega)\right]^2}$$
(A.42)

#### A.4.4 Восприимчивость: добавка за счёт накачки

В случае накачки, мы можем записать:  $\tilde{\Phi}_\Omega = 2\pi (\delta(\Omega) + \frac{A}{2} (\delta(\Omega - \Omega_P) + \Omega_P \rightarrow -\Omega_P))$ . Учёт членов  $\sim A$  в  $\tilde{\Phi}_\Omega$  приводит к вкладу пропорциональному  $A^2$  в действии.

$$\delta_A \left\{ \frac{i}{2} \langle [S^{(1)}]^2 \rangle \right\}_f^{(2)} = -2 \left( \frac{Ag}{2\varepsilon_0} \right)^2 \int \frac{d\Omega}{(2\pi)} \hat{f}_{-\Omega}^T \left[ \hat{\Pi}_I(0, \Omega, \Omega_P) + \Omega_P \rightarrow -\Omega_P \right] \hat{f}_\Omega \approx$$

$$i \frac{\ln(\Omega_R) A^2}{\Omega_W} \frac{g}{\varepsilon_0} \int \frac{d\Omega}{(2\pi)} \hat{f}_{-\Omega}^T \begin{pmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & \Omega_P \end{pmatrix} \hat{f}_\Omega$$
(A.43)

которое приводит к следующей поправке к восприимчивости:  $\delta_A \chi^R(\Omega) = i \frac{\ln(\Omega_R) A^2}{\Omega_W} \frac{g}{\varepsilon_0} \Omega$ . Эта поправка меньше чем вклад за счёт модификации действия мягких мод т.к.  $\Omega/\Omega_W \ll 1$ .

## A.5 Нагревание

Накачка приводит к тому, что система нагревается за счёт поглощение энергии. Для модели SYK изменение температуры приводит к ненулевому среднему  $\partial_x \langle u^{cl}(x) \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle = \frac{T_{new}}{T_{old}}$  поэтому, для достаточно долгого нагревания, наше предположение о малости  $\partial_x u \ll 1$  будет не верным. С другой стороны, как это показано в основном тексте, скорость поглощения для режима "сухого трения" не зависит от температуры; поэтому наш результат не чувствителен к нагрева-

нию, до тех пор пока мы можем пренебречь членами выше квадратичного по  $u(x)$ .

Для учёта малого изменения температуры  $\delta T/T$  при поглощении энергии, мы рассмотрим накачку с малой амплитудой  $A$  и конечной продолжительностью во времени  $t_{\text{pump}}$  т.е. не монохроматическую по определению. В этой секции мы покажем как связаны спектр нашей накачки и изменение  $u^{cl}$ .

Мы рассмотрим общий случай накачки  $\tilde{\Phi}_\Omega^{cl} = (2\pi\delta(\Omega) + \Phi_\Omega)$  и  $\Phi^q = 0$ . Наша цель написать выражение для  $\langle u_\Omega^{cl} \rangle$ , но сначала нам надо найти флуктуационный пропагатор мягких мод. В присутствии накачки, мы не можем её представить как функцию всего одной частоты т.к. задача нестационарная.

В предположении, что накачка слабая мы можем использовать теорию возмущений по амплитуде накачки. Нам потребуется вклады до второго порядка. В отсутствие накачки мы можем записать :  $\mathcal{G}^{(0)}(\Omega, \Omega') = 2\pi\delta(\Omega + \Omega')\mathcal{G}_\Omega$ . Где  $\mathcal{G}_\Omega$  была определена в подсекции III.A. Линейная поправка к функции Грина может быть получена из выражения  $S_{\tilde{\Phi}}^{(2)}$  и имеет вид:

$$\mathcal{G}^{(1)}(\Omega, \Omega') = \frac{ig}{2\varepsilon_0} \Phi_{\Omega+\Omega'} \mathcal{G}_\Omega \left[ \hat{L}_{II}(-\Omega', -\Omega, \frac{\Omega + \Omega'}{2}) + \hat{L}_{II}(-\Omega', -\Omega, -\frac{\Omega + \Omega'}{2}) \right] \mathcal{G}_{-\Omega'} \quad (\text{A.44})$$

Используя уравнение (A.16) из приложения A.2.3 для  $S^{(1)}$  мы найдём следующее выражение для среднего:

$$\left\langle \begin{pmatrix} u_\Omega^{(cl)} \\ u_\Omega^{(q)} \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{2g}{\varepsilon_0} \int \frac{d\Omega_1 d\Omega'}{(2\pi)^2} \frac{\tilde{\Phi}_{-\Omega_1 - \frac{\Omega'}{2}}^{cl} \tilde{\Phi}_{\Omega_1 - \frac{\Omega'}{2}}^{cl}}{\sqrt{2}} \mathcal{G}(\Omega, \Omega') \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} L_{I,1}(\Omega', \Omega_1)_{q,cl} \quad (\text{A.45})$$

Нас интересует член пропорциональный второй степени по амплитуде накачки  $A$ . Поскольку  $S^{(1)} \propto A$ , существенно использовать в выражении (A.45) поправку первого порядка к функции Грина  $\mathcal{G}^{(1)}$ .

Изменение температуры может быть найдено как:

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} -\Omega^2 \frac{1}{\sqrt{2}} \langle u_\Omega \rangle = \partial_x \frac{1}{\sqrt{2}} \langle u(x) \rangle \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\delta T}{T}$$

Используя выражение (A.45) мы находим, что :

$$\frac{\delta T}{T} = - \lim_{\Omega \rightarrow 0} \left\langle \frac{\Omega^2}{\sqrt{2}} u_{\Omega}^{(cl)} \right\rangle = \left[ \lim_{\Omega \rightarrow 0} \Omega^2 G(\Omega) \right] \int \frac{d\Omega'}{2\pi} |\Phi_{\Omega'}|^2 \text{Im} \chi(\Omega') \frac{\Omega'}{2} \quad (\text{A.46})$$

Используя физическую частоту  $\omega$ , мы можем записать выражение в виде:

$$\delta T = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon_0 + \frac{g}{\varepsilon_0}} \int \frac{d\omega'}{2\pi} |\Phi_{\omega'}|^2 \text{Im} \chi(\omega') \frac{\omega'}{2} = \frac{Q}{C} \quad (\text{A.47})$$

где

$$Q = \int \frac{d\omega'}{2\pi} |\Phi_{\omega'}|^2 \text{Im} \chi(\omega') \frac{\omega'}{2} \quad (\text{A.48})$$

это энергия поглощённая нашей системой.

$$C = 2\pi \left( \varepsilon_0 + \frac{g}{\varepsilon_0} \right) \quad (\text{A.49})$$

есть ни что иное как теплоёмкость нашей системы, которую мы получали ранее в приложении A.2.2 в уравнении (A.12). Для накачки с частотой  $\omega_R$ , амплитудой  $A$  и продолжительностью  $t_{\text{pump}}$ , мы имеем (тут  $\delta = 1/t_{\text{pump}}$ ):

$$\Phi_{\omega} = \frac{A}{2} \left[ \frac{\delta}{\delta^2 + (\omega - \omega_R)^2} + \frac{\delta}{\delta^2 + (\omega + \omega_R)^2} \right] \quad (\text{A.50})$$

В таком случае энергия поглощённая нашей системой есть:

$$Q = \frac{A^2}{16} \omega_R t_{\text{pump}} \text{Im} \chi(\omega_R) \quad (\text{A.51})$$

Выражения (A.51, A.49) были использованы для вывода неравенства (24) в главной части текста.

## A.6 Модификация седлового действия

В большей части данной работы мы изучали свойства мягких мод и их влияние на восприимчивость, в присутствии квадратичного возмущения пропорционального  $\propto \Gamma_{ij}$ . Ниже мы рассмотрим другой эффект от этого возмущения:

изменение седлового решения для фермионной функции Грина. В некотором смысле мы учтём эффекты "жёстких мод".

Для анализа этих мод мы воспользуемся следующим действием:

$$S = S_\phi - \frac{i}{2}N \sum_{s,s'} \int dx dx' [\mathcal{M} s s' G_{ss'}^2(x,x') + G_{s,s'}(x,x') \Sigma_{s,s'}(x,x')] - i \frac{N}{2} Tr \ln \left( \hat{1} + \hat{G}^\phi \circ \hat{\Sigma} \right) \quad (\text{A.52})$$

где  $\mathcal{M} \equiv \frac{\Gamma^2}{2J^2} \left( \frac{2\pi}{\beta J} \right)^{-1}$ . Уравнение (A.52) содержит функцию Грина электронов зависящую от мягких мод

$$G_{s_1,s_2}^\phi(x_1,x_2) = G_{s_1,s_2}^0(\phi_{s_1}(x_1), \phi_{s_2}(x_2)) [\phi'_{s_1}(x_1) \phi'_{s_2}(x_2)]^\Delta \quad (\text{A.53})$$

где  $\hat{G}^0$  это конформное решение седловых уравнений для модели  $SYK$ , которая имеет следующее представление в базисе  $(cl, q)$ , в Фурье представлении:

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} \mathcal{G}^R(\Omega) & \mathcal{G}^K(\Omega) \\ 0 & \mathcal{G}^A(\Omega) \end{pmatrix} = -2ib^\Delta \cos(\pi\Delta) \begin{pmatrix} K_\Delta(\Omega) & \tanh(\pi\Omega) \{K_\Delta(\Omega) + K_\Delta(-\Omega)\} \\ 0 & -K_\Delta(-\Omega) \end{pmatrix} \quad (\text{A.54})$$

В присутствии источников действие имеет вид:

$$S = S_\phi - \frac{i}{2}N \sum_{s,s'} \int dx dx' \left[ \mathcal{M} (1 + \Phi^s(x)) (1 + \Phi^{s'}(x')) s s' G_{ss'}^2(x,x') + G_{s,s'}(x,x') \Sigma_{s,s'}(x,x') \right] - i \frac{N}{2} Tr \ln \left( \hat{1} + \hat{G}^\phi \circ \hat{\Sigma} \right) \quad (\text{A.55})$$

Нам будет удобно переписать это выражение используя матричные обозначения:

$$\begin{aligned}
S &= S_\phi + \frac{i}{2}N\mathcal{M}Tr \left[ \left\{ \hat{1} + \hat{\mathcal{F}} \right\} \circ G \circ \left\{ \hat{1} + \hat{\mathcal{F}} \right\} \circ G \right] \\
&\quad + \frac{i}{2}NTr \left[ \hat{G} \circ \hat{\Sigma} \right] - i\frac{N}{2}Tr \ln \left( \hat{1} + \hat{G}^\phi \circ \hat{\Sigma} \right) \\
\hat{\mathcal{F}}(x, x') &= \begin{pmatrix} \Phi^{cl}(x) & \Phi^q(x) \\ \Phi^q(x) & \Phi^{cl}(x) \end{pmatrix} \delta(x - x')
\end{aligned} \tag{A.56}$$

В пределе  $\mathcal{M} \ll 1$  флуктуации около седловой точки полей  $G$  и  $\Sigma$  малы. Рассмотрим эффект этих флуктуаций полагая, что  $G = G^\phi + \delta G$  и  $\Sigma = \delta \Sigma$ . В таком случае:

$$\begin{aligned}
S &= S_\phi + \frac{i}{2}N\mathcal{M}Tr \left[ \left\{ \hat{1} + \hat{\mathcal{F}} \right\} \circ \hat{G}^\phi \circ \left\{ \hat{1} + \hat{\mathcal{F}} \right\} \circ \hat{G}^\phi \right] \\
&\quad + iN\mathcal{M}Tr \left[ \left\{ \hat{1} + \hat{\mathcal{F}} \right\} \circ \delta \hat{G} \circ \left\{ \hat{1} + \hat{\mathcal{F}} \right\} \circ \left( \hat{G}^\phi \right) \right] \\
&\quad + \frac{i}{2}N\mathcal{M}Tr \left[ \left\{ \hat{1} + \hat{\mathcal{F}} \right\} \circ \delta \hat{G} \circ \left\{ \hat{1} + \hat{\mathcal{F}} \right\} \circ \delta \hat{G} \right] \\
&\quad + \frac{i}{2}NTr \left[ \left( \hat{G}^\phi + \delta \hat{G} \right) \circ \hat{\Sigma} \right] - i\frac{N}{2}Tr \left( \hat{G}^\phi \circ \delta \hat{\Sigma} - \frac{1}{2}\hat{G}^\phi \circ \delta \hat{\Sigma} \circ \hat{G}^\phi \circ \delta \hat{\Sigma} \right)
\end{aligned} \tag{A.57}$$

Первая строка в этом выражении это действие нашей изначальной модели учитывающее только мягкие моды. Его вклад в восприимчивость был вычислен нами ранее. Второй член во второй строке не важен поскольку 1) эта поправка к действию мала как  $\mathcal{M} \ll 1$ , и 2) она содержит ещё две малых вклада  $\delta G$  и поэтому поправка к восприимчивости мала как  $1/N \ll 1$ . Мы также отметим, что в главном порядке нету вклада связанного одновременно с мягкими модами  $\phi$  и полями  $G$  и  $\Sigma$ . В результате поправка к восприимчивости определяема данным членом в действии:

$$\begin{aligned}
\delta S \left[ \frac{i}{2}N \right]^{-1} &= 2\mathcal{M}Tr \left[ \delta \hat{G} \circ \left\{ \hat{1} + \hat{\mathcal{F}} \right\} \circ \left( \hat{G}^0 \right) \circ \left\{ \hat{1} + \hat{\mathcal{F}} \right\} \right] + Tr \left[ \delta \hat{G} \circ \hat{\Sigma} \right] \\
&\quad + \frac{1}{2}Tr \left( \hat{G}^\phi \circ \hat{\Sigma} \circ \hat{G}^\phi \circ \hat{\Sigma} \right)
\end{aligned} \tag{A.58}$$

После интегрирования по полям  $\delta G$  и  $\delta \Sigma$  мы получим следующее эффективное действие:

$$S_{\mathcal{F}} \left[ \frac{i}{2} N \right]^{-1} = 2 (2\mathcal{M})^2 Tr \left[ \hat{\mathcal{F}} \circ \hat{G}^0 \circ \hat{\mathcal{F}} \circ \hat{G}^0 \circ \hat{G}^0 \circ \hat{G}^0 \right] + (2\mathcal{M})^2 Tr \left[ \hat{\mathcal{F}} \circ \hat{G}^0 \circ \hat{G}^0 \circ \hat{\mathcal{F}} \circ \hat{G}^0 \circ \hat{G}^0 \right] \quad (\text{A.59})$$

Действие (A.59) может быть использовано для вычисления поправки к восприимчивости; в результате мы получим:

$$\begin{aligned} \delta\chi(\Omega) = -i4N\mathcal{M}^2 \int \frac{d\Omega'}{2\pi} F_{\Omega'}(\{G_{\Omega'}^R - G_{\Omega'}^A\} \{ [G_{\Omega'+\Omega}^R]^3 + [G_{\Omega'-\Omega}^A]^3 \} \\ + \{ [G_{\Omega'}^R]^3 - [G_{\Omega'}^A]^3 \} \{ G_{\Omega'+\Omega}^R + G_{\Omega'-\Omega}^A \} \\ + \{ [G_{\Omega'}^R]^2 - [G_{\Omega'}^A]^2 \} \{ [G_{\Omega'+\Omega}^R]^2 + [G_{\Omega'-\Omega}^A]^2 \}) \quad (\text{A.60}) \end{aligned}$$

Рассмотрим мнимую часть выражения (A.60) в пределе низких частот  $\Omega \ll 1$ . В результате мы получим выражение из основной части текста.