

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау  
Российской академии наук

На правах рукописи

Фоминов Яков Викторович

**Взаимовлияние сверхпроводимости и магнетизма  
и особенности нечётных по частоте сверхпроводящих состояний**

Специальность 01.04.02 —  
«Теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени  
доктора физико-математических наук

Черноголовка — 2019

## Оглавление

	Стр.
<b>Введение</b> . . . . .	6
<b>Глава 1. Нечётная по частоте сверхпроводимость</b> . . . . .	18
1.1 Дальнедействующая триплетная сверхпроводимость в системах сверхпроводник-ферромагнетик с неелевскими доменными стенками . . . . .	19
1.1.1 Введение . . . . .	19
1.1.2 Основные уравнения. Эффект Джозефсона в случае полубесконечного домена . . . . .	21
1.1.3 Эффект Джозефсона в многодоменном SFS контакте . . . . .	28
1.1.4 Плотность состояний в SF бислое . . . . .	33
1.1.5 Заключение . . . . .	36
1.2 Проводимость контакта между нормальным металлом и сверхпроводником Березинского . . . . .	37
1.2.1 Введение . . . . .	37
1.2.2 Вычисление проводимости . . . . .	38
1.2.3 Туннельный предел: $G_N \gg G_T$ . . . . .	41
1.2.4 Прозрачный предел: $G_N \ll G_T$ . . . . .	42
1.2.5 Заключение . . . . .	44
1.3 Расширенная классификация сверхпроводящих состояний и проблема двух нечётных по частоте состояний с различным типом мейснеровского отклика . . . . .	44
1.3.1 Введение . . . . .	44
1.3.2 Расширенная классификация сверхпроводящих состояний . . . . .	45
1.3.3 Объёмное состояние сверхпроводника: описание с помощью функциональных интегралов . . . . .	48
1.3.4 Сосуществование $\omega$ -нечётного-диа и $\omega$ -нечётного-пара состояний . . . . .	56
1.3.5 Обсуждение . . . . .	58
1.3.6 Заключение . . . . .	60
1.4 Локальный импеданс на диффузной поверхности кирального $p$ -волнового сверхпроводника . . . . .	61
1.4.1 Введение . . . . .	61
1.4.2 Упрощённая теория без учёта самосогласования . . . . .	61
1.4.3 Самосогласованная теория . . . . .	67
1.4.4 Сравнение с экспериментом . . . . .	78
1.4.5 Заключение . . . . .	79
<b>Глава 2. Сверхпроводящие спиновые клапаны</b> . . . . .	81
2.1 Сверхпроводящий триплетный спиновый клапан . . . . .	81

	Стр.
2.1.1 Введение . . . . .	81
2.1.2 Постановка задачи . . . . .	82
2.1.3 Решение . . . . .	83
2.1.4 Анализ полученного решения . . . . .	85
2.1.5 Обсуждение . . . . .	87
2.1.6 Заключение . . . . .	88
2.2 Теоретический анализ экспериментов по реализации триплетного спинового клапана . . . . .	89
2.2.1 Введение . . . . .	89
2.2.2 Анализ данных по спиновым клапанам Pb/Fe/Fe . . . . .	90
2.2.3 Анализ данных по спиновым клапанам Pb/Pu/Pu . . . . .	96
2.2.4 Анализ данных по спиновым клапанам Pb/Co <sub>2</sub> Cr <sub>1-x</sub> Fe <sub>x</sub> Al/Pu . . . . .	98
2.2.5 Заключение . . . . .	99
2.3 Расщепление куперовских пар в баллистических ферромагнитных СКВИДах . . . . .	99
2.3.1 Введение . . . . .	99
2.3.2 Постановка задачи . . . . .	101
2.3.3 Андреевские уровни . . . . .	107
2.3.4 Джозефсоновский ток . . . . .	114
2.3.5 Обсуждение результатов . . . . .	115
2.3.6 Заключение . . . . .	117
<b>Глава 3. Сверхпроводимость и неупорядоченный магнетизм . . . . .</b>	<b>119</b>
3.1 Минищель в контактах сверхпроводник–ферромагнетик с неоднородной намагниченностью . . . . .	119
3.1.1 Введение . . . . .	119
3.1.2 Метод . . . . .	120
3.1.3 Спиральная намагниченность . . . . .	121
3.1.4 Заключение . . . . .	125
3.2 Эффективное рассеяние с переворотом спина в диффузных сверхпроводящих гибридных структурах с магнитным беспорядком . . . . .	125
3.2.1 Введение . . . . .	125
3.2.2 Основные результаты . . . . .	126
3.2.3 Сигма-модельный вывод . . . . .	129
3.2.4 Вывод из уравнений Узаделя . . . . .	134
3.2.5 Диаграммное представление . . . . .	136
3.2.6 Заключение . . . . .	138
3.3 Поверхностный импеданс в диффузных сверхпроводниках со слабыми неборновскими магнитными примесями . . . . .	139
3.3.1 Введение . . . . .	139
3.3.2 Основные уравнения . . . . .	140

	Стр.	
3.3.3	Функции Грина и плотность состояний . . . . .	142
3.3.4	Диссипативная проводимость . . . . .	144
3.3.5	Магнитные примеси как ловушки для неравновесных квазичастиц . . . . .	149
3.3.6	Поверхностный импеданс . . . . .	150
3.3.7	Заключение . . . . .	151
3.4	Подщелевые состояния в диффузных сверхпроводниках с сильными магнитными примесями . . . . .	152
3.4.1	Введение . . . . .	152
3.4.2	Формулировка задачи и результаты . . . . .	155
3.4.3	Теоретико-полевое описание . . . . .	163
3.4.4	Инстантоны и подщелевые состояния . . . . .	168
3.4.5	Подщелевые состояния: предельные случаи . . . . .	175
3.4.6	Обсуждение . . . . .	179
3.4.7	Заключение . . . . .	180
<b>Глава 4.</b>	<b>Кулоновские эффекты в гранулированных сверхпроводниках в магнитном поле . . . . .</b>	<b>182</b>
4.1	Диэлектрическое состояние гранулированного сверхпроводника в режиме хорошей межгранульной проводимости . . . . .	182
4.1.1	Введение . . . . .	182
4.1.2	Фазовая диаграмма сверхпроводящей гранулы . . . . .	185
4.1.3	Сетка сверхпроводящих гранул . . . . .	186
4.1.4	Обсуждение . . . . .	190
4.1.5	Заключение . . . . .	190
4.2	Эффект близости в присутствии кулоновского взаимодействия и магнитного поля . . . . .	190
4.2.1	Введение . . . . .	190
4.2.2	Модель . . . . .	193
4.2.3	Термодинамическая минищель . . . . .	198
4.2.4	Туннельная плотность состояний . . . . .	204
4.2.5	Заключение . . . . .	207
	<b>Заключение . . . . .</b>	<b>209</b>
	<b>Список сокращений и условных обозначений . . . . .</b>	<b>213</b>
	<b>Список публикаций по теме диссертации . . . . .</b>	<b>214</b>
	<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>216</b>
	<b>Приложение А. Квазиклассические уравнения и комплексная проводимость . . . . .</b>	<b>237</b>

	Стр.
A.1 Общий вид парного потенциала . . . . .	237
A.2 Парный потенциал с одной спиновой компонентой . . . . .	239
A.3 Однокомпонентный парный потенциал с $\varphi = 0$ . . . . .	240
<b>Приложение Б. Общее решение задачи о вычислении <math>T_c</math> спинового клапана S/F1/F2 . . . . .</b>	<b>243</b>
<b>Приложение В. Сильные магнитные примеси: края спектра в теории среднего поля . . . . .</b>	<b>246</b>
<b>Приложение Г. Флуктуации параметра порядка, вызванные магнитными примесями . . . . .</b>	<b>247</b>
Г.1 Общее выражение для $C_\Delta(q)$ . . . . .	247
Г.2 Подавление $\Delta(\mathbf{r})$ вблизи одиночной магнитной примеси . . . . .	248

## Введение

Сверхпроводимость и ферромагнетизм — два типа упорядочения, которые обычно противоречат друг другу: в то время как традиционные синглетные сверхпроводники существуют благодаря образованию куперовских пар электронов с противоположными спинами, ферромагнитный порядок подразумевает одинаковое направление спинов электронов. Поэтому область сосуществования этих двух типов упорядочения довольно узка [1], но тем не менее весьма интересна: например, в классических работах Ларкина и Овчинникова [2], а также Фулде и Феррела [3] было показано, что в этом случае возможны неоднородные (модулированные) сверхпроводящие фазы (состояние ЛОФФ). В то же время широкий экспериментальный простор открывается при использовании гибридных SF контактов (контактов сверхпроводник/ферромагнетик): два противоборствующих типа упорядочения в них разделены в пространстве, а их взаимовлияние и необычные его следствия проявляются в приграничном слое мезоскопической толщины (т.е. характерный размер этого слоя много больше атомных размеров, но меньше длины сбая фазы электронов, так что электроны в нём не теряют когерентности).

Хотя теоретические исследования SF контактов были начаты довольно давно [4; 5], всплеск широкого интереса к таким системам произошёл в начале 2000-х годов в связи с экспериментальной реализацией состояния  $\pi$ -контакта в джозефсоновском SFS переходе [6]. Затем последовали экспериментальные наблюдения пространственных осцилляций плотности состояний в SF контактах [7], осцилляций критического тока SFS контакта в зависимости от толщины ферромагнитной прослойки [8], спонтанной генерации тока в джозефсоновской сетке SFS переходов [9] и др. Активно ведутся и теоретические исследования [10–12].

Ряд замечательных эффектов был предсказан в SF контактах с однородной намагниченностью ферромагнетика [10]. Затем были исследованы структуры, в которых намагниченность неоднородна. Обнаружилось, что в результате такого обобщения задачи в ней возникают качественно новые эффекты, наиболее яркий из которых — генерация дальнедействующей триплетной сверхпроводящей компоненты [11]. Здесь необходимо подчеркнуть, что речь идёт о контактах с обычными синглетными сверхпроводниками, а возникновение в такой системе триплетной сверхпроводимости является нетривиальным проявлением эффекта близости в контакте между синглетным сверхпроводником и неоднородным ферромагнетиком. Замечательной особенностью триплетной компоненты в этом случае является её большая (по сравнению с синглетной компонентой) глубина проникновения в ферромагнетик, что физически обусловлено отсутствием паразитирующего действия обменного поля на триплетные куперовские пары с проекциями спина 1 и  $-1$ . В диффузном случае, когда возможна только изотропная  $s$ -волновая сверхпроводимость, триплетная  $s$ -волновая компонента должна иметь нечётную временную (а, следовательно, и частотную) зависимость, чтобы выполнялся принцип Паули. Такая фаза была предложена Березинским в 1974 году [13] как одна из возможных фаз сверхтекучего гелия-3, однако в чистом объёмном гелии-3 такая фаза не обнаружена.

Первые реалистичные предсказания возникновения нечётной по частоте сверхпроводимости были сделаны для систем особого типа — неоднородных гибридных SF структур. Тем не менее, явление это оказывается гораздо более общим. Имеется дискуссия относительно возможности реализации такого состояния в объёмных веществах [14–17]. Предсказано, что нечётные по частоте сверхпроводящие компоненты могут возникать не только при нарушении спиновой симметрии (за счёт ферромагнетизма), но и за счёт нарушения трансляционной инвариантности (т.е. в неоднородных системах) [18]. Поверхностные андреевские состояния и связанные состояния в корах сверхпроводящих вихрей могут быть интерпретированы как проявления нечётной по частоте сверхпроводимости [18]. Также это явление напрямую связано с физикой майорановских фермионов в топологических сверхпроводниках [19]. Таким образом нечётная по частоте сверхпроводимость сама по себе является одной из очень важных и активно развивающихся тем современной физики конденсированного состояния.

Одним из направлений исследования физики SF контактов является так называемый эффект спинового клапана. Если толщина слоя сверхпроводника в SF контакте сравнима с длиной когерентности, эффект близости приводит к подавлению температуры сверхпроводящего перехода  $T_c$  всей системы за счёт влияния ферромагнетика. Это явление исследовалось ранее, в частности была отмечена немонотонная зависимость  $T_c$  структуры от толщины ферромагнетика [20]. Интересные возможности открываются при наличии двух ферромагнитных слоёв с возможностью изменения взаимной ориентации намагниченностей. Можно ожидать, что при параллельной ориентации разрушающий эффект ферромагнетиков на сверхпроводимость наибольший и  $T_c$  минимальна, а при антипараллельной ориентации происходит частичная компенсация обменных полей, в результате чего  $T_c$  оказывается максимальной. Исходя из этой идеи, в работах [21; 22] была предложена структура под названием «сверхпроводящий спиновый клапан» (или «сверхпроводящий спиновый вентиль»), которая лучше всего работает в диапазоне параметров таком, что при параллельной ориентации  $T_c$  равна нулю, т.е. сверхпроводимость полностью разрушена. В этом случае изменение взаимной ориентации намагниченностей двух плёнок позволяет «включать» и «выключать» сверхпроводимость в системе. При неколлинеарных ориентациях намагниченностей необходим учёт дальнедействующей триплетной компоненты.

Задачи о взаимовлиянии сверхпроводимости и неоднородного ферромагнетизма естественным образом стыкуются со случаем неупорядоченного магнетизма. Физика в этом случае также оказывается весьма богатой. Эксперименты с ферромагнетиками зачастую демонстрируют заметный эффект рассеяния с переворотом спина [8], скорее ожидаемый в случае магнетизма в виде неупорядоченных магнитных примесей [23]. Сами по себе задачи с магнитными примесями особенно интересны в случае сильных (неборновских) примесей, т.к. в этом случае примеси создают связанные квазичастичные состояния, формирующие подщелевую примесную зону при конечной концентрации примесей [24; 25]. Подщелевые состояния оказывают существенное влияние на различные свойства системы, например, на поглощение в ней излучения. При учёте флуктуаций (обусловленных как магнитными, так и потенциальными примесями) подщелевая плотность состояний должна быть ненулевой не только в примесной зоне, но и вблизи её краёв — должны возникать «хвосты» плотности состояний.

Особый класс задач о влиянии магнетизма на сверхпроводимость связан с гранулированными системами. Гранулированность может быть как следствием естественной морфологии системы, так и достигаться специальным процессом изготовления. В таких системах из-за малого размера гранул и малости ёмкости оказываются важны кулоновские эффекты [26; 27]. Таким образом возникает ряд задач о взаимовлиянии кулоновских эффектов и эффектов магнетизма. Имеются яркие экспериментальные результаты [28] по наблюдению глобально диэлектрической фазы поликристаллических сверхпроводящих плёнок на фоне состояния с локальной сверхпроводимостью.

**Целью** данной работы является теоретическое исследование эффектов взаимовлияния сверхпроводимости и магнетизма, в частности, выяснение роли и особенностей нечётных по частоте сверхпроводящих состояний.

Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие теоретические **задачи**:

1. Исследовать особенности дальнедействующей триплетной сверхпроводимости в системах сверхпроводник-ферромагнетик (SF) с неелевскими доменными стенками.
2. Исследовать проводимость контакта между нормальным металлом и сверхпроводником Березинского.
3. Построить классификацию сверхпроводящих состояний с учётом обсуждаемых в литературе нечётных по частоте корреляций с двумя различными типами мейснеровского отклика.
4. Исследовать локальный импеданс на диффузной поверхности кирального  $p$ -волнового сверхпроводника, в частности роль нечётной по частоте компоненты.
5. Исследовать возможный эффект сверхпроводящего триплетного спинового клапана за счёт генерации нечётных по частоте корреляций в системе SFF.
6. Исследовать процессы переноса тока, связанные с расщеплением куперовских пар в баллистических СКВИДах с ферромагнитными фильтрами в рукавах, и возможность управления характеристиками СКВИДа за счёт изменения относительной ориентации фильтров.
7. Исследовать возможность описания магнитного беспорядка в диффузных сверхпроводящих гибридных структурах как эффективного рассеяния с переворотом спина.
8. Исследовать поверхностный импеданс в диффузных сверхпроводниках со слабыми неборновским магнитными примесями.
9. Исследовать «хвосты» плотности состояний в диффузных сверхпроводниках с сильными магнитными примесями.
10. Исследовать возможность возникновения при приложении магнитного поля диэлектрического состояния в гранулированном сверхпроводнике в режиме хорошей межгранульной проводимости.
11. Исследовать эффект близости в нормальной грануле в присутствии кулоновского взаимодействия и магнитного поля.

При всём разнообразии рассмотренных в диссертационной работе задач все они (за единственным исключением) связаны с исследованием различных аспектов взаимовлияния

сверхпроводимости и магнетизма. В большинстве задач ключевые эффекты обусловлены возникновением в системе нечётных по частоте сверхпроводящих корреляций. Единственная задача, в которой отсутствует магнетизм (задача об импедансе на диффузной поверхности кирального  $p$ -волнового сверхпроводника), тем не менее связана с остальными задачами самым тесным образом. Физика рассматриваемых явлений в этой задаче обусловлена именно нечётной сверхпроводимостью, и в этом смысле поведение системы качественно похоже на контакт синглетный сверхпроводник/диффузный ферромагнетик (роль диффузного ферромагнетика аналогична роли диффузной поверхности  $p$ -волнового сверхпроводника). Каждая глава диссертационной работы имеет своё собственное введение, в котором представлен обзор теоретических и экспериментальных результатов, связанных с задачами, решаемыми в данной главе.

**Методы исследования.** Для решения поставленных задач используется комбинация современных методов физики конденсированного состояния. Многие методы заимствованы из квантовой теории поля. Одним из основных является метод функций Грина в теории сверхпроводимости и связанная с ним диаграммная техника. Общие уравнения (уравнения Горькова) в квазиклассическом приближении упрощаются, принимая вид уравнений Эйленбергера-Ларкина-Овчинникова. Эти уравнения позволяют описывать сверхпроводники, в частности анизотропные, с произвольной концентрацией примесей. В диффузном (грязном) пределе уравнения принимают вид уравнений Узаделя; в некоторых задачах для нахождения линейного отклика используется неравновесная формулировка этих уравнений. Альтернативой уравнениям Горькова являются уравнения Боголюбова – де Жена, позволяющие работать непосредственно с собственными энергиями и собственными функциями сверхпроводящего гамильтониана. В некоторых задачах оказывается удобна формулировка теории на основе функционального интегрирования по грассмановым полям. Нелинейная сигма-модель используется для описания эффектов магнитного беспорядка в диффузных системах и для одновременного учёта эффектов близости и кулоновских эффектов. Для нахождения плотности подщелевых состояний за рамками теории среднего поля используется инстантонный подход в методе репличной нелинейной сигма-модели.

**Основные результаты, выносимые на защиту:**

1. Построена теория SF и SFS контактов с неелевской доменной структурой. Показано, что в доменных стенках возникает нечётная по частоте дальнедействующая триплетная компонента. Вычислен вклад этой компоненты в плотность состояний, а также обусловленный ею джозефсоновский ток в SFS контакте. В пределе толщины ферромагнитного слоя, малой по сравнению с глубиной проникновения дальнедействующей компоненты, обнаружено, что контакт находится в  $\pi$ -состоянии.
2. Исследована проводимость контакта между нормальным металлом и сверхпроводником, имеющим симметрию, предложенную Березинским. Результаты качественно отличаются от случая обычного сверхпроводника и могут быть использованы для экспериментального обнаружения нечётной по частоте компоненты.
3. Построена обобщённая классификация сверхпроводящих состояний с учётом обсуждаемых в литературе нечётных по частоте корреляций с двумя различными типами

- мейснеровского отклика. В этом случае в зависимости от сочетания частотной симметрии, спиновой симметрии, пространственной чётности и типа отклика имеется восемь типов состояний. Показано, что эти восемь типов состояний делятся на две несмешивающиеся группы, причём нечётные по частоте состояния с диамагнитным и парамагнитным откликом принадлежат разным группам. Далее показано, что из двух групп сверхпроводящих состояний, порождаемых однородными сверхпроводниками произвольной симметрии, физически может реализовываться только группа, содержащая парамагнитные нечётные по частоте состояния.
4. Построена теория локальной комплексной проводимости и обусловленного ею поверхностного импеданса  $Z = R - iX$  на диффузной границе кирального  $p$ -волнового сверхпроводника. Изучены аномальные особенности поверхностного импеданса, связанные с генерацией вблизи границы нечётных по частоте сверхпроводящих корреляций; показано, что эти корреляции могут приводить к соотношению  $R > X$ . Дано микроскопическое объяснение наблюдаемого в экспериментах на  $\text{Sr}_2\text{RuO}_4$  аномально большого вклада нормальных электронов при низких температурах.
  5. Построена теория сверхпроводящего триплетного спинового клапана в системе типа SFF. Показано, что критическая температура системы  $T_c$  может быть немонотонной функцией угла  $\alpha$  между намагниченностями двух F слоёв, достигающей минимума при промежуточном значении  $\alpha$ , лежащем между параллельным (P,  $\alpha = 0$ ) и антипараллельным (AP,  $\alpha = \pi$ ) случаями. Показано, что при определённых параметрах зависимость  $T_c(\alpha)$  имеет возвратный характер. При рассмотрении только P и AP конфигураций обнаружено, что в зависимости от параметров системы возможен как «стандартный» ( $T_c^P < T_c^{AP}$ ), так и «обратный» ( $T_c^P > T_c^{AP}$ ) эффект переключения. Проведён теоретический анализ экспериментов, подтвердивших как триплетный эффект спинового клапана, так и обратный эффект переключения; получено согласие теории и эксперимента.
  6. Исследован особый тип сверхпроводящего спинового клапана, представляющий собой баллистический СКВИД со спиновой фильтрацией в рукавах за счёт полуметаллических ферромагнетиков. Джозефсоновский ток в этом случае полностью обусловлен процессами с расщеплением куперовских пар и качественным образом меняется в зависимости от относительной ориентации намагниченностей фильтров. Исследованы особенности ток-фазовой характеристики (её амплитуда и форма, переход в состояние  $\pi$ -контакта) и критического тока (немонотонность в зависимости от угла между намагниченностями и магнитного потока).
  7. Построено эффективное описание слабого магнитного беспорядка с произвольной корреляционной длиной как рассеяния с переворотом спина в задаче об эффекте близости в диффузной системе, составленной из сверхпроводящих и нормальных (или ферромагнитных) областей с магнитным беспорядком. Это локальное описание применимо на масштабах много больше корреляционной длины беспорядка.
  8. Исследовано влияние подщелевых примесных состояний на диссипацию (проявляющуюся в проводимости и поверхностном импедансе) в диффузном сверхпроводнике

со слабыми неборновскими магнитными примесями при произвольном соотношении между температурой, частотой и величиной подавления щели в случае, когда все три параметра малы по сравнению со щелью БКШ. Показано, что примесные состояния, возникающие при малых плотностях магнитных примесей, могут служить ловушками для неравновесных квазичастиц, уменьшая поглощение в некотором диапазоне низких частот электромагнитного поля.

9. Построена теория «хвостов» плотности состояний в диффузных сверхпроводниках с сильными магнитными примесями, подчиняющимися статистике Пуассона. В то время как по теории среднего поля все края спектра (включая края примесной зоны) являются резкими, инстантонный подход в технике репличной сигма-модели позволяет найти размытие этих краёв и хвосты плотности состояний. Физически хвосты связаны с флуктуациями потенциального (обычные примеси; мезоскопические флуктуации) и непотенциального (магнитные примеси) беспорядка. Показано, что неоднородность концентрации магнитных примесей приводит к появлению подщелевых состояний за счёт двух механизмов: флуктуаций паразарушающего параметра (магнитный аналог мезоскопических флуктуаций) и флуктуаций параметра порядка (определяемого самосогласованно).
10. Построена теория диэлектрического состояния в двумерном гранулированном сверхпроводнике с хорошей межгранульной проводимостью под действием магнитного поля в предположении шахматного порядка чередования сверхпроводящих и нормальных гранул (в последнем случае сверхпроводимость предполагается подавленной магнитным полем из-за разброса в размерах гранул).
11. Исследовано влияние магнитного поля и кулоновского взаимодействия на эффект близости в контакте между сверхпроводником и гранулой из нормального металла в пределе хорошей проводимости границы. Показано, что возможны три фазы нормальной гранулы: сильное и слабое сверхпроводящее (т.е. щелевое), а также нормальное (т.е. бесщелевое) состояние; исследованы фазовые переходы между ними. Показано, что туннельная плотность состояний в нормальной грануле может содержать две щели, соответствующие эффекту близости (минищель) и кулоновской блокаде (кулоновская щель).

**Научная новизна.** Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми. В ряде случаев они обобщают результаты, полученные ранее другими авторами — в таких случаях сопоставление с предыдущими результатами подробно обсуждается в тексте и даются необходимые ссылки. Такое сопоставление одновременно подтверждает достоверность представленных результатов.

**Достоверность** полученных результатов обеспечивается надёжностью применявшихся аналитических методов, согласием с теоретическими результатами, полученными в других работах, и согласием с данными физических и численных экспериментов, выполненных другими авторами.

**Практическая значимость.** Разработанные в диссертационной работе методы и полученные результаты могут быть использованы для описания широкого круга явлений в

мезоскопических системах, совмещающих в себе сверхпроводящие и магнитные свойства, в частности для выяснения особой роли нечётных по частоте сверхпроводящих состояний. С помощью предложенных подходов и на основании полученных результатов возможно дальнейшее развитие теории.

Все полученные результаты могут быть применены для анализа экспериментальных данных. В ряде случаев такие данные уже доступны, и сравнение показывает хорошее согласие теории и эксперимента. В остальных случаях предсказанные эффекты могут служить мотивацией для новых экспериментов.

Ряд результатов, касающихся различных проявлений нечётной по частоте сверхпроводимости, может быть использован для экспериментальной идентификации этого состояния, поскольку прямых методов идентификации частотной симметрии нет.

Результаты по классификации сверхпроводящих состояний при учёте нечётных по частоте состояний с разным типом мейснеровского отклика разъясняют неопределённость, существовавшую в литературе. Согласно представленным результатам, нечётные по частоте диамагнитные состояния не могут возникать как однородные объёмные состояния, т.к. не существует физически допустимых возмущений, которые могли бы зафиксировать фазу и таким образом привести к нарушению калибровочной симметрии.

Представленные результаты по импедансу на поверхности кирального  $p$ -волнового сверхпроводника и их сравнение с экспериментом свидетельствуют в пользу именно такого состояния в рутенате стронция  $\text{Sr}_2\text{RuO}_4$  (хотя это состояние считается главным кандидатом [29], вопрос не закрыт окончательно, поэтому важны дополнительные подтверждения).

Впервые предсказанные в SFF системах эффекты триплетного спинового клапана и обратного переключения послужили мотивацией для эксперимента. Проведённые эксперименты продемонстрировали наличие обоих предсказанных эффектов.

Продемонстрирована возможность эффективного описания слабого магнитного беспорядка с произвольной корреляционной длиной как рассеяния с переворотом спина в задаче об эффекте близости в диффузной системе, составленной из сверхпроводящих и нормальных (или ферромагнитных) областей с магнитным беспорядком. Такого рода описание ранее использовалось для анализа эксперимента эмпирически. Представленная теория даёт микроскопическое обоснование эмпирического подхода.

Результаты, касающиеся диссипации в сверхпроводниках с неборновскими магнитными примесями, показывают, что примесные состояния, возникающие при малых плотностях магнитных примесей, экспериментально могут использоваться в качестве ловушек для неравновесных квазичастиц, уменьшая поглощение в некотором диапазоне низких частот электромагнитного поля.

**Апробация работы.** Основные результаты, представленные в диссертации, докладывались и обсуждались на международных конференциях Летняя школа по теоретической физике «Nanoscopic Quantum Transport» (Лезуш, Франция, 2004), «Single Molecule Magnets and Hybrid Magnetic Nanostructures» (Триест, Италия, 2005), «Strongly Correlated Phenomena in Quantum Field Theory, Nanophysics and Hydrodynamics» (Триест, Италия, 2005), «Нанофизика и наноэлектроника» (Нижний Новгород, 2006, 2007, 2008, 2009, 2012, 2016,

2018), «Mesoscopic and Strongly Correlated Electron Systems» (Черноголовка, 2006), «Physics of Nanoscale Superconducting Heterostructures» (Лейден, Нидерланды, 2007), Euro-Asian Symposium EASTMAG «Magnetism on a nanoscale» (Казань, 2007), «Spintronics with superconductors» (Бохум, Германия, 2007), «Nanoscale Superconductivity and Magnetism» (Хсинчу, Тайвань, 2007), «Landau-Weizmann Workshop on theoretical physics» (Реховот, Израиль, 2008), «Spin Helicity and Chirality in Superconductor and Semiconductor Nanostructures» (Карлсруэ, Германия, 2008), I. F. Schegolev Memorial Conference «Low-Dimensional Metallic and Superconducting Systems» (Черноголовка, 2009), «Landau Days» (Черноголовка, 2009, 2010, 2011, 2012), «International Conference on Superconductivity and Magnetism» (Турция: Анталия, 2010; Стамбул, 2012), «Dubna-Nano» (Дубна, 2010, 2012), Российско-украинский семинар «Физика сверхпроводниковых гетероструктур» (Черноголовка, 2011; Киев, Украина, 2012), «Superconductivity Centennial Conference EUCAS-ISEC-ICMC» (Гаага, Нидерланды, 2011), «Humboldt Kolleg: NANO-2011. Cooperation and Networking of Universities and Research Institutes, study by doing research» (Кишинёв, Молдова, 2011), «Superconducting Nanohybrids» (Сан Себастьян, Испания, 2012), Совещание по физике низких температур НТ-36 (Санкт-Петербург, 2012), «Winter workshop/school on localization, interactions and superconductivity» (Черноголовка, 2014, 2015), «FFLO-Phase in Quantum Liquids, Quantum Gases, and Nuclear Matter» (Дрезден, Германия, 2016), «8th topology interactive meeting at Nagoya Univ.» (Нагоя, Япония, 2017), «Topological Materials Science» (Токио, Япония, 2017), «Moscow International Symposium on Magnetism (MISM)» (Москва, 2017), «Mesoscopic Structures: Fundamentals and Applications (MSFA)» (Листвянка, 2017), «А. А. Abrikosov Memorial Conference» (Черноголовка, 2018), на семинарах в ИТФ им. Л. Д. Ландау РАН (Черноголовка), ИФП им. П. Л. Капицы РАН (Москва), ИФТТ РАН (Черноголовка), ФИАН (Москва), МФТИ (Долгопрудный), НИТУ МИСиС (Москва), ИТФ им. Н. Н. Боголюбова НАНУ (Киев, Украина), в Швейцарской высшей технической школе Цюриха (Швейцария), в Центре статистической физики, магнетизма и сверхпроводимости (Гренобль, Франция), в университетах Нагои (Япония), Хоккайдо (Саппоро, Япония), в Институте исследования твёрдого тела Общества Макса Планка (Штутгарт, Германия).

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 20 научных работах. Все они опубликованы в 2005-2018 годах в рецензируемых журналах, входящих в международные базы данных Web of Science, Scopus и в перечень ВАК.

**Объём и структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и четырёх приложений. Полный объём диссертации составляет 248 страниц, включая 55 рисунков и 1 таблицу. Список литературы содержит 314 наименований.

Во **введении** обоснована актуальность темы, сформулирована цель работы, обоснованы новизна и практическая ценность полученных результатов, раскрыто содержание диссертации по главам.

**Первая глава** посвящена изучению особенностей нечётной по частоте сверхпроводимости. В разделе 1.1 изучаются свойства SF и SFS контактов при наличии неелевской доменной структуры в F части. Показано, что вблизи доменных стенок происходит генерация нечётной по частоте сверхпроводящей компоненты, которая в диффузном случае оказыва-

ется  $s$ -волновой и спин-триплетной. Замечательной особенностью таких сверхпроводящих корреляций оказывается их «дальнодействующий» характер: в то время как характерная длина когерентности в монокристаллическом  $F$  определяется энергетическим масштабом обменной энергии, триплетные корреляции в неоднородном обменном поле могут не испытывать разрушающего магнитного действия и распространяться на гораздо большую длину когерентности, определяемую энергетическим масштабом температуры. Вычислена поправка к плотности состояний в  $F$  слое благодаря дальнодействующей триплетной компоненте и обусловленный ею джозефсоновский ток в SFS контакте. В разделе 1.2 исследуется проводимость контакта между нормальным металлом и сверхпроводником, имеющим нечётную по частоте симметрию, предложенную Березинским. Андреевское отражение (связывающее положительные и отрицательные энергии) чувствительно к энергетической симметрии; в результате этого проводимость контакта со сверхпроводником Березинского качественно отличается от случая обычного сверхпроводника. В разделе 1.3 исследуются симметрии и магнитные свойства сверхпроводящих корреляций, возникающих как субдоминантные компоненты в неоднородных сверхпроводниках. Частотная симметрия, пространственная чётность и тип магнитного отклика этих субдоминантных сверхпроводящих компонент оказываются противоположны аналогичным характеристикам доминантных компонент в объёме. Этот вывод остаётся справедливым и при обобщении теории сверхпроводимости на случай недавно предложенных диамагнитных нечётных по частоте сверхпроводников. В результате сверхпроводящие корреляции можно разбить на восемь классов, учитывая их симметрии и магнитные свойства. При этом две группы состояний, содержащие парамагнитные и диамагнитные нечётные по частоте состояния соответственно, друг с другом не перемешиваются. В объёмном сверхпроводнике парамагнитное состояние было бы неустойчивым. Недавно несколькими группами была предложена возможность реализации объёмного однородного нечётного по частоте сверхпроводящего состояния с обычным диамагнитным мейснеровским откликом. В подразделах 1.3.3-1.3.5 показано, что в действительности не существует физически реализуемых возмущений, способных привести к спонтанному нарушению симметрии такого вида, который необходим для фактической реализации нечётного по частоте диамагнитного сверхпроводящего состояния. Это означает, что группа состояний, содержащих диамагнитные нечётные состояния, нереализуема, а реализуемые нечётные по частоте сверхпроводящие состояния должны иметь аномальный парамагнитный отклик (и реализуются в неоднородных системах). В разделе 1.4 рассматривается динамический отклик нечётной по частоте сверхпроводящей компоненты на электромагнитное поле. Конкретно, вычисляется поверхностный импеданс ( $Z = R - iX$ ) тонкой диффузной плёнки из нормального металла, покрывающей триплетный  $p$ -волновой сверхпроводник (эта плёнка моделирует неровную поверхность). В такой системе в результате эффекта близости также генерируются  $s$ -волновые триплетные нечётные по частоте сверхпроводящие корреляции. В противоположность обычному соотношению  $R < X$ , поверхностный импеданс за счёт таких корреляций может иметь аномальное поведение  $R > X$  при низких температурах. Это связано с аномальным эффектом Мейснера для нечётных состояний, который проявляется в противоположном обычному знаке связи между векторным потенциалом и сверхтоком. Особый интерес представляет

случай кирального  $p$ -волнового сверхпроводника — именно такое состояние считается наиболее вероятным в рутенате стронция. Общий ход температурных зависимостей  $R(T)$  и  $X(T)$  в этом случае существенно отличается от обычного, в частности из-за наличия большого числа подщелевых квазичастиц в нормальном слое (поверхностные андреевские состояния). Эксперименты, проведённые на образцах рутената стронция  $\text{Sr}_2\text{RuO}_4$  группой из ИФТТ, качественно согласуются с теорией, что подтверждает предположение о киральном  $p$ -волновом состоянии в этом веществе.

**Вторая глава** посвящена изучению сверхпроводящих спиновых клапанов. В разделе 2.1 исследуется критическая температура  $T_c$  трёхслойной SFF структуры, в которой при неколлинеарных намагниченностях  $F$  слоёв возникает дальнедействующая триплетная сверхпроводящая компонента. Показано, что  $T_c$  может быть немонотонной функцией угла  $\alpha$  между намагниченностями двух  $F$  слоёв. Минимум достигается при промежуточном значении  $\alpha$ , лежащем между параллельным (P,  $\alpha = 0$ ) и антипараллельным (AP,  $\alpha = \pi$ ) случаями. Это означает возможность «триплетного» эффекта спинового клапана: при температурах выше минимума  $T_c^{\text{Tr}}$ , но ниже  $T_c^{\text{P}}$  и  $T_c^{\text{AP}}$ , система будет в сверхпроводящем состоянии только при ориентациях, близких к коллинеарным. Если же рассматривать только P и AP конфигурации, то оказывается, что в зависимости от параметров системы возможен как «обычный» ( $T_c^{\text{P}} < T_c^{\text{AP}}$ ), так и «обратный» ( $T_c^{\text{P}} > T_c^{\text{AP}}$ ) эффект переключения. Предсказанный теоретически эффект триплетного спинового клапана был подтверждён экспериментально совместной группой из Казани и Дрездена. Также экспериментально была продемонстрирована возможность как обычного, так и обратного эффекта спинового клапана при сравнении двух коллинеарных конфигураций. Проведённая серия экспериментов потребовала дальнейшего развития теории этого эффекта. Развитая теория и анализ экспериментальных данных представлены в разделе 2.2. В разделе 2.3 рассматривается сверхпроводящий спиновый клапан, представляющий собой СКВИД, в котором в качестве джозефсоновских переходов выступают SFS структуры с полуметаллическими ферромагнетиками. Так как синглетная куперовская пара не может пройти через такой переход, весь транспорт заряда происходит через расщеплённые пары, когда два электрона идут по разным рукавам. Изучена зависимость характеристик СКВИДа (андреевских уровней, ток-фазового соотношения и критического тока) от двух управляющих параметров — угла между намагниченностями и магнитного потока. В зависимости от геометрических параметров системы ток-фазовая характеристика может менять амплитуду и форму, а также менять знак (что соответствует  $\pi$ -состоянию контакта) и иметь дополнительные пересечения нуля. Также зависимость критического тока от управляющих параметров может быть немонотонной. Периодичность по магнитному потоку удвоена по сравнению с обычным СКВИДом.

**Третья глава** посвящена изучению влияния неоднородного и неупорядоченного магнетизма на сверхпроводимость. В разделе 3.1 изучается минищель в SF и SFS контактах со спиральной намагниченностью. Показано, что обменное поле эффективно усредняется из-за неоднородности, и щель в плотности состояний в магнитной области сохраняется до значений много больших, чем в случае однородного обменного поля. В разделе 3.2 рассматривается задача об эффекте близости в диффузной системе, составленной из сверхпроводящих

и нормальных (или ферромагнитных) областей с магнитным беспорядком. В случае слабого магнитного беспорядка показано, что на масштабах много больше его корреляционной длины эффект магнитного беспорядка может быть описан локальным членом в уравнениях Узаделя, соответствующим процессам рассеяния электронов с переворотом спина (спин-флип). Это позволяет легко найти различные физические характеристики системы, например, минищель в ферромагнетике. Спин-флип член в уравнении Узаделя и соответствующая интенсивность спин-флип рассеяния выведены в общем случае трёхмерного зеемановского поля с произвольной корреляционной длиной. В данной задаче можно выделить три основных режима: точечные примеси (корреляционная длина меньше фермиевской длины волны), среднемасштабный беспорядок (корреляционная длина больше фермиевской длины волны, но меньше длины свободного пробега) и крупномасштабный беспорядок (корреляционная длина больше длины свободного пробега). Эти три режима исследованы с помощью трёх дополняющих друг друга подходов: уравнений Узаделя, нелинейной сигма-модели и диаграммного разложения. В разделе 3.3 исследуется отклик диффузного сверхпроводника со слабыми неборновскими магнитными примесями на внешнее электромагнитное поле. Магнитные примеси изменяют спектр возбуждений в сверхпроводнике и поэтому влияют на проводимость и импеданс. Исследована зависимость проводимости и импеданса от частоты, концентрации магнитных примесей и их силы, и от концентрации квазичастиц (температуры). Учтена сложная структура спектра квазичастичных состояний, связанная с наличием подщелевой примесной зоны, обусловленной неборновостью магнитных примесей. В разделе 3.4 исследуется плотность состояний в диффузных сверхпроводниках с сильными магнитными примесями, подчиняющимися статистике Пуассона. Таким образом могут быть описаны примеси произвольной силы, а известный случай борновских магнитных примесей с гауссовой статистикой является предельным случаем представленного полного рассмотрения. Теория среднего поля предсказывает нетривиальную структуру плотности состояний, содержащую континуум квазичастичных состояний, а также, возможно, примесную зону. В приближении среднего поля все края спектра являются жёсткими и обозначают чёткие границы между областями конечной и нулевой плотности состояний. С помощью инстантонов в технике репличной сигма-модели вычислена средняя плотность состояний за рамками среднеполевого приближения. Таким образом найдены подщелевые состояния («хвосты» плотности состояний), которые размывают края спектра за счёт флуктуаций потенциального (обычные примеси) и непотенциального (магнитные примеси) беспорядка.

**Четвертая глава** посвящена изучению кулоновских эффектов в гранулированных сверхпроводниках в магнитном поле. В разделе 4.1 исследуется возможность перехода двумерного гранулированного сверхпроводника с относительно большой межгранульной проводимостью в диэлектрическое состояние под действием магнитного поля. Показано, что такое состояние возникает в модели с пространственными вариациями критического магнитного поля отдельной гранулы (за счёт разброса в размерах гранул) в предположении чередования сверхпроводящих и нормальных (со сверхпроводимостью, подавленной полем) гранул. В разделе 4.2 изучается влияние магнитного поля и кулоновского взаимодействия на эффект близости в контакте между сверхпроводником и гранулой из нормального металла

в пределе хорошей проводимости границы. Изучено подавление наведённой сверхпроводимости в грануле магнитным полем в зависимости от силы кулоновского взаимодействия. Построена фазовая диаграмма в координатах кулоновская энергия–магнитное поле. Возможны три фазы нормальной гранулы: сильное (S) и слабое (S') сверхпроводящее (т.е. щелевое), а также нормальное (т.е. бесщелевое) состояние (N). Переход из S фазы в S' и N является фазовым переходом первого рода, а переход между S' и N состояниями — переходом второго рода. Кроме того, исследована туннельная плотность состояний в нормальной грануле. В туннельной плотности состояний можно различить две щели, соответствующие эффекту близости (минищель) и кулоновской блокаде (кулоновская щель). Такое различие становится возможным благодаря магнитному полю, которое смещает положение минищели за счёт эффекта Зеемана.

**Приложения** содержат технические подробности вычислений и вспомогательные результаты.

В **заключении** сформулированы основные итоги выполненного исследования.

В диссертации используется система единиц, в которой постоянные Планка и Больцмана равны единице:  $\hbar = k_B = 1$ . Для комплексного сопряжения грасмановых переменных используется следующее определение:  $\psi^{**} = \psi$ ,  $(\psi_1\psi_2)^* = \psi_2^*\psi_1^*$ .

## Глава 1. Нечётная по частоте сверхпроводимость

Образование пар фермионов в сверхпроводниках и сверхтекучих жидкостях может быть описано аномальной функцией Грина  $F(1;2)$  (здесь 1 и 2 означают полные наборы координат для каждого из двух фермионов). Принцип Паули приводит к антисимметрии при перестановке двух фермионов в куперовской паре,  $F(2;1) = -F(1;2)$ , откуда следует стандартная классификация [30] сверхпроводящих фаз: чётность по пространственным координатам  $F$  ( $s$ -волновое состояние,  $d$ -волновое состояние и т.д.) должна сопровождаться нечётностью относительно перестановки спиновых координат (синглетное состояние). Аналогично, нечётность по пространственным координатам ( $p$ -синглетное состояние,  $f$ -синглетное состояние и т.д.) должна сопровождаться чётностью по спину (триплет). В этой классификации подразумевается, что  $F$  не меняется при перестановке мнимых времен (мы сейчас говорим о мацубаровском представлении).

В 1974 году Березинским было отмечено [13], что эта классификация (подразумевающая чётность  $F$  по разности мнимых времен  $\tau = \tau_1 - \tau_2$ ) может быть удвоена, если допустить возможность нечётности относительно времени (или, в фурье-представлении, нечётности по мацубаровской частоте  $\omega$ ). Тогда становится возможным, например,  $s$ -волновое триплетное [13] или  $p$ -волновое синглетное состояние [15], которые не противоречат принципу Паули и статистике Ферми-Дирака. Эти экзотические фазы мы будем называть нечётными по частоте ( $\omega$ -нечётными) состояниями.

Березинский [13] рассматривал  $\omega$ -нечётное состояние как возможный тип спаривания в сверхтекучем <sup>3</sup>He однако это предположение не получило экспериментального подтверждения. Всплеск интереса к этой тематике возник в начале 2000-х годов, когда было теоретически показано, что нечётные по частоте триплетные сверхпроводящие корреляции могут возникать в неоднородных контактах обычных синглетных сверхпроводников (S) и ферромагнитных металлов (F) как наведённые за счет эффекта близости компоненты вблизи границы (см. обзор [11]). Компоненты с проекцией спина на направление обменного поля  $S_z = \pm 1$  могут проникать в ферромагнитный металл на большое расстояние, т.к. не испытывают паразитирующего действия магнетизма. Возникновение триплетных компонент может быть понято в рамках качественной картины, предложенной в работе [31]: попадая в F слой, пара электронов со спинами вверх и вниз  $|\uparrow\downarrow\rangle$  приобретает импульс центра масс  $Q = 2h/v_F$ , поскольку обменное поле действует на электроны как потенциал разного знака. Здесь  $h$  — обменное поле,  $v_F$  — скорость Ферми. Учитывая также вторую часть волновой функции пары,  $|\downarrow\uparrow\rangle$ , которая приобретает противоположный импульс центра масс  $-Q$ , мы получаем единую куперовскую пару. Её волновая функция пространственно модулирована в F слое согласно  $\cos(Qx)$ , где  $x$  — координата центра масс. Именно это является причиной осцилляционного поведения эффекта близости в S/F системах [10]. В то же время это рассуждение указывает и на появление триплетной компоненты, т.к. исходное синглетное состояние  $|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle$  (для краткости мы опускаем нормировочный знаменатель  $\sqrt{2}$  в F при-

нимает вид [32]

$$e^{iQx} |\uparrow\downarrow\rangle - e^{-iQx} |\downarrow\uparrow\rangle = (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \cos Qx + (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) i \sin Qx, \quad (1.1)$$

где слагаемое с косинусом — синглет, а слагаемое с синусом — триплетная компонента с нулевой проекцией на ось  $z$  (направленное по обменному полю). Если же в системе имеется еще одно (*неколлинеарное*) направление  $h$ , мы можем сделать соответствующий поворот оси квантования, и тогда в новой системе координат немедленно получим компоненты с проекциями  $S_z = \pm 1$  (т.е.  $|\uparrow\uparrow\rangle$  и  $|\downarrow\downarrow\rangle$ ). Эти компоненты не разрушаются обменным полем и могут проникать в F слой на большую глубину, так же как синглетная сверхпроводимость проникает в немагнитный металл. Поэтому их называют «дальнодействующими» триплетными компонентами (ДТК).

## 1.1 Дальнодействующая триплетная сверхпроводимость в системах сверхпроводник-ферромагнетик с неелевскими доменными стенками

### 1.1.1 Введение

В настоящее время большой интерес привлекают структуры сверхпроводник-ферромагнетик (SF) (см., например, обзоры [10; 11; 33]). Новые физические явления, возникающие в этих системах, связаны с нетривиальным взаимодействием конкурирующих типов упорядочения в сверхпроводниках и ферромагнетиках. С одной стороны, эффективное взаимодействие электронов в сверхпроводниках приводит к образованию куперовских пар электронов с противоположными спинами. С другой стороны, обменное взаимодействие в ферромагнетиках делает предпочтительной параллельную ориентацию спинов. В SF структурах эти два типа упорядочения разделены в пространстве, поэтому могут сосуществовать несмотря на то, что обменная энергия  $h$  обычно заметно больше сверхпроводящей щели  $\Delta$ .

В результате эффекта близости [34] сверхпроводящие корреляции проникают в ферромагнитную часть SF структуры. Аномальная функция Грина  $f$  проникает в ферромагнетик с однородной намагниченностью  $\mathbf{M}$  на расстояния порядка «обменной» (или магнитной) длины когерентности  $\xi_h = \sqrt{D/h}$  [10; 33]. Аномальная функция в F убывает немонотонным образом как  $f(x) \sim \exp(-x/\xi_h) \cos(x/\xi_h)$ : экспоненциальное убывание сопровождается осцилляциями. Эта немонотонность приводит, в частности, к возможности  $\pi$ -состояния джозефсоновских SFS контактов [6; 10; 12; 33; 35–38], т.е. к отрицательному критическому току  $I_c$  в ток-фазовом соотношении  $I(\varphi) = I_c \sin \varphi$ .

Если намагниченность ферромагнетика неоднородна, возможно новое явление: возникает триплетная компонента аномальной функции  $f$  (вообще говоря, функция Горькова

является матрицей как в пространстве Горькова-Намбу, так и в спиновом пространстве) [11]. Эта триплетная компонента нечётна по мадубаровской частоте  $\omega$  (тогда как обычная синглетная БКШ-компонента  $f$  чётна) и распространяется в ферромагнетике на большой длине  $\xi_T = \sqrt{D/2\pi T}$ . Существование такой  $\omega$ -нечётной ДТК в SF структурах с неоднородной намагниченностью было предсказано в работе [39], а в дальнейшем обсуждалось также в работе [40]. В отличие от триплетной компоненты в сверхтекучем  $^3\text{He}$  и в  $\text{Sr}_2\text{RuO}_4$ , эта  $\omega$ -нечётная ДТК соответствует  $s$ -волновому спариванию, поэтому изотропна в импульсном пространстве. Следовательно, она не разрушается потенциальным рассеянием и «выживает» в грязном пределе.

Большое количество экспериментальных данных могут быть интерпретированы как проявления ДТК в SF системах [41–49]. Особенно выделяются эксперименты в SFS контактах, в которых дальнедействующая фазовая когерентность наблюдалась в ферромагнетиках на длине, значительно превышающей глубину проникновения синглетной компоненты systems in which a  $\xi_h$  [45; 48; 49]. Эти эффекты могли быть обусловлены ДТК.

В работах [39; 40; 50] ДТК изучались в SF системах с магнитной структурой блоховского типа [вектор намагниченности  $\mathbf{M}(x)$  лежит в  $y$ - $z$  плоскости, параллельной SF границе, и вращается при удалении от границы, т.е. при изменении  $x$ ].

В то же время хорошо известно, что доменная структура ферромагнетика может быть не только блоховского, но также и неелевского типа [51]. SF система с магнитной спиральной структурой неелевского типа [вектор  $\mathbf{M}(y)$  в  $y$ - $z$  плоскости, параллельной границе, и вращается при изменении  $y$ ] теоретически изучалась в работах [52; 53]. Эту магнитную структуру можно рассматривать как бесконечную неелевскую стенку. Было показано, что в этом случае ДТК в системе не возникает. Однако это утверждение справедливо только для равномерного вращения вектора  $\mathbf{M}(y)$ . Как будет показано ниже, в более реалистичной ситуации, когда магнитные домены разделяются неелевскими доменными стенками конечной толщины, ДТК возникает в доменных стенках и проникает вглубь доменов на большую длину.

В этом разделе мы рассмотрим джозефсоновский SFS контакт с неелевской доменной структурой в ферромагнитном слое и, в частности, найдем критический ток  $I_c$ . Мы будем рассматривать доменную структуру в тонкой F плёнке, в которой домены с противоположными направлениями намагниченности разделены неелевскими доменными стенками (при этом по толщине плёнки намагниченность не меняется). Такая доменная структура возникает в реальных ферромагнитных плёнках [51]. Плоскость  $y$ - $z$  выбрана параллельной SF границе (см. рисунок 1.1). Мы покажем, что ДТК возникает в доменных стенках и экспоненциально спадает при удалении от доменных стенок и от SF границ с характерной большой длиной  $\xi_T$ . Мы найдем джозефсоновский ток, обусловленный ДТК и покажем, что его знак соответствует  $\pi$ -контакту. Механизм возникновения  $\pi$ -контакта в нашем случае связан с фазовыми сдвигами на  $\pi/2$  на SF границах, тогда как ДТК не осциллирует в F слое (в отличие от короткодействующей компоненты). Также мы изучим модификацию плотности состояний в F слое за счет ДТК.

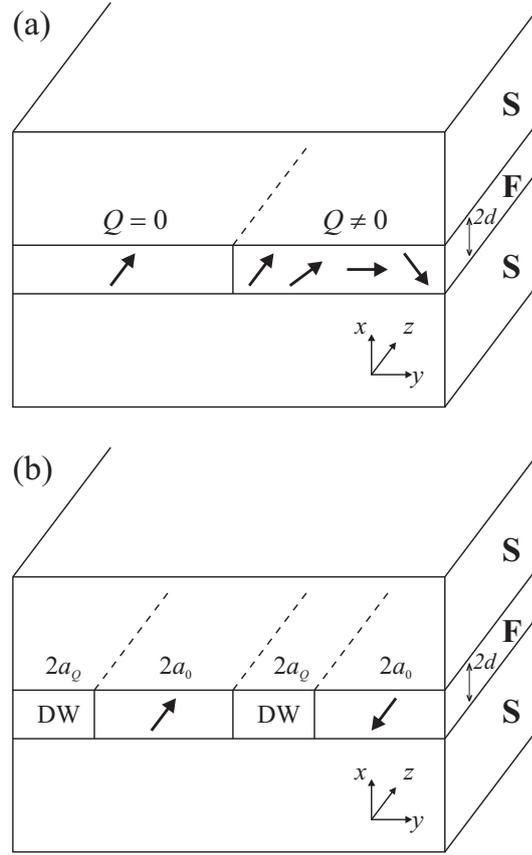


Рисунок 1.1 — Изучаемые SFS контакты. (а) Полубесконечный домен ( $y < 0$ ) и полубесконечная область с вращающейся намагниченностью ( $y > 0$ ). (б) Многодоменный F слой. В зависимости от относительного направления вращения намагниченности в соседних доменных стенках мы различаем случаи положительной и отрицательной киральности.

### 1.1.2 Основные уравнения. Эффект Джозефсона в случае полубесконечного домена

Рассмотрим ферромагнетик ( $0 < x < 2d$ ), находящийся между двух объёмных сверхпроводников. Предполагаем, что лежащее в плоскости обменное поле  $\mathbf{h}(y)$  в F слое пропорционально намагниченности  $\mathbf{M}$  и зависит от  $y$  следующим образом:  $\mathbf{h}(y) = h(0,0,1)$  при  $y < 0$  и  $\mathbf{h}(y) = h(0, \sin \alpha(y), \cos \alpha(y))$ , где  $\alpha(y) = Qy$ , при  $y > 0$ . Область с вращающейся намагниченности моделирует неелевскую доменную стенку. Эта структура показана на рисунке 1.1(а) и содержит только полубесконечный домен и одну полубесконечную область с вращающейся намагниченностью. Позже мы используем полученные результаты для описания реалистичной многодоменной структуры, показанной на рисунке 1.1(б).

В грязном (диффузном) пределе система описывается уравнением Узаделя для матричной функции Грина  $\check{g}$ , которая является матрицей  $4 \times 4$  в пространстве Горькова-Намбу и спиновом пространстве. Уравнение Узаделя в случае неоднородной намагниченности было написано в работах [54] и [11]. Однако мы переопределим функции Грина, использованные

в этих работах, введя новую матричную функцию  $\check{g}_{\text{new}} = \check{V}\check{g}\check{V}^\dagger$  с матрицей поворота

$$\check{V} = \exp\left(i\frac{\pi}{4}(\hat{\tau}_3 - \hat{\tau}_0)\hat{\sigma}_3\right), \quad (1.2)$$

где  $\hat{\tau}_i$  и  $\hat{\sigma}_i$  — матрицы Паули в пространстве Горькова-Намбу и спиновом. Ниже мы будем работать с новой функцией Грина  $\check{g}_{\text{new}}$ , для краткости опуская нижний индекс. Удобство нашего нового определения состоит в том, что уравнение Узаделя в этом случае показывает явную симметрию по отношению к вращениям обменного поля  $\mathbf{h}$ :

$$\begin{aligned} D\nabla(\check{g}\nabla\check{g}) - \omega[\hat{\tau}_3\hat{\sigma}_0, \check{g}] - i[\hat{\tau}_3(\mathbf{h}\hat{\sigma}), \check{g}] - [\check{\Delta}, \check{g}] &= 0, \\ \check{\Delta} &= (\hat{\tau}_1 \text{Re } \Delta - \hat{\tau}_2 \text{Im } \Delta)\hat{\sigma}_0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $\omega$  — мацубаровская частота,  $\mathbf{h} = h\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n} = (0, \sin\alpha(y), \cos\alpha(y))$ ,  $\alpha(y) = 0$  при  $y < 0$ ,  $\alpha(y) = Qy$  при  $y > 0$ . Мы предполагаем, что коэффициент диффузии  $D$  одинаков для обеих проекций спина электронов (это справедливо, если обменная энергия  $h$  много меньше энергии Ферми  $\varepsilon_F$ ).

Уравнение Узаделя (1.3) написано в общей форме, учитывающей как сверхпроводимость, так и магнетизм. В SFS контакте парный потенциал  $\Delta$  отличен от нуля только в S слоях, а обменное поле  $\mathbf{h}$  — только в F слое. Притяжения между электронами в F слое нет, поэтому  $\Delta = 0$ . Тем не менее, аномальные функции Горькова в F области конечны из-за наличия граничных условий на SF границах.

В общем случае функция Грина имеет следующие компоненты:

$$\check{g} = \hat{\tau}_3(g_0\hat{\sigma}_0 + \mathbf{g}\hat{\sigma}) + \hat{\tau}_1(f_0\hat{\sigma}_0 + \mathbf{f}\hat{\sigma}) + \hat{\tau}_2(\bar{f}_0\hat{\sigma}_0 + \bar{\mathbf{f}}\hat{\sigma}). \quad (1.4)$$

В объёме нормального металла есть только компонента  $g_0$ . Синглетные сверхпроводящие корреляции описываются скалярными аномальными компонентами  $f_0$  и  $\bar{f}_0$ , а векторные компоненты  $(\mathbf{g}, \mathbf{f}, \bar{\mathbf{f}})$  обусловлены ферромагнетизмом.

Сверхпроводящие корреляции, которые описываются  $f$  компонентами, предполагаются малыми из-за малой прозрачности границ. В случае слабого эффекта близости ( $|f| \ll 1$ ) функция Грина имеет вид

$$\check{g} = \hat{\tau}_3\hat{\sigma}_0 \text{sgn } \omega + \check{F}, \quad (1.5)$$

где аномальная часть может быть записана как

$$\check{F} = \hat{\tau}_1\hat{f} + \hat{\tau}_2\hat{\bar{f}} \quad (1.6)$$

с матрицами в спиновом пространстве

$$\hat{f} = f_0\hat{\sigma}_0 + \mathbf{f}\hat{\sigma}, \quad \hat{\bar{f}} = \bar{f}_0\hat{\sigma}_0 + \bar{\mathbf{f}}\hat{\sigma}. \quad (1.7)$$

Уравнение (1.3) может быть линеаризовано и приведено к виду

$$\nabla^2\check{F} - 2k_\omega^2\check{F} - ik_h^2 \text{sgn } \omega \{\hat{\tau}_0(\mathbf{n}\hat{\sigma}), \check{F}\} = 0, \quad (1.8)$$

где  $\omega = \pi T(2n + 1)$ ,  $k_\omega^2 = |\omega|/D$ ,  $k_h^2 = h/D$ , а фигурные скобки обозначают антикоммутатор.

Аномальная часть функции Грина в объёме сверхпроводника с фазой  $\varphi$  есть  $\check{F}_S(\varphi) = (\hat{\tau}_1 \cos \varphi - \hat{\tau}_2 \sin \varphi) \hat{\sigma}_0 f_S$ , где

$$f_S = \frac{\Delta}{\sqrt{\omega^2 + \Delta^2}}. \quad (1.9)$$

Мы хотим найти джозефсоновский ток при разности фаз  $\varphi$ . Полагая фазы левого и правого сверхпроводника равными  $-\varphi/2$  и  $\varphi/2$ , записываем гран.условия для  $\check{F}$  на SF границах:

$$\frac{\partial \check{F}}{\partial x} = \mp \frac{\check{F}_S(\mp \varphi/2)}{\gamma_b}, \quad (1.10)$$

где два знака соответствуют левой ( $x = 0$ ) и правой ( $x = 2d$ ) SF границе. Здесь  $\gamma_b = R_b \sigma$ , а  $R_b$  — сопротивление границы на единицу площади.  $\sigma$  проводимость ферромагнетика. Эти гран.условия получаются из гран.условий Куприянова-Лукичева [55] при двух условиях: (1) эффект близости слаб (т.е.  $\gamma_b/\xi_h \gg 1$ ) и (2) объёмное решение  $\check{F}_S$  в сверхпроводниках справедливо вплоть до границы (т.е.  $\gamma_b/\xi_S \gg \sigma/\sigma_S$ , где  $\xi_S = \sqrt{D_S/\Delta}$  и  $\sigma_S$  — длина когерентности и проводимость в S берегах).

Уравнение (1.8) — двумерное дифф.уравнение в частных производных. Для его решения мы можем применить способ, позволяющий сделать фурье-преобразование по  $x$ , сведя задачу к единственному измерению  $y$ .

Уравнения на функции  $\hat{f}$  и  $\hat{\hat{f}}$  расщепляются, и для  $\hat{f}$  мы получаем

$$\nabla^2 \hat{f} - 2k_\omega^2 \hat{f} - ik_h^2 \operatorname{sgn} \omega \left\{ (\mathbf{n}\hat{\sigma}), \hat{f} \right\} = 0, \quad (1.11)$$

$$\left. \frac{\partial \hat{f}}{\partial x} \right|_{x=0,2d} = \mp \frac{f_S \cos \frac{\varphi}{2}}{\gamma_b} \hat{\sigma}_0. \quad (1.12)$$

Функция  $\hat{\hat{f}}$  подчиняется такому же уравнению, но с другими гран.условиями:

$$\nabla^2 \hat{\hat{f}} - 2k_\omega^2 \hat{\hat{f}} - ik_h^2 \operatorname{sgn} \omega \left\{ (\mathbf{n}\hat{\sigma}), \hat{\hat{f}} \right\} = 0, \quad (1.13)$$

$$\left. \frac{\partial \hat{\hat{f}}}{\partial x} \right|_{x=0,2d} = -\frac{f_S \sin \frac{\varphi}{2}}{\gamma_b} \hat{\sigma}_0. \quad (1.14)$$

Функции  $\hat{f}$  и  $\hat{\hat{f}}$  определены при  $0 \leq x \leq 2d$ . Функция  $\hat{f}$  чётна относительно середины F слоя, а  $\hat{\hat{f}}$  — нечётна. Мы можем продолжить функции на всю ось  $x$ : для  $\hat{f}$  мы делаем это периодическим образом, а для  $\hat{\hat{f}}$  — антипериодическим, в обоих случаях получая непрерывные функции. Из-за гран.условий обе функции имеют изломы при  $x = 2dN$  с целым  $N$ . Гран.условия (1.10), приводящие к изломам, могут быть включены в само уравнение (1.8) как  $\delta$ -функциональные слагаемые (это напоминает квантово-механическую задачу с  $\delta$ -функциональным потенциалом, приводящим к излому волновой функции):

$$\nabla^2 \hat{f} - 2k_\omega^2 \hat{f} - ik_h^2 \operatorname{sgn} \omega \left\{ (\mathbf{n}\hat{\sigma}), \hat{f} \right\} = -\hat{\sigma}_0 \frac{2f_S \cos \frac{\varphi}{2}}{\gamma_b} \sum_{N=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2dN), \quad (1.15)$$

$$\nabla^2 \hat{\hat{f}} - 2k_\omega^2 \hat{\hat{f}} - ik_h^2 \operatorname{sgn} \omega \left\{ (\mathbf{n}\hat{\sigma}), \hat{\hat{f}} \right\} = -\hat{\sigma}_0 \frac{2f_S \sin \frac{\varphi}{2}}{\gamma_b} \sum_{N=-\infty}^{\infty} (-1)^N \delta(x - 2dN). \quad (1.16)$$

Теперь вместо того, чтобы решать уравнение (1.8) при  $0 \leq x \leq 2d$  с граничными условиями (1.10), мы будем решать уравнения (1.15) и (1.16) при всех  $x$ .

Преобразование Фурье

$$f(k, y) = \int_{-d}^d dx \exp(-ikx) f(x, y) \quad (1.17)$$

в уравнениях (1.15) и (1.16) нужно проводить по «бозонным» волновым векторам  $k_n$  и «фермионным» волновым векторам  $\bar{k}_n$  для периодической функции  $\hat{f}$  и антипериодической функции  $\hat{f}$  соответственно:

$$k_n = \frac{\pi}{2d} 2n, \quad \bar{k}_n = \frac{\pi}{2d} (2n + 1). \quad (1.18)$$

Получаем

$$\frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial y^2} - (k_n^2 + 2k_\omega^2) \hat{f} - ik_h^2 \operatorname{sgn} \omega \{(\mathbf{n}\hat{\sigma}), \hat{f}\} = -\frac{2f_S \cos \frac{\varphi}{2}}{\gamma_b} \hat{\sigma}_0, \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial y^2} - (\bar{k}_n^2 + 2k_\omega^2) \hat{f} - ik_h^2 \operatorname{sgn} \omega \{(\mathbf{n}\hat{\sigma}), \hat{f}\} = -\frac{2f_S \sin \frac{\varphi}{2}}{\gamma_b} \hat{\sigma}_0. \quad (1.20)$$

Эти два уравнения очень похожи, и нам достаточно рассмотреть одно из них, например, уравнение (1.19) на функцию  $\hat{f}$ . После этого результат для функции  $\hat{f}$  может быть сразу получен заменой  $k_n \mapsto \bar{k}_n$  и  $\cos \frac{\varphi}{2} \mapsto \sin \frac{\varphi}{2}$ .

При  $y > 0$  функция  $\alpha(y)$  зависит от  $y$ , а при  $y < 0$  имеем  $\alpha = 0$ . При положительных  $y$  можно избавиться от  $y$ -зависимости в уравнении (1.19) с помощью вращения

$$\hat{f} = \hat{U} \hat{f}_u \hat{U}^+, \quad (1.21)$$

где  $\hat{U} = \exp(i\hat{\sigma}_1 \alpha(y)/2)$ . В результате получаем ( $y > 0$ )

$$\frac{\partial^2 \hat{f}_u}{\partial y^2} - \left(k_n^2 + \frac{Q^2}{2} + 2k_\omega^2\right) \hat{f}_u + \frac{Q^2}{2} \hat{\sigma}_1 \hat{f}_u \hat{\sigma}_1 + iQ \left[\hat{\sigma}_1, \frac{\partial \hat{f}_u}{\partial y}\right] - ik_h^2 \operatorname{sgn} \omega \{\hat{\sigma}_3, \hat{f}_u\} = -\frac{2f_S \cos \frac{\varphi}{2}}{\gamma_b} \hat{\sigma}_0 \quad (1.22)$$

на языке новой функции  $\hat{f}_u(k, y)$  (квадратные скобки обозначают коммутатор). Это уравнение применимо и при  $y < 0$ , если положить  $Q = 0$ :

$$\frac{\partial^2 \hat{f}_u}{\partial y^2} - (k_n^2 + 2k_\omega^2) \hat{f}_u - ik_h^2 \operatorname{sgn} \omega \{\hat{\sigma}_3, \hat{f}_u\} = -\frac{2f_S \cos \frac{\varphi}{2}}{\gamma_b} \hat{\sigma}_0. \quad (1.23)$$

Исходные функции  $\hat{f}$  и  $\partial \hat{f} / \partial y$  непрерывны при  $y = 0$ . Поэтому повернутые функции подчиняются следующему граничному условию при  $y = 0$ :

$$\hat{f}_u(-0) = \hat{f}_u(+0), \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial \hat{f}_u(-0)}{\partial y} = \frac{\partial \hat{f}_u(+0)}{\partial y} + i\frac{Q}{2} [\hat{\sigma}_1, \hat{f}_u]. \quad (1.25)$$

Таким образом, нам нужно решить линейные матричные уравнения (1.22) ( $y > 0$ ) и (1.23) ( $y < 0$ ) с граничными условиями (1.24) и (1.25) при  $y = 0$ . Решение можно представить в виде

$$\hat{f}_u = \hat{\mathcal{F}}(Q)\theta(y) + \hat{\mathcal{F}}(0)\theta(-y) + \delta \hat{f}_u, \quad (1.26)$$

где константы  $\hat{\mathcal{F}}(Q)$  и  $\hat{\mathcal{F}}(0)$  — однородные решения уравнений (1.22) и (1.23) при  $y = \pm\infty$ . Матрицы  $\hat{\mathcal{F}}$  имеют вид

$$\hat{\mathcal{F}} = \hat{\sigma}_0 \mathcal{F}_0 + \hat{\sigma}_3 \mathcal{F}_3, \quad (1.27)$$

где

$$\mathcal{F}_0(Q) = \frac{2f_S \cos \frac{\varphi}{2} (k_n^2 + Q^2 + 2k_\omega^2)}{\gamma_b \mathcal{D}(Q)}, \quad (1.28)$$

$$\mathcal{F}_3(Q) = -\frac{4if_S \cos \frac{\varphi}{2} k_h^2 \operatorname{sgn} \omega}{\gamma_b \mathcal{D}(Q)}, \quad (1.29)$$

$$\mathcal{D}(Q) = (k_n^2 + Q^2 + 2k_\omega^2) (k_n^2 + 2k_\omega^2) + 4k_h^4. \quad (1.30)$$

Поправка  $\delta \hat{f}_u(k, y)$  подчиняется тем же уравнениям (1.22) и (1.23) без правой части. Она имеет вид

$$\delta \hat{f}_u = \hat{\sigma}_0 f_0 + \hat{\sigma}_3 f_3 + \hat{\sigma}_2 f_2. \quad (1.31)$$

Первое слагаемое здесь — это синглетная компонента. Второе слагаемое — триплетная компонента с нулевой проекцией спина куперовской пары на  $z$ . Эта компонента возникает даже в случае однородной намагниченности и убывает в F слое на короткой длине  $\xi_h$ . Последнее слагаемое в формуле (1.31) — это триплетная компонента с проекцией спина  $\pm 1$ . Она возникает при неоднородной намагниченности и спадает на большой длине порядка  $\xi_T$ . Функции  $f_i(k, y)$  в формуле (1.31) могут быть записаны в виде собственных функций уравнений (1.22) и (1.23):

$$f_i(y) = \sum_l A_{il} \exp(-\kappa_l(Q)y) \quad \text{at } y > 0, \quad (1.32)$$

$$f_i(y) = \sum_l B_{il} \exp(\kappa_l(0)y) \quad \text{at } y < 0. \quad (1.33)$$

Обратные длины затухания  $\kappa_l(Q)$  — это собственные числа уравнений (1.22) и (1.23) (без правой части). Уравнение на  $\kappa_l(Q)$  имеет вид ( $l = 1, 2, 3$ )

$$\left[ (\kappa_l^2 - k_n^2 - Q^2 - 2k_\omega^2)^2 + 4(Q\kappa_l)^2 \right] (\kappa_l^2 - k_n^2 - 2k_\omega^2) + 4k_h^4 (\kappa_l^2 - k_n^2 - Q^2 - 2k_\omega^2) = 0. \quad (1.34)$$

Мы предполагаем, что обменная длина — самый короткий масштаб в задаче:

$$k_h^2 \gg k_n^2, Q^2, k_\omega^2. \quad (1.35)$$

Тогда возникают два «короткодействующих» собственных значения

$$\kappa_\pm \approx (1 \mp i \operatorname{sgn} \omega) k_h \quad (1.36)$$

и одно «дальнодействующее» собственное значение

$$\kappa_L(Q) \approx \sqrt{k_n^2 + Q^2 + 2k_\omega^2}. \quad (1.37)$$

При  $y < 0$  получаются такие же  $\kappa_l$ , но с  $Q = 0$ .

Вычисляя соответствующие собственные векторы и сшивая решения (1.32) и (1.33) с помощью граничных условий (1.24) и (1.25), находим коэффициенты  $A_{il}$  и  $B_{il}$ . В рассматриваемом пределе малой обменной длины коэффициенты  $A_{2L}$  и  $B_{2L}$ , описывающие ДТК, оказываются самыми большими,

$$A_{2L} \approx B_{2L} \approx \frac{Q\mathcal{F}_3}{\kappa_Q + \kappa_0}, \quad (1.38)$$

где для краткости мы обозначили

$$\kappa_Q \equiv \kappa_L(Q), \quad \kappa_0 \equiv \kappa_L(0). \quad (1.39)$$

В пределе (1.35) функция  $\mathcal{F}_3(Q)$  имеет простой вид

$$\mathcal{F}_3 \approx -\frac{if_S \cos \frac{\varphi}{2} \operatorname{sgn} \omega}{\gamma_b k_h^2}. \quad (1.40)$$

Следовательно, величина ДТК на границе между доменом и доменной стенкой ( $y = 0$ ) равна

$$f_L(k_n, 0) \equiv f_{2L}(k_n, 0) = -\frac{if_S \cos \frac{\varphi}{2} \operatorname{sgn} \omega}{\gamma_b k_h^2} \frac{Q}{\kappa_Q + \kappa_0}, \quad (1.41)$$

а длина затухания вдоль оси  $y$  определяется параметром  $\kappa_0$  или  $\kappa_Q$  при  $y < 0$  и  $y > 0$  соответственно [см. формулу (1.32)]. Ниже мы будем рассматривать ситуацию, в которой важна только ДТК, и для краткости обозначим соответствующий вклад  $f_{2L}$  в функцию Грина за  $f_L$ .

Функция в реальном пространстве получается обратным преобразованием Фурье

$$f_L(x, y) = \frac{1}{2d} \sum_{k_n} e^{ik_n x} f_L(k_n, y). \quad (1.42)$$

Функция  $\bar{f}_L$  получается в результате замены  $k_n \mapsto \bar{k}_n$  и  $\cos \frac{\varphi}{2} \mapsto \sin \frac{\varphi}{2}$ .

## Джозефсоновский ток

Плотность сверхтока определяется аномальной частью функции Грина:

$$\mathbf{j} = \frac{i\sigma\pi T}{4e} \operatorname{Tr} \sum_{\omega} \hat{\tau}_3 \hat{\sigma}_0 \check{F} \nabla \check{F}, \quad (1.43)$$

где  $\sigma$  — проводимость в нормальном состоянии. При нашем выборе фаз сверхпроводников  $\mp\varphi/2$  компоненты  $f$  чётны относительно середины промежуточного слоя, а компоненты  $\bar{f}$  — нечётны. Вычисляя сверхток в середине F слоя, получаем:

$$\operatorname{Tr} (\hat{\tau}_3 \hat{\sigma}_0 \check{F} \nabla \check{F}) = 4i (f_0 \nabla \bar{f}_0 + \mathbf{f} \nabla \bar{\mathbf{f}}). \quad (1.44)$$

Из-за нечётности  $\bar{f}$  здесь остаётся только  $x$  компонента тока.

Однако, вычисляя ток не в центре F слоя, мы получим также и  $y$  компоненту. В области F слоя, где есть только дальнедействующая компонента, имеем  $\vec{F} = \hat{\tau}_1 \hat{\sigma}_2 f_L + \hat{\tau}_2 \hat{\sigma}_2 \bar{f}_L$ , это даёт

$$\mathbf{j} = \frac{\sigma \pi T}{e} \sum_{\omega} (\bar{f}_L \nabla f_L - f_L \nabla \bar{f}_L). \quad (1.45)$$

В области, где намагниченность вращается как функция  $y$ , окончательное выражение остаётся таким же, если под  $f_L$  и  $\bar{f}_L$  понимать вторые компоненты  $\hat{f}_u$ , см. формулы (1.21), (1.26) и (1.31).

Внутри полубесконечного домена формула (1.42) даёт

$$f_L(x, y) = - \sum_{k_n} e^{ik_n x} \frac{if_S \cos(\varphi/2) Q \operatorname{sgn} \omega}{2d\gamma_b k_h^2 (\kappa_Q + \kappa_0)} e^{\kappa_0 y}, \quad (1.46)$$

$$\bar{f}_L(x, y) = - \sum_{\bar{k}_n} e^{i\bar{k}_n x} \frac{if_S \sin(\varphi/2) Q \operatorname{sgn} \omega}{2d\gamma_b k_h^2 (\kappa_Q + \kappa_0)} e^{\kappa_0 y}. \quad (1.47)$$

В пределе тонкого F слоя, т.е.  $d \ll 1/Q, 1/k_\omega$  (в тоже время, мы предполагаем  $1/k_h \ll d$ , что позволяет пренебречь короткодействующими компонентами), получаем

$$f_L(x, y) = - \frac{if_S \cos(\varphi/2) \operatorname{sgn} \omega}{2d\gamma_b k_h^2} \left( \frac{Q}{\sqrt{Q^2 + 2k_\omega^2} + \sqrt{2}k_\omega} e^{\sqrt{2}k_\omega y} + \sum_{k_n > 0} \frac{Q}{k_n} \cos k_n x e^{k_n y} \right), \quad (1.48)$$

$$\bar{f}_L(x, y) = - \frac{if_S \sin(\varphi/2) \operatorname{sgn} \omega}{2d\gamma_b k_h^2} \sum_{\bar{k}_n > 0} \frac{Q}{\bar{k}_n} \cos \bar{k}_n x e^{\bar{k}_n y}. \quad (1.49)$$

Джозефсоновский ток находим по формуле (1.45). В пределе тонкого F слоя главный вклад даётся вторым членом в скобках  $f_L \nabla \bar{f}_L$ ; более того, достаточно удержать лишь компоненту с  $k_n = 0$  в  $f_L$  [первый член в скобках в формуле (1.48)]. Это связано с тем, что компоненты, содержащие  $k_n$  в знаменателе формулы (1.48), гораздо меньше. Суммируя по  $\bar{k}_n$ , окончательно находим

$$\mathbf{j}(x, y) = - \sin \varphi \frac{\sigma Q^2 \pi T}{16e(d\gamma_b k_h^2)^2} \sum_{\omega} \frac{f_S^2}{\sqrt{Q^2 + 2k_\omega^2} + \sqrt{2}k_\omega} \exp\left(-\sqrt{2}k_\omega |y|\right) \times \frac{\mathbf{e}_x \cosh\left(\frac{\pi y}{2d}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{2d}\right) + \mathbf{e}_y \sinh\left(\frac{\pi y}{2d}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2d}\right)}{\sinh^2\left(\frac{\pi y}{2d}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi x}{2d}\right)}, \quad (1.50)$$

где  $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_y$  — единичные векторы в направлениях  $x$  и  $y$ . В области с  $Q \neq 0$  получаем формулу (1.50) с  $\sqrt{Q^2 + 2k_\omega^2}$  вместо  $\sqrt{2}k_\omega$  в аргументе экспоненты. Основным качественным результатом этой формулы в том, что  $x$  компонента плотности тока имеет вид  $j_x = j_{cx} \sin \varphi$  с отрицательным  $j_{cx}$ , т.е. реализуется  $\pi$ -состояние контакта.

Выражение (1.50) для сверхтока применимо в области, где существенна только ДТК, а короткодействующие компоненты экспоненциально малы. Поэтому вблизи SF границ и вблизи границы между доменом и доменной стенкой (на расстояниях порядка  $\xi_h$ ) это выражение неприменимо.

Заметим, что  $\nabla \mathbf{j} = 0$  и  $\nabla \times \mathbf{j} = 0$  в рамках нашей точности (мы должны пренебречь  $k_\omega$  и  $Q$  по сравнению с  $1/d$ ). Полный ток по  $y$  отсутствует, в то время как полный ток

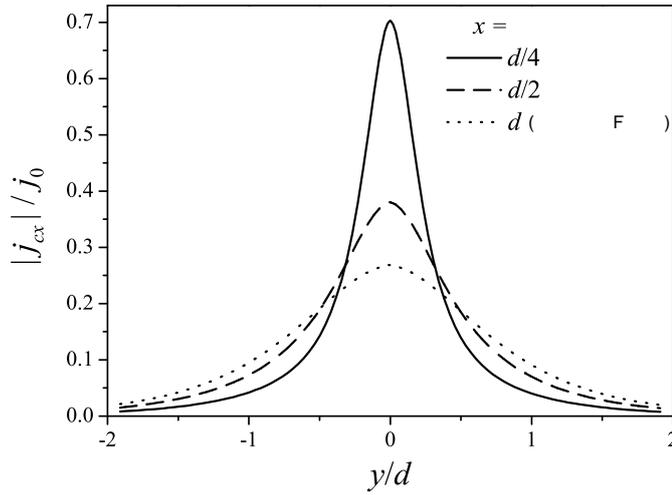


Рисунок 1.2 — SFS контакт с полубесконечным доменом: модуль плотности критического тока  $j_{cx}$  в  $x$  направлении как функция координаты  $y$  при низких температурах. Ток отрицателен, т.е. контакт находится в  $\pi$ -состоянии. Нормировочная константа есть

$$j_0 = \sigma D Q^3 / 8e(d\gamma_b k_h^2)^2. \text{ Остальные параметры: } DQ^2 = \Delta \text{ и } Qd = 0.1.$$

по  $x$  делится поровну между областями с постоянной и вращающейся намагниченностью и соответствует  $\pi$ -контакту:

$$\int_0^{2d} j_y(x,y) dx = 0, \quad (1.51)$$

$$\int_{-\infty}^0 j_x(x,y) dy = \int_0^{\infty} j_x(x,y) dy = -\sin \varphi \frac{\sigma Q^2 \pi T}{16ed\gamma_b^2 k_h^4} \sum_{\omega} \frac{f_S^2}{\sqrt{Q^2 + 2k_{\omega}^2} + \sqrt{2}k_{\omega}}. \quad (1.52)$$

Результаты для  $x$  компоненты плотности критического тока  $j_{cx}(x,y)$  проиллюстрированы на рисунке 1.2, где  $|j_{cx}|$  показано как функция  $y$  при нескольких значениях  $x$ . Плотность тока максимальна на границе между доменом и доменной стенкой ( $y = 0$ ), и максимальный ток через контакт переносится именно вдоль этой линии. В то же время относительная величина этого пика зависит от  $x$ . Распределение самое плавное в середине F слоя (т.е. при  $x = d$ ), тогда как пик на границе домен/стенка становится более выраженным ближе к SF границам.

Чтобы оценить модуль критического джозефсоновского тока, получающегося из формулы (1.52), предположим, что площадь контакта есть  $50 \times 50 \mu\text{m}^2$ ,  $\sigma \sim (50 \mu\Omega \text{ cm})^{-1}$ ,  $Q \sim (50 \text{ nm})^{-1}$ ,  $d \sim \gamma_b \sim 5\xi_h$ ,  $h \sim 500 \text{ K}$ ,  $D \sim 10 \text{ cm}^2/\text{s}$ . Тогда критический ток при низких температурах оказывается порядка  $3 \mu\text{A}$ , что вполне попадает в экспериментально измеримый диапазон.

### 1.1.3 Эффект Джозефсона в многодоменном SFS контакте

В этом разделе мы исследуем ДТК в SF структуре с многодоменным ферромагнитным слоем [рисунок 1.1(b)]. Можно выделить две возможности: (а) положительная киральность, при которой вектор намагниченности  $\mathbf{M}(y)$  во всех доменных стенках вращается в одном и

том же направлении (например, по часовой стрелке), и (b) отрицательная киральность, при которой  $\mathbf{M}(y)$  в соседних доменных стенках вращается в противоположных направлениях. Нас интересует ДТК в предположении, что  $\xi_h$  много меньше длины когерентности  $\xi_T$ . На расстояниях  $x$ , существенно превышающих длину  $\xi_h$ , в F слое выживает только ДТК.

Мы обозначим  $2a_0$  ширину доменов с  $Q = 0$ , а  $2a_Q$  — ширину доменных стенок ( $Q \neq 0$ ). Начало оси ( $y = 0$ ) находится в середине домена. При  $x \gg \xi_h$  в ферромагнетике выживает только дальнедействующая компонента конденсатной функции. На границе между доменом и доменной стенкой решение должно удовлетворять граничным условиям (1.24) и (1.25).

## Положительная киральность

Рассмотрим сначала случай положительной киральности. Угол  $\alpha(y)$  тогда является нечётной функцией  $y$ , поэтому  $f_2(y)$  также нечётна — эту общую симметрию можно увидеть в уравнении (1.15). Поэтому решение для ДТК имеет вид

$$f_L(k_n, y) = A \sinh(\kappa_0 y), \quad -a_0 < y < a_0, \quad (1.53)$$

$$f_L(k_n, y) = B \sinh(\kappa_Q(y - a_0 - a_Q)), \quad a_0 < y < a_0 + 2a_Q. \quad (1.54)$$

Сшивая решения и их производные при  $y = a_0$ , находим

$$B = -A \frac{\sinh(\kappa_0 a_0)}{\sinh(\kappa_Q a_Q)} = -\frac{Q\mathcal{F}_3}{\cosh(\kappa_Q a_Q) \left( \kappa_Q + \kappa_0 \frac{\tanh(\kappa_Q a_Q)}{\tanh(\kappa_0 a_0)} \right)}. \quad (1.55)$$

Амплитуда ДТК при  $y = a_0$  есть

$$f_L(k_n, a_0) = \frac{Q\mathcal{F}_3}{\kappa_Q \coth(\kappa_Q a_Q) + \kappa_0 \coth(\kappa_0 a_0)}. \quad (1.56)$$

Видим, что  $f_L(k_n, a_0)$  обращается в ноль как при  $a_Q \rightarrow 0$ , так и при  $a_0 \rightarrow 0$ . Эти пределы означают, что ширины доменных стенок и доменов много меньше  $\xi_T$ , но больше  $\xi_h$ . Случай  $a_Q = 0$  означает, что мы имеем дело с доменной структурой с коллинеарной ориентацией намагниченностей. Случай  $a_0 = 0$  соответствует SF структуре с непрерывно вращающейся намагниченностью (случай, рассмотренный в работах [52; 53]). В обоих случаях ДТК не возникает.

Пространственная зависимость ДТК в домене ( $|y| < a_0$ ), соответствующая формуле (1.56), даётся обратным преобразованием Фурье

$$f_L(x, y) = \frac{1}{2d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ik_n x} f_L(k_n, a_0) \frac{\sinh(\kappa_0 y)}{\sinh(\kappa_0 a_0)}. \quad (1.57)$$

Интересно, что  $f_L(x, y)$  обращается в ноль в центрах доменов ( $y = 0$ ). Это означает, что джозефсоновский ток и поправка к плотности состояний за счет ДТК также обращаются в ноль в центрах доменов.

Формулу (1.57) можно упростить в пределе, когда F плёнка тонкая с точки зрения ДТК, но толстая с точки зрения короткой компоненты (т.е.  $k_h \gg 1/d \gg Q, k_\omega$ ). В этом случае главный вклад даёт гармоника  $n = 0$  (с  $k_n = 0$ ), т.к. иначе  $\kappa_Q$  и  $\kappa_0$  в знаменателе формулы (1.56) становятся очень велики. Используя также формулу (1.40), мы получаем

$$f_L(y) = -\frac{if_S \cos(\varphi/2) \operatorname{sgn} \omega}{2d\gamma_b k_h^2} \frac{Q \sinh(\sqrt{2}k_\omega y)}{\mathcal{K}_+ \sinh(\sqrt{2}k_\omega a_0)}, \quad (1.58)$$

где мы обозначили

$$\mathcal{K}_+ = \sqrt{Q^2 + 2k_\omega^2} \coth(\sqrt{Q^2 + 2k_\omega^2} a_Q) + \sqrt{2}k_\omega \coth(\sqrt{2}k_\omega a_0). \quad (1.59)$$

Зависимость от  $x$  пропала, т.к. F слой тонок, и чётная функция  $f_L(x)$  почти постоянна.

Теперь можно легко написать результат для  $\bar{f}_L$ , следуя правилу, сформулированному в разделе 1.1.2: в формуле (1.57) нужно заменить  $k_n \mapsto \bar{k}_n$  и  $\cos \frac{\varphi}{2} \mapsto \sin \frac{\varphi}{2}$ . После этого делаем последний шаг, предполагая предел тонкого F слоя. Этот шаг отличается от случая функции  $f_L$ , т.к. теперь нет моды с  $\bar{k}_n = 0$ , поэтому в сумме по  $n$  мы должны удерживать все моды:

$$\bar{f}_L(x, y) = -\frac{if_S \sin(\varphi/2) \operatorname{sgn} \omega}{2d\gamma_b k_h^2} \sum_{\bar{k}_n > 0} \frac{2Q \cos \bar{k}_n x}{\bar{k}_n [\coth(\bar{k}_n a_Q) + \coth(\bar{k}_n a_0)]} \frac{\sinh(\bar{k}_n y)}{\sinh(\bar{k}_n a_0)}. \quad (1.60)$$

Окончательно находим сверхток:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_0(x, y) = & -\sin \varphi \frac{\sigma Q^2 \pi T}{4e(d\gamma_b k_h^2)^2} \sum_{\omega} \frac{f_S^2 \sinh(\sqrt{2}k_\omega y)}{\mathcal{K}_+ \sinh(\sqrt{2}k_\omega a_0)} \times \\ & \times \sum_{\bar{k}_n > 0} \frac{\mathbf{e}_x \sin(\bar{k}_n x) \sinh(\bar{k}_n y) - \mathbf{e}_y \cos(\bar{k}_n x) \cosh(\bar{k}_n y)}{[\coth(\bar{k}_n a_Q) + \coth(\bar{k}_n a_0)] \sinh(\bar{k}_n a_0)}. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Если же мы хотим вычислить ток в области с  $Q \neq 0$ , мы получим такое же выражение, но с  $y$ , отсчитанным от центра доменной стенки, с  $\sqrt{Q^2 + 2k_\omega^2}$  вместо  $\sqrt{2}k_\omega$  в аргументах двух функций  $\sinh$  и с  $a_Q$  вместо  $a_0$  в аргументах двух функций  $\sinh$ . Например, при  $a_0 < y < a_0 + 2a_Q$  получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_Q(x, y) = & -\sin \varphi \frac{\sigma Q^2 \pi T}{4e(d\gamma_b k_h^2)^2} \sum_{\omega} \frac{f_S^2 \sinh(\sqrt{Q^2 + 2k_\omega^2} y')}{\mathcal{K}_+ \sinh(\sqrt{Q^2 + 2k_\omega^2} a_Q)} \times \\ & \times \sum_{\bar{k}_n > 0} \frac{\mathbf{e}_x \sin(\bar{k}_n x) \sinh(\bar{k}_n y') - \mathbf{e}_y \cos(\bar{k}_n x) \cosh(\bar{k}_n y')}{[\coth(\bar{k}_n a_Q) + \coth(\bar{k}_n a_0)] \sinh(\bar{k}_n a_Q)}, \end{aligned} \quad (1.62)$$

где  $y' = y - a_Q - a_0$ .

## Отрицательная киральность

Теперь рассмотрим случай отрицательной киральности, когда  $\mathbf{M}(y)$  в соседних доменных стенках вращается в противоположных направлениях. В этом случае пространственная

зависимость  $f_2(y)$  в доменных стенках будет такой же, как и раньше, т.е. нечётной относительно центров доменных стенок. Однако пространственная зависимость ДТК в доменах существенно изменится: она будет чётной относительно центром доменом. Поэтому эта зависимость имеет вид

$$f_L(k_n, y) = C \cosh(\kappa_0 y), \quad -a_0 < y < a_0, \quad (1.63)$$

$$f_L(k_n, y) = D \sinh(\kappa_Q(y - a_0 - a_Q)), \quad a_0 < y < a_0 + 2a_Q. \quad (1.64)$$

Из гран.условий (1.24) и (1.25) находим коэффициенты  $C$  и  $D$  и окончательно получаем

$$f_L(k_n, a_0) = \frac{Q\mathcal{F}_3}{\kappa_Q \coth(\kappa_Q a_Q) + \kappa_0 \tanh(\kappa_0 a_0)}. \quad (1.65)$$

В этом случае ДТК пропадает только в пределе  $a_Q \rightarrow 0$ , поскольку в этом пределе опять получается доменная структура с коллинеарной ориентацией намагниченностей и очень узкими доменными стенками.

Дальше все аналогично случаю положительной киральности. Внутри домена ( $|y| < a_0$ ) получаем

$$f_L(x, y) = \frac{1}{2d} \sum_{k_n} e^{ik_n x} f_L(k_n, a_0) \frac{\cosh(\kappa_0 y)}{\cosh(\kappa_0 a_0)}. \quad (1.66)$$

В пределе  $k_h \gg 1/d \gg Q, k_\omega$  формула (1.66) даёт

$$f_L(y) = -\frac{if_S \cos(\varphi/2) \operatorname{sgn} \omega}{2d\gamma_b k_h^2} \frac{Q \cosh(\sqrt{2}k_\omega y)}{\mathcal{K}_- \cosh(\sqrt{2}k_\omega a_0)}, \quad (1.67)$$

$$\bar{f}_L(x, y) = -\frac{if_S \sin(\varphi/2) \operatorname{sgn} \omega}{2d\gamma_b k_h^2} \sum_{\bar{k}_n > 0} \frac{2Q \cos \bar{k}_n x}{\bar{k}_n [\coth(\bar{k}_n a_Q) + \tanh(\bar{k}_n a_0)]} \frac{\cosh(\bar{k}_n y)}{\cosh(\bar{k}_n a_0)}, \quad (1.68)$$

где мы обозначили

$$\mathcal{K}_- = \sqrt{Q^2 + 2k_\omega^2} \coth(\sqrt{Q^2 + 2k_\omega^2} a_Q) + \sqrt{2}k_\omega \tanh(\sqrt{2}k_\omega a_0). \quad (1.69)$$

Окончательно, получаем свертки:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_0(x, y) = & -\sin \varphi \frac{\sigma Q^2 \pi T}{4e(d\gamma_b k_h^2)^2} \sum_{\omega} \frac{f_S^2 \cosh(\sqrt{2}k_\omega y)}{\mathcal{K}_- \cosh(\sqrt{2}k_\omega a_0)} \times \\ & \times \sum_{\bar{k}_n > 0} \frac{\mathbf{e}_x \sin(\bar{k}_n x) \cosh(\bar{k}_n y) - \mathbf{e}_y \cos(\bar{k}_n x) \sinh(\bar{k}_n y)}{[\coth(\bar{k}_n a_Q) + \tanh(\bar{k}_n a_0)] \cosh(\bar{k}_n a_0)}. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Аналогично, в области с  $Q \neq 0$  (при  $a_0 < y < a_0 + 2a_Q$ ) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_Q(x, y) = & -\sin \varphi \frac{\sigma Q^2 \pi T}{4e(d\gamma_b k_h^2)^2} \sum_{\omega} \frac{f_S^2 \sinh(\sqrt{Q^2 + 2k_\omega^2} y')}{\mathcal{K}_- \sinh(\sqrt{Q^2 + 2k_\omega^2} a_Q)} \times \\ & \times \sum_{\bar{k}_n > 0} \frac{\mathbf{e}_x \sin(\bar{k}_n x) \cosh(\bar{k}_n y') - \mathbf{e}_y \cos(\bar{k}_n x) \sinh(\bar{k}_n y')}{[\coth(\bar{k}_n a_Q) + \tanh(\bar{k}_n a_0)] \sinh(\bar{k}_n a_Q)}. \end{aligned} \quad (1.71)$$

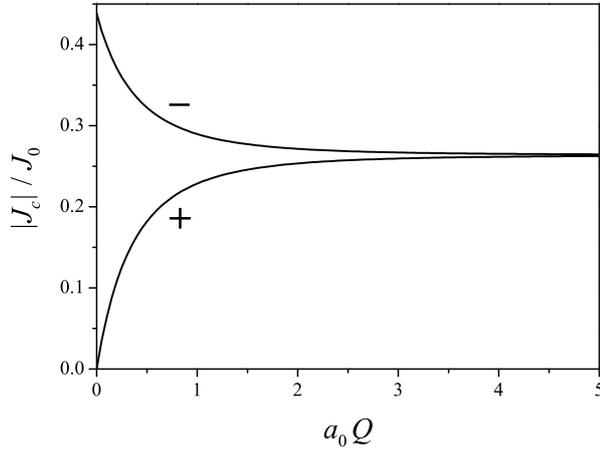


Рисунок 1.3 — Многодоменный SFS контакт: модуль критического тока  $J_{c+}$  (положительная киральность) и  $J_{c-}$  (отрицательная киральность) в расчёте на период доменной структуры как функция полуширины домена  $a_0$  при низких температурах. Токи отрицательны, т.е. реализуется  $\pi$ -состояние. Нормировочная константа есть  $J_0 = \sigma DQ^3 / 4ed\gamma_b^2 k_h^4$ . Другие параметры:  $DQ^2 = \Delta$ ,  $2Qa_Q = \pi$ .

### Обсуждение результатов

Интегрируя  $x$  компоненту сверхтока по  $y$ , находим критический ток в расчёте на один период структуры в случае положительной и отрицательной киральности:

$$J_{c+} \equiv \int_{-a_0-a_Q}^{a_0+a_Q} j_{cx+}(y) dy = -\frac{\sigma Q^2 \pi T}{4ed\gamma_b^2 k_h^4} \sum_{\omega} \frac{f_S^2}{\mathcal{K}_+}, \quad (1.72)$$

$$J_{c-} \equiv \int_{-a_0-a_Q}^{a_0+a_Q} j_{cx-}(y) dy = -\frac{\sigma Q^2 \pi T}{4ed\gamma_b^2 k_h^4} \sum_{\omega} \frac{f_S^2}{\mathcal{K}_-}. \quad (1.73)$$

Полный ток через контакт большой площади пропорционален числу доменных стенок.

Результаты для критического тока проиллюстрированы на рисунке 1.3, где изображены  $|J_{c+}|$  и  $|J_{c-}|$  как функции полуширины домена  $a_0$  (при этом  $Q$  и  $a_Q$  связаны соотношением  $2Qa_Q = \pi$ , что означает вращение намагничённости внутри доменной стенки на угол  $\pi$ ). В пределе  $a_0 \rightarrow 0$  поведение сверхтока для двух случаев существенно различно. В случае положительной киральности ДТК в этом пределе пропадает, и сверхток обращается в ноль,<sup>1</sup> в то время как в случае отрицательной киральности это наиболее неоднородный предел и сверхток максимален. В противоположном пределе больших  $a_0 \gg \xi_T$  зависимость от  $a_0$  пропадает в обоих случаях, и результаты совпадают, потому что гиперболические функции от  $d k_{\omega} a_0$  обращаются в единицу.

Возникновение состояния  $\pi$ -контакта в SFS системе хорошо понято в случае, когда оно связано с короткой компонентой [10]. Ключевым моментом там является осциллирующее поведение этой компоненты: дополнительная фаза  $\pi$  на контакте возникает из-за изменения знака. В то же время ДТК не меняет знак, поэтому на первый взгляд кажется, что

<sup>1</sup>Точнее, сверхток в пределе  $a_0 \rightarrow 0$  не обращается в ноль точно, но определяется экспоненциально малым вкладом от короткодействующей компоненты, которой мы пренебрегаем.

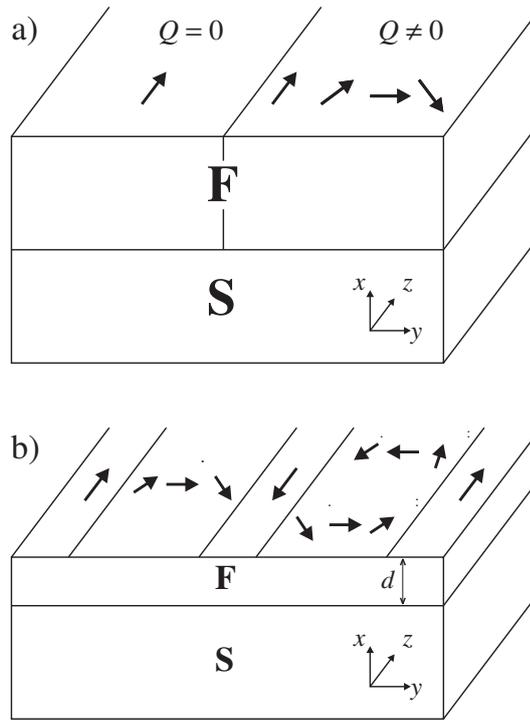


Рисунок 1.4 — SF системы, для которых вычисляется плотность состояний. (a) SF бислоем с полубесконечными S и F частями. Домен ( $y < 0$ ) и область вращающейся намагниченности ( $y > 0$ ) также полубесконечны. (b) Многодоменный F слой толщины  $d$  в контакте с объёмным сверхпроводником. В зависимости от относительного направления вращения намагниченностей в соседних доменных стенках мы различаем случаи положительной и отрицательной киральности.

$\pi$ -контакт не должен возникать. Откуда же возникает дополнительная фаза? Заметим, что ДТК в нашем случае чисто мнимая [см., например, формулу (1.58)]. Это означает, что имеется вращение фазы на  $\pi/2$  на SF границах, и две границы дают суммарный фазовый сдвиг  $\pi$ . Механизм образования  $\pi$ -контакта из-за граничных сдвигов  $\pi/2$  аналогичен работе [56].

Другой тип SF структур, чувствительных к киральности вектора  $\mathbf{M}$ , рассматривался в работах [57; 58]. Было показано, что знак джозефсоновского критического тока в многослойной SF структуре зависит от киральности. Аналогично нашим результатам, состояние  $\pi$ -контакта было обнаружено в ситуации, когда важна только ДТК.

#### 1.1.4 Плотность состояний в SF бислое

Теперь рассмотрим плотность состояний на свободной поверхности F слоя в системе, показанной на рисунке 1.4 (где F слой имеет толщину  $d$ ). Результаты для плотности состояний непосредственно следуют из функций Грина, вычисленных в середине F слоя в SFS контакте, показанном на рисунке 1.1(b) (где F слой имеет толщину  $2d$ ) при нулевой разности фаз,  $\varphi = 0$ . Делая аналитическое продолжение с мацубаровских частот  $\omega$  на вещественные

энергии  $\varepsilon$ , получаем поправку к плотности состояний за счет эффекта близости:

$$\delta\nu(\varepsilon) = - \frac{\operatorname{Re} f_L^2}{2} \Big|_{\omega \rightarrow -i\varepsilon} \quad (1.74)$$

(рассматриваем область пространства, в которой важна только ДТК).

Для наглядной иллюстрации поведения различных компонент решения рассмотрим сначала упрощённую структуру, показанную на рисунке 1.4(а). При  $y < 0$  из формулы (1.46) находим

$$f_L(x, y) = \int \frac{dk}{2\pi} f_L(k, 0) \exp(ikx) \exp(\kappa_0 y). \quad (1.75)$$

Отсюда легко найти асимптотическое поведение ДТК  $f_L(x, y)$ . При больших отрицательных  $y$  ( $|y| \gg 1/k_\omega$ ) раскладываем  $\kappa_0$  и  $\kappa_Q$  по  $(k/k_\omega)^2$  (т.к. характерные  $k$  в интеграле порядка  $\sqrt{k_\omega/|y|}$ ) и получаем

$$f_L(x, y) = - \frac{if_S Q \operatorname{sgn} \omega}{\gamma_b k_h^2} \sqrt{\frac{k_\omega}{\sqrt{2\pi}|y|}} \frac{\exp(-\sqrt{2}k_\omega|y|) \exp(-x^2 k_\omega / \sqrt{2}|y|)}{\sqrt{2}k_\omega + \sqrt{2k_\omega^2 + Q^2}}. \quad (1.76)$$

Эта формула показывает, что  $f_L(x, y)$  экспоненциально спадает с ростом  $y$ , но характерная длина относительно велика ( $\sim k_\omega^{-1}$ ).

Внутри доменной стенки ( $y > 0$ ) поведение  $f_L(x, y)$  такое же, если  $Q < k_\omega$ . В противоположном пределе  $Q > k_\omega$  функция  $f_L(x, y)$  в доменной стенке убывает быстрее:  $f_L(x, y) \propto \exp(-Q|y|)$ .

В случае конечной толщины многодоменного F слоя рассматриваем две возможные киральности. В случае положительной киральности при  $k_h \gg 1/d \gg Q, k_\omega$  из формулы (1.58) находим

$$f_L(x, y) = - \left( \frac{if_S \operatorname{sgn} \omega}{2d\gamma_b k_h^2} \right) \frac{Q}{\kappa_Q \coth \theta_Q + \kappa_0 \coth \theta_0} \frac{\sinh(\kappa_0 y)}{\sinh(\kappa_0 a_0)} \Big|_{k_n=0}. \quad (1.77)$$

Зависимость от  $x$  отсутствует, т.к. F слой тонкий.

Изменение плотности состояний в пространстве существенно отличается от случая без ДТК: плотность состояний почти постоянна по толщине слоя (нет зависимости от  $x$ ) и обращается в ноль в центре доменов ( $y = 0$ ). Аномальная функция  $f_L(y)$  экспоненциально спадает (при этом осциллируя) при отходе от границ между доменной стенкой и доменом на характерном масштабе  $\xi_\varepsilon = \sqrt{D/\varepsilon}$ , см. рисунок 1.5. В то же время синглетная компонента в случае доменной структуры приводит к чётной зависимости  $\delta\nu(y)$  относительно центров доменов. Характерная длина для короткодействующей компоненты есть  $\xi_h = \sqrt{D/h}$ . Этот случай реализуется при  $\theta_Q \rightarrow 0$ .

В случае отрицательной киральности внутри домена ( $|y| < a_0$ ) из формулы (1.67) получаем

$$f_L(x, y) = - \left( \frac{if_S \operatorname{sgn} \omega}{2d\gamma_b k_h^2} \right) \frac{Q}{\kappa_Q \coth \theta_Q + \kappa_0 \tanh \theta_0} \frac{\cosh(\kappa_0 y)}{\cosh(\kappa_0 a_0)} \Big|_{k_n=0}. \quad (1.78)$$

Получающиеся поправки к плотности состояний  $\delta\nu(y)$  в случае положительной и отрицательной киральностей сравниваются на рисунке 1.6.

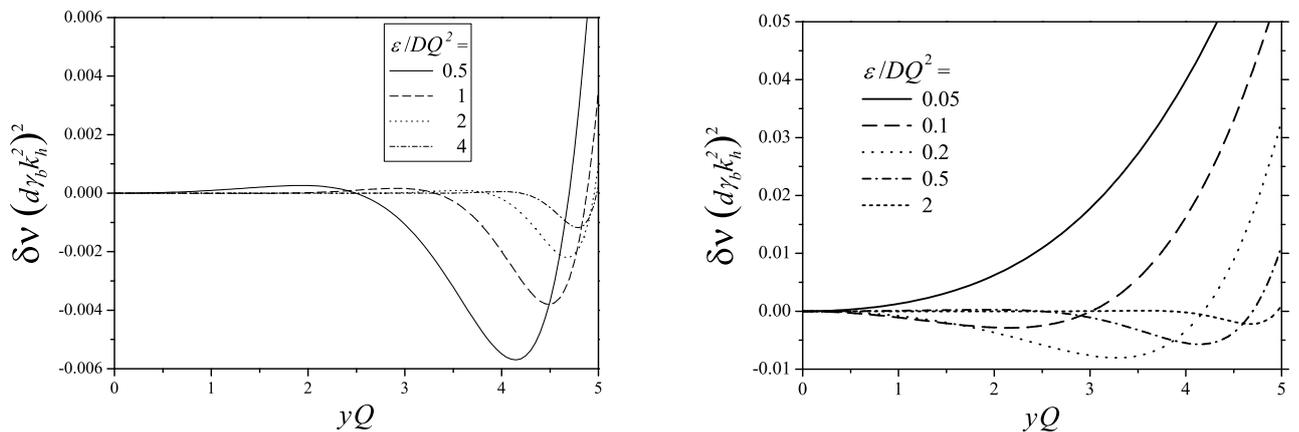


Рисунок 1.5 — Поправка  $\delta\nu(y)$  к нормально-металлической плотности состояний на свободной поверхности F слоя за счет эффекта близости в случае положительной киральности.  $\delta\nu$  домножено на безразмерный параметр  $(d\gamma_b k_h^2)^2$ , а  $y$  обезразмерено домножением на  $Q$ . Графики построены при различных энергиях  $\varepsilon$  (нормированных на  $DQ^2$ ). Ширина доменов равна  $a_0 = 5/Q$ , вращение намагниченности в доменных стенках соответствует  $Qa_Q = \pi$ . Рассматривается предел  $DQ^2 \ll \Delta$ .

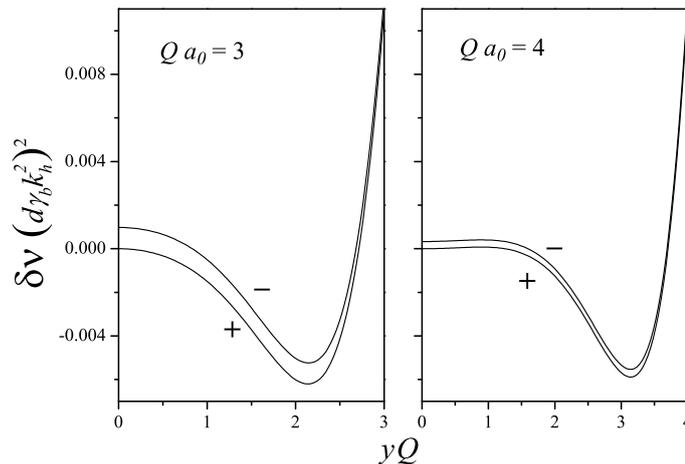


Рисунок 1.6 — Поправка  $\delta\nu(y)$  к плотности состояний на свободной поверхности F слоя: сравнение положительной (обозначена «+») и отрицательной (обозначена «-») киральностей при двух значениях ширины доменов,  $a_0 = 3/Q$  и  $a_0 = 4/Q$ . Энергия равна  $\varepsilon = 0.5DQ^2$ . Различие между киральностями уменьшается при увеличении  $a_0$  или  $\varepsilon$ .

Безразмерный параметр  $(d\gamma_b k_h^2)^2$ , на который домножено  $\delta\nu(y)$  на рисунках 1.5 и 1.6, при наших предположениях много больше единицы. Это означает, что  $\delta\nu(y)$  мало. Однако на границе применимости нашего приближения, когда этот параметр порядка единицы, мы ожидаем, что результаты будут качественно справедливы. При этом поправка к плотности состояний, показанная на рисунках 1.5 и 1.6, уже попадает в экспериментально измеримый диапазон: в работе [7] разрешение в измерениях плотности состояний было на уровне 0.002. В целом, желательно измерять  $\delta\nu$  на малых энергиях, т.к. эффект растет с убыванием энергии, см. рисунок 1.5.

Координатная зависимость плотности состояний, представленная на рисунках 1.5 и 1.6, отличается от аналогичной зависимости, обусловленной синглетной компонентой. Если тол-

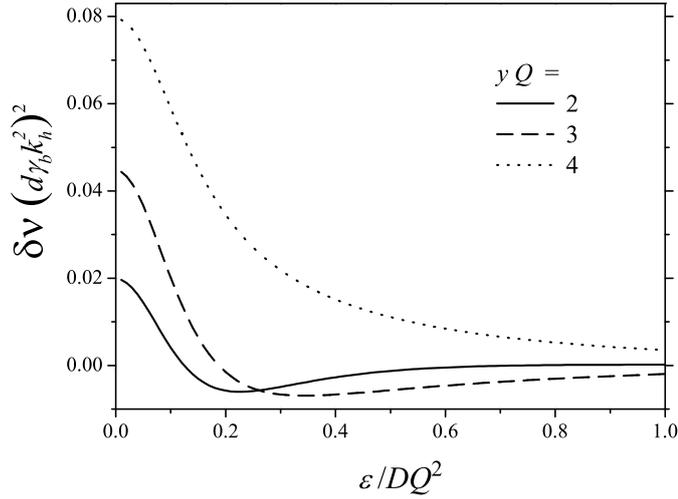


Рисунок 1.7 — Поправка  $\delta\nu(\varepsilon)$  к плотности состояний на свободной поверхности F слоя в случае положительной киральности. Графики построены для нескольких точек  $y$ .

Остальные параметры те же, что и на рисунке 1.5.

щина F слоя  $d$  меньше обменной длины  $\xi_h$ , поправка к плотности состояний, обусловленная синглетной компонентой, в домене, более широком, чем  $\xi_h$ , не зависит от  $y$ . В случае ДТК поправка к плотности состояний существенно зависит от координаты, т.к. ДТК возникает вблизи доменных стенок.

Обсудим еще наши результаты с точки зрения утверждений, сделанных в работе [59], где было показано, что общие аналитические свойства функции Грина приводят к тому, что для  $\omega$ -нечётной сверхпроводимости должно быть  $\delta\nu(0) > 0$ . Можно проверить, что в наших аналитических результатах это свойство действительно выполняется.

Графически это проиллюстрировано в правой части рисунка 1.5: действительно, при малых энергиях поправка к плотности состояний становится положительной везде. На рисунке 1.7 зависимость  $\delta\nu(\varepsilon)$  показана в нескольких точках  $y$ . Опять же, при нулевой энергии поправка к плотности состояний положительна, что приводит к максимуму плотности состояний.

### 1.1.5 Заключение

Мы изучили джозефсоновские контакты между двумя сверхпроводниками через многодоменный ферромагнетик с намагниченностью в плоскости слоя, предполагая, что домены разделены неелевскими доменными стенками. Из-за неоднородности намагниченности в системе возникает ДТК. Возникая в доменной стенке, эта компонента проникает в домены на большую глубину порядка  $\xi_T = \sqrt{D/2\pi T}$ , превышающую обычный короткий масштаб  $\xi_h = \sqrt{D/h}$ , описывающий убывание сверхпроводящих корреляций в ферромагнетике с однородной намагниченностью.

Мы вычислили джозефсоновский ток, переносимый ДТК в случае, когда короткие компоненты экспоненциально затухают на толщине F слоя и ими можно пренебречь. Рассматривая предел, когда F слой является тонким с точки зрения ДТК, мы обнаружили, что контакт находится в  $\pi$ -состоянии. ДТК не осциллирует внутри F слоя, а сдвиг фазы  $\pi$  конденсатной волновой функции оказывается обусловлен  $\pi/2$ -сдвигами на SF границах. Эта интерпретация подсказывает, что контакт должен быть в  $\pi$ -состоянии из-за ДТК независимо от толщины F слоя. Когда F слой не является тонким для ДТК, аналитические выражения для сверхтока становятся громоздкими, однако численный счет подтверждает, что контакт действительно в  $\pi$ -состоянии.

Модуль плотности джозефсоновского тока максимален на границах между доменами и доменными стенками, см. рисунок 1.2. Ток в основном переносится вдоль этих границ.

Мы рассмотрели две возможные киральности доменной структуры (положительную и отрицательную), которые определяются относительным направлением вращения намагниченностей в соседних доменных стенках. Модуль джозефсоновского тока, обусловленного ДТК, больше в случае отрицательной киральности, т.к. она соответствует более неоднородной намагниченности.

Также мы проанализировали плотность состояний на свободной поверхности F слоя в SF структуре. Если толщина F слоя  $d$  много больше обменной длины  $\xi_h = \sqrt{D/\hbar}$  (которая характеризует убывание синглетной компоненты в ферромагнетике), на внешней поверхности F слоя выживает только ДТК  $f$ . Её пространственная зависимость внутри доменов  $f(y)$  существенно отличается от аналогичной зависимости синглетной компоненты вблизи SF границы. Если вектор  $\mathbf{M}(y)$  внутри неелевских доменных стенок вращается в одном и том же направлении (положительная киральность), тогда  $f$  обращается в ноль в центрах доменов. Это означает, что и поправка к плотности состояний за счет эффекта близости обращается в ноль в центрах доменов. Поэтому измерения плотности состояний могут дать информацию о природе наведённой сверхпроводимости (синглетная или триплетная) в F плёнках.

## 1.2 Проводимость контакта между нормальным металлом и сверхпроводником Березинского

### 1.2.1 Введение

Сверхпроводящее состояние с нечётной зависимостью от частоты должно обладать рядом необычных свойств, некоторые из которых мы уже рассмотрели выше. Как мы уже обсуждали, такое состояние может быть получено в результате эффекта близости в неоднородном ферромагнетике. Более того, из-за большой глубины проникновения ДТК в ферромагнетик, эта сверхпроводящая компонента может быть пространственно отделена

от обычных. Не исключены и другие варианты реализации  $\omega$ -нечётной сверхпроводимости. Отвлекаясь сейчас от конкретного микроскопического механизма возникновения такой сверхпроводимости, мы в этом разделе изучим некоторые её особенности, связанные с процессами андреевского отражения на границе. Условно  $\omega$ -нечётное сверхпроводящее состояние будем называть сверхпроводимостью Березинского (хотя для нас совершенно необязательно, чтобы это состояние реализовывалось в объёме и описывалось нечётным по  $\omega$  парным потенциалом  $\Delta$ , как предполагал Березинский в своей работе [13]).

Зададимся вопросом: можно ли предложить эксперимент, чувствительный к наиболее нетривиальной особенности сверхпроводимости Березинского — нечётной зависимости от частоты? Такой эксперимент мог бы служить хорошим тестом такого состояния, аналогично известным экспериментам, чувствительным к нетривиальной пространственной симметрии анизотропных сверхпроводников (идея, предложенная в работе [60], была применена для экспериментального подтверждения  $d$ -волновой симметрии в  $YBaCuO$ , см. обзор [61]). Кажется естественным, что  $\omega$ -нечётная сверхпроводимость должна приводить к особенностям андреевского отражения [62] от такого сверхпроводника, поскольку этот процесс связывает электрон с положительной энергией и дырку с отрицательной энергией (относительно уровня Ферми).

В данном разделе будет изучена дифференциальная проводимость контакта нормальный металл – сверхпроводник (NS), показанного на рисунке 1.8, при нулевой температуре. Будут рассмотрены три варианта сверхпроводящего резервуара:  $S$  — обычный сверхпроводник со щелью (в этом случае будут воспроизведены результаты, полученные ранее, см. обзоры [63; 64]),  $S_0$  — обычный сверхпроводник без щели (такое возможно, например, из-за парамагнитных примесей [23]) и  $S_B$  — сверхпроводник Березинского.  $S_B$  имеет две основные особенности: нечётность по  $\omega$  и бесщелевой спектр. Случай  $S_0$  рассматривается для того, чтобы выявить особенности  $S_B$ , связанные с необычной частотной симметрией, а не с бесщелевым характером спектра.

## 1.2.2 Вычисление проводимости

Мы будем вычислять дифференциальную проводимость контакта

$$G_{NS}(V) = \frac{dI(V)}{dV}; \quad (1.79)$$

которая в нормальном состоянии принимает значение  $G_0 = (G_N^{-1} + G_T^{-1})^{-1}$ . Диффузный нормальный провод длины  $L$  характеризуется энергией Таулеса  $E_{Th} = D/L^2$ . При малых напряжениях важную роль в транспорте играет андреевское отражение. Будем предполагать  $eV$ ,  $E_{Th} \ll E_0$ , где  $E_0$  — энергетический масштаб, на которой меняется гриновская функция сверхпроводника (в обычном сверхпроводнике  $E_0$  совпадает с параметром порядка  $\Delta$ ). В то же время соотношение между  $eV$  и  $E_{Th}$  может быть произвольным.

В грязном пределе система описывается уравнением Узаделя [65; 66] для функции Грина  $g$ , которая является матрицей  $8 \times 8$  в пространствах Келдыша, Горькова-Намбу и

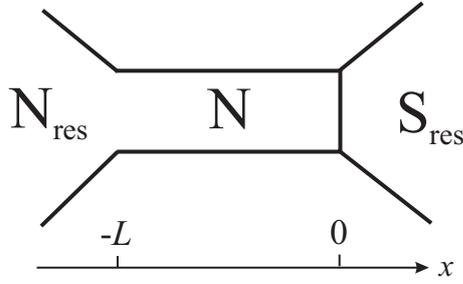


Рисунок 1.8 — NS контакт. Проводимости нормального провода и NS границы —  $G_N$  и  $G_T$ . Потенциал  $V$  приложен к нормальному резервуару  $N_{\text{res}}$ .

спиновом:

$$g = \begin{pmatrix} \check{g}^R & \check{g}^K \\ 0 & \check{g}^A \end{pmatrix}. \quad (1.80)$$

Уравнение Узаделя имеет вид

$$D\nabla(g\nabla g) + [iE\hat{\tau}_3\hat{\sigma}_0\hat{1}, g] = 0, \quad (1.81)$$

где  $\hat{1}$  — единичная матрица в пространстве Келдыша. На границе с нормальным резервуаром ( $x = -L$ ),  $g$  должно равняться нормально-металлическому значению, а на NS границе ( $x = 0$ ) должны выполняться гран.условия Куприянова-Лукичева [55]

$$g\nabla g = \frac{G_T}{2G_N L} [g, g_S], \quad (1.82)$$

где  $g_S$  — функция Грина в сверхпроводнике.

Ток можно записать как  $I = \int j dE$ , где под интегралом стоит спектральный ток

$$j(E, x) = -\frac{G_N L}{16e} \text{Tr} [\hat{\tau}_3 \hat{\sigma}_0 (g\nabla g)^K]. \quad (1.83)$$

Из условия нормировки  $g^2 = 1$  следует, что  $\check{g}^K$  можно параметризовать как  $\check{g}^K = \check{g}^R \check{f} - \check{f} \check{g}^A$ , тогда общее соотношение  $\check{g}^A = -\hat{\tau}_3 (\check{g}^R)^\dagger \hat{\tau}_3$  позволяет рассматривать как независимые функции только  $\check{g}^R$  и  $\check{f}$ .

В случаях S и  $S_0$  можно записать

$$\check{g}^R = \hat{\tau}_3 \hat{\sigma}_0 G^R + \hat{\tau}_1 \hat{\sigma}_0 F^R, \quad (1.84)$$

в то время как  $S_B$  — триплетный сверхпроводник, и аномальная часть функции Грина — вектор в спиновом пространстве. Обозначив его направление за  $z$ , можем написать

$$\check{g}^R = \hat{\tau}_3 \hat{\sigma}_0 G^R + \hat{\tau}_1 \hat{\sigma}_3 F^R. \quad (1.85)$$

Физически это означает триплетное сверхпроводящее состояние с нулевой проекцией спина куперовских пар на ось  $z$ , в то время как проекции 1 и  $-1$  на любую ось в плоскости  $xu$  равновероятны.

Сверхпроводимость Березинского нечётна по мацубаровской частоте,  $F(-\omega) = -F(\omega)$ , поэтому в представлении вещественной энергии получаем  $F^R(-E) = -F^A(E)$ . Вместе с общим соотношением  $F^A(E) = (F^R(E))^*$  это приводит к [59; 67]  $F^R(-E) = -(F^R(E))^*$ . Нам

нужно знать низкоэнергетическое поведение  $F^R(E)$ , а оно зависит от конкретной модели. Вопрос микроскопической модели объёмного сверхпроводника Березинского в настоящее время не имеет ответа. В то же время мы знаем, что такое состояние реализуется в неоднородных SF структурах в результате эффекта близости. В этих системах задача решается полностью микроскопически, и низкоэнергетическое поведение нечётной по частоте триплетной компоненты имеет вид  $F(\omega) = iA \operatorname{sgn} \omega$ , откуда следует  $F^R(E) = iA$  at  $E \rightarrow 0$  с вещественным коэффициентом  $A$ . Заметим, что такое же поведение получилось бы из стандартной формулы  $F^R = \Delta/\sqrt{\Delta^2 - E^2}$  в случае линейного низкоэнергетического поведения параметра порядка  $\Delta(E) = E/(1 + A^{-2})$ .

Нормальная и аномальная функции Грина всегда могут быть параметризованы как  $G^R = \cos \theta$  и  $F^R = \sin \theta$ . Уравнение и граничные условия на комплексный угол  $\theta$  принимают вид

$$\frac{D}{2}\theta'' + iE \sin \theta = 0, \quad (1.86)$$

$$\theta = 0 \Big|_{x=-L}, \quad \theta' = \frac{G_T}{G_N L} \sin(\theta_S - \theta) \Big|_{x=0}. \quad (1.87)$$

Сверхпроводник описывается углом  $\theta_S$ . Чтобы рассмотреть малые напряжения, нам нужно найти решение уравнения на малых энергиях. Если  $E \ll E_0$ , то  $\theta_S = \pi/2$  в S,  $0 < \theta_S < \pi/2$  в  $S_0$ ,  $\theta_S = i\vartheta_S$  с вещественным  $\vartheta_S$  в  $S_B$ . Поэтому тип сверхпроводника входит в наше рассмотрение только через низкоэнергетическое значение  $\theta_S$ .

В случае обычных сверхпроводников, S или  $S_0$ , компоненты функции распределения можно выбрать в виде

$$\check{f} = \hat{\tau}_0 \hat{\sigma}_0 f_0 + \hat{\tau}_3 \hat{\sigma}_0 f_3, \quad (1.88)$$

тогда как в случае  $S_B$  число компонент в общем случае удваивается:

$$\check{f} = \hat{\tau}_0 \hat{\sigma}_0 f_0 + \hat{\tau}_3 \hat{\sigma}_0 f_3 + \hat{\tau}_0 \hat{\sigma}_3 \bar{f}_0 + \hat{\tau}_3 \hat{\sigma}_3 \bar{f}_3. \quad (1.89)$$

Спектральный ток (1.83) при  $x = 0$  с помощью граничных условий (1.82) можно записать в виде

$$j(E) = (G_T/8e) f_3 [(G^R - G^A)(G_S^R - G_S^A) + (F^R + F^A)(F_S^R + F_S^A)]. \quad (1.90)$$

Два слагаемых в квадратных скобках имеют ясный физический смысл. Поскольку  $(G^R - G^A)/2$  — одночастичная плотность состояний, первое слагаемое описывает вклад в ток от квазичастиц. Второе же слагаемое ( $FF$  типа) описывает сверхток, связанный с андреевским отражением.

Последующее вычисление аналогично обычному случаю [63; 64; 68]. При нулевой температуре, интегрируя по энергии, получаем

$$\frac{1}{G_{NS}(V)} = \frac{1}{G_N L} \int_{-L}^0 \frac{dx}{\cosh^2 \theta_2(x)} + \frac{1}{G_T \cos(\theta_{S1} - \theta_1) \cosh \theta_{S2} \cosh \theta_2}, \quad (1.91)$$

где правая часть берется при  $E = eV$ , и мы выделили вещественную и мнимую части  $\theta$ :  $\theta = \theta_1 + i\theta_2$ . Углы  $\theta$  и  $\theta_S$  во втором члене берутся на NS границе. Задача теперь свелась к решению уравнений (1.86)-(1.87) и вычислению правой части формулы (1.91).

Начнём с простейшего случая нулевого напряжения  $V = 0$ . При  $E = 0$ , решением уравнений (1.86) и (1.87) будет линейная функция. В случае S или  $S_0$  получаем

$$G_{NS}^{-1}(0) = G_N^{-1} + \frac{G_T^{-1}}{\cos(\theta_S - \theta_0)}, \quad (1.92)$$

где  $\theta_0$  определяется уравнением  $\theta_0 = (G_T/G_N) \sin(\theta_S - \theta_0)$ . В случае  $S_B$  получается

$$G_{NS}^{-1}(0) = \frac{G_N^{-1} \tanh \vartheta_0}{\vartheta_0} + \frac{G_T^{-1}}{\cosh \vartheta_0 \cosh \vartheta_S}, \quad (1.93)$$

где  $\vartheta_0$  определяется уравнением  $\vartheta_0 = (G_T/G_N) \sinh(\vartheta_S - \vartheta_0)$ .

Немедленным следствием полученных результатов является соотношение  $G_{NS}(0) < G_0$  в случаях S и  $S_0$ , и соотношение  $G_{NS}(0) > G_0$  в случае  $S_B$ . В S случае из-за того, что плотность состояний на малых энергиях обращается в ноль, ток полностью даётся андреевским вкладом. В случае  $S_0$  появляется конечная плотность состояний, поэтому сверхток содержит как андреевский, так и квазичастичный вклады. Интересно, что в случае  $S_B$  проводимость  $G_{NS}(0)$  содержит только квазичастичный вклад; этот факт можно интерпретировать как отсутствие андреевского отражения от  $S_B$  при  $E \rightarrow 0$ .

При  $eV \ll E_{Th}$  можно построить теорию возмущений, вычисляя поправки к решению на нулевом напряжении. Два порядка по  $eV/E_{Th}$  дают квадратичное низкотемпературное поведение:  $G_{NS}(V) = G_{NS}(0) + aV^2$ . Явный вид  $a$  весьма громоздок, поэтому ограничимся обсуждением наиболее важных особенностей этого коэффициента. Знак  $a$  зависит от отношения  $G_N/G_T$  и от типа сверхпроводника:  $a > 0$  для S и  $S_0$ , если  $G_N/G_T < g_c$ , и  $a < 0$ , если  $G_N/G_T > g_c$ , где  $g_c$  порядка единицы и слабо зависит от  $\theta_S$  (при изменении  $\theta_S$  от  $\pi/2$  до 0 критическое значение  $g_c$  остаётся в интервале от 0.8 до 0.9), тогда как  $a < 0$  для  $S_B$  при произвольных  $G_N/G_T$ .

### 1.2.3 Туннельный предел: $G_N \gg G_T$ .

В этом случае достаточно сохранить второе слагаемое в формуле (1.91). Эффект близости слаб, т.е.  $|\theta| \ll 1$ .

В случаях  $S_0$  и  $S_B$  можно положить  $\theta = 0$ , тогда

$$\frac{G_{NS}(V)}{G_0} = \nu_S(eV) \approx \nu_S(0), \quad (1.94)$$

где  $\nu_S(E)$  — плотность состояний в сверхпроводнике, нормированная на значение в нормальном металле; она оказывается почти постоянной при  $E \ll E_0$  (представленное выше более точное рассмотрение даёт малую поправку по напряжению к этой константе). Физический смысл формулы (1.94) — туннельная спектроскопия сверхпроводника с помощью нормального пробника. Существенное различие между  $S_0$  и  $S_B$  состоит в том, что  $\nu_S(0) = \cos \theta_S < 1$  для  $S_0$ , в то время как  $\nu_S(0) = \cosh \vartheta_S > 1$  для  $S_B$  (для  $S_B$  этот факт был отмечен в работах [59; 67]).

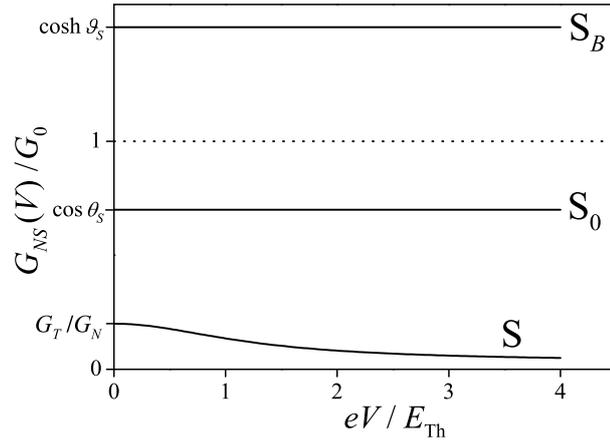


Рисунок 1.9 — Дифференциальная проводимость при  $eV \ll E_0$  в туннельном пределе ( $G_N \gg G_T$ ). В S случае  $G_{NS}(V)$  имеет аномалию при нулевом напряжении [69–71]: эта величина ведет себя квадратично и по закону  $1/\sqrt{V}$  при  $eV \ll E_{Th}$  и  $eV \gg E_{Th}$  соответственно. В случаях  $S_0$  и  $S_B$  проводимость  $G_{NS}(V)$  почти постоянна, она меньше  $G_0$  в случае  $S_0$  и превышает  $G_0$  в случае  $S_B$ .

В случае S ниже щели имеем  $\nu_S(eV) = 0$ , поэтому эффектом близости пренебречь нельзя. Линеаризуя формулы (1.86) и (1.87) по  $\theta$ , находим решение и окончательно получаем

$$\frac{G_{NS}(V)}{G_0} = \frac{G_T}{G_N} \frac{\sinh(2\sqrt{\varepsilon}) + \sin(2\sqrt{\varepsilon})}{4\sqrt{\varepsilon}[\sinh^2(\sqrt{\varepsilon}) + \cos^2(\sqrt{\varepsilon})]}, \quad \varepsilon = \frac{eV}{E_{Th}}, \quad (1.95)$$

что означает  $G_{NS}(V) \ll G_0$  [формула (1.95) также следует из более общего результата, полученного в работе [68]].

Результаты для туннельного предела показаны на рисунке 1.9. Обратим внимание, что андреевское отражение несущественно для  $S_B$  в этом пределе, т.к. перенос тока даётся квазичастичным вкладом. В то же время андреевское отражение будет играть существенную роль в прозрачном пределе, рассматриваемом ниже.

#### 1.2.4 Прозрачный предел: $G_N \ll G_T$ .

В этом случае достаточно оставить первое слагаемое в правой части формулы (1.91).

При  $eV \ll E_{Th}$  находим малую поправку к проводимости на нулевом напряжении. Для S и  $S_0$  получаем

$$\frac{G_{NS}(V)}{G_0} = 1 + A \left( \frac{eV}{E_{Th}} \right)^2 \quad (1.96)$$

с положительным коэффициентом

$$A = \frac{4}{\theta_S^4} \left( \frac{1}{2} + \frac{\sin^2 \theta_S}{3} + \frac{3 \sin 2\theta_S}{4\theta_S} - \frac{2 \sin^2 \theta_S}{\theta_S^2} \right). \quad (1.97)$$

$A(\theta_S)$  монотонно растет от нуля при  $\theta_S = 0$  до примерно 0.015 при  $\theta_S = \pi/2$ .

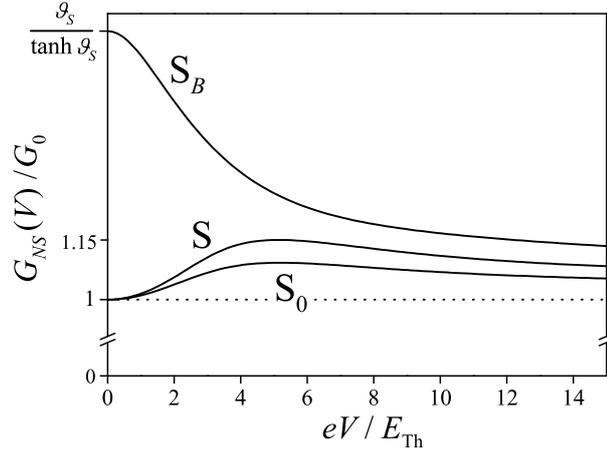


Рисунок 1.10 — Дифференциальная проводимость при  $eV \ll E_0$  в прозрачном пределе ( $G_N \ll G_T$ ). Во всех трёх случаях  $G_{NS}(V)$  квадратично при  $eV \ll E_{Th}$  приближается к единице по закону  $1/\sqrt{V}$  при  $eV \gg E_{Th}$ . В случаях S и  $S_0$  поведение имеет характер возвратного (в S случае см. [72; 73]). Максимальное значение  $G_{NS}(V)/G_0$  (которое достигается при  $eV$  порядка нескольких  $E_{Th}$ ) приблизительно равно 1.15 для случая S, в то время как для  $S_0$  кривая лежит ближе к единице. В случае  $S_B$  проводимость  $G_{NS}(V)$  монотонно убывает.

Для  $S_B$  находим следующую проводимость при низких напряжениях:

$$\frac{G_{NS}(V)}{G_0} = \frac{\vartheta_S}{\tanh \vartheta_S} - B \left( \frac{eV}{E_{Th}} \right)^2 \quad (1.98)$$

с положительным коэффициентом

$$B = \frac{2}{\vartheta_S^2 \tanh^2 \vartheta_S} + \frac{3}{\vartheta_S^3 \tanh \vartheta_S} + \frac{3 \cosh^2 \vartheta_S}{\vartheta_S^4} - \frac{4 \sinh 2\vartheta_S}{\vartheta_S^5}. \quad (1.99)$$

$B(\vartheta_S)$  — монотонно растущая функция, начинающаяся от нуля при  $\vartheta_S = 0$ . Хотя  $\vartheta_S$  — неизвестный параметр, его в принципе можно определить из измерений в туннельном пределе [см. формулу (1.94), где  $\nu_S(0) = \cosh \vartheta_S$ ].

При  $eV \gg E_{Th}$  все три случая (S,  $S_0$  и  $S_B$ ) рассматриваются одинаковым образом. Поскольку  $G_N \ll G_T$ , гран.условие (1.87) при  $x = 0$  сводится к  $\theta = \theta_S$ . У уравнения синус-Гордона (1.86) имеется известное решение с заданным значением на границе

$$\theta(x) = 4 \arctan \left\{ \operatorname{tg} \left( \frac{\theta_S}{4} \right) \exp \left( -(1-i)|x| \sqrt{\frac{E}{D}} \right) \right\}. \quad (1.100)$$

Это решение удовлетворяет гран.условию  $\theta(-L) = 0$  с хорошей точностью, т.к.  $\theta(-L)$  экспоненциально мало при  $E \gg E_{Th}$ . Подставляя формулу (1.100) в первое слагаемое в правой части формулы (1.91), получаем

$$\frac{G_{NS}(V)}{G_0} = 1 + \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{L} \tanh^2 \theta_2(x) = 1 + C \sqrt{\frac{E_{Th}}{eV}}, \quad (1.101)$$

где положительный коэффициент  $C$  зависит только от  $\theta_S$ , т.е. от типа сверхпроводника. В S случае  $C \approx 0.3$ .

Результаты для прозрачного предела показаны на рисунке 1.10.

## 1.2.5 Заключение

Мы исследовали проводимость контакта между нормальным металлом и сверхпроводником Березинского ( $\omega$ -нечётное спин-триплетное  $s$ -волновое состояние). Основные отличия от случая обычного сверхпроводника следующие: (i) в туннельном пределе  $G_{NS}(V)$  оказывается больше, чем проводимость в нормальном состоянии (рисунок 1.9), (ii) в прозрачном пределе  $G_{NS}(V)$  монотонно убывает (рисунок 1.10). Эти особенности могут быть использованы для экспериментальной проверки типа сверхпроводимости.

## 1.3 Расширенная классификация сверхпроводящих состояний и проблема двух нечётных по частоте состояний с различным типом мейснеровского отклика

### 1.3.1 Введение

Несмотря на заметное число теоретических работ по  $\omega$ -нечётному состоянию (в качестве «главного» состояния, т.е. соответствующего неустойчивости нормального состояния в канале взаимодействия) в объёмных сверхпроводниках [74–83], экспериментальное подтверждение такого состояния отсутствует.

В то же время известно, что  $s$ -волновое триплетное состояние может быть реализовано как наведённое (т.е. полученное из главного) в относительно простых гибридных системах, состоящих из  $s$ -волнового синглетного сверхпроводника (S) и ферромагнетика (F) [11; 39]. Ферромагнетизм в таких системах нарушает симметрию в спиновом пространстве и приводит к генерации триплетных сверхпроводящих корреляций из синглетных (т.е. происходит конвертация синглета в триплет) (см. обзор [11]). Альтернативная возможность имеется в случае, когда триплетные корреляции уже присутствуют в системе за счет главного  $\omega$ -чётного  $p$ -волнового триплетного состояния (будем обозначать такой триплетный сверхпроводник аббревиатурой TS) — тогда  $\omega$ -нечётное  $s$ -волновое триплетное состояние может быть получено в результате нарушения изотропии в реальном пространстве [18; 59; 84–86]. Этого можно добиться, например, сделав контакт между сверхпроводником и диффузным нормальным металлом (DN) [18; 59; 85; 86]. Нечётная по частоте сверхпроводимость в таких системах — это неоднородная фаза, наведённая за счет эффекта близости в окрестности границы [18; 84–86].

Неожиданной особенностью наведённого  $s$ -волнового триплетного состояния в диффузных гибридных системах является то, что получающаяся плотность состояний имеет максимум на нулевой энергии [59; 87–91]. В баллистических системах, в которых на границе сверхпроводник-ферромагнетик генерируются как  $\omega$ -чётные (например,  $p$ -волновые), так и

$\omega$ -нечётные (например,  $s$ -волновые) триплетные состояния, теоретически предсказана низкоэнергетическая зона андреевских связанных состояний [92; 93]. Знак локального отклика тока на внешний векторный потенциал оказывается противоположным обычному (другими словами, локальная сверхтекучая плотность формально отрицательна,  $n_S < 0$ ) [67; 94; 95]. Это привело бы к неустойчивости такого состояния как главного в объёмном сверхпроводнике [76–78; 96–99]. С другой стороны, наведённое  $\omega$ -нечётное состояние оказывается устойчивым в неоднородных гибридных системах из-за наличия главного сверхпроводника обычного типа (в то же время отметим, что при некоторых условиях возможна неустойчивость и в тонкоплёночных структурах с эффектом близости [100]). Поскольку обычный ( $n_S > 0$ ) сверхпроводящий отклик соответствует диамагнитному эффекту Мейснера, мы будем называть необычное ( $n_S < 0$ ) состояние (локально) парамагнитным ( $\omega$ -нечётное-пара состояние) [101; 102]. В то же время, во избежание путаницы, отметим, что при изучении эффекта Мейснера в гибридной системе с эффектом близости, где в поверхностной области доминирует  $\omega$ -нечётная-пара компонента [11; 39; 59], эта поверхностная область будет проявлять осциллирующий эффект Мейснера [67; 94] (т.к. знак  $n_S$  входит в длину экранирования под знаком квадратного корня), который сменится на обычный диамагнитный в объёме обычного сверхпроводника.

Недавно в работах [16; 17] было предложено расширение классификации сверхпроводящих фаз. Было предложено  $\omega$ -нечётное состояние, которое в то же время обладает диамагнитным мейснеровским откликом ( $\omega$ -нечётное-диа состояние с  $n_S > 0$ ), решающим проблему неустойчивости в объёме. При таких свойствах это состояние могло бы реализоваться в качестве однородной главной сверхпроводящей фазы. Будучи на первый взгляд менее экзотическим, это предположение опирается на важное предположение о том, что в реальном веществе может существовать подходящее запаздывающее взаимодействие, приводящее к образованию такого состояния.

В данном разделе мы рассмотрим физические следствия предположения о возможности реализации  $\omega$ -нечётного-диа состояния (предполагая, что оно действительно реализуемо). Оказывается, что хотя новое состояние непротиворечиво само по себе, одновременное существование двух различных  $\omega$ -нечётных состояний (пара- и диамагнитного) приводит к нефизичным результатам. Мы обсудим противоречия, возникающие из предположения об их сосуществовании и предложим разрешение указанных противоречий.

### 1.3.2 Расширенная классификация сверхпроводящих состояний

Обсудим сначала вопрос о том, как главное сверхпроводящее состояние, существующее в объёме сверхпроводника, может порождать другие сверхпроводящие компоненты за счет неоднородности. Рассмотрим  $2 \times 2$  уравнение Эйленбергера-Ларкина-Овчинникова (A.22) в мацубаровском представлении, парный потенциал выберем вещественным. В результате все компоненты матричной функции Грина вещественны. Матричное уравнение Узаделя

разбивается на три скалярных уравнения [86]

$$v_F \hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla g = 2\Delta f_S, \quad (1.102)$$

$$v_F \hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla f_B = -2\omega_n f_S, \quad (1.103)$$

$$v_F \hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla f_S = 2(\Delta g - \omega_n f_B), \quad (1.104)$$

$$f_B = (f + s_p \underline{f})/2, \quad f_S = (f - s_p \underline{f})/2, \quad (1.105)$$

с условием нормировки  $g^2 + f s_p \underline{f} = g^2 + f_B^2 - f_S^2 = 1$ . В этой записи опущены аргументы всех функций  $(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, i\omega_n)$ . Функции  $f_B$  и  $f_S$ , определённые в формуле (1.105), можно интерпретировать как объёмную (главную) и поверхностную (наведённую) компоненты сверхпроводящих корреляций.

В однородном сверхпроводнике получаем решение в виде

$$g = \omega_n / \Omega_n, \quad f = s_p \underline{f} = f_B = \Delta(\hat{\mathbf{k}}, i\omega_n) / \Omega_n \quad (1.106)$$

и  $f_S = 0$ . Пространственная чётность, спиновая конфигурация и частотная симметрия  $f_B$  такие же, как у парного потенциала, т.к. они связаны друг в другом уравнением самосогласования.

Применяя к уравнению (1.104) операцию  $v_F \hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla$ , получаем

$$v_F^2 (\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla)^2 f_S = 2g v_F (\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \Delta) + 4(\Delta^2 + \omega_n^2) f_S. \quad (1.107)$$

Производная парного потенциала приводит к возникновению компоненты  $f_S$  в неоднородном сверхпроводнике. Проанализируем симметрии  $f_S$ . Во-первых, спиновая структура  $f_B$  такая же, как у  $f_S$ , т.к. мы не рассматриваем никаких спин-зависящих потенциалов. Из уравнения Эйленберга-Ларкина-Овчинникова следует, что  $g$  нечётна по  $\omega_n$  и пространственно чётна. Левая часть уравнения (1.102) оказывается нечётной функцией  $\omega_n$  и имеет нечётную пространственную симметрию из-за нечётности  $\hat{\mathbf{k}}$ . Таким образом, частотная симметрия и пространственная чётность у  $f_S$  и  $\Delta$  противоположны. Анализируя уравнение (1.103) таким же образом, приходим к выводу, что частотная симметрия и пространственная чётность у  $f_S$  и  $f_B$  также противоположны. Поэтому  $\Delta$  и  $f_B$  принадлежат одному симметричному классу.

Теперь обсудим магнитный отклик  $f_B$  и  $f_S$ . Линейный отклик тока на векторный потенциал даётся формулой [102]

$$j_\mu(\mathbf{r}) = -\frac{e^2}{m} \mathcal{R}_{\mu\nu} A_\nu(\mathbf{r}), \quad (1.108)$$

$$\frac{\mathcal{R}_{\mu\nu}(\mathbf{r})}{n_e} = 3\pi T \sum_{\omega_n} \left\langle \hat{k}_\mu \hat{k}_\nu \partial_{\omega_n} g(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, i\omega_n) \right\rangle_{\hat{\mathbf{k}}} = 3\pi T \sum_{\omega_n > 0} \left\langle \hat{k}_\mu \hat{k}_\nu (f_B^2 - f_S^2) \partial_{\omega_n} \log \left( \frac{1+g}{1-g} \right) \right\rangle_{\hat{\mathbf{k}}}, \quad (1.109)$$

где  $\mathcal{R}(\mathbf{r})$  — тензор линейного отклика, а  $n_e$  — плотность электронов. Чтобы получить последнюю формулу, мы воспользовались условием нормировки в мацубаровском представлении [103]. В простых геометриях, когда  $\mathcal{R}$  становится диагональным, его элементы — это так называемые *плотности пар* (или сверхтекучие плотности электронов). Знак плотности пар

Таблица 1 — Классификация сверхпроводящих корреляций в неоднородных сверхпроводниках. В отсутствие спиновых потенциалов спиновое состояние в объёме и возле неоднородностей одно и то же. В то же время из-за нарушения трансляционной инвариантности может измениться пространственная чётность. Это приводит к изменению частотной симметрии, т.к. необходимо удовлетворить принципу Паули. (a) Состояния типа ESED, реализующиеся в металлических сверхпроводниках и высокотемпературных купратах, сопровождаются состояниями типа OSOP в качестве наведённой компоненты. (b) Состояния типа ETOD, реализующиеся в  $\text{Sr}_2\text{RuO}_4$  и  $\text{UPt}_3$ , в качестве наведённых состояний имеют OTEP. Состояния OSOD в (c) и OTED в (d) в реальных веществах не наблюдались. Наведённой компонентой для OSOD является ESEP, а для OTED — ETOP. Нарушение спиновой симметрии перемешивает между собой состояния (a) и (b), а также — отдельно состояния (c) и (d).

Частотная симметрия	Спиновая симметрия	Простр. чётность	Магнитный отклик	
(a) Чёт.	Синглет	Чёт.	Диа	Объёмное состояние
Нечёт.	Синглет	Нечёт.	Пара	Наведённое состояние
(b) Чёт.	Триплет	Нечёт.	Диа	Объёмное состояние
Нечёт.	Триплет	Чёт.	Пара	Наведённое состояние
(c) Нечёт.	Синглет	Нечёт.	Диа	Объёмное состояние
Чёт.	Синглет	Чёт.	Пара	Наведённое состояние
(d) Нечёт.	Триплет	Чёт.	Диа	Объёмное состояние
Чёт.	Триплет	Нечёт.	Пара	Наведённое состояние

определяет тип магнитного отклика. В однородном диамагнитном сверхпроводнике (когда  $f_S = 0$ ), плотность пар должны быть положительна. Тогда вклад от  $f_V$  в формулу (1.109) для плотности пар положителен. В неоднородных сверхпроводниках наведённая поверхностная компонента  $f_S$  даёт отрицательный вклад в плотность пар — это видно из формулы (1.109). В результате наведённая компонента оказывается парамагнитной (вклад от неё в сверхток противоположен обычному диамагнитному).

Результаты симметричной классификации представлены в таблице 1. Мы приходим к выводу, что возможность реализации  $\omega$ -нечётного сверхпроводящего состояния в объёме приводит к обобщённой классификации куперовских пар. В целом они делятся на 8 классов в зависимости от симметрий спаривания и типа магнитного отклика. Эти 8 классов за счёт нарушения трансляционной инвариантности и спиновой симметрии делятся на две группы [группа (a)+(b) и группа (c)+(d)], которые между собой не перемешиваются.

Аномальные магнитные свойства наведённых вблизи поверхности компонент могут быть обнаружены с помощью измерений эффекта Мейснера или поверхностного импеданса.

### 1.3.3 Объёмное состояние сверхпроводника: описание с помощью функциональных интегралов

Ниже мы начнём с того, что проследим вычисление, представленное в работах [16; 17] для описания главного  $\omega$ -нечётного-диа состояния. Мы кратко отметим основные моменты этого вывода, следуя работе [17] — это будет служить заделом для последующего обсуждения сосуществования  $\omega$ -нечётного-диа и  $\omega$ -нечётного-пара состояний. Особое внимание мы уделим тем моментам рассмотрения, в которых проявляется различие между двумя  $\omega$ -нечётными состояниями.

#### Действие и функции Грина

Предполагаем, что взаимодействие однородно по отношению к пространственным координатам и времени. Координаты и мнимое время объединяем в 4-векторы, которые обозначаем  $1 \equiv x_1 = (\mathbf{r}_1, \tau_1)$  и  $2 \equiv x_2 = (\mathbf{r}_2, \tau_2)$ . Взаимодействие имеет вид  $V_{\alpha\beta;\gamma\delta}(1-2)\delta(1-3)\delta(2-4)$ , где мы обозначили  $\delta(1-3) \equiv \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)\delta(\tau_1 - \tau_3)$  и т.д.

В то же время в отношении взаимодействия как в синглетном, так и в триплетном каналах мы сохраняем самый общий вид. Поэтому записываем взаимодействие в виде

$$V_{\alpha\beta;\gamma\delta}(1-2) = V_s(1-2) \frac{(i\sigma_2)_{\alpha\beta}(i\sigma_2)_{\gamma\delta}^*}{2} + \sum_{j=1}^3 V_t^{(j)}(1-2) \frac{(i\sigma_j\sigma_2)_{\alpha\beta}(i\sigma_j\sigma_2)_{\gamma\delta}^*}{2}. \quad (1.110)$$

Синглетное взаимодействие  $V_s(1-2)$  и три компоненты триплетного взаимодействия  $V_t^{(j)}(1-2)$  предполагаем либо отрицательно определёнными, либо нулевыми.<sup>2</sup>

Стат.сумма  $\mathcal{Z}$  может быть записаны в виде функционального интеграла с помощью грасмановых полей  $\psi_\alpha(1)$  и  $\psi_\alpha^*(1)$ :

$$\mathcal{Z} = \int D\psi_\uparrow^* D\psi_\downarrow^* D\psi_\uparrow D\psi_\downarrow \exp(-\mathcal{S}_0 - \mathcal{S}_{\text{int}}), \quad (1.111)$$

$$\mathcal{S}_0 = \int_1 \psi_\alpha^*(1) (\partial_{\tau_1} + \xi) \psi_\alpha(1), \quad (1.112)$$

$$\mathcal{S}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int_{12} V_{\alpha\beta;\gamma\delta}(1-2) \rho_{\alpha\beta}^*(1,2) \rho_{\gamma\delta}(1,2), \quad (1.113)$$

где  $\xi = -\partial_{\mathbf{r}_1}^2/2m - \mu$  — кинетическая энергия, отсчитанная от хим.потенциала. Здесь подразумевается суммирование по повторяющимся индексам, и для краткости введены обозначения

$$\rho_{\alpha\beta}(1,2) = \psi_\alpha(1)\psi_\beta(2), \quad \rho_{\alpha\beta}^*(1,2) = \psi_\beta^*(2)\psi_\alpha^*(1), \quad (1.114)$$

$$\int_1 \equiv \int_0^{1/T} d\tau_1 \int d\mathbf{r}_1, \quad \int_{12} \equiv \int_1 \int_2, \quad \text{и т.д.} \quad (1.115)$$

<sup>2</sup>Обычный случай БКШ [104] соответствует синглетному взаимодействию с  $V_s(1-2) = \lambda\delta(1-2)$ , которое, в свою очередь, соответствует вторично-квантованному гамильтониану  $\hat{H}_{\text{int}} = (\lambda/2) \int d\mathbf{r} \hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{r})\hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{r})\hat{\psi}_\beta(\mathbf{r})\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r})$ .

Требуя  $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}^*$ , получаем условие  $V_{\alpha\beta;\gamma\delta}(1-2) = V_{\gamma\delta;\alpha\beta}^*(2-1)$ . В то же время  $V$  удовлетворяем условию

$$V_{\alpha\beta;\gamma\delta}(1-2) = V_{\beta\alpha;\delta\gamma}(2-1), \quad (1.116)$$

которое напрямую следует из замены переменных интегрирования в  $\mathcal{S}_{\text{int}}$ . Эти две симметрии приводят к требованиям, что синглетное и триплетное взаимодействия,  $V_s(1-2)$  и  $V_t^{(j)}(1-2)$ , должны быть вещественными и чётными:  $V_s(1-2) = V_s(2-1)$ ,  $V_t^{(j)}(1-2) = V_t^{(j)}(2-1)$ .

Четырёхфермионное слагаемое  $\mathcal{S}_{\text{int}}$  расщепляем с помощью преобразования Хаббарда-Стратоновича:

$$\exp(-\mathcal{S}_{\text{int}}) \mapsto \int D\Delta^* D\Delta \exp(-\mathcal{S}_{\text{aux}} - \mathcal{S}_{\Delta}), \quad (1.117)$$

$$\mathcal{S}_{\text{aux}} = -\frac{1}{2} \int_{12} [\Delta_{\alpha\beta}(1,2)\rho_{\alpha\beta}^*(1,2) + \Delta_{\alpha\beta}^*(1,2)\rho_{\alpha\beta}(1,2)], \quad (1.118)$$

$$\mathcal{S}_{\Delta} = -\frac{1}{2} \int_{12} [V^{-1}(1-2)]_{\alpha\beta;\gamma\delta} \Delta_{\alpha\beta}^*(1,2)\Delta_{\gamma\delta}(1,2). \quad (1.119)$$

Теперь обсудим нахождение седлового решения. Вместо интегрирования по  $\Delta^*$  и  $\Delta$  берется пробная траектория, по отношению к которой варьируется действие. Таким образом определяется среднеполевой функционал свободной энергии:

$$\mathcal{F}_{\text{MF}}[\Delta^*, \Delta] = -T \ln \mathcal{Z}_{\text{MF}} = -T \ln \int D\psi^* D\psi \exp(-\mathcal{S}_{\text{MF}}[\psi^*, \psi, \Delta^*, \Delta]), \quad (1.120)$$

где  $\mathcal{S}_{\text{MF}} = \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_{\text{aux}} + \mathcal{S}_{\Delta}$  — среднеполевое действие, в котором  $\Delta^*(1,2)$  и  $\Delta(1,2)$  заменены на пробные траектории. Ниже мы будем рассматривать однородный случай, для которого седловое решение не зависит от координаты центра масс  $(x_1 + x_2)/2$ ; в этом случае берем пробные траектории  $\Delta^*(x)$ ,  $\Delta(x)$ , зависящие только от относительной координаты  $x = x_1 - x_2$ .

Чтобы найти седловое решение, нужно минимизировать  $\mathcal{F}_{\text{MF}}$  по пробной траектории. В результате получаем самосогласованные уравнения на среднеполевой парный потенциал  $\Delta$ :

$$\Delta_{\alpha\beta}(1,2) = -V_{\alpha\beta;\gamma\delta}(1-2)F_{\gamma\delta}(1,2), \quad (1.121a)$$

$$\Delta_{\alpha\beta}^*(1,2) = -V_{\beta\alpha;\delta\gamma}^*(2-1)F_{\delta\gamma}^+(2,1), \quad (1.121b)$$

где мы ввели аномальные функции Грина

$$F_{\alpha\beta}(1,2) = \langle \psi_{\alpha}(1)\psi_{\beta}(2) \rangle_{\text{MF}}, \quad F_{\alpha\beta}^+(1,2) = \langle \psi_{\alpha}^*(1)\psi_{\beta}^*(2) \rangle_{\text{MF}}, \quad (1.122)$$

с помощью определения среднеполевого усреднения:

$$\langle \dots \rangle_{\text{MF}} = \frac{\int D\psi^* D\psi (\dots) e^{-\mathcal{S}_{\text{MF}}[\psi^*, \psi, \Delta^*, \Delta]}}{\int D\psi^* D\psi e^{-\mathcal{S}_{\text{MF}}[\psi^*, \psi, \Delta^*, \Delta]}}. \quad (1.123)$$

Обозначения  $F$  и  $F^+$  для двух аномальных средних являются стандартными в теории сверхпроводимости, и знак  $+$  не следует путать с эрмитовым сопряжением  $\dagger$ . Грассмановы переменные обеспечивают фермионную антисимметрию аномальных средних:

$$F_{\alpha\beta}(1,2) = -F_{\beta\alpha}(2,1), \quad F_{\alpha\beta}^+(1,2) = -F_{\beta\alpha}^+(2,1). \quad (1.124)$$

Вместе с симметрией взаимодействия (1.116) это свойство приводит к фермионной антисимметрии парного потенциала:

$$\Delta_{\alpha\beta}(1,2) = -\Delta_{\beta\alpha}(2,1). \quad (1.125)$$

Вводя для удобства обозначения

$$\Delta_{\alpha\beta}^+(1,2) \equiv \Delta_{\beta\alpha}^*(2,1), \quad (1.126)$$

можем записать фермионную часть действия в виде

$$\mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_{\text{aux}} = \frac{1}{2} \int_{12} (\psi_\alpha^*(1), \psi_\alpha(1)) \hat{M}_{\alpha\beta}(1,2) \begin{pmatrix} \psi_\beta(2) \\ \psi_\beta^*(2) \end{pmatrix}, \quad (1.127)$$

$$\hat{M}_{\alpha\beta}(1,2) = \begin{pmatrix} \delta(1-2)\delta_{\alpha\beta}(\partial_\tau + \xi) & \Delta_{\alpha\beta}(1,2) \\ \Delta_{\alpha\beta}^+(1,2) & \delta(1-2)\delta_{\alpha\beta}(\partial_\tau - \xi) \end{pmatrix}. \quad (1.128)$$

Матрица  $\hat{M}$  написана явно в пространстве частица-дырка, а каждый её элемент является матрицей в спиновом пространстве.

Кроме аномальных (горьковских) функций Грина (1.122) вводим также обычные:

$$G_{\alpha\beta}(1,2) = -\langle \psi_\alpha(1)\psi_\beta^*(2) \rangle_{\text{MF}}, \quad (1.129)$$

$$G'_{\alpha\beta}(1,2) = -\langle \psi_\alpha^*(1)\psi_\beta(2) \rangle_{\text{MF}} = -G_{\beta\alpha}(2,1). \quad (1.130)$$

Квадратичность действия (1.127) означает, что функции Грина выражаются через матрицу  $M$  [17]:

$$\hat{M}_{\alpha\beta}(1,2) = \begin{pmatrix} -G_{\alpha\beta}(1,2) & F_{\alpha\beta}(1,2) \\ F_{\alpha\beta}^+(1,2) & -G'_{\alpha\beta}(1,2) \end{pmatrix}^{-1}. \quad (1.131)$$

## Симметричные соотношения

Обсудим соотношение между двумя типами аномальных средних (1.122), предполагая для простоты однородный случай, когда функции Грина зависят только от разности координат  $(1-2)$ . В однородном случае фурье-образ функции  $A(1,2)$  имеет вид  $A(k,k') = A(k)\delta([k-k']/2\pi)$ .

Аналогично процедуре, описанной в работе [16], мы можем получить соотношение между  $F$  и  $F^+$  напрямую из определений (1.122), применив комплексное сопряжение к одному из аномальных средних. Нетривиальность этой процедуры в том, что в методе функционального интеграла со средними, определёнными согласно формуле (1.123), мы получаем  $\mathcal{S}_{\text{MF}} \neq \mathcal{S}_{\text{MF}}^*$  из-за члена  $\partial_\tau$  в действии  $\mathcal{S}_{\text{MF}}$ . Поэтому  $\langle A \rangle_{\text{MF}}^*$  вообще говоря не равно  $\langle A^* \rangle_{\text{MF}}$ . Чтобы связать  $F^*$  с  $F^+$ , необходимо учесть фермионную антипериодичность,  $\psi_\alpha(\tau + \beta) = -\psi_\alpha(\tau)$ , сделать замену  $\tau \mapsto -\tau$  и определить новую переменную интегрирования  $\eta$  в зависимости от симметрии  $\Delta$ : для случая  $\Delta(\tau) = \Delta(-\tau)$  определяем  $\eta_\alpha(\mathbf{r}, \tau) = \psi_\alpha(\mathbf{r}, -\tau)$ ,  $\eta_\alpha^*(\mathbf{r}, \tau) = \psi_\alpha^*(\mathbf{r}, -\tau)$ , тогда

как для случая  $\Delta(\tau) = -\Delta(-\tau)$  определяем  $\eta_\alpha(\mathbf{r}, \tau) = i\psi_\alpha(\mathbf{r}, -\tau)$ ,  $\eta_\alpha^*(\mathbf{r}, \tau) = -i\psi_\alpha^*(\mathbf{r}, -\tau)$  [16]. Искомое соотношение в результате зависит от симметрии  $\Delta(\tau)$  или  $\Delta(\omega)$ . Находим

$$F_{\alpha\beta}^+(\mathbf{k}, \omega) = s_\Delta F_{\beta\alpha}^*(\mathbf{k}, -\omega), \quad (1.132)$$

где  $s_\Delta = \pm 1$  для  $\omega$ -чётной/нечётной зависимости  $\Delta$ . Тип мейснеровского отклика в конце концов будет определяться относительным знаком между  $F_{\alpha\beta}^+(k)$  и  $F_{\beta\alpha}^*(k)$ , поэтому он зависит от  $s_\Delta$  и симметрии аномальных средних.

В работах [16; 17] неявно подразумевалось, что частотная симметрия  $\Delta$  напрямую определяет частотную симметрию  $F$  и  $F^+$  (совпадает с ней). В этом случае  $F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, -\omega) = s_\Delta F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ , тогда формула (1.132) даёт  $F_{\alpha\beta}^+(k) = F_{\beta\alpha}^*(k)$  (как в  $\omega$ -чётном, так и в  $\omega$ -нечётном случае). Это соотношение соответствует обычному диамагнитному мейснеровскому отклику.

С другой стороны, соотношение (1.132) в действительности является более общим и справедливо, например, в случае, когда к действию, определяемому формулами (1.112) и (1.113), добавляется зеемановское слагаемое (обменная энергия). Этот вклад нарушает симметрию в спиновом пространстве и приводит к появлению сверхпроводящих компонент (аномальных средних) с симметрией, отличающейся от симметрии взаимодействия  $V$  и парного потенциала  $\Delta$ .

Похожая ситуация возникает в S/F (см. обзор [11]) и TS/DN [18; 59; 84–86; 105] гибридных системах с эффектом близости. Вообще говоря, этот тип  $\omega$ -нечётных состояний не соответствует симметрии исходного эффективного электрон-электронного притяжения и наводится в результате нарушения симметрии в спиновом или координатном пространстве. В то же время  $\Delta$  относится к  $\omega$ -чётному классу, поэтому реализуется соотношение (1.132) с  $s_\Delta = 1$ . Это соотношение справедливо для всех компонент аномальных средних. Для  $\omega$ -нечётных компонент оно даёт  $F_{\alpha\beta}^+(k) = -F_{\beta\alpha}^*(k)$ , что соответствует парамагнитному мейснеровскому отклику.

Мы называем сверхпроводящие корреляции той же симметрии, что и у парного потенциала, *главными* компонентами, а остальные компоненты — *наведёнными* (например, за счет дополнительных взаимодействий, границ, других неоднородностей или внешних полей). Другими словами, главные компоненты  $F$  и  $F^+$  соответствуют симметричным компонентам  $\Delta$ , в то время как наведённые компоненты  $F$  и  $F^+$  не дают вклада в правую часть формул (1.121) из-за структуры  $V$ . В работах [16; 17] рассматривалось  $\omega$ -нечётное-диа состояние, которое (хотя это и не было сформулировано явно) является главной компонентой.

## Однородный случай

В однородном случае уравнение самосогласования (1.121a) принимает вид

$$\Delta_{\alpha\beta}(k) = - \int (dk') V_{\alpha\beta;\gamma\delta}(k - k') F_{\gamma\delta}(k'). \quad (1.133)$$

Соотношение (1.126) упрощается:

$$\Delta_{\alpha\beta}^+(k) = \Delta_{\beta\alpha}^*(k). \quad (1.134)$$

В общем случае парный потенциал можно разложить на синглетную компоненту  $d_0(k)$  и триплетную компоненту  $\mathbf{d}(k)$ :

$$\Delta_{\alpha\beta}(k) = d_0(k)(i\sigma_2)_{\alpha\beta} + \mathbf{d}(k)(i\boldsymbol{\sigma}\sigma_2)_{\alpha\beta}, \quad (1.135)$$

Фермионная антисимметрия  $\Delta$ , см. формулу (1.125), означает, что

$$d_0(k) = d_0(-k) = s_\Delta d_0(-\mathbf{k}, \omega), \quad (1.136)$$

$$\mathbf{d}(k) = -\mathbf{d}(-k) = -s_\Delta \mathbf{d}(-\mathbf{k}, \omega). \quad (1.137)$$

При обсуждении главного  $\omega$ -нечётного состояния с  $s_\Delta = -1$  (напомним, что сверхпроводящие компоненты, входящие в  $\Delta$  являются главными по определению) мы *предполагаем*, что оно действительно может быть реализовано при некотором подходящем взаимодействии. В то же время отметим, что существование такого взаимодействия не доказано.

Из формулы (1.131) находим функции Грина [17]:

$$G_{\alpha\beta}(k) = -G'_{\beta\alpha}(-k) = G_0(k)\delta_{\alpha\beta} + \mathbf{G}(k)\boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta}, \quad (1.138)$$

$$F_{\alpha\beta}(k) = F_{\beta\alpha}^+(k)^* = F_0(k)(i\sigma_2)_{\alpha\beta} + \mathbf{F}(k)(i\boldsymbol{\sigma}\sigma_2)_{\alpha\beta}, \quad (1.139)$$

где скалярные и векторные компоненты даются выражениями

$$G_0(k) = -\frac{(i\omega + \xi_{\mathbf{k}})[\omega^2 + \xi_{\mathbf{k}}^2 + D_0(k)]}{[\omega^2 + E_+^2(k)][\omega^2 + E_-^2(k)]}, \quad (1.140)$$

$$\mathbf{G}(k) = \frac{(i\omega + \xi_{\mathbf{k}})\mathbf{D}(k)}{[\omega^2 + E_+^2(k)][\omega^2 + E_-^2(k)]}, \quad (1.141)$$

$$F_0(k) = \frac{(\omega^2 + \xi_{\mathbf{k}}^2)d_0(k) + [d_0^2(k) - \mathbf{d}^2(k)]d_0^*(k)}{[\omega^2 + E_+^2(k)][\omega^2 + E_-^2(k)]}, \quad (1.142)$$

$$\mathbf{F}(k) = \frac{(\omega^2 + \xi_{\mathbf{k}}^2)\mathbf{d}(k) - [d_0^2(k) - \mathbf{d}^2(k)]\mathbf{d}^*(k)}{[\omega^2 + E_+^2(k)][\omega^2 + E_-^2(k)]}, \quad (1.143)$$

где

$$E_\pm(k) = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + D_0(k) \pm D(k)}. \quad (1.144)$$

Вещественные функции  $D_0$ ,  $\mathbf{D}$  и  $D$  возникают из выражения

$$\Delta(k)\Delta^+(k) = D_0(k)\hat{1} + \mathbf{D}(k)\boldsymbol{\sigma} \quad (1.145)$$

и имеют следующий явный вид:

$$D_0(k) = d_0^*(k)d_0(k) + \mathbf{d}^*(k)\mathbf{d}(k), \quad (1.146)$$

$$\mathbf{D}(k) = d_0(k)\mathbf{d}^*(k) + d_0^*(k)\mathbf{d}(k) + i[\mathbf{d}(k) \times \mathbf{d}^*(k)], \quad D(k) = \sqrt{\mathbf{D}^2(k)}.$$

## Мейснеровское ядро и сверхтекучая плотность

Работая в лондоновской калибровке,  $\mathbf{q}\mathbf{A}(q) = 0$ , находим линейный отклик тока на внешний векторный потенциал:

$$j_i(q) = -\mathcal{K}_{ij}(q)A_j(q)/c, \quad (1.147)$$

где мейснеровское ядро имеет вид [16; 17]

$$\mathcal{K}_{ij}(q) = \frac{e^2}{m} \int (dk) \frac{k_i k_j}{m} \left[ G_{\alpha\beta}(k)G_{\beta\alpha}(k-q) + F_{\alpha\beta}(k)F_{\beta\alpha}^+(k-q) \right] + \frac{ne^2}{m} \delta_{ij}. \quad (1.148)$$

Здесь  $q = (\mathbf{q}, \epsilon_l)$ ,  $\epsilon_l = 2l\pi T$  — бозонная мацубаровская частота,  $n$  — плотность электронов.

Тензорная структура ядра отклика зависит от орбитальной симметрии сверхпроводящего состояния. Мы будем обсуждать изотропное ( $s$ -волновое) сверхпроводящее состояние, для которого функции Грина не зависят от направления волнового вектора. Интегрируя по  $d^3\mathbf{k}$  в формуле (1.148), выбираем  $\mathbf{q}$  в качестве полярной оси  $z$  сферической системы координат. Тогда из-за интегрирования в азимутальной плоскости все недиагональные компоненты тензора  $\mathcal{K}_{ij}(q)$  зануляются. Тензор оказывается диагональным, причём  $\mathcal{K}_{xx} = \mathcal{K}_{yy}$  по симметрии, в то время как  $\mathcal{K}_{zz}$  вообще говоря может отличаться. В лондоновской калибровке  $\mathbf{A}(q)$  не имеет компоненты вдоль  $\mathbf{q}$ , поэтому ток (1.147) нечувствителен к компоненте  $\mathcal{K}_{zz}$ , что позволяет выбрать её произвольным образом. Для простоты выберем её так, что

$$\mathcal{K}_{ij}(q) = \mathcal{K}(q)\delta_{ij}. \quad (1.149)$$

Интеграл в формуле (1.148) расходится, поэтому мы используем обычный прием, регуляризуя расходимость с помощью вычитания аналогичного выражения для нормального металла [т.к.  $\mathcal{K}(q) = 0$  в нормальном состоянии]:

$$\mathcal{K}(q) = \frac{\mathcal{K}_{ii}(q)}{3} = \frac{e^2}{3m} \int (dk) \frac{\mathbf{k}^2}{m} \left[ G_{\alpha\beta}(k)G_{\beta\alpha}(k-q) + F_{\alpha\beta}(k)F_{\beta\alpha}^+(k-q) - G_{\alpha\beta}^{(0)}(k)G_{\beta\alpha}^{(0)}(k-q) \right], \quad (1.150)$$

здесь верхний индекс (0) обозначает функции, взятые в нормальном металле.

При  $q = 0$  ядро отклика даёт сверхтекучую плотность  $n_S$ :

$$\mathcal{K}(0) = e^2 n_S / m. \quad (1.151)$$

Учитывая явную спиновую структуру функций Грина, формулы (1.138) и (1.139), находим

$$\frac{n_S}{n} = T \sum_{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left[ G_0^2(\xi, \omega) + \mathbf{G}^2(\xi, \omega) + F_0^*(\xi, \omega)F_0(\xi, \omega) + \mathbf{F}^*(\xi, \omega)\mathbf{F}(\xi, \omega) \right]. \quad (1.152)$$

## Главное $s$ -волновое синглетное $\omega$ -чётное состояние

В  $s$ -волновом синглетном (следовательно,  $\omega$ -чётном) случае триплетная компонента  $\mathbf{d}(\mathbf{k})$  зануляется, и мы получаем

$$G_0 = -\frac{i\omega + \xi}{\omega^2 + \xi^2 + |d_0|^2}, \quad F_0 = \frac{d_0}{\omega^2 + \xi^2 + |d_0|^2}, \quad (1.153)$$

где  $d_0 = d_0(|\mathbf{k}|, \omega)$  — чётная функция  $\omega$ . Хотя  $d_0$  в общем случае может зависеть от  $|\mathbf{k}|$ , мы делаем обычное предположение о слабой зависимости вблизи ферми-поверхности, поэтому при интегрировании по  $\xi$  в формуле (1.152) можем положить  $|\mathbf{k}| = k_F$ . Тогда мы воспроизводим обычный результат

$$\frac{n_S}{n} = \pi T \sum_{\omega} \frac{|d_0|^2}{(\omega^2 + |d_0|^2)^{3/2}}, \quad (1.154)$$

и сверхтекучая плотность положительна.

## Главное $s$ -волновое триплетное $\omega$ -нечётное-диа состояние

В  $s$ -волновом триплетном (следовательно,  $\omega$ -нечётном) случае,  $d_0 = 0$ , а  $\mathbf{d} = \mathbf{d}(|\mathbf{k}|, \omega)$  — нечётная функция  $\omega$ , и мы получаем

$$G_0 = -\frac{(i\omega + \xi)(\omega^2 + \xi^2 + D_0)}{(\omega^2 + \xi^2 + D_0 + D)(\omega^2 + \xi^2 + D_0 - D)}, \quad (1.155)$$

$$\mathbf{G} = \frac{(i\omega + \xi)\mathbf{D}}{(\omega^2 + \xi^2 + D_0 + D)(\omega^2 + \xi^2 + D_0 - D)}, \quad (1.156)$$

$$F_0 = 0, \quad (1.157)$$

$$\mathbf{F} = \frac{\omega^2 + \xi^2 + D_0}{(\omega^2 + \xi^2 + D_0 + D)(\omega^2 + \xi^2 + D_0 - D)} \mathbf{d}, \quad (1.158)$$

где

$$D_0 = \mathbf{d}^* \mathbf{d}, \quad \mathbf{D} = i[\mathbf{d} \times \mathbf{d}^*], \quad D = \sqrt{D_0^2 - (\mathbf{d}\mathbf{d})^*(\mathbf{d}\mathbf{d})}. \quad (1.159)$$

Мы снова приближаем  $\mathbf{d}(\mathbf{k})$  значением на ферми-поверхности. Тогда формула (1.152) даёт

$$\frac{n_S}{n} = \pi T \sum_{\omega} \frac{1}{8D} \left[ \frac{2D_0\omega^2 + 2D_0^2 - 2D^2 + D_0D}{(\omega^2 + D_0 - D)^{3/2}} - \frac{2D_0\omega^2 + 2D_0^2 - 2D^2 - D_0D}{(\omega^2 + D_0 + D)^{3/2}} \right]. \quad (1.160)$$

Учитывая, что  $D \leq D_0$  [см. формулу (1.159)], можно показать, что выражение в квадратных скобках всегда неотрицательно, поэтому  $n_S > 0$ . В случае унитарного спаривания, т.е. при  $\mathbf{D} = 0$ , результат имеет вид, аналогичный синглетному случаю (1.154):

$$\frac{n_S}{n} = \pi T \sum_{\omega} \frac{\mathbf{d}^* \mathbf{d}}{(\omega^2 + \mathbf{d}^* \mathbf{d})^{3/2}}. \quad (1.161)$$

Таким образом, сверхтекучая плотность положительна также и в  $s$ -волновом триплетном  $\omega$ -нечётном случае.

## Наведённое $s$ -волновое триплетное $\omega$ -нечётное-пара состояние

$\omega$ -нечётное состояние, которое мы обсудили выше [формулы (1.155)-(1.161)] обладает диамагнитным откликом на внешнее магнитное поле ( $n_S > 0$ ), и, согласно работам Refs. [16; 17], является непротиворечивым в качестве главного сверхпроводящего состояния (хотя вопрос о нахождении соответствующего взаимодействия не решен). Ниже мы обсудим наведённое  $s$ -волновое триплетное  $\omega$ -нечётное-пара состояние (которое без сомнения реализуется, например, в S/F [11; 39; 106–109] или TS/DN [19; 59; 87; 105] гибридных структурах), используя тот же самый язык.

Поскольку  $\omega$ -нечётное-пара состояние является наведённым, оно не имеет парного потенциала в соответствующем симметричном канале; при этом соответствующие сверхпроводящие корреляции описываются аномальными средними. Чтобы использовать тот же язык, что и выше, мы можем по-прежнему использовать обозначения  $\Delta$  и  $\Delta^+$ , но рассматривать их теперь просто как вспомогательные величины, параметризующие функции Грина. Функции Грина в микроскопических моделях будут, конечно, модельно-зависимыми, но нас сейчас интересуют фундаментальные свойства, которые определяются только симметриями.

$\omega$ -нечётное-диа и -пара состояния соответствуют разным знакам в соотношении между  $F$  и  $F^+$ . Вместо формулы (1.132) с  $s_\Delta = -1$  ( $\omega$ -нечётное-диа состояние), для  $\omega$ -нечётного-пара состояния в этом соотношении будет  $s_\Delta = 1$  (такое состояние реализуется в микроскопических моделях с  $\omega$ -чётными парными потенциалами). Чтобы отразить эту особенность, мы параметризуем функции Грина, предполагая ту же самую форму (1.135) для  $\Delta_{\alpha\beta}(k)$  и определяя  $\Delta^+$  как

$$\Delta_{\alpha\beta}^+(1,2) \equiv -\Delta_{\beta\alpha}^*(1,2), \quad \Delta_{\alpha\beta}^+(k) = -\Delta_{\beta\alpha}^*(k) \quad (1.162)$$

— знаки здесь отличаются от формул (1.126) и (1.134) (которые были применимы, в частности, для главного  $\omega$ -нечётного-диа состояния). Функции Грина находятся из формул (1.128) и (1.131). Результат выглядит так же, как формулы (1.155)-(1.158), если в них поменять все знаки перед  $D_0$  и  $\mathbf{D}$  во всех выражениях.

Вместо формулы (1.160) теперь получаем

$$\frac{n_S}{n} = \pi T \sum_{\omega} \frac{1}{8D} \left[ \frac{-2D_0\omega^2 + 2D_0^2 - 2D^2 - D_0D}{(\omega^2 - D_0 - D)^{3/2}} - \frac{-2D_0\omega^2 + 2D_0^2 - 2D^2 + D_0D}{(\omega^2 - D_0 + D)^{3/2}} \right]. \quad (1.163)$$

Мы предполагаем, что  $\omega$ -зависимость  $D_0$  и  $D$  такова, что  $\omega > \sqrt{D_0 - D}$ , так что выражения в знаменателях формулы (1.163) положительны (можно проверить, что это феноменологическое предположение выполняется в известных микроскопических моделях  $\omega$ -нечётного-пара состояния).

Учитывая, что  $D \leq D_0$  [см. формулу (1.159)], находим, что выражение в квадратных скобках в формуле (1.163) всегда неположительно, поэтому  $n_S < 0$  (парамагнитный отклик). В случае унитарного спаривания, т.е. при  $\mathbf{D} = 0$ , получаем

$$\frac{n_S}{n} = -\pi T \sum_{\omega} \frac{\mathbf{d}^* \mathbf{d}}{(\omega^2 - \mathbf{d}^* \mathbf{d})^{3/2}}. \quad (1.164)$$

### 1.3.4 Сосуществование $\omega$ -нечётного-диа и $\omega$ -нечётного-пара состояний

#### Сверхтекучая плотность

Теперь рассмотрим возможность сосуществования  $\omega$ -нечётного-диа и -пара состояний в некоторой области пространства. Предполагаем, что функции Грина — линейные комбинации двух вкладов:

$$G_{\alpha\beta} = (G_d)_{\alpha\beta} + (G_p)_{\alpha\beta}, \quad F_{\alpha\beta} = (F_d)_{\alpha\beta} + (F_p)_{\alpha\beta}, \quad F_{\alpha\beta}^+ = (F_d^+)_{\alpha\beta} + (F_p^+)_{\alpha\beta}, \quad (1.165)$$

где диа и пара вклады, в соответствии с нашим предыдущим рассмотрением, имеют следующие свойства:

$$(F_d^+)_{\alpha\beta}(k) = (F_d)_{\beta\alpha}^*(k), \quad (F_p^+)_{\alpha\beta}(k) = -(F_p)_{\beta\alpha}^*(k). \quad (1.166)$$

Вместо формулы (1.152) теперь получаем

$$\begin{aligned} \frac{n_S}{n} = T \sum_{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left[ (G_{0d} + G_{0p})^2 + (\mathbf{G}_d + \mathbf{G}_p)^2 \right. \\ \left. + (F_{0d} + F_{0p})(F_{0d}^* - F_{0p}^*) + (\mathbf{F}_d + \mathbf{F}_p)(\mathbf{F}_d^* - \mathbf{F}_p^*) \right]. \quad (1.167) \end{aligned}$$

Этот результат содержит отдельные вклады от диа и пара состояний, а также перекрестный член

$$\frac{\delta n_S}{n} = T \sum_{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left[ 2G_{0d}G_{0p} + 2\mathbf{G}_d\mathbf{G}_p + (F_{0d}^*F_{0p} - F_{0d}F_{0p}^*) + (\mathbf{F}_d^*\mathbf{F}_p - \mathbf{F}_d\mathbf{F}_p^*) \right]. \quad (1.168)$$

Видим, что вклад от аномальных функций чисто мнимый, поэтому перекрестный член оказывается комплексным.

Рассматривая для простоты унитарное спаривание, имеем

$$G_{0d} = -\frac{i\omega + \xi}{\omega^2 + \xi^2 + D_{0d}}, \quad G_{0p} = -\frac{i\omega + \xi}{\omega^2 + \xi^2 - D_{0p}}, \quad \mathbf{G}_d = \mathbf{G}_p = 0, \quad (1.169)$$

$$\mathbf{F}_d = \frac{\mathbf{d}_d}{\omega^2 + \xi^2 + D_{0d}}, \quad \mathbf{F}_p = \frac{\mathbf{d}_p}{\omega^2 + \xi^2 - D_{0p}}, \quad F_{0d} = F_{0p} = 0, \quad (1.170)$$

откуда

$$\frac{\delta n_S}{n} = \pi T \sum_{\omega} \frac{1}{D_{0d} + D_{0p}} \left[ \frac{4\omega^2 + 2D_{0d} + \mathbf{d}_d\mathbf{d}_p^* - \mathbf{d}_d^*\mathbf{d}_p}{\sqrt{\omega^2 + D_{0d}}} - \frac{4\omega^2 - 2D_{0p} + \mathbf{d}_d\mathbf{d}_p^* - \mathbf{d}_d^*\mathbf{d}_p}{\sqrt{\omega^2 - D_{0p}}} \right]. \quad (1.171)$$

Это выражение комплексно из-за чисто мнимой комбинации  $(\mathbf{d}_d\mathbf{d}_p^* - \mathbf{d}_d^*\mathbf{d}_p)$ .

Комплексный перекрестный член означает *комплексный ток*, поэтому является нефизическим. Мы приходим к выводу, что предположив возможность одновременного существования  $\omega$ -нечётного-диа и  $\omega$ -нечётного-пара состояний, мы приходим к нефизическому результату.

## Джозефсоновский контакт

Теперь рассмотрим в туннельном пределе джозефсоновский контакт между  $\omega$ -нечётными сверхпроводниками. Наибольший интерес для нас представляет комбинация диа и пара состояния.

Туннельный вклад в действие имеет стандартный вид

$$\mathcal{S}_T = \int d\tau d\mathbf{r}_L d\mathbf{r}_R [\mathcal{T}_{\mathbf{r}_L \mathbf{r}_R} \psi_{L\alpha}^*(\mathbf{r}_L, \tau) \psi_{R\alpha}(\mathbf{r}_R, \tau) + \mathcal{T}_{\mathbf{r}_L \mathbf{r}_R}^* \psi_{R\alpha}^*(\mathbf{r}_R, \tau) \psi_{L\alpha}(\mathbf{r}_L, \tau)]. \quad (1.172)$$

Сделаем обычное предположение, что туннельный матричный элемент в импульсном представлении  $\mathcal{T}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$  не зависит от импульсов (для этой величины используем обозначение  $\mathcal{T} = |\mathcal{T}|e^{i\alpha}$ ). Тогда во втором порядке по туннелированию находим

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_T = \frac{1}{2} \sum_{\omega} \int (d^3\mathbf{k}_L)(d^3\mathbf{k}_R) \text{Tr} \left[ |\mathcal{T}|^2 \left\{ \hat{G}_L(\omega, \mathbf{k}_L) \hat{G}_R(\omega, \mathbf{k}_R) + \hat{G}'_L(\omega, \mathbf{k}_L) \hat{G}'_R(\omega, \mathbf{k}_R) \right\} \right. \\ \left. - \mathcal{T}^{*2} \hat{F}_L(\omega, \mathbf{k}_L) \hat{F}_R^+(\omega, \mathbf{k}_R) - \mathcal{T}^2 \hat{F}_L^+(\omega, \mathbf{k}_L) \hat{F}_R(\omega, \mathbf{k}_R) \right], \quad (1.173) \end{aligned}$$

где функции Грина записаны как матрицы в спиновом пространстве.

Для контакта между двумя обычными  $s$ -волновыми синглетными  $\omega$ -чётными сверхпроводниками (со сверхпроводящими фазами  $\varphi_L$  и  $\varphi_R$ ) получаем:

$$\mathcal{S}_T = -\frac{\pi G}{2} \sum_{\omega} \frac{\omega^2 + |d_{0L}| |d_{0R}| \cos \varphi}{\sqrt{\omega^2 + |d_{0L}|^2} \sqrt{\omega^2 + |d_{0R}|^2}}, \quad (1.174)$$

где  $\varphi = (\varphi_R - \varphi_L + 2\alpha)$ ,  $G = 4\pi |\mathcal{T}|^2 \nu_L \nu_R$  — кондактанс границы в единицах  $e^2/\hbar$ ,  $\nu_{L(R)}$  — плотность состояний в сверхпроводнике L(R) в нормальном состоянии. Фаза туннельного матричного элемента  $\alpha$  лишь сдвигает разность сверхпроводящих фаз, поэтому можно положить  $\alpha = 0$ , после чего мы получаем контакт с нулевой разностью фаз в равновесии. Аномальная часть туннельного действия описывает джозефсоновскую связь и может быть записана через критический ток  $I_c$ :

$$\mathcal{S}_J = -\frac{I_c}{2eT} \cos \varphi, \quad (1.175)$$

что приводит к обычному соотношению Джозефсона  $I = I_c \sin \varphi$ .

Рассматривая контакт между двумя триплетными унитарными (для простоты)  $\omega$ -нечётными сверхпроводниками [см. формулы (1.169)-(1.170)], находим

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_T = \sum_{\omega} \int (d^3\mathbf{k}_L)(d^3\mathbf{k}_R) \left[ 2|\mathcal{T}|^2 G_{0L}(\omega, \mathbf{k}_L) G_{0R}(\omega, \mathbf{k}_R) \right. \\ \left. - s_R \mathcal{T}^{*2} \mathbf{F}_L(\omega, \mathbf{k}_L) \mathbf{F}_R^*(\omega, \mathbf{k}_R) - s_L \mathcal{T}^2 \mathbf{F}_L^*(\omega, \mathbf{k}_L) \mathbf{F}_R(\omega, \mathbf{k}_R) \right], \quad (1.176) \end{aligned}$$

где  $s_L$  и  $s_R$  — знаки, возникающие из формул (1.166) и определённые следующим образом:  $s_{L(R)} = \pm 1$ , если соответствующий сверхпроводник (левый или правый) имеет симметрию

$\omega$ -нечётный-диа или -пара (от этого зависит знак). Поэтому, если обе стороны контакта одного типа, джозефсоновская (аномальная) часть действия вещественна, а если стороны — разного типа, джозефсоновский вклад чисто мнимый.

Вектор  $\mathbf{d}$  в случае унитарного спаривания может быть представлен в виде  $\tilde{\mathbf{d}}e^{i\varphi}$  с вещественным вектором  $\tilde{\mathbf{d}}$ . Тогда с учётом формул (1.169)-(1.170) для функций Грина получаем

$$\mathcal{S}_T = -\frac{\pi G}{2} \sum_{\omega} \frac{\omega^2 + \tilde{\mathbf{d}}_L \tilde{\mathbf{d}}_R (s_L e^{i\varphi} + s_R e^{-i\varphi})/2}{\sqrt{\omega^2 + s_L \tilde{\mathbf{d}}_L^2} \sqrt{\omega^2 + s_R \tilde{\mathbf{d}}_R^2}}. \quad (1.177)$$

Зависящая от фазы комбинация в аномальной части принимает вид, зависящий от типа сверхпроводников, составляющих контакт:

$$\frac{s_L e^{i\varphi} + s_R e^{-i\varphi}}{2} = \begin{cases} -\cos \varphi, & \text{odd-}\omega\text{-para/para,} \\ \cos \varphi, & \text{odd-}\omega\text{-dia/dia,} \\ -i \sin \varphi, & \text{odd-}\omega\text{-para/dia.} \end{cases} \quad (1.178)$$

Эти же результаты можно получить в квазиклассической технике (на языке функций Грина, проинтегрированных по  $\xi$ ) с соответствующими граничными условиями [55; 110; 111].

Неожиданным образом, в последнем случае (контакт между  $\omega$ -нечётным-пара и  $\omega$ -нечётным-диа сверхпроводником) получается *чисто мнимая джозефсоновская связь* в действии, которая приводит к джозефсоновскому току, пропорциональному  $i \cos \varphi$ . Этот результат нефизичен и свидетельствует о проблеме, заложенной в предположение о возможности сосуществования нечётных по частоте состояний с различным типом мейснеровского отклика.

### 1.3.5 Обсуждение

Как показано в разделе 1.3.2,  $\omega$ -чётные и  $\omega$ -нечётные сверхпроводящие состояния делятся на две отдельные группы [112; 113]:  $\omega$ -чётное-диа состояние может перемешиваться только с  $\omega$ -нечётным-пара, а  $\omega$ -чётное-пара состояние может перемешиваться только с  $\omega$ -нечётным-диа состоянием. В то же время между собой эти две группы не перемешиваются.

С этой точки зрения, когда мы рассматриваем смесь состояний  $\omega$ -нечётное-пара и  $\omega$ -нечётное-диа, мы предполагаем сосуществование представителей двух разных групп. Наши результаты показывают, что это приводит к нефизическим результатам для сверхпроводящего транспорта.

Как следует разрешить это противоречие? Сверхпроводимость, относящаяся к первой упомянутой группе реализуется, например, в обычных  $s$ -волновых сверхпроводниках ( $\omega$ -чётное-диа состояние) и в гибридных системах, включающих в себя обычные сверхпроводники ( $\omega$ -чётное-диа и  $\omega$ -нечётное-пара состояния), причём эти состояния описываются надёжно установленными микроскопическими моделями. В то же время вопрос возможной

реализации сверхпроводимости, принадлежащей второй упомянутой группе, открыт. Поэтому противоречие, возникающее из предположения о сосуществовании двух групп, заставляет усомниться в действительной возможности физической реализации сверхпроводимости, относящейся ко второй группе (в частности,  $\omega$ -нечётного-диа состояния).

С другой стороны, если  $\omega$ -нечётное-диа состояние не может быть реализовано, что в таком случае неверно в рассмотрении, представленном в работах [16; 17], где существование такого состояния было предложено с точки зрения симметрии и устойчивости (без предъявления явного вида взаимодействия, ведущего к такому состоянию)? Авторы работ [16; 17] подчеркивают, что  $\omega$ -нечётное-диа состояние может быть реализовано только в системе с запаздывающим взаимодействием и не может быть описано среднеполевым гамильтонианом. Предположение о существовании среднеполевого гамильтониана немедленно приводит к формуле (1.132) с  $s_\Delta = 1$ , что означает  $\omega$ -нечётное-пара состояние [16; 17]. В то же время эффективная запаздывающая низкоэнергетическая теория в представлении функциональных интегралов [формулы (1.111)-(1.113)] возникает после интегрирования по высокоэнергетическим степеням свободы в многочастичном гамильтониане. Предполагая некоторый исходный многочастичный гамильтониан  $\hat{H}$  (который может содержать, например, все электроны и ядра в металле со всеми взаимодействиями между ними), мы можем определить гейзенберговские операторы  $\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r}, \tau) = e^{\hat{H}\tau} \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r}) e^{-\hat{H}\tau}$  and  $\hat{\psi}_\alpha^+(\mathbf{r}, \tau) = e^{\hat{H}\tau} \hat{\psi}_\alpha^+(\mathbf{r}) e^{-\hat{H}\tau}$ , и аномальные функции Грина

$$F_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \tau_1; \mathbf{r}_2, \tau_2) = \langle T_\tau \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r}_1, \tau_1) \hat{\psi}_\beta(\mathbf{r}_2, \tau_2) \rangle, \quad (1.179a)$$

$$F_{\alpha\beta}^+(\mathbf{r}_1, \tau_1; \mathbf{r}_2, \tau_2) = \langle T_\tau \hat{\psi}_\alpha^+(\mathbf{r}_1, \tau_1) \hat{\psi}_\beta^+(\mathbf{r}_2, \tau_2) \rangle, \quad (1.179b)$$

где усреднение производится по точному многочастичному состоянию. Нас интересует общее соотношение между  $F$  и  $F^+$ , которое может быть получено непосредственно из определений (1.179) в духе рассуждения, применённого к среднеполевому случаю в работах [16; 17]. Применяя это рассуждение к однородному случаю, мы получаем соотношение  $F_{\alpha\beta}^+(\mathbf{k}, \omega) = F_{\beta\alpha}^*(\mathbf{k}, -\omega)$  между многочастичными аномальными средними, которое имеет точно такой же вид, как формула (1.132) с  $s_\Delta = 1$ . Это соотношение выглядит совершенно фундаментальным. Поэтому, чтобы получить  $\omega$ -нечётное-диа состояние, подчиняющееся соотношению (1.132) с  $s_\Delta = -1$ , необходимо предположить отсутствие гамильтонова описания системы на *любом* уровне (как среднеполевым, так и многочастичном).

Установив фундаментальную несовместимость гамильтонова описания системы на любом уровне и возможности  $\omega$ -нечётного-диа состояния, необходимо тем не менее выяснить, как избежать соотношения (1.132) с  $s_\Delta = -1$ , если начинать рассмотрение с функциональных интегралов (1.111)-(1.113). Мы полагаем, что ключевым моментом в выводе было спонтанное нарушение симметрии. Сравнивая между собой пробные траектории для парного потенциала вместо интегрирования по полям  $\Delta^*$  и  $\Delta$ , мы получили среднеполевые определения аномальных средних (1.122). Этот шаг в выводе предполагает, что при наличии сверхпроводящего многообразия эквивалентных минимумов свободной энергии (с произвольной сверхпроводящей фазой) система выберет некоторую определённую фазу из-за бесконечно малого возмущения. Таким образом будет нарушена калибровочная симметрия. Само возмущение

обычно явно не обсуждается. Этот выбор одной точки на многообразии соответствует взятию среднеполевого значения  $\Delta$  (пробной траектории) вместо интегрирования по этому полю.

В то же время нарушающее симметрию (и таким образом фиксирующее фазу) возмущение является важным вопросом. Мы полагаем, что для  $\omega$ -нечётного-диа решения [формула (1.132) с  $s_\Delta = -1$ ], не существует физически реализуемого возмущения, которое может привести к спонтанному нарушению калибровочной симметрии и зафиксировать фазу этого состояния. В таком случае необходимо сохранять интегрирование по сверхпроводящей фазе, и аномальные средние (1.122) обращаются в ноль, так что соотношение (1.132) с  $s_\Delta = -1$  выполняется тривиальным образом. Другими словами,  $\omega$ -нечётное-диа многообразие минимумов может существовать, но симметрия не может быть спонтанно нарушена, поскольку нет физически реализуемых флуктуаций, которые могли бы зафиксировать фазу.

### 1.3.6 Заключение

Мы рассмотрели физические следствия предположения о возможности  $\omega$ -нечётного-диа сверхпроводящего состояния, предложенного в работах [16; 17]. Это нечётное по частоте состояние с диамагнитным мейснеровским откликом, которое с этой точки зрения устойчиво в объёме. Тогда оно могло бы быть в принципе реализовано как главное сверхпроводящее состояние (в то же время микроскопическая модель, приводящая к такому состоянию, неизвестна). Предположив возможность реализации такого состояния, мы изучили его сосуществование с  $\omega$ -нечётным-пара состоянием, которое реализуется как наведённая сверхпроводящая компонента, например, в S/F или TS/DN структурах. Вычисляя сверхтекучую плотность для смеси двух указанных  $\omega$ -нечётных состояний и джозефсоновский ток между ними, мы обнаружили, что токи в обоих случаях имеют мнимые вклады, поэтому являются нефизическими.

Учитывая строгий микроскопический вывод  $\omega$ -нечётного-пара состояния в ряде моделей, мы приходим к вопросу о действительной реализуемости  $\omega$ -нечётного-диа состояния. Дальнейший анализ показывает, что реализация такого состояния означает отсутствие гамильтонова описания системы на любом уровне (многочастичном и среднеполевым). С точки зрения формул существенное различие между этими двумя состояниями описывается разными знаками в соотношении между двумя аномальными средними, см. формулу (1.132), в которой  $s_\Delta = 1$  для  $\omega$ -нечётного-пара и  $s_\Delta = -1$  для  $\omega$ -нечётного-диа состояния. Мы приходим к выводу, что в последнем случае не существует физически реализуемых возмущений, приводящих к нарушению фазовой симметрии, а в таком случае соотношение (1.132) с  $s_\Delta = -1$  тривиально выполняется, т.к. аномальные средние обращаются в ноль из-за интегрирования по сверхпроводящей фазе. Нефизические результаты в этом случае не возникают.

Основным положительным утверждением данного раздела является то, что из двух групп сверхпроводящих состояний, установленных в разделе 1.3.2, физически может реализовываться только группа, соответствующая строкам (a) и (b) таблицы 1. Таким образом,

$\omega$ -нечётные состояния, порождаемые однородными сверхпроводниками произвольной симметрии, всегда должны характеризоваться парамагнитным типом мейснеровского отклика.

## 1.4 Локальный импеданс на диффузной поверхности кирального $p$ -волнового сверхпроводника

### 1.4.1 Введение

Изучение поверхностных свойств необычных и топологических сверхпроводников является одной из центральных тем современной физики твёрдого тела. Важным случаем является сверхпроводимость в рутенате стронция  $\text{Sr}_2\text{RuO}_4$ , в котором, предположительно, реализуется киральная  $p$ -волновая триплетная сверхпроводимость, приводящая к нетривиальным поверхностным свойствам [114].

Измерения микроволнового отклика могут дать важную информацию для понимания поверхностных свойств необычных сверхпроводников [115–117]. Однако полная микроскопическая теория поверхностного импеданса в таких веществах пока отсутствует. Результаты недавних экспериментов по изучению микроволновых свойств  $\text{Sr}_2\text{RuO}_4$  интерпретировались в терминах феноменологической двухжидкостной модели [115–117].

В этом разделе будет вычислен парный потенциал, функции Грина и плотность состояний на диффузной поверхности кирального  $p$ -волнового сверхпроводника. Полученные микроскопические характеристики затем будут применены для изучения локальной комплексной проводимости и поверхностного импеданса. Результаты для импеданса будут сопоставлены с экспериментами, проведёнными на образцах  $\text{Sr}_2\text{RuO}_4$  в ИФТТ РАН. Полученные результаты дают микроскопическое обоснование феноменологической двухжидкостной модели с увеличенной плотностью нормальной компоненты, ранее предложенной [115–117] для объяснения аномальных особенностей микроволнового отклика в рутенате стронция.

### 1.4.2 Упрощённая теория без учёта самосогласования

Поверхностный импеданс  $Z = R - iX$  отражает динамический отклик электронной системы металла на электромагнитное поле [118; 119]. Активная часть поверхностного импеданса  $R$  обусловлена сопротивлением нормальных электронов и в обычных сверхпроводниках экспоненциально убывает при уменьшении температуры ниже температуры перехода  $T_c$ . Типичная температурная зависимость поверхностного импеданса в обычном сверхпроводнике показана на рисунке 1.11(а). Положительность плотности куперовских пар (сверхтекучей

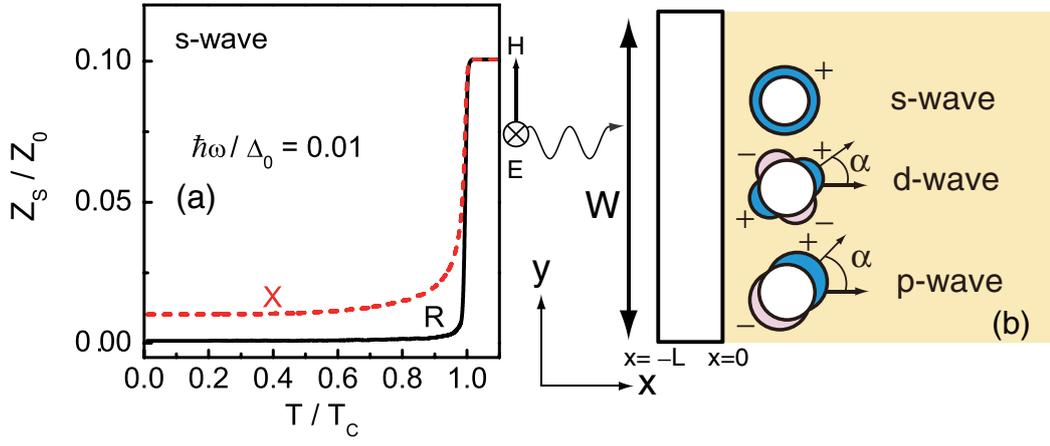


Рисунок 1.11 — (a) Пример поведения поверхностного импеданса в обычном  $s$ -волновом сверхпроводнике. (b) Рассматриваемая гибридная структура, в которой тонкая плёнка нормального металла контактирует со сверхпроводником.

плотности) приводит к неравенству  $R < X$ , которое при низких температурах превращается в сильное неравенство  $R \ll X$ . Ниже будет показано, что соотношение  $R < X$  может не выполняться при наличии  $\omega$ -нечётной сверхпроводящей компоненты, т.к. она характеризуется *отрицательной* плотностью пар.<sup>3</sup>

Рассмотрим тонкую плёнку нормального металла шириной  $W$  и толщиной  $L$  на поверхности сверхпроводника, рисунок 1.11(b). Мы будем в основном интересоваться случаем триплетного  $p$ -волнового сверхпроводника, но для сравнения рассмотрим также синглетные  $s$ - и  $d$ -волновые случаи. Во всех случаях сверхпроводники принадлежат  $\omega$ -чётному классу. В синглетном и триплетном случаях в нормальный металл проникают  $\omega$ -чётные и  $\omega$ -нечётные сверхпроводящие корреляции соответственно [59; 67; 87]. Для нахождения комплексной проводимости в нормальном металле сначала решаем уравнение Узаделя [65] в  $\theta$ -параметризации (см. приложение A). Нам достаточно рассмотреть двумерную геометрию NS контакта, как показано на рисунке 1.11(b). Предполагаем  $W \gg L$ , тогда зависимостью  $\theta$  от  $y$  можно пренебречь. Гран.условия на NS границе зависят от симметрии сверхпроводника [87; 110; 111; 120]:

$$\left. \frac{\partial \theta(x, \epsilon)}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{1}{L} \frac{R_D \langle F \rangle}{R_B T_B}, \quad (1.180)$$

$$\langle F \rangle = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\gamma \frac{T_N \cos \gamma (f_s \cos \theta_0 - g_s \sin \theta_0)}{(2 - T_N) + T_N (g_s \cos \theta_0 + f_s \sin \theta_0)}, \quad (1.181)$$

где  $\epsilon$  — энергия квазичастиц;  $\gamma$  — угол падения квазичастиц, отсчитываемый от оси  $x$ ;  $\theta_0 = \theta(x = 0, \epsilon)$ ;  $R_D$  — сопротивление нормального металла. Потенциальный барьер  $v_0 \delta(x)$  на NS границе задаёт прозрачность  $T_B = \int_0^{\pi/2} d\gamma \cos \gamma T_N$ , где  $T_N = \cos^2 \gamma / (z_0^2 + \cos^2 \gamma)$ ,  $z_0 = v_0 / (v_F)$ , а  $v_F$  — скорость Ферми. В результате сопротивление NS дается формулой  $R_B = [(e^2 / \pi)(k_F W / \pi) T_B]^{-1}$ . Функции Грина сверхпроводника зависят от  $\gamma$  и угла ориентации  $\alpha$ , показанного на рисунке 1.11(b), по закону  $g_{\pm} = \epsilon / \sqrt{\epsilon^2 - |\Delta_{\pm}|^2}$  и  $f_{\pm} = i \Delta_{\pm} / \sqrt{\epsilon^2 - |\Delta_{\pm}|^2}$ ,

<sup>3</sup>Отрицательная плотность пар в данном контексте означает, что коэффициент, описывающий отклик тока на векторный потенциал, меняет знак по сравнению со случаем обычной сверхпроводимости.

где  $\Delta_{\pm} = \Delta\Psi(\gamma_{\pm})$ , а  $\Delta$  — амплитуда парного потенциала,  $\gamma_+ = \gamma - \alpha$  и  $\gamma_- = \pi - \gamma - \alpha$ . Форм-фактор  $\Psi(\gamma)$  в случае  $s$ -,  $p$ -, и  $d$ -волновой симметрии имеет вид  $\Psi(\gamma) = 1, \cos \gamma$  и  $\cos 2\gamma$  соответственно. В частных случаях  $p$ -волновое с  $\alpha = 0$ ,  $p$ -волновое с  $\alpha = \pi/2$ ,  $d$ -волновое с  $\alpha = 0$  и  $d$ -волновое с  $\alpha = \pi/4$  состояния обозначаются  $p_{x^-}$ ,  $p_{y^-}$ ,  $d_{x^2-y^2}$  и  $d_{xy}$  соответственно. В формуле (1.181)  $g_s = (g_+ + g_-)/\xi$  с  $\xi = 1 + g_+g_- + f_+f_-$  и  $f_s = (f_+ + f_-)/\xi$  в случае синглетного спаривания, в то время как  $f_s = i(f_+g_- - f_-g_+)/\xi$  для триплетного спаривания [87; 111]. В случае киральной  $p$ -волновой симметрии  $\Psi(\gamma) = e^{i\gamma}$ , и  $\theta$  подчиняется граничному условию, несколько отличающемуся от (1.181) [67]. На внешней поверхности нормального металла  $\partial_x \theta(x, \epsilon)|_{x=-L} = 0$ . Нормальная и аномальная запаздывающие функции Грина задаются как  $g(x, \epsilon) = \cos \theta(x, \epsilon)$  и  $f(x, \epsilon) = \sin \theta(x, \epsilon)$ .

Далее можем найти локальную комплексную проводимость  $\sigma_N(x, \omega) = \sigma_1 + i\sigma_2$ , которую можно записать через запаздывающие функции Грина согласно формуле (A.37). Локальный импеданс определяется комплексной проводимостью по формуле

$$Z_N(x, \omega) = R_N - iX_N = (1 - i)\sqrt{\frac{\omega}{\Delta_0} \frac{\sigma_0}{\sigma_N(x, \omega)}} Z_0, \quad (1.182)$$

где  $Z_0 \equiv \sqrt{2\pi\Delta_0/\sigma_0 c^2}$ ;  $\Delta_0$  — амплитуда парного потенциала при  $T = 0$ ;  $\sigma_0$  — друдевская проводимость нормального металла. Поверхностный импеданс на рисунке 1.11(а) вычислен по этой же формуле с функциями Грина однородного  $s$ -волнового сверхпроводника.

Основные качественные результаты не зависят от конкретных значений параметров системы. Для численного счёта выберем их следующим образом:  $R_D/R_B = 1$ ,  $E_{\text{Th}}D/L^2 = 0.5\Delta_0$ ,  $z_0 = 2.5$ . Это даёт  $T_B \approx 0.1$  и  $L \approx 2.7\xi_{T_c}$ , где  $\xi_{T_c} = \sqrt{D/2\pi T_c}$  — длина когерентности. К энергии добавляем малую мнимую часть  $i\epsilon_\lambda = i0.01\Delta_0$ , которая обеспечивает запаздывающий характер функций Грина и решает проблему сходимости численного интегрирования.

Для начала сравним функции Грина на поверхности нормального металла ( $x = -L$ ) для случая  $s$ -волнового сверхпроводника [рисунки 1.12(а),(b)] с киральным  $p$ -волновым случаем [рисунки 1.12(д),(е)]. В функциях Грина выделяем вещественную и мнимую часть:

$$g = g_R + ig_I, \quad f = f_R + if_I. \quad (1.183)$$

Вещественная часть функции Грина  $g_R(\epsilon)$  — это нормированная плотность состояний. Нормальная функция Грина всегда удовлетворяет соотношению  $g(-\epsilon) = g^*(\epsilon)$  независимо от симметрии спаривания, как это видно на рисунках 1.12(а) и (д). В  $s$ -волновом случае  $g_R(\epsilon)$  имеет минимум при  $|\epsilon| < \Delta_N \sim 0.15\Delta_0$ . В киральном  $p$ -волновом случае  $g_R$  на рисунке 1.12(д) демонстрирует большой максимум вокруг  $\epsilon = 0$ , что может быть интерпретировано как результат проникновения поверхностных андреевских состояний из сверхпроводника в нормальный металл. Образование подщелевых андреевских состояний из-за смены знака парного потенциала является — общей явление, имеющее место на поверхности необычных сверхпроводников [121]. Проникновение же таких состояний в диффузный нормальный металл возможно только в случае триплетных сверхпроводников [87; 88].

Поведение аномальной функции  $f_R(\epsilon)$  зависит от типа спаривания в сверхпроводнике. Результаты рисунка 1.12(б) показывают, что  $f_R(\epsilon)$  — чётная функция  $\epsilon$ , а  $f_I(\epsilon)$  —

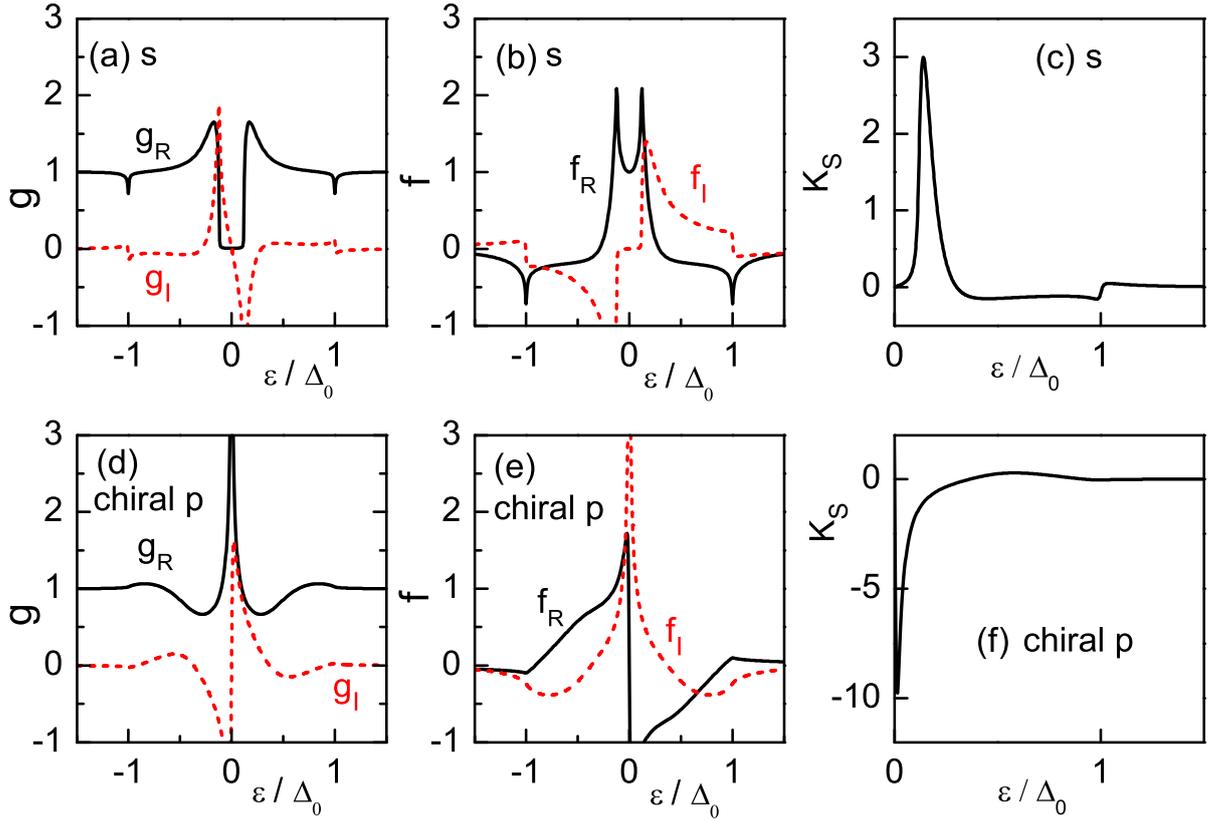


Рисунок 1.12 — Запаздывающие функции Грина на поверхности нормального металла для  $s$ -волнового (a)-(b) и кирального  $p$ -волнового (d)-(e) сверхпроводника. Сплошная и штриховая линии показывают вещественную и мнимую части функций Грина. На рисунках (c) и (f) показана спектральная плотность пар  $K_s$ , которая получается из ядра, определяющего мнимую часть комплексной проводимости при  $\omega \rightarrow 0^+$ .

нечётная [т.е.  $f(-\epsilon) = f^*(\epsilon)$ ]. Это соотношение означает, что в синглетных NS структурах сверхпроводящие корреляции в N части чётны по мацубаровской частоте. В то же время результаты рисунка 1.12(e) показывают, что  $f_R(\epsilon)$  — нечётная функция  $\epsilon$ , а  $f_I(\epsilon)$  — чётная [т.е.  $f(-\epsilon) = -f^*(\epsilon)$ ] [59]. Это соотношение означает, что в триплетных NS структурах сверхпроводящие корреляции в N части нечётны по мацубаровской частоте.

Далее, на рисунке 1.13 показана зависимость поверхностного импеданса нормального слоя  $Z_N(-L, \omega)$  от температуры при малой частоте  $\omega = 0.01\Delta_0$ . Локальный импеданс  $Z_N(-L, \omega)$  примерно описывает импеданс нормального металла, т.к.  $\sigma_N(x, \omega)$  при  $L \approx \xi_{T_c}$  зависит от  $x$  слабо. В  $s$ -волновом случае, рисунок 1.13(a), получаем обычное поведение, согласующееся с рисунком 1.11(a). Как  $R_N$ , так и  $X_N$  при низких температурах убывают с убыванием  $T$ , причём  $R_N \ll X_N$ . Результаты для  $d_{x^2-y^2}$ -волновой симметрии на рисунке 1.13(b) показывают похожее поведение. В случае  $d_{xy}$ - и  $p_y$ -симметрий независимо от  $\omega$  и  $T$  выполняется соотношение  $R = X$  (эти результаты не показаны на рисунке), т.к. эффект близости в этих случаях отсутствует [111; 122], поэтому импеданс определяется просто скин-эффектом в нормальном металле. В то же время в киральном  $p$ -волновом случае на рисунке 1.13(c)  $R_N$  оказывается больше, чем  $X_N$  при  $T < T_c$ . Аналогичное поведение наблюдается в  $p_x$ -волновом случае при  $T < T^* \sim 0.4T_c$ , как показано на рисунке 1.13(d). Очевидно, пове-

дение импеданса качественным образом зависит от симметрии сверхпроводника. В случае, показанном на рисунках 1.13(c) и (d), поведение  $\sigma_2$  является особенным — это величина меняет знак, становясь отрицательной. Легко убедиться в том, что изменение знака  $\sigma_2$  приводит к соотношению  $R_N > X_N$  в формуле (1.182). Таким образом,  $R_N > X_N$  — свойство, непосредственно следующее из  $\omega$ -нечётности сверхпроводящих корреляций.

Чтобы выяснить особенности комплексной проводимости при малых  $\omega$ , обратим внимание на спектральную плотность пар, которая определяется как

$$K_s(\epsilon) = f_R(\epsilon)f_I(\epsilon) - g_R(\epsilon)g_I(\epsilon) = \text{Im } f^2(\epsilon) \quad (1.184)$$

и входит в интеграл для  $\sigma_2$  при  $\omega \rightarrow 0$ . Поведение этой величины зависит от частотной симметрии сверхпроводящих корреляций. В  $s$ -волновом случае  $K_s$  в основном положительна при  $\epsilon > 0$  и имеет положительный пик вблизи  $\epsilon = \Delta_N$ , как показано на рисунке 1.12(c) (поскольку  $K_s$  — по определению нечётная функция  $\epsilon$ , показан только диапазон  $\epsilon > 0$ ). С другой стороны, в киральном  $p$ -волновом случае, как видно из рисунка 1.12(f),  $K_s$  в основном отрицательно при  $\epsilon > 0$  и имеет большой отрицательный пик вблизи  $\epsilon = 0$  — это поведение следует из нечётной зависимости от  $\omega$ . Плотность пар в области N плёнки  $n_s = \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon J(\epsilon)K_s(\epsilon)$  положительна в  $s$ -случае и отрицательна в киральном  $p$ -случае. Вследствие этого  $\sigma_2$  положительна в  $s$ -волновом случае и отрицательно в киральном  $p$ -волновом случае. Поэтому мы приходим к выводу, что отрицательная  $\sigma_2$  является прямым следствием наличия в системе  $\omega$ -нечётных сверхпроводящих корреляций.

Обсудим теперь кратко физику, которая стоит за отрицательной  $\sigma_2$ , отталкиваясь от феноменологической теории. Более полная теория и её анализ будут представлены ниже в разделе 1.4.3. При наличии эффекта близости ток в N слое можно описать двумя вкладками:  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_N + \mathbf{j}_S$ . Первый из этих вкладов — нормальный ток  $\mathbf{j}_N = \sigma_0 \mathbf{E}$ , второй — сверхпроводящий ток  $\mathbf{j}_S = -\frac{n_s e^2}{m c} \mathbf{A} = i \frac{n_s e^2}{m \omega} \mathbf{E}$ , где  $m$  — масса электрона [123]. Комплексная проводимость принимает вид

$$\sigma_1 + i\sigma_2 = \sigma_0 + i \frac{n_s e^2}{m \omega}. \quad (1.185)$$

Положительность  $n_s$  объясняет эффект Мейснера. В  $\omega$ -нечётном случае  $n_s$  становится отрицательным, что означает отсутствие затухания тока вглубь N слоя. При этом объём сверхпроводника обеспечит это затухание. Полное распределение токов и магнитных полей, определяющее импеданс, довольно сложно. В то же время мы можем получить качественное представление об импедансе всей системы, взяв в качестве S обычный сверхпроводник, основная функция которого в этом рассуждении — обеспечение эффекта Мейснера для всей системы в целом. Тогда для NS бислоя получаем

$$Z_{NS} = R_{NS} - iX_{NS} = \bar{Z}_N \frac{Z_S \cos \bar{k}_n L - i \bar{Z}_N \sin \bar{k}_n L}{\bar{Z}_N \cos \bar{k}_n L - i Z_S \sin \bar{k}_n L}, \quad (1.186)$$

где  $Z_S$  — импеданс сверхпроводника, показанный на рисунке 1.11(a). Поскольку  $L$  сравнимо с  $\xi_{Tc}$ , проводимость слабо зависит от  $x$  в N плёнке, что позволяет определить пространственно усреднённые значения: проводимость  $\bar{\sigma}_N = \int_{-L}^0 dx \sigma_N(x)/L$ , импеданс  $\bar{Z}_N = -i \sqrt{4\pi i \omega / (c^2 \bar{\sigma}_N)} =$

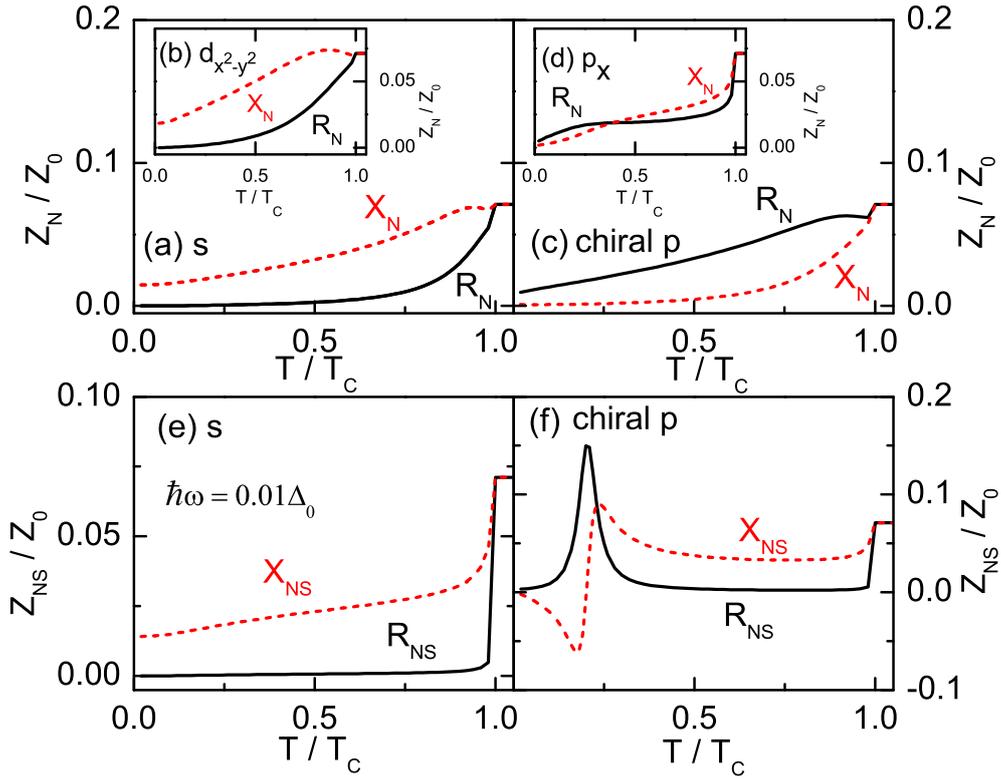


Рисунок 1.13 — Локальный импеданс на поверхности нормального металла (при  $x = -L$ ) как функция температуры при  $\omega = 0.01\Delta_0$  для (a)  $s$ -волнового, (b)  $d_{x^2-y^2}$ -волнового, (c) кирального  $p$ -волнового, (d)  $p_x$ -волнового случаев. Импеданс NS бислоя как функция температуры для (e)  $s$ -волнового и (f) кирального  $p$ -волнового случаев.

$\bar{R}_N - i\bar{X}_N$ , волновой вектор электромагнитного поля  $\bar{k}_n = \sqrt{i4\pi\omega\bar{\sigma}_N/c^2}$ . Изменение знака  $\sigma_2$  приводит к вещественности  $\bar{k}_n$ , что означает «осциллирующий» эффект Мейснера без затухания.

На рисунке 1.13 показан импеданс NS бислоя как функция температуры для (e)  $s$ -волнового и (f) кирального  $p$ -волнового случаев. Графики построены для удельного сопротивления нормального металла, равного  $\rho = \sigma_0^{-1} = 2 \cdot 10^{-6}$  Ом·см. В  $s$ -волновом случае импеданс NS бислоя (e) ведет себя обычным образом и  $R_{NS} < X_{NS}$ . В киральном  $p$ -волновом случае  $R_{NS}$  может превысить  $X_{NS}$  при низких температурах. В то же время изменение знака  $X_{NS}$  [имеющее место при самых низких температурах на рисунке 1.13(f)] требует отдельного изучения устойчивости такого состояния. По-видимому, такое состояние должно быть неустойчиво относительно возникновения модуляций, аналогичных тем, которые исследовались в тонкоплёночных гибридных структурах в работе [100].

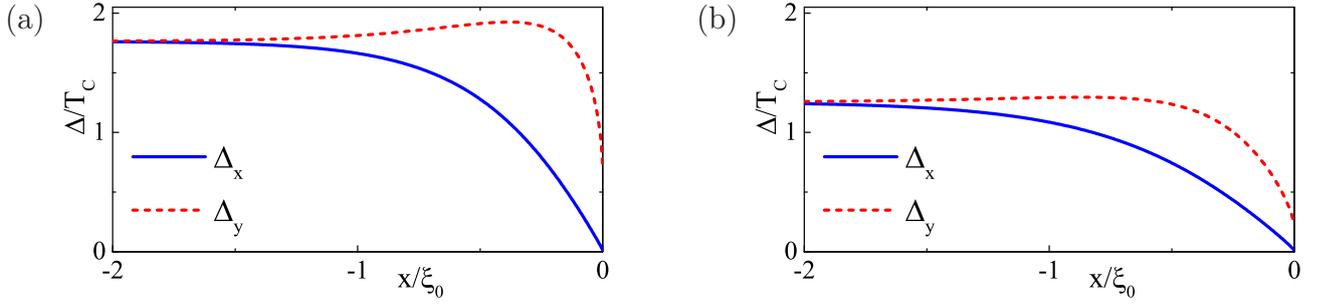


Рисунок 1.14 — Пространственная зависимость компонент парного потенциала  $\Delta_x$  и  $\Delta_y$  вблизи диффузной поверхности при (a)  $T = 0.2T_c$  и (b)  $T = 0.8T_c$ . Рассматривается предел, в котором при любом угле падения рассеянные квазичастицы равномерно распределены по углам. В результате падающие траектории анизотропны, а отраженные изотропны, и после углового интегрирования в уравнении самосогласования значение  $\Delta_x(0)$  оказывается малым, но конечным [в то время как в случае зеркальной поверхности из-за симметрии кирального  $p$ -волнового состояния было бы  $\Delta_x(0) = 0$ ] [126; 127].

### 1.4.3 Самосогласованная теория

#### Формулировка модели

Рассмотрим киральный  $p$ -волновой сверхпроводник, занимающий полупространство  $x < 0$  и имеющий плоскую границу, на которой квазичастицы рассеиваются диффузным образом (т.е. предел, противоположный случаю зеркально отражающей границы).

Система описывается квазиклассическими уравнениями Эйленбергер-Ларкина-Овчинникова [124; 125]. Объемный  $p$ -волновой сверхпроводник предполагается чистым (время рассеяния бесконечно). Уравнения для него имеют вид (см. приложение А):

$$2\omega_n f + v \cos \theta \frac{df}{dx} = -2i\Delta g, \quad 2\omega_n f^+ - v \cos \theta \frac{df^+}{dx} = 2i\Delta^* g, \quad (1.187)$$

$$v \cos \theta \frac{dg}{dx} = i\Delta^* f + i\Delta f^+. \quad (1.188)$$

Нормальная и аномальные функции Грина удовлетворяют условию нормировки

$$g^2 + f f^+ = 1. \quad (1.189)$$

Обозначения:  $\theta$  — угол между осью  $x$  (нормалью к границе) и направлением скорости Ферми  $v$ . Парный потенциал  $\Delta(x, \theta)$  в киральном  $p$ -волновом сверхпроводнике ( $p_x + ip_y$  состояние) может быть разложен на две компоненты,  $\Delta = \Delta_x(x) \cos \theta + i\Delta_y(x) \sin \theta$ .

Уравнение самосогласования может быть записано в виде

$$\Delta_x \ln \frac{T}{T_c} + 2\pi T \sum_{\omega_n > 0} \left[ \frac{\Delta_x}{\omega_n} + \langle 2 \cos \theta \operatorname{Im} f(\theta) \rangle \right] = 0, \quad (1.190)$$

$$\Delta_y \ln \frac{T}{T_c} + 2\pi T \sum_{\omega_n > 0} \left[ \frac{\Delta_y}{\omega_n} - \langle 2 \sin \theta \operatorname{Re} f(\theta) \rangle \right] = 0. \quad (1.191)$$

Здесь угловые скобки обозначают угловое среднее,  $\langle \dots \rangle = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} (\dots) d\theta$ , а  $T_c$  — критическая температура сверхпроводника.

Свойства диффузной границы сверхпроводника можно описать [126; 127] в рамках модели Овчинникова [128]. В этой модели поверхностное рассеяние моделируется тонким диффузным нормальным слоем на поверхности сверхпроводника. Толщина этого слоя  $d$  предполагается такой, что  $l \ll d \ll \xi_0$  (где  $l = v\tau$  — длина свободного пробега,  $\xi_0 = v/2\pi T_c$  — длина когерентности), таким образом, сравнивая с разделом 1.4.2, можно сказать, что это предел очень тонкого рассеивающего слоя. Внутри слоя (при  $0 < x < d$ ) уравнения Эйленберга-Ларкина-Овчинникова [124; 125] (см. приложение А) принимают вид

$$v \cos \theta \frac{df}{dx} = \frac{\langle f \rangle g - \langle g \rangle f}{\tau}, \quad v \cos \theta \frac{df^+}{dx} = -\frac{\langle f^+ \rangle g - \langle g \rangle f^+}{\tau}, \quad (1.192)$$

$$v \cos \theta \frac{dg}{dx} = \frac{\langle f^+ \rangle f - \langle f \rangle f^+}{2\tau}. \quad (1.193)$$

Здесь слагаемые с  $\omega_n$ , которые могут быть записаны аналогично формулам (1.187), опущены, т.к. малы по сравнению со слагаемыми, содержащими большой параметр  $1/\tau$ . Физически предел диффузной поверхности, который мы рассматриваем, означает, что при любом угле падения рассеянные квазичастицы равномерно распределены по углам.

Результаты самосогласованного расчёта парного потенциала показаны на рисунке 1.14 в случае относительно низкой [рисунок (а)] и высокой [рисунок (б)] температуры. В объёме ( $x \rightarrow -\infty$ ) компоненты парного потенциала равны друг другу,  $\Delta_x = \Delta_y$ . Однако их поведение различается вблизи поверхности и зависит от свойств поверхности [126; 129]. В то время как зеркальное отражение привело бы к полному подавлению  $\Delta_x$  на поверхности по соображениям симметрии, в нашей системе получается малое, но конечное значение (малость численная, не параметрическая). В то же время  $\Delta_y$  не подавляется зеркальным отражением, тогда как диффузная поверхность приводит к заметному подавлению этой компоненты.

Вычислив парный потенциал  $\Delta(x, \theta)$  при разных температурах с помощью мацубаровского представления, переходим к представлению вещественной энергии  $E$  и вычисляем запаздывающие функции Грина  $f(E)$ ,  $f^+(E)$  и  $g(E)$ . Для этого подставляем  $\omega_n = -i(E + i0)$  и численно решаем граничную задачу, задаваемую уравнениями (1.187)-(1.188) и (1.192)-(1.193).

## Результаты для функций Грина

Рассмотрим свойства функций Грина, вычисленных на внешней поверхности структуры (т.е. при  $x = d$ ). Эти функции Грина изотропны из-за сильного примесного рассеяния внутри нормального слоя. Результаты проиллюстрированы на рисунке 1.15, где показаны функции  $\text{Re } g(E)$ ,  $\text{Im } g(E)$ ,  $\text{Re } f(E)$  и  $\text{Im } f(E)$ .

Вещественная часть нормальной функции Грина,  $\text{Re } g(E)$ , есть поверхностная плотность состояний (нормированная). Плотность состояний — чётная функция  $E$ . Пики

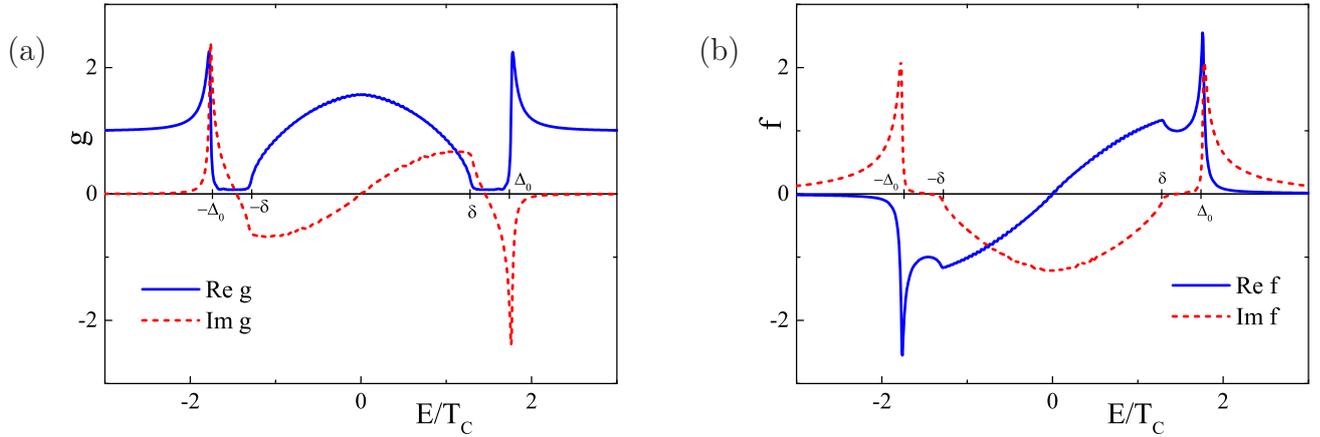


Рисунок 1.15 — Вещественная и мнимая части функций Грина (a)  $g(E)$  и (b)  $f(E)$ , вычисленных на внешней поверхности структуры при  $T = 0.2T_C$ . Плотность состояний (нормированная на величину в нормальном состоянии) даётся величиной  $\text{Re } g$  и показывает два важных интервала энергий. Первый из них — андреевская зона ( $|E| < \delta$ ), второй — объёмная зона ( $|E| > \Delta_0$ ). Эта классификация справедлива и для других компонент функций Грина.

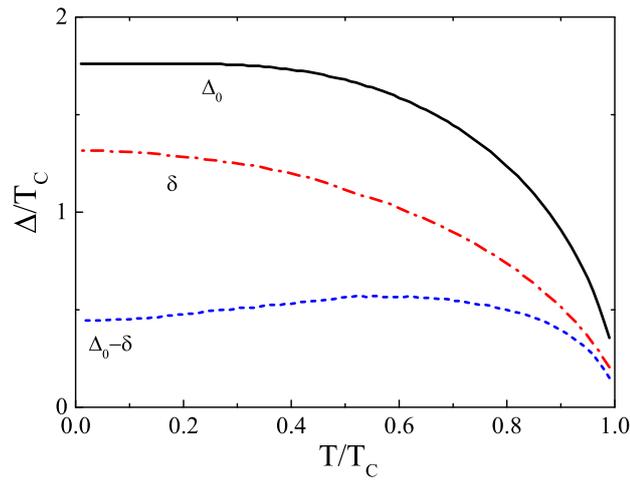


Рисунок 1.16 — Температурная зависимость характерных энергий: полуширина объёмной щели  $\Delta_0$  (сплошная линия), полуширина поверхностной андреевской зоны  $\delta$  (штриховая линия) и ширина поверхностной «запрещенной зоны»  $\Delta_0 - \delta$  (короткие штрихи).

плотности состояний при  $|E| = \Delta_0$  унаследованы от когерентных пиков в объёме сверхпроводника. Вообще, можно сказать, что весь континуум состояний при  $|E| > \Delta_0$  (объёмная зона) в поверхностной плотности состояний происходит от объёмных квазичастиц в сверхпроводнике.

В то же время плотность состояний ниже  $\Delta_0$  характеризуется наличием поверхностных андреевских состояний [129; 130]. Это поверхностный эффект, которого нет в объёме, и связан он с отражением квазичастиц от поверхности, при котором меняется парный потенциал, «ощущаемый» квазичастицей (по причине анизотропности сверхпроводника). Поверхностная андреевская зона имеет дисперсию вследствие киральной  $p_x + ip_y$  симметрии парного потенциала, обладающего внутренней сверхпроводящей разностью фаз между разными траекториями. Величина плотности состояний вблизи нулевой энергии значительна и в пределе диффузной границы даже превосходит значение в нормальном металле, см. рисунок 1.15. Этот факт можно увидеть из условия нормировки (1.189), которое при  $E = 0$ , из-за обращения в ноль  $\text{Im } g(0)$  и  $\text{Re } f(0)$ , сводится к

$$[\text{Re } g(0)]^2 = 1 + [\text{Im } f(0)]^2, \quad (1.194)$$

что очевидно больше единицы. Обозначим полуширину андреевской зоны  $\delta$  — эта величина меньше, чем  $\Delta_0$  (полуширина объёмной сверхпроводящей щели). Наконец, интервал энергий между  $\delta$  и  $\Delta_0$  можно назвать эффективной «запрещённой зоной» (между андреевской и объёмной зонами).

Два энергетических масштаба,  $\delta$  и  $\Delta_0$ , оказываются характерными энергиями не только для плотности состояний, но и вообще для всех компонент функции Грина, см. рисунок 1.15. Обе эти энергии подавляются температурой (и зануляются в  $T_c$ ), в то время как их разность (запрещённая зона) слабо немонотонна с пологим максимумом, см. рисунок 1.16. Вещественная часть  $g$  и мнимая часть  $f$  — чётные функции энергии  $E$ , в то время как мнимая часть  $g$  и вещественная часть  $f$  нечётны.

Квазичастичные состояния в андреевской зоне можно интерпретировать как [18] проявление  $\omega$ -нечётной сверхпроводимости [11; 13] [усиление плотности состояний за счет  $\omega$ -нечётной сверхпроводимости, см. формулу (1.194), было отмечено в работах [59; 131]]. Нечётность по частоте явно видна из симметрии аномальной функции Грина в мацубаровской технике (нечётная зависимость от мацубаровской частоты  $\omega_n$ ), в то время как представлении вещественной энергии  $E$  эта симметрия связывает запаздывающую и опережающую функцию и поэтому неочевидна из рисунка 1.15 (на рисунке показаны только запаздывающие функции). Тем не менее это необычное свойство станет очевидно позже, при обсуждении мнимой части проводимости.

Хотя андреевские состояния на поверхности кирального  $p$ -волнового сверхпроводника имеются и в случае зеркальной поверхности, диффузное рассеяние на границе «подчеркивает» их. Поверхность сама по себе нарушает вращательную симметрию и приводит к перемешиванию сверхпроводящих состояний с различными моментами импульса [84; 85]. В свою очередь, беспорядок (диффузное рассеяние на поверхности) подавляет все анизотропные гармоники, выделяя таким образом  $s$ -волновую компоненту, которая в триплетном

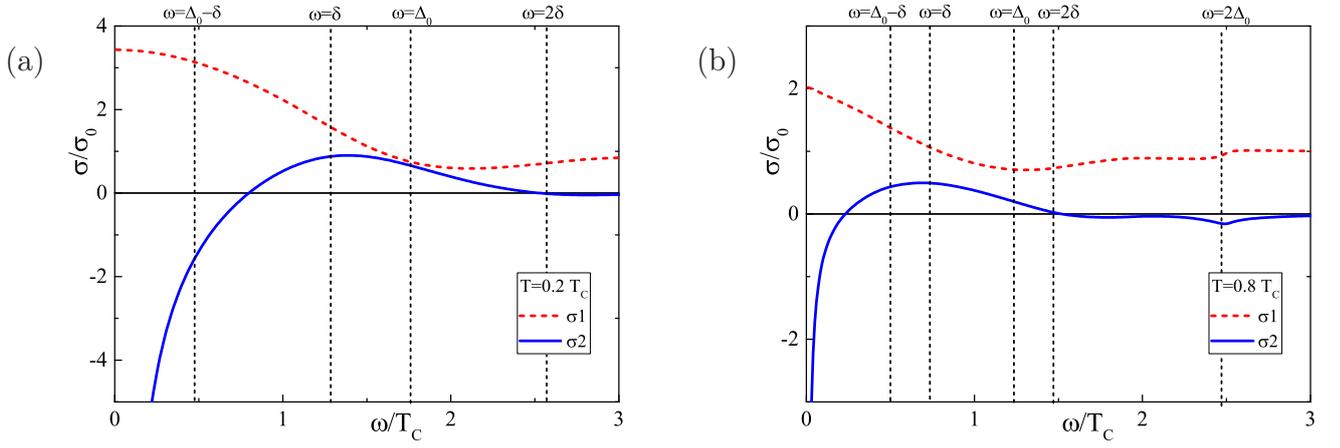


Рисунок 1.17 — Вещественная ( $\sigma_1$ ) и мнимая ( $\sigma_2$ ) части комплексной проводимости на диффузной поверхности кирального  $p_x + ip_y$  сверхпроводника как функции частоты  $\omega$  при (a) низкой температуре  $T = 0.2T_c$  и (b) высокой температуре  $T = 0.8T_c$ . Вертикальные штриховые линии показывают характерные энергетические масштабы поверхностных функций Грина.

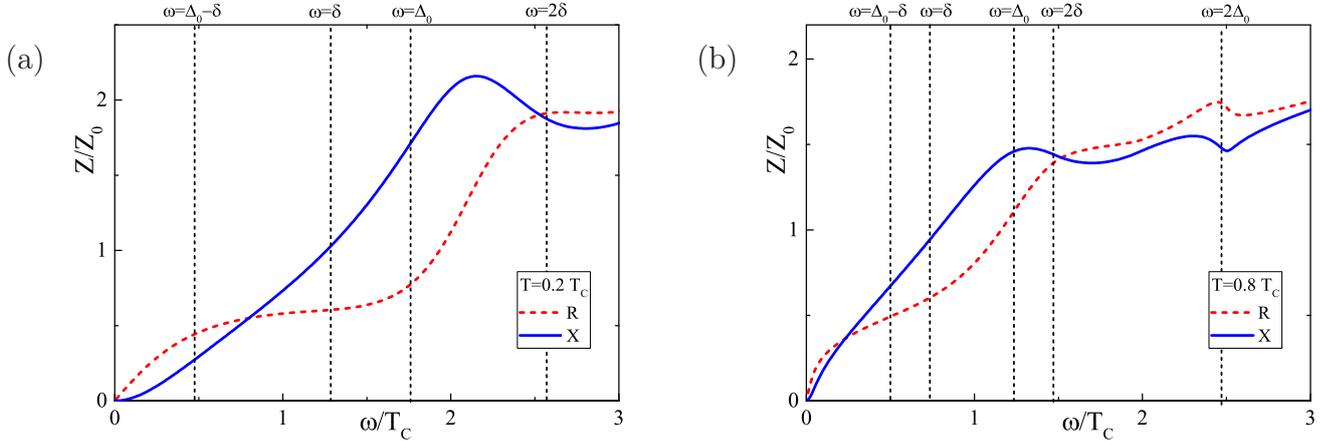


Рисунок 1.18 — Вещественная ( $R$ ) и мнимая ( $X$ ) части локального поверхностного импеданса  $Z$  на диффузной поверхности кирального  $p_x + ip_y$  сверхпроводника как функции частоты  $\omega$  при (a) низкой температуре  $T = 0.2T_c$  и (b) высокой температуре  $T = 0.8T_c$ . Нормировка  $Z_0$  равна величине  $R$  в нормальном состоянии [в нормальном состоянии  $R = X$  и справедлива запись  $Z(\omega) = (1 - i)Z_0(\omega)$ ], взятой при  $\omega = T_c$ . Вертикальные штриховые линии показывают характерные энергетические масштабы поверхностных функций Грина.

случае неизбежно нечётна по частоте (вспомним, что объёмная  $p$ -волновая сверхпроводимость является триплетной) [59; 126].

Самосогласование для парного потенциала [формулы (1.190) и (1.191)] оказывается важным для образования хорошо определённой андреевской зоны ширины  $2\delta$ , отделённой от объёмной зоны. Это можно увидеть из сопоставления с результатами раздела 1.4.2, в котором были проделаны аналогичные вычисления без учёта самосогласования. Полученные там результаты также показали усиление подщелевых андреевских состояний, но условная андреевская зона переходила в условную объёмную зону без какого-либо зазора между ними, так что в этом смысле андреевская зона не была хорошо определена.

## Результаты для комплексной проводимости

Эйленбергерские функции Грина на внешней поверхности системы изотропны из-за диффузного рассеяния в поверхностном слое, поэтому сводятся к узделевским функциям Грина. Комплексная проводимость  $\sigma(\omega)$  на поверхности в этом случае может быть вычислена по формуле (A.37), полученной в грязном пределе. Обозначая  $E_{\pm} = E \pm \omega/2$ , получаем вещественную и мнимую часть,  $\sigma(\omega) = \sigma_1(\omega) + i\sigma_2(\omega)$ , в виде

$$\frac{\sigma_1(\omega)}{\sigma_0} = \frac{1}{2\omega} \int_{-\infty}^{\infty} dE \left( \tanh \frac{E_+}{2T} - \tanh \frac{E_-}{2T} \right) [\operatorname{Re} g(E_+) \operatorname{Re} g(E_-) + \operatorname{Im} f(E_+) \operatorname{Im} f(E_-)], \quad (1.195)$$

$$\frac{\sigma_2(\omega)}{\sigma_0} = -\frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} dE \tanh \frac{E_-}{2T} [\operatorname{Re} g(E_-) \operatorname{Im} g(E_+) - \operatorname{Im} f(E_-) \operatorname{Re} f(E_+)]. \quad (1.196)$$

Зависимость проводимости от частоты показана на рисунке 1.17 для случаев низкой  $T = 0.2T_c$  и высокой  $T = 0.8T_c$  температуры.

**Вещественная часть проводимости.** Вещественная часть проводимости,  $\sigma_1(\omega)$ , определяет диссипативный отклик квазичастиц и конденсата на внешнее поле частоты  $\omega$ . Диссипация возникает из-за переходов между энергиями  $E - \omega/2$  и  $E + \omega/2$  — этому соответствует произведение функций Грина в формуле (1.195). Разность гиперболических тангенсов в первой строке формулы (1.195) определяет окно энергий, внутри которого находятся переходы, приводящие к диссипации. Качественное поведение  $\sigma_1$  можно понять, рассматривая вклад квазичастиц (слагаемое  $\operatorname{Re} g \cdot \operatorname{Re} g$ ), поскольку вклад конденсата (слагаемое  $\operatorname{Im} f \cdot \operatorname{Im} f$ ) меняет это поведение лишь количественным образом.

Аномальная особенность зависимости  $\sigma_1(\omega)$  в нашей системе — отсутствие порога поглощения, который обычно имеется в этой функции при низких температурах в полностью щелевых сверхпроводниках. В нашем случае, несмотря на наличие щели в любом направлении в объёме кирального  $p$ -волнового состояния, поверхность характеризуется наличием подщелевой андреевской зоны. Следовательно, даже при  $T \rightarrow 0$  всегда имеются поверхностные состояния со сколь угодно малой энергией, которые могут поглощать энергию. Из-за этих состояний статическая диссипативная проводимость  $\sigma_1(0)$  конечна; более того, она превышает значение в нормальном состоянии, см. рисунок 1.17. Статический предел может быть легко получен из формулы (1.195) (при любом  $T$ ):

$$\frac{\sigma_1(0)}{\sigma_0} = [\operatorname{Re} g(0)]^2 + [\operatorname{Im} f(0)]^2 = 1 + 2[\operatorname{Im} f(0)]^2. \quad (1.197)$$

Рисунок 1.15 иллюстрирует, что два члена в правой части первого равенства (вклады квазичастиц и конденсата) дают сравнимые вклады, оба превышающие единицу. Последнее равенство получено с помощью условия нормировки (1.194) и показывает, что  $\sigma_1(0) > \sigma_0$ .

С увеличением  $\omega$  аномальные переходы внутри андреевской зоны приводят к все меньшей диссипации, поскольку в процессе теперь участвует не только состояния в окрестности максимума плотности состояний, но и состояния ближе к краям «купола», плотность состояний у которых меньше. Этим объясняется максимум  $\sigma_1$  при  $\omega = 0$ .

Дальнейшее увеличение  $\omega$  и/или увеличение  $T$  запускают еще два типа диссипативных процессов: переходы из андреевской зоны в объёмную и переходы внутри объёмной зоны. Переходы из андреевской зоны в объёмную возникают при  $\omega > \Delta_0 - \delta$ , т.е. когда частота оказывается достаточной для перехода через запрещённую зону [заметим, что хотя  $\sigma_1$  положительно, вклад конденсата в  $\sigma_1$  от таких процессов отрицателен, см. рисунок 1.15(b)]. Переходы внутри объёмной зоны важны при любом  $\omega$ , если  $T$  превышает  $\Delta_0$ , так что над объёмной щелью есть много термически возбуждённых квазичастиц. С другой стороны при  $T \ll \Delta_0$  переходы из объёмной зоны в объёмную возникают пороговым образом при  $\omega > 2\Delta_0$ . В любом случае, когда  $\omega$  превышает  $2\Delta_0$ , диссипативная проводимость стремится к проводимости нормального состояния  $\sigma_0$ .

Заметим также, что с ростом частоты аномальные переходы внутри андреевской зоны прекращаются при  $\omega > 2\delta$ , поскольку скачок по энергии для такого перехода становится больше, чем ширина андреевской зоны.

Сравнивая случаи (относительно) низкой и высокой температуры, рисунки 1.17(a) и 1.17(b), видим, что шкала частоты при высоких температурах сжимается из-за уменьшения характерных энергий  $\delta$  и  $\Delta_0$ .

Таким образом, наличие подщелевых андреевских состояний качественно меняет поведение  $\sigma_1(\omega)$ , приводя к низкочастотному максимуму при всех температурах. Это поведение качественно отличается от обычного поведения в щелевом случае, при котором  $\sigma_1(\omega)$  экспоненциально подавлена при низких температурах  $T \ll \Delta_0$ .

**Мнимая часть проводимости.** Интеграл в формуле (1.196) для  $\sigma_2(\omega)$  в пределе  $\omega \rightarrow 0$  конечен для сверхпроводящего состояния. Поэтому мнимая часть проводимости в этом пределе обратно пропорциональна  $\omega$ . Коэффициент при этой зависимости связан [123] с плотностью сверхпроводящих электронов  $n_s$  формулой

$$\sigma_2(\omega) = \frac{n_s e^2}{m\omega}. \quad (1.198)$$

Формула (1.196) даёт

$$\frac{n_s(T)}{n} = -\tau \int_{-\infty}^{\infty} dE \tanh \frac{E}{2T} [\operatorname{Re} g(E) \operatorname{Im} g(E) - \operatorname{Im} f(E) \operatorname{Re} f(E)], \quad (1.199)$$

где  $n_s$  нормирована на полную плотность электронов  $n$ .

Сверхпроводимости в объёме соответствует положительное  $n_s$ . Этот факт проявляется в том, что оба члена в квадратных скобках в формуле (1.199), согласно рисунку 1.15, дают положительный вклад в  $n_s$  от объёмной зоны (т.е. от интегрирования по энергиям  $|E| > \Delta_0$ ).

В то же время  $\omega$ -нечётной сверхпроводимости соответствует отрицательное  $n_s$ . Это означает необычный знак в отклике тока на поле, аномальный эффект Мейснера [67; 94; 101; 132–135] и аномальное поведение поверхностного импеданса. Это проявляется в том, что оба члена в квадратных скобках в формуле (1.199), согласно рисунку 1.15, дают отрицательный вклад в  $n_s$  от андреевской зоны (т.е. от интегрирования по энергиям  $|E| < \delta$ ). Это естественно, т.к. поверхностные андреевские состояния являются проявлением  $\omega$ -нечётной сверхпроводимости [18; 85].

Из рисунка 1.15 можно понять, что основной вклад в  $n_s$  даётся андреевской зоной. Таким образом, поведение  $\sigma(\omega)$  на малых частотах является аномальным, т.к. соответствует  $n_s < 0$ . Это иллюстрирует рисунок 1.17. Сравнение случаев двух температур, показанных на рисунке, показывает, что  $n_s(T)$  уменьшается по модулю с ростом  $T$ . Этот эффект главным образом обусловлен множителем  $\tanh(E/2T)$  в формуле (1.199), который подавляет вклад от энергий порядка  $T$  и меньше.

В то же время с ростом  $\omega$  аномальный вклад от андреевской зоны подавляется, обычный вклад становится главным, и  $\sigma_2$  приобретает обычный (положительный) знак. При  $\omega \sim \delta$  достигается максимум зависимости  $\sigma_2(\omega)$ .

Отталкиваясь от приведённого ранее обсуждения характерных масштабов энергии можно ожидать, что вклад в  $\sigma_2(\omega)$  от переходов внутри андреевской зоны должен пропасть при  $\omega > 2\delta$ . Поскольку этот вклад доминирует при малых  $\omega$ , оставшаяся  $\sigma_2$  при  $\omega > 2\delta$  должна быть относительно мала. Действительно, рисунок 1.17 подтверждает эту картину. Интересно, что  $\sigma_2(\omega)$  переходит через ноль вблизи  $\omega = 2\delta$ , что означает, что переходы из андреевской зоны в объёмную и из объёмной в объёмную почти компенсируют друг друга при этой частоте. При больших частотах  $\sigma_2(\omega)$  отрицательна, но мала; в этом смысле это маргинально аномальный режим.

Таким образом, хотя андреевские состояния не меняют низкочастотного поведения  $\sigma_2(\omega) \propto 1/\omega$ , коэффициент при этой зависимости (содержащий  $n_s$ ) становится отрицательным, в то время как с обычном щелевом случае он положителен. Переход к высокочастотному режиму в этой ситуации происходит через положительный максимум  $\sigma_2(\omega)$ .

## Результаты для поверхностного импеданса

Локальный импеданс  $Z = R - iX$  вычисляется по локальному значению комплексной проводимости  $\sigma$ :

$$Z(\omega) = \sqrt{\frac{4\pi\omega}{ic^2\sigma(\omega)}}, \quad (1.200)$$

и ниже рассматривается поверхностное значение этой величины.

Обычное соотношение  $R < X$  непосредственно следует из соотношения  $\sigma_2 > 0$ . Однако если  $\sigma_2 < 0$ , формула (1.200) предсказывает аномальный режим, в котором  $R > X$ . Этот режим может реализоваться локально из-за  $\omega$ -нечётной сверхпроводимости, наведённой вблизи поверхности.

**Зависимость поверхностного импеданса от частоты.** Чтобы исследовать, к каким особенностям импеданса  $Z(\omega)$  приводят особенности  $\sigma(\omega)$ , на рисунке 1.18 мы строим импеданс при тех же параметрах, что и проводимость на рисунке 1.17. Поверхностные андреевские состояния, соответствующие  $n_s < 0$ , приводят к аномальному поведению импеданса и

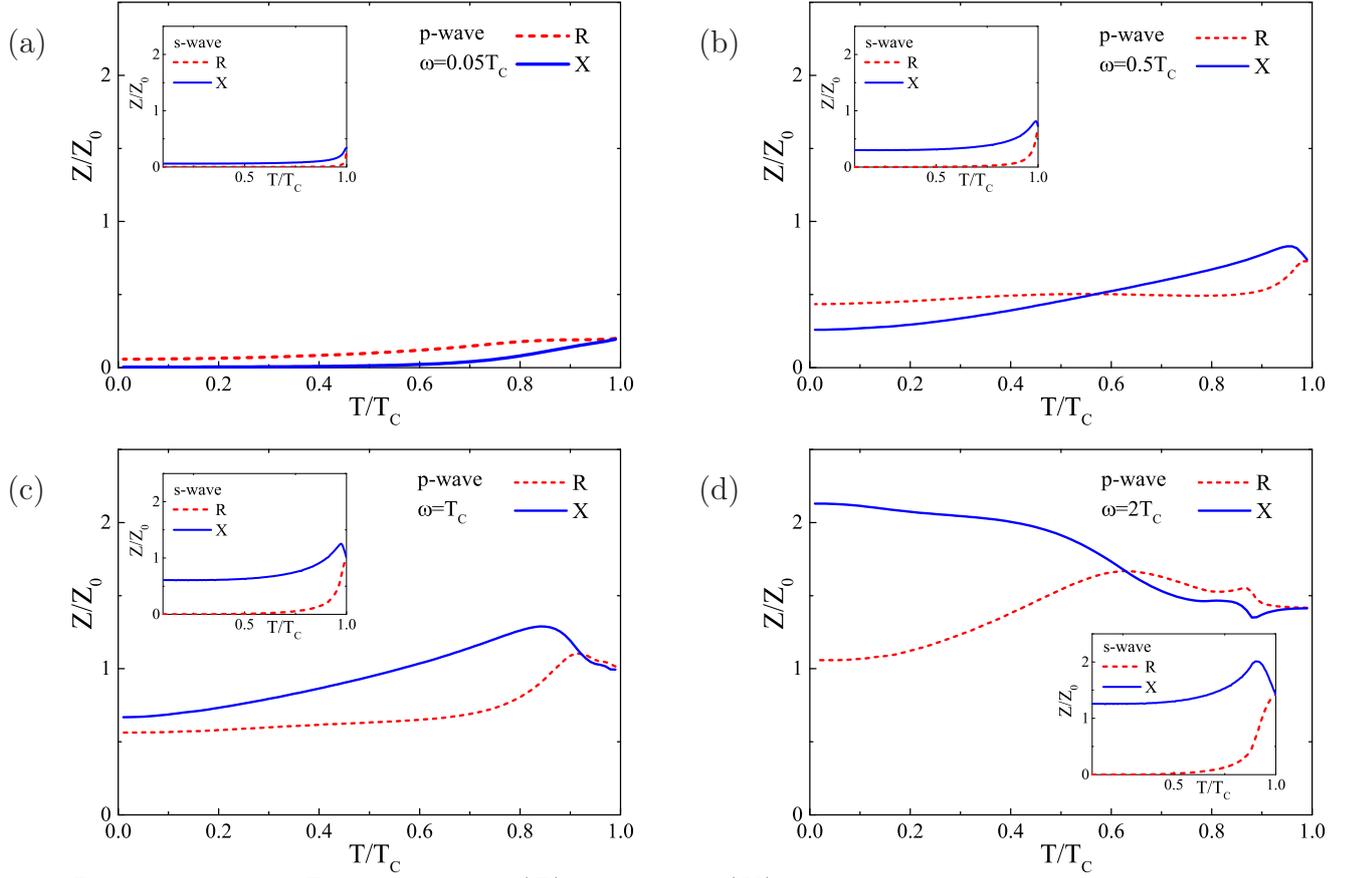


Рисунок 1.19 — Вещественная ( $R$ ) и мнимая ( $X$ ) части локального поверхностного импеданса  $Z$  на диффузной поверхности кирального  $p_x + ip_y$  сверхпроводника как функции температуры  $T$  при различных частотах: (a)  $\omega = 0.05T_C$ , (b)  $\omega = 0.5T_C$ , (c)  $\omega = 1.0T_C$ , (d)  $\omega = 2.0T_C$ . Вставки показывают температурную зависимость  $Z$  при тех же частотах  $\omega$  в  $s$ -волновом сверхпроводнике.

соотношению  $R > X$  при низких частотах. Это соотношение не может быть получено за счет обычной объёмной сверхпроводимости с  $n_s > 0$  и является проявлением  $\omega$ -нечётной сверхпроводимости. При  $\omega \sim \delta$  аномальный вклад андреевской зоны уже оказывается существенно подавленным,  $\sigma(\omega)$  достигает максимума и  $Z(\omega)$  переходит в обычный режим, для которого  $R < X$ . Далее, при  $\omega \approx 2\delta$  имеет место пересечение,  $R = X$ , за счет того, что  $\sigma_2(\omega)$  проходит через ноль. Наконец, при еще бóльших частотах  $\sigma_2(\omega)$  остаётся малым [ $|\sigma_2(\omega)| \ll \sigma_1(\omega)$ ], и для  $Z(\omega)$  реализуется режим, похожий на нормальный металл с

$$R(\omega) \approx X(\omega) \approx \sqrt{\frac{2\pi\omega}{c^2\sigma_1(\omega)}} \quad (1.201)$$

[который становится истинно металлическим при  $\omega$ , превышающем  $2\Delta_0$  — в этом случае  $\sigma_1(\omega) \approx \sigma_0$ ]. Этот режим является маргинально аномальным, т.к.  $R$  лишь немного превышает  $X$  из-за отрицательного значения  $\sigma_2(\omega)$ :

$$R(\omega) - X(\omega) \approx -\frac{\sigma_2(\omega)}{\sigma_1(\omega)}R(\omega). \quad (1.202)$$

Сравнение рисунков 1.18(a) и 1.18(b) показывает, что низкотемпературный интервал, в котором имеет место аномальный режим с  $R > X$ , сжимается с ростом температуры. Это согласуется с отмеченной выше общей тенденцией уменьшения характерных сверхпроводящих энергетическим масштабам.

Поведение  $Z(\omega)$  при  $\omega \rightarrow 0$  можно получить из результатов для комплексной проводимости  $\sigma(\omega)$ . Согласно результатам раздела 1.4.3 в этом пределе вещественная часть проводимости становится положительной константой  $\sigma_1$ , см. формулу (1.197) (характерная величина этой константы — порядка друдевской проводимости  $\sigma_0$ ), в то время как мнимая часть расходится по закону (1.198) с  $n_s < 0$ . Формула (1.200) тогда приводит к соотношениям

$$R = \sqrt{\frac{\pi\tau}{\sigma_0} \frac{n}{|n_s|} \frac{2\omega}{c}}, \quad X = \sqrt{\frac{\pi\tau^3}{\sigma_0^3} \frac{n^3}{|n_s|^3} \frac{\sigma_1\omega^2}{c}}. \quad (1.203)$$

Формулы (1.203) подтверждают аномальное соотношение  $R > X$  при низких частотах (точнее, эти формулы соответствуют случаю  $R \gg X$ ). Это соотношение противоположно тому, которое имеет место для  $s$ -волнового сверхпроводника с  $n_s > 0$ . В этом обычном случае результат при низких частотах может быть записан в том же виде (1.203), но с переставленными  $R$  и  $X$  (что приводит к обычному соотношению  $R < X$ ). Другое качественное различие состоит в том, что  $\sigma_1$  в целевом  $s$ -волновом сверхпроводнике экспоненциально подавлена при низких температурах по закону  $\exp(-\Delta_0/T)$ , в то время как в случае андреевской зоны  $\sigma_1$  не имеет такой малости.

**Зависимость поверхностного импеданса от температуры.** На рисунке 1.19 показана зависимость от температуры вещественной части  $R$  и мнимой части  $X$  поверхностного импеданса  $Z$  при различных частотах  $\omega$ . Для сравнения на вставках при тех же частотах показаны эти же величины для случая диффузной границы  $s$ -волнового сверхпроводника.

При самых низких частотах работает формула (1.203), в которую температурная зависимость входит через  $n_s(T)$ . Чтобы работал этот аномальный режим, все переходы должны происходить внутри андреевской зоны, поэтому  $\omega$  должно быть по крайней мере меньше, чем запрещённая зона  $\Delta_0 - \delta$ . Это условие в случае рисунка 1.19(a) (построенного при  $\omega = 0.05T_c$ ) выполняется почти при всех температурах (кроме узкой окрестности  $T_c$ ). В соответствии с формулой (1.203) получается аномальный режим с  $R > X$ . Как  $R$ , так и  $X$  растут с ростом температуры из-за подавления  $n_s(T)$ . В обычном сверхпроводнике (см. вставку)  $R < X$  во всех сверхпроводящем диапазоне температур.

С ростом  $\omega$  аномальный вклад от андреевской зоны в  $\sigma_2$  уменьшается, а обычные вклады (с участием объёмной зоны) усиливаются, в результате чего  $\sigma_2$  может изменить знак и стать положительной. При  $\omega = 0.5T_c$  [см. рисунок 1.19(b)] баланс разных вкладов меняется при изменении температуры и с ростом  $T$  происходит кроссовер из аномального в обычный режим [пересечение  $R(T)$  и  $X(T)$  при  $T$  чуть меньше  $0.6T_c$ ]. Это происходит, главным образом, из-за того, что рост температуры подавляет аномальные вклады от андреевской зоны в  $\sigma_2$ , в то время, как  $\omega$  зафиксирована, поэтому температура влияет на относительную величину аномального и обычного вкладов в  $Z(\omega)$ .

При бóльших частотах [см. случай  $\omega = 1.0T_c$  на рисунке 1.19(c)] аномальный низкотемпературный режим, обусловленный аномальным низкочастотным поведением  $\sigma_2(\omega)$ , пропадает. Можно сказать, что точка пересечения, которая на рисунке 1.19(b) была при  $T \approx 0.6T_c$ , движется влево и достигает нуля, после чего пересечение пропадает. В результате  $X$  превосходит  $R$  в большей части сверхпроводящего температурного диапазона за исключением узкой области вблизи критической температуры,  $T > 0.9T_c$ . В последнем случае из-за высокочастотного маргинально аномального поведения  $\sigma_2(\omega)$  (которое наблюдалось на рисунке 1.17 при  $\omega > 2\delta$ ) реализуется маргинально аномальный (близкий к нормально-металлическому) режим поведения импеданса. При заданной  $\omega$  этот режим достигается в результате уменьшения  $\delta$  с ростом  $T$ .

Наконец, при еще бóльших частотах порядка нескольких  $T_c$  [см. случай  $\omega = 2.0T_c$  на рисунке 1.19(d)] маргинально аномальный режим реализуется в широком температурном интервале ниже  $T_c$ . Небольшие изломы вблизи  $T = 0.9T_c$  на рисунке 1.19(d) — это проявление узких пиков в спектральной структуре функций Грина при  $|E| = \Delta_0$  (см. рисунок 1.15). Эти изломы соответствуют температуре, при которой  $\omega \approx 2\Delta_0(T)$ , то есть переходы происходят между двумя пиками. При низких температурах  $R$  убывает, а  $X$  растет с уменьшением  $T$ . Это поведение заметно отличается от поведения  $Z$  в  $s$ -волновом сверхпроводнике, в котором  $X$  имеет когерентный пик ниже  $T_c$  (из-за переходов между спектральными пиками функций Грина), но затем монотонно убывает при низких температурах, как показано на вставке к рисунку 1.19(d).

В принципе, низкотемпературное поведение  $R(T)$  и  $X(T)$ , похожее на рисунок 1.19(d), можно получить и для обычного  $s$ -волнового сверхпроводника. Однако необходимые для такого поведения частоты  $\omega$  в  $s$ -волновом случае должны быть заметно больше щели  $2\Delta_0$  в квазичастичном спектре. В то же время наличие андреевской зоны на поверхности кирального  $p$ -волнового сверхпроводника приводит к возникновению таких эффектов при подщелевых частотах  $\omega < 2\Delta_0$ .

Как видно из сравнения основных графиков и вставок на рисунке 1.19, импеданс в случае киральных  $p$ -волновых и  $s$ -волновых сверхпроводников ведет себя качественно и количественно различным образом. Основная особенность кирального  $p$ -волнового случая — существование аномального режима с  $R > X$ . Другая важная особенность — существенно увеличенная активная часть импеданса: при подщелевых частотах  $R$  может быть конечным и даже порядка нормально-металлического случая даже при  $T = 0$ , в противоположность нулевому значению  $R$  в  $s$ -волновом случае при тех же условиях. Обе эти особенности возникают по причине значительного числа состояний с низкой энергией (андреевской зоны) на поверхности кирального  $p$ -волнового сверхпроводника.

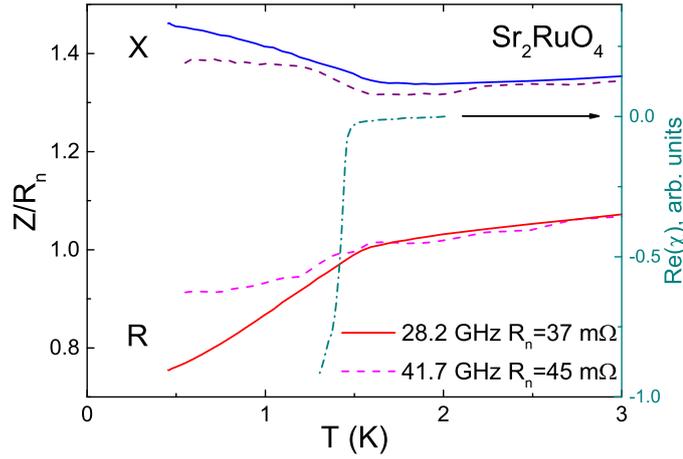


Рисунок 1.20 — Экспериментальные результаты. Левая ось: температурная зависимость поверхностного импеданса кристалла рутената стронция  $\text{Sr}_2\text{RuO}_4$ . Импеданс нормирован на величину  $R_n = R(1.5 \text{ K})$  и измерен на частотах 28.2 ГГц и 41.7 ГГц. Правая ось: температурная зависимость динамической магнитной восприимчивости на частоте 100 кГц со сверхпроводящим переходом при  $T_c = 1.5 \text{ K}$ . Частоты 28.2 ГГц и 41.7 ГГц соответствуют  $\omega \approx 0.9T_c$  и  $\omega \approx 1.3T_c$ . [Экспериментальные данные не являются результатом данной диссертации и приведены с целью сравнения с теорией.]

#### 1.4.4 Сравнение с экспериментом

Экспериментальные результаты для поверхностного импеданса, полученные в ИФТТ РАН на образцах рутената стронция  $\text{Sr}_2\text{RuO}_4$ , показаны на рисунке 1.20. Данные по магнитной восприимчивости свидетельствуют о сверхпроводящем переходе при  $T_c = 1.5 \text{ K}$ .

Необходимо прокомментировать различие  $X$  и  $R$  в нормальном состоянии (выше  $T_c$ ). В простейшем случае в режиме нормального скин-эффекта они должны быть равны. В то же время причиной расхождения может быть малое, но конечное значение параметра  $\omega\tau_0$  внутри скин-слоя — в этом случае в нормальном состоянии должно быть  $X > R$ . Действительно, из эксперимента получается оценка  $\omega\tau_0 \simeq 0.25$ . Другая причина различия  $X$  и  $R$  в нормальном состоянии может быть связана с отклонениями от условий локального предела в скин-слое (которые означают  $l_0 \ll \delta_0$ , где  $l_0$  и  $\delta_0$  — длина свободного пробега и глубина скин-слоя). Из эксперимента получаются оценки  $l_0 \approx 200 \text{ nm}$  и  $\delta_0 \approx 350 \text{ nm}$ . Таким образом, измерения проводились не точно в локальном, а скорее в промежуточном режиме с  $l_0 \lesssim \delta_0$ .

Однако наиболее интересны для нас результаты, полученные в сверхпроводящем состоянии ниже 1.5 К. В этом случае  $R(T)$  плавно убывает, и это поведение можно экстраполировать к большому значению при нуле температуры (в противоположность нулевому значению для обычного  $s$ -волнового сверхпроводника при подщелевых частотах  $\omega < 2\Delta_0$ ). Одновременно с этим  $X(T)$  монотонно растет ниже 1.5 К вплоть до самой низкой доступной в эксперименте температуры 0.5 К при обеих частотах.

Таким образом, в эксперименте наблюдаются большие значения  $R$  при низких температурах и подщелевых частотах  $\omega < 2\Delta_0$  (в данном случае подщелевыми являются частоты ниже примерно 110 ГГц). Это является явным указанием на значительное число подщелевых состояний в сверхпроводящем  $\text{Sr}_2\text{RuO}_4$  и несовместимо со сценарием обычной  $s$ -волновой сверхпроводимости. В то же время именно такую особенность предсказывает изложенная выше теория для кирального  $p$ -волнового состояния, см. рисунки 1.19(c) и 1.19(d). Схожие экспериментальные результаты получались и раньше в работах [115–117] и были интерпретированы на языке феноменологической двухжидкостной модели в предположении значительной доли нормальной компоненты при низких  $T$ .

Монотонный рост  $X(T)$  с понижением температуры также не согласуется с ожидаемым в  $s$ -волновом случае поведением. В этом случае следует ожидать когерентного пика непосредственно ниже  $T_c$ , а затем монотонного убывания. В то же время экспериментально полученная зависимость согласуется с теорией для кирального  $p$ -волнового состояния.

### 1.4.5 Заключение

Был изучен локальный импеданс на диффузной границе кирального  $p$ -волнового сверхпроводника. Теоретический подход основан на использовании квазиклассического формализма Эйленбергера-Ларкина-Овчинникова, в рамках которого была самосогласованно найдена пространственная зависимость парного потенциала. Вычисленные вещественные и мнимые компоненты функций Грина (аномальные функции и локальная плотность состояний) имеют энергетическую зависимость, важной характеристикой которой является наличие подщелевой зоны андреевских состояний (с дисперсией). Исходя из полученных решений для функций Грина вычислена локальная комплексная проводимость и поверхностный импеданс кирального  $p$ -волнового сверхпроводника в широком диапазоне микроволновых частот (частоты варьировались от подщелевого до надщелевого режима).

Были определены аномальные особенности комплексной проводимости и поверхностного импеданса, обусловленные генерацией вблизи границы нечётных по частоте сверхпроводящих корреляций. Низкочастотный микроволновый отклик проявляет аномальные особенности из-за вклада андреевской зоны (которая отражает наличие нечётных по частоте сверхпроводящих корреляций). Именно, нечётная по частоте симметрия локально приводит к изменению знака  $n_s$  — коэффициента, определяющего отклик сверхтока на внешнее электромагнитное поле и обычно интерпретируемого как плотность сверхпроводящих электронов. Вклад, происходящий от андреевской зоны при низких частотах, приводит к отрицательным значениям  $n_s$  вблизи границы.

В результате мнимая часть локальной проводимости также оказывается отрицательной, что приводит к аномальному соотношению  $R > X$  между активной и реактивной частями поверхностного импеданса. Этот эффект имеет место на частотах, в несколько раз меньших объёмной сверхпроводящей щели. В то же время диапазон частот, в котором проявляются

аномальные свойства, чувствителен как к объёмной щели  $\Delta_0$ , так и к полуширине андреевской зоны  $\delta$ . Аномальный диапазон частот максимален при низких температурах,  $T \ll T_c$ .

Полученные теоретические результаты были сопоставлены с экспериментальными измерениями поверхностного импеданса  $\text{Sr}_2\text{RuO}_4$  на частотах 28.2 ГГц и 41.7 ГГц. Хотя наиболее интересный режим  $R > X$  в эксперименте достигнут не был, результаты для  $R(T)$  и  $X(T)$  явно отличаются от случая обычных  $s$ -волновых сверхпроводников. Сопоставление с теорией позволяет сделать вывод, что экспериментально обнаруженные аномалии поверхностного импеданса в  $\text{Sr}_2\text{RuO}_4$  согласуются с предположением о реализации в нём киральной  $p$ -волновой сверхпроводимости. Один из основных экспериментальных фактов — существенно увеличенная активная часть поверхностного импеданса. Теоретически этот эффект объясняется вкладом от подщелевых андреевских состояний. Это даёт микроскопическое обоснование феноменологической двухжидкостной модели с увеличенной долей нормальной компоненты (конечная доля квазичастиц при  $T = 0$ ), предложенной ранее для объяснения результатов по поверхностному импедансу в  $\text{Sr}_2\text{RuO}_4$ .

## Глава 2. Сверхпроводящие спиновые клапаны

### 2.1 Сверхпроводящий триплетный спиновый клапан

#### 2.1.1 Введение

В сверхпроводящих спиновых клапанах с последовательностью слоев F1/S/F2 температуру сверхпроводящего перехода системы  $T_c$  можно менять взаимной ориентацией намагниченностей  $\mathbf{M}_{1,2}$  двух ферромагнитных слоев F1 и F2. Поэтому при температуре  $T$ , зафиксированной в пределах диапазона изменений  $T_c$ , имеется возможность «включения» и «выключения» сверхпроводимости в системе за счет переворота направления намагниченности слоя F1 или F2. Вычисления показывают, что критическая температура  $T_c^{\text{AP}}$  при антипараллельной ( $\mathbf{M}_1 \uparrow\downarrow \mathbf{M}_2$ ) ориентации намагниченностей F1 и F2 должны быть выше, чем критическая температура  $T_c^{\text{P}}$  в противоположном случае ( $\mathbf{M}_1 \uparrow\uparrow \mathbf{M}_2$ ) [10; 21; 22; 136]. При таком соотношении критических температур ( $T_c^{\text{P}} < T_c^{\text{AP}}$ ) как об обычном эффекте спинового клапана (см., например, [137]), и переключение в этом случае происходит при температурах  $T$  таких, что  $T_c^{\text{P}} < T < T_c^{\text{AP}}$ . Основная физическая причина разницы  $\Delta T_c = T_c^{\text{AP}} - T_c^{\text{P}} > 0$  — частичная компенсация параразрушающих обменных полей ферромагнетиков в случае антипараллельных намагниченностей слоев F1 и F2.

Несколько экспериментальных групп опубликовали результаты, полученные для спиновых клапанов F1/S/F2 типа [137–146]. Экспериментальные результаты оказались противоречивыми. В некоторых работах обнаружен обычный эффект спинового клапана [137–141]. Максимальная величина эффекта  $\Delta T_c \approx 41$  мК была получена в структуре Ni/Nb/Ni в работе [140]. В то же время некоторые эксперименты показали «обратный» эффект спинового клапана [142–144; 146], при котором  $T_c^{\text{P}} > T_c^{\text{AP}}$  (т.е.  $\Delta T_c < 0$ ). Наиболее полные вычисления в рамках теории эффекта близости, в которых учитываются триплетные сверхпроводящие компоненты [11; 39], всегда приводят к обычному эффекту [136; 147], причём  $T_c$  монотонно растёт при изменении конфигурации от P к AP [136]. Для объяснения обратного эффекта спинового клапана в исследованных структурах F1/S/F2-типа приходится привлекать дополнительные физические механизмы, такие как спиновый разбаланс [142; 144] или магнитная доменная структура [143; 145].

Несколько ранее F1/S/F2-структур в качестве спинового клапана была теоретически предложена структура другого типа, S/F1/F2 [148], в которой  $T_c$  можно регулировать взаимной ориентацией намагниченностей двух *соседних* ферромагнитных слоев. Авторы работы [148] утверждали, что в такой системе должно быть  $T_c^{\text{P}} < T_c^{\text{AP}}$  из-за частичной компенсации обменных полей внутри магнитной подсистемы F1/F2. Таким образом, был предсказан обычный эффект спинового клапана, так же как и в чередующихся F1/S/F2 структурах.

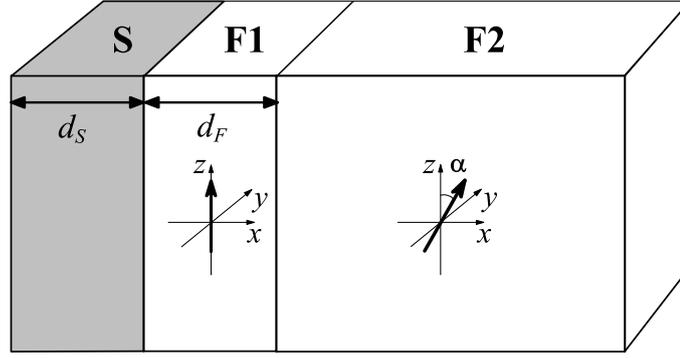


Рисунок 2.1 — Трёхслойная S/F1/F2 структура. Граница S/F1 соответствует  $x = 0$ . Жирные стрелки в F слоях обозначают обменные поля  $\mathbf{h}$ , лежащие в плоскости  $(y, z)$ . Угол между обменными полями, лежащими в плоскости слоев, обозначен  $\alpha$ .

Экспериментально структуры типа S/F1/F2 исследованы хуже [141; 149], и в экспериментах наблюдался обычный эффект [148] с максимальной величиной 200 мК. В данной главе мы изучим критическую температуру системы S/F1/F2 при произвольном угле между намагниченностями ферромагнитных слоев (см. рисунок 2.1). Будет показано, что в этой структуре возможен не только обычный, но также и обратный эффект спинового клапана. Более того, показано, что минимальная критическая температура  $T_c^{\text{Tr}}$  достигается при неколлинеарной ориентации намагниченностей, когда в системе генерируется ДТК. Поскольку  $T_c^{\text{Tr}}$  оказывается меньше, чем  $T_c^{\text{P}}$  и  $T_c^{\text{AP}}$ , это означает возможность реализации «триплетного» спинового клапана.

## 2.1.2 Постановка задачи

Рассматривается структура S/F1/F2 в грязном пределе, в котором применимы уравнения Узаделя. Вблизи  $T_c$  уравнения Узаделя можно линеаризовать, и они содержат только аномальную функцию Грина  $\check{f}$  [11; 39]:

$$\frac{D}{2} \frac{d^2 \check{f}}{dx^2} - |\omega| \check{f} - \frac{i \operatorname{sgn} \omega}{2} \{ \hat{\tau}_0(\mathbf{h}\hat{\sigma}), \check{f} \} + \Delta \hat{\tau}_1 \hat{\sigma}_0 = 0. \quad (2.1)$$

Здесь  $\check{f}$  — матрица  $4 \times 4$ , а  $\hat{\tau}_i$  и  $\hat{\sigma}_i$  — матрицы Паули в пространстве Намбу-Горькова и спиновом пространстве соответственно. Обменное поле в среднем F1 слое направлено вдоль  $z$ ,  $\mathbf{h} = (0, 0, h)$ , а во внешнем F2 слое лежит в плоскости  $yz$ :  $\mathbf{h} = (0, h \sin \alpha, h \cos \alpha)$ . Угол  $\alpha$  меняется от 0 (параллельная конфигурация, P) до  $\pi$  (антипараллельная конфигурация, AP). Параметр порядка  $\Delta$  — вещественная функция, принимающая ненулевые значения в сверхпроводнике и обращающаяся в ноль в ферромагнитных слоях. Для того, чтобы продемонстрировать принципиальный эффект в зависимости  $T_c(\alpha)$ , мы начинаем с упрощённой модели, в которой коэффициенты диффузии одинаковы во всех слоях, границы прозрачны, а обменные поля в двух F слоях одинаковы по модулю. В дальнейшем эта модель будет обобщена.

Функцию Грина  $\check{f}$  можно разложить на следующие компоненты:

$$\check{f} = \hat{\tau}_1 (f_0 \hat{\sigma}_0 + f_3 \hat{\sigma}_3 + f_2 \hat{\sigma}_2), \quad (2.2)$$

где  $f_0$  — синглетная компонента,  $f_3$  — триплет с нулевой проекцией на ось  $z$ ,  $f_2$  — триплет с проекцией  $\pm 1$  на ось  $z$  (эта последняя компонента возникает только при  $\alpha \neq 0, \pi$ ). Синглетная компонента чётна по частоте (и вещественна), тогда как триплетные компоненты нечётны (и являются чисто мнимыми):  $f_0(-\omega) = f_0(\omega)$ ,  $f_3(-\omega) = -f_3(\omega)$ ,  $f_2(-\omega) = -f_2(\omega)$ , поэтому достаточно рассмотреть лишь положительные мацубаровские частоты,  $\omega > 0$ .

Как будет показано ниже, задача о нахождении  $T_c$  может быть сведена к системе уравнений только на синглетную компоненту в S слое: эта система включает в себя уравнение самосогласования и уравнение Узаделя:

$$\Delta \ln \frac{T_{cS}}{T_c} = 2\pi T_c \sum_{\omega > 0} \left( \frac{\Delta}{\omega} - f_0 \right), \quad (2.3)$$

$$\frac{D}{2} \frac{d^2 f_0}{dx^2} - \omega f_0 + \Delta = 0, \quad (2.4)$$

с граничными условиями

$$\left. \frac{df_0}{dx} \right|_{x=-d_S} = 0, \quad -\xi \left. \frac{df_0}{dx} \right|_{x=0} = W f_0 \Big|_{x=0}. \quad (2.5)$$

Здесь  $T_{cS}$  и  $\xi = \sqrt{D/2\pi T_{cS}}$  — критическая температура и длина когерентности для изолированного S слоя, и мы предполагаем, что S слой занимает область  $-d_S < x < 0$  (см. рисунок 2.1). Для решение задачи такого типа в работах [150; 151] были развиты многомодовый метод и метод фундаментального решения, которые затем применялись для изучения спиновых клапанов типа F1/S/F2 в работе [136]. Единственная специфика нашей нынешней задачи состоит в выражении для величины  $W$  в формуле (2.5) — эту величину нам нужно найти, решив граничную задачу для системы S/F1/F2.

### 2.1.3 Решение

Для упрощения нашего рассмотрения и демонстрации эффекта мы сначала рассмотрим случай, когда средний F1 слой имеет произвольную толщину ( $0 < x < d_F$ ), а внешний слой F2 — полубесконечный ( $d_F < x < \infty$ ). Уравнение Узаделя (2.1) содержит два характерных волновых вектора:

$$k_\omega = \sqrt{\frac{2\omega}{D}}, \quad k_h = \sqrt{\frac{h}{D}}, \quad \tilde{k}_h = \sqrt{k_\omega^2 + 2ik_h^2}. \quad (2.6)$$

Решение в S слое содержит только  $k_\omega$ , в то время как решения в F слоях определяются  $k_\omega$ ,  $\tilde{k}_h$  и  $\tilde{k}_h^*$ . Поскольку обменная энергия обычно больше, чем сверхпроводящие энергетические масштабы,  $h \gg T_c$ , мода, описываемая  $k_\omega$  в F слоях (она возникает при неколлинеарных

намагниченностях) представляет собой дальнедействующую триплетную компоненту (ДТК) [11; 39], играющую ключевую роль в рассматриваемой задаче.

Решение уравнения (2.1) в S слое имеет вид

$$\begin{pmatrix} f_0(x) \\ f_3(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ A \\ B \end{pmatrix} \frac{\cosh(k_\omega(x + d_S))}{\cosh(k_\omega d_S)}. \quad (2.7)$$

Синглетную компоненту  $f_0(x)$  в S слое нельзя выписать явно, поскольку уравнение самосогласования «зацепляет» её за (неизвестный заранее) параметр порядка  $\Delta(x)$ , как это видно из уравнений (2.3)-(2.4). Наша стратегия состоит в получении эффективного граничного условия (2.5) для  $f_0(x)$  после исключения остальных компонент во всех трёх слоях.

В среднем слое F1 решение уравнения (2.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_0(x) \\ f_3(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} &= C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cosh(k_\omega x) + S_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sinh(k_\omega x) + \\ &+ C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cosh(\tilde{k}_h x) + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cosh(\tilde{k}_h^* x) + \\ &+ S_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sinh(\tilde{k}_h x) + S_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sinh(\tilde{k}_h^* x). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Наконец, решение в полубесконечном внешнем слое F2 содержит только убывающие моды:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_0(x) \\ f_3(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} &= E_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \exp(-k_\omega(x - d_F)) + \\ &+ E_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \exp(-\tilde{k}_h(x - d_F)) + E_3 \begin{pmatrix} -1 \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \exp(-\tilde{k}_h^*(x - d_F)). \end{aligned} \quad (2.9)$$

В случае идеальных прозрачных S/F1 и F1/F2 границ ( $\gamma = 1$  и  $\gamma_B = 0$  в обозначениях работы [55]) граничные условия имеют вид

$$f_i|_{\text{left}} = f_i|_{\text{right}}, \quad \left. \frac{df_i}{dx} \right|_{\text{left}} = \left. \frac{df_i}{dx} \right|_{\text{right}}. \quad (2.10)$$

Всего имеется 12 граничных условий на двух границах (S/F1 и F1/F2). Одно из них определяет производную синглетной компоненты на S стороне S/F1 границы ( $x = 0$ ):

$$\left. \frac{df_0}{dx} \right|_{x=0} = 2 \operatorname{Re}(\tilde{k}_h S_2). \quad (2.11)$$

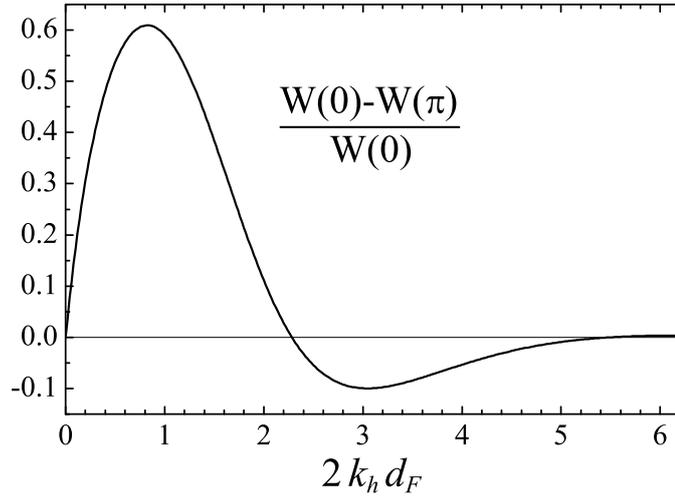


Рисунок 2.2 — Зависимость  $W(0) - W(\pi)$  [см. формулу (2.12)] от толщины F1 слоя  $d_F$ .

Положительные значения этой осциллирующей функции означают более сильное подавление сверхпроводимости в P конфигурации (обычный эффект спинового клапана), тогда как отрицательные значения означают более сильное подавление сверхпроводимости в AP конфигурации (обратный эффект спинового клапана).

Оставшиеся 11 граничных условий образуют систему из 11 линейных уравнений на 11 коэффициентов, входящих в формулы (2.7)-(2.9). Система неоднородна из-за наличия величины  $f_0(0)$ , возникающей из формулы (2.7) и входящей в правую часть системы уравнений. Находя коэффициент  $S_2$  [который пропорционален  $f_0(0)$ ], мы подставляем его в формулу (2.11) и таким образом явно находим величину  $W$ , входящую в эффективные граничные условия (2.5).

#### 2.1.4 Анализ полученного решения

После сведения задачи к уравнениям (2.3)-(2.5) вся информация о двух F слоях содержится в единственной вещественной функции  $W$ , зависящей от параметров системы. Даже без вычисления критической температуры мы можем судить о её поведении в зависимости от параметров, зная поведение  $W$ . Действительно, наличие  $W$  в граничных условиях приводит к подавлению  $f_0(x)$  вблизи S/F1 границы, поэтому чем больше  $W$ , тем сильнее подавлена  $T_c$ .

Явное выражение для  $W(\alpha)$  может быть получено прямолинейно (как описано выше), однако оно весьма громоздко, и по этой причине мы его не выписываем. В то же время некоторые особенности поведения системы можно рассмотреть аналитически, а также возможен полный численный анализ задачи. Для аналитического рассмотрения мы делаем дополнительное предположение  $T_c \ll h$ , что означает  $k_w \ll k_h$ . Для коллинеарных случаев ( $\alpha = 0$  и  $\alpha = \pi$ ) получаем  $W(0) = 2k_h\xi$  и

$$W(0) - W(\pi) = 2k_h\xi \frac{\sqrt{2} \sin(2k_h d_F + \pi/4) - e^{-2k_h d_F}}{\sinh(2k_h d_F) + \cos(2k_h d_F)}. \quad (2.12)$$

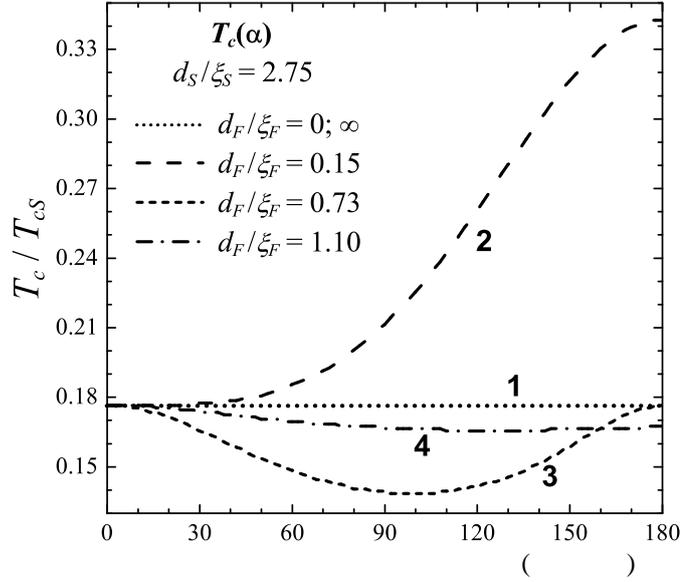


Рисунок 2.3 — Критическая температура  $T_c$  в зависимости от угла  $\alpha$  между намагниченностями для различных толщин F1 слоя. Мы взяли  $h/\pi T_{cS} = 6.8$ ; все остальные параметры указаны на рисунке. В случаях  $d_F = 0$  и  $d_F = \infty$ , которые физически эквивалентны (кривая 1),  $T_c$  не зависит от  $\alpha$ . Кривые 2 и 4 демонстрируют обычный и обратный эффект спинового клапана соответственно. Кривая 3 демонстрирует триплетный эффект спинового клапана. Длины когерентности  $\xi_S$  и  $\xi_F$  были взяты равными (в тексте обозначены  $\xi$ ), чтобы продемонстрировать основные результаты в простейшем возможном случае. При  $\alpha = 0$  все кривые совпадают, т.к. в этом случае F часть системы физически эквивалентна единому полубесконечному F слою.

Это выражение осциллирует как функция  $d_F$ , меняя знак (см. рисунок 2.2). Таким образом, в результате интерференции в среднем F1 слое, мы можем получить как обычный эффект спинового клапана с  $T_c^P < T_c^{AP}$  [при этом сверхпроводимость подавляется сильнее в P конфигурации, т.е.  $W(0) - W(\pi) > 0$ , как это происходит в интервале  $2k_h d_F < 3\pi/4$  на рисунке 2.2], так и обратный эффект спинового клапана с  $T_c^P < T_c^{AP}$  [при  $W(0) - W(\pi) > 0$ , как это происходит в интервале  $3\pi/4 < 2k_h d_F < 7\pi/4$  на рисунке 2.2]. Обратим внимание, что амплитуда обратного эффекта заметно меньше обычного. Аналитическое вычисление вторых производных  $W(\alpha)$  при  $\alpha = 0$  и  $\pi$  (первые производные равны нулю) показывает, что в наших предположениях обе коллинеарные ориентации соответствуют локальным минимумам  $W(\alpha)$ . Это означает, что  $T_c(\alpha)$  убывает при отклонении конфигурации от P или AP. Следовательно,  $T_c(\alpha)$  является немонотонной функцией, и минимум  $T_c$  должен достигаться при некоторой неколлинеарной ориентации, т.е. при  $\alpha \neq 0, \pi$ .

Аналитические результаты, полученные при  $k_\omega \ll k_h$ , могут быть проиллюстрированы и дополнены численным счётом при произвольном соотношении между  $k_\omega$  и  $k_h$ . Рисунок 2.3 показывает зависимость критической температуры системы  $T_c$  от угла  $\alpha$  между намагниченностями. Как видно, при малых толщинах  $d_F$  среднего ферромагнитного слоя F1 эффект переключения является обычным, тогда как при больших  $d_F$  он становится обратным ( $T_c^P > T_c^{AP}$ ). Более того, когда толщина F1 слоя примерно равна половине длины

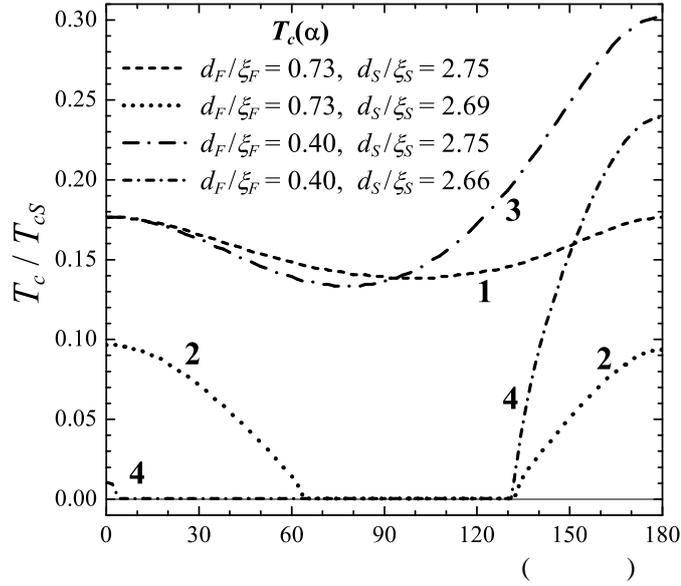


Рисунок 2.4 —  $T_c(\alpha)$  при различных  $d_F$  и  $d_S$ . Кривая 1 совпадает с кривой 3 рисунка 2.3. Кривые 2 и 4 демонстрируют возвратное поведение — в этом случае триплетный эффект спинового клапана имеет место даже при  $T = 0$ .

когерентности  $\xi$ , минимальная критическая температура  $T_c^{\text{Tr}}$  при неколлинеарной ориентации значительно ниже, чем и  $T_c^{\text{P}}$ , и  $T_c^{\text{AP}}$  — этот случай соответствует триплетному эффекту спинового клапана. Обратим внимание, что в зависимости от параметров системы минимум  $T_c(\alpha)$ , предсказанный аналитически, может сдвигаться в окрестность  $\alpha = 0$  или  $\alpha = \pi$ , становясь очень мелким и трудноразличимым.

Рисунок 2.4 демонстрирует возможность возвратного поведения  $T_c(\alpha)$ . В этой ситуации триплетный эффект спинового клапана имеет место даже при  $T = 0$ .

### 2.1.5 Обсуждение

Дадим физическую интерпретацию триплетного эффекта спинового клапана. При коллинеарных ориентациях как синглетная компонента аномальной функции Грина  $f_0$ , так и триплетные компоненты с нулевой проекцией  $f_3$  являются короткодействующими (их характерная глубина проникновения в F слой — порядка  $k_h^{-1}$ ). В этом случае при  $k_h^{-1} \ll d_F$  средний слой F1 «экранирует» S слой от ферромагнитного полупространства F2. Когда же конфигурация отклоняется от одной из коллинеарных, в системе генерируется ДТК  $f_2$  [11; 39]. Тогда S слой начинает «чувствовать» полубесконечный слой F2 за счет этой компоненты. Параразрушающий эффект в S слое усиливается, поэтому  $T_c$  подавляется сильнее. Другими словами, можно сказать, что подавление  $T_c$  обусловлено «утечкой» куперовских пар в ферромагнитную часть. На этом языке генерация ДТК открывает дополнительный канал такой утечки, поэтому  $T_c$  подавляется сильнее.

Чтобы подтвердить эту качественную картину более количественными аргументами, мы можем найти амплитуды различных компонент на S/F1 границе в пределе  $k_\omega \ll k_h$  и большого  $d_F$ . Это можно проделать аналитически, стартуя с граничных условий, которые образуют линейную систему уравнений на коэффициенты, входящие в формулы (2.7)-(2.9). Оказывается, что в пределе  $d_F \gg k_\omega^{-1}, k_h^{-1}$  амплитуды ДТК вблизи S/F1 границы (они даются коэффициентами  $C_1$ ,  $S_1$  и  $B$ ) подавлены множителем  $e^{-k_\omega d_F - k_h d_F}$ , имеющим ясный физический смысл. ДТК генерируются из короткодействующих компонент на F1/F2 границе (т.е. при  $x = d_F$ ), где электроны «чувствуют» неоднородность намагниченности. Поэтому ДТК на S/F1 границе получается в результате распространения «волны», которая идет от S/F1 границы как короткодействующая компонента с волновым вектором  $k_h$  и возвращается после отражения от F1/F2 границы как ДТК с волновым вектором  $k_\omega$ . В то же время уравнение самосогласования (2.3), определяющее  $T_c$ , содержит только синглетную короткодействующую компоненту. Следовательно, влияние ДТК на  $T_c$  — не прямое: ДТК влияют на  $T_c$  только посредством влияния на синглетную компоненту. В то время как разность между  $W$  (в которой содержится информация о подавлении  $T_c$ ) для P и AP случаев подавляется как  $e^{-2k_h d_F}$  (короткодействующие компоненты идут от S/F1 до F1/F2 границы и обратно), изменения  $W$  при неколлинеарных намагниченностях содержат ту же самую экспоненту,  $e^{-2k_h d_F}$ . Конечно, влияние ДТК содержится в префакторах, но дальнедействующие экспоненты (с  $k_\omega$  вместо  $k_h$ ) не появляются в выражениях для  $W$ , поскольку  $W$  по-прежнему возникает из короткодействующей компоненты.

Аналогично системе S/F1/F2, ДТК также возникает при неколлинеарных намагниченностях в трёхслойных системах типа F1/S/F2, исследовавшихся как теоретически, так и экспериментально [136; 152; 153]. На первый взгляд, системы качественно похожи и те же самые аргументы о дополнительном подавлении  $T_c$  из-за утечки куперовских пар в дальнедействующий триплетный канал применимы и к системам типа F1/S/F2. Однако это подавление в системе такого типа оказывается «замыто» более простым эффектом частичной взаимной компенсации обменных полей двух F слоев при непараллельных ориентациях. Этот эффект оказывается самым важным в геометрии F1/S/F2 (т.к. компенсация происходит как раз в S области, разделяющей ферромагнетики) и его монотонный характер приводит к монотонной зависимости  $T_c(\alpha)$  [136; 152; 153]. С другой стороны, в геометрии S/F1/F2 внешний слой F2 отведен от S слоя, поэтому взаимная компенсация обменных полей имеет гораздо меньшее влияние на сверхпроводимость. Именно поэтому геометрия S/F1/F2 предпочтительна для изучения нетривиального влияния триплетных компонент на  $T_c(\alpha)$ .

## 2.1.6 Заключение

В этом разделе мы рассмотрели мезоскопическую структуру типа S/F1/F2, содержащую сверхпроводящий слой S, ферромагнитный слой произвольной толщины F1 и ферромагнитное полупространство F2. Было показано, что эта структура может иметь

различные соотношения между критическими температурами для параллельной и антипараллельной конфигураций: возможен как обычный ( $T_c^P < T_c^{AP}$ ), так и обратный ( $T_c^P > T_c^{AP}$ ) эффект спинового клапана в зависимости от параметров системы. Кроме того,  $T_c^{Tr}$  при неколлинеарных ориентациях оказывается меньше, чем  $T_c^P$  и  $T_c^{AP}$ , что означает эффект триплетного спинового клапана. Экспериментальные наблюдения немонотонного (как кривая 4 на рисунке 2.3 или кривые 1 и 3 на рисунке 2.4) или даже возвратного (как кривые 2 и 4 на рисунке 2.4) поведения  $T_c(\alpha)$  стали бы свидетельством существования дальнедействующих триплетных сверхпроводящих корреляций [11; 39] в гибридных SF структурах.

Вскоре после предсказания возможности смены обычного на обратный эффект спинового клапана в S/F1/F2 структурах, этот эффект был обнаружен экспериментально [154; 155].

Триплетный эффект спинового клапана также был экспериментально обнаружен и исследован, что потребовало дальнейшего развития теории. Этому посвящён следующий раздел.

## 2.2 Теоретический анализ экспериментов по реализации триплетного спинового клапана

### 2.2.1 Введение

Вскоре после теоретического предсказания эффекта спинового клапана (см. предыдущий раздел) последовала серия экспериментов, в которых этот эффект был обнаружен и весьма подробно исследован. Эксперименты были проведены совместной группой проф. И.А. Гарифулина (Казань) и проф. Бюхнера (Дрезден, Германия). Полученные экспериментальные данные потребовали теоретического анализа (на основе результатов, изложенных в предыдущем разделе), а также дальнейшего развития теории. Этому и посвящён данный раздел. Все экспериментальные данные принадлежат указанным экспериментальным группам и не являются результатами диссертации.

Сразу следует отметить, что не все предположения, при которых построена теория, выполнены в реальных экспериментах. Поэтому цель теоретического анализа состоит не в точной количественной подгонке результатов, а в воспроизведении и объяснении основных качественных особенностей.

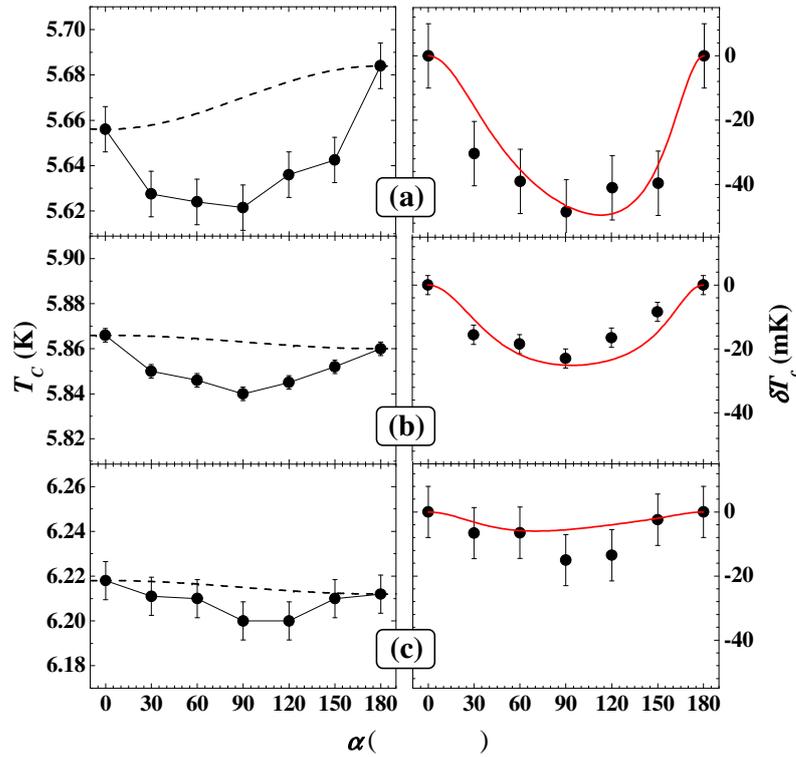


Рисунок 2.5 — Зависимость  $T_c(\alpha)$  в системах Pb(35 нм)/Fe1( $d_{\text{Fe1}}$ )/Cu(4 нм)/Fe2(2.5 нм) при (a)  $d_{\text{Fe2}} = 0.6$  нм, (b) 1.0 нм и (c) 1.5 нм. Штриховые линии показывают референсные кривые, полученные согласно формуле (2.13). Правая сторона: отклонения  $\delta T_c$  измеренных значений  $T_c$  от соответствующих референсных кривых. Сплошные кривые — теоретические результаты для  $\delta W$ . [Экспериментальные данные не являются результатом данной диссертации и приведены с целью сравнения с теорией.]

### 2.2.2 Анализ данных по спиновым клапанам Pb/Fe/Fe

Впервые триплетный эффект спинового клапана был экспериментально продемонстрирован в системе на основе свинца (S) и железа (F). Система имела конфигурацию Pb/Fe1/Cu/Fe2/CoO<sub>x</sub>. Тонкий слой меди между двумя слоями железа был введен для магнитного «развязывания» двух ферромагнетиков. Антиферромагнитная подложка CoO<sub>x</sub> приводит к магнитному зацеплению внешнего слоя железа (Fe2), оставляя намагниченность среднего слоя железа (Fe1) свободной. Таким образом, слабым магнитным полем можно вращать намагниченность Fe1, не влияя на намагниченность Fe2. Толщина слоя чистой меди в эксперименте была равна 4 нм, что много меньше длины когерентности, поэтому с точки зрения теории эффекта близости наличием этого слоя можно пренебречь.

Эксперименты на системах Pb(35 нм)/Fe1( $d_{\text{Fe1}}$ )/Cu(4 нм)/Fe2(2.5 нм) продемонстрировали немонотонную зависимость  $T_c(\alpha)$  с минимумом при некоторой неколлинеарной ориентации намагниченностей двух слоев железа, см. рисунок 2.5.

Проанализируем экспериментальные данные и покажем, что характерный минимум зависимости  $T_c(\alpha)$  вблизи  $\alpha = 90^\circ$  является признаком наличия ДТК в системе. Хотя ДТК

неизбежно возникают при неколлинеарных ориентациях намагниченностей, мы можем попробовать провести наивное рассуждение, забыв о них на время. Тогда следовало бы ожидать монотонной зависимости  $T_c(\alpha)$ . Из симметричных соображений, при отклонении  $\alpha$  от 0 и  $\pi$ , функция  $T_c(\alpha)$  должна вести себя как  $\alpha^2$  и  $(\pi - \alpha)^2$  соответственно. Тогда логично было бы предположить зависящую от угла суперпозицию двух предельных значений  $T_c$ :

$$T_c^{(\text{ref})}(\alpha) = T_c^{\text{P}} \cos^2(\alpha/2) + T_c^{\text{AP}} \sin^2(\alpha/2). \quad (2.13)$$

Эти зависимости показаны на рисунках 2.5(a), (b) и (c) (левая сторона) штриховыми кривыми, и мы считаем их референсными кривыми (как объяснено выше, они являются наивными ожидаемыми результатами в пренебрежении ДТК). Угловые зависимости отклонений  $\delta T_c$  фактических значений  $T_c$  от референсных кривых показаны в правых частях рисунков 2.5(a), (b) и (c). Как обсуждалось в разделе 2.1, вся информация о магнитной части системы содержится в одном положительном параметре  $W(\alpha)$ . Поэтому зависимость  $\delta T_c(\alpha)$  должна коррелировать с отклонением  $W(\alpha)$  от референсной кривой (рост  $T_c$  соответствует уменьшению  $W$ ); референсную кривую для  $W$  в духе формулы (2.13), т.е. как  $W^{(\text{ref})}(\alpha) = W(0) \cos^2(\alpha/2) + W(\pi/2) \sin^2(\alpha/2)$ . Явное выражение для  $\delta W(\alpha)$  может быть получено методом, изложенным в разделе 2.1, однако результат оказывается весьма громоздким, поэтому мы его здесь не приводим. Для теоретического анализа мы используем параметры структуры, полученные из независимых экспериментов [155]: ферми-скорость в слоях железа  $v_F = 2 \cdot 10^8$  см/с; длина свободного пробега электронов проводимости в слоях железа  $l_f = 1.5$  нм; обменная энергия в слоях железа  $h = 0.85$  эВ. Правые части рисунка 2.5 демонстрируют хорошее качественное согласие между угловыми зависимостями  $T_c$  и  $W$ .

Зависимость максимального отклонения  $T_c$ , которое мы обозначаем  $\max \delta T_c$ , от толщины  $d_{\text{Fe1}}$  показана на рисунке 2.6. Поскольку максимальное значение  $\max \delta T_c$  достигается вблизи  $\alpha = \pi/2$ , зависимость, показанная на рисунке 2.6, близка к зависимости  $\delta T_c(\pi/2) = T_c(\pi/2) - [T_c(0) + T_c(\pi)]/2$  от  $d_{\text{Fe1}}$ . Эта зависимость должна коррелировать с поведением функции  $\delta W(\pi/2) = [W(0) + W(\pi)]/2 - W(\pi/2)$ , явное аналитическое выражение для которой получается в подходе, изложенном в разделе 2.1):

$$\frac{\delta W}{W(0)} = - \frac{\sqrt{2} \sin(2k_h d_{\text{Fe1}} + \pi/4) - e^{-2k_h d_{\text{Fe1}}}}{2 [\sinh(2k_h d_{\text{Fe1}}) + \cos(2k_h d_{\text{Fe1}})]} - \frac{4 [\sin^2(k_h d_{\text{Fe1}}) - 2k_\omega d_{\text{Fe1}}]}{e^{2k_h d_{\text{Fe1}}} - 2 + \sqrt{2} \cos(2k_h d_{\text{Fe1}} + \pi/4) + 4k_\omega/k_h}. \quad (2.14)$$

Формула (2.14) получена в предположениях  $k_\omega \ll k_h$  (что очевидно выполняется в реальных ферромагнетиках с  $T_c \ll h$ ),  $k_\omega d_{\text{Fe1}} \ll 1$  (в этом пределе триплетная компонента максимальна, поскольку её пространственное затухание пренебрежимо),  $k_\omega d_S \gtrsim 1$  (это означает, что S слой не слишком тонок и сверхпроводимость в нём сохраняется). Кривая, полученная по формуле (2.14), хорошо согласуется с экспериментальными результатами (рисунок 2.6), подтверждая, что рост/убывание  $T_c$  действительно коррелирует с убыванием/ростом  $W$ .

Если же ограничиться лишь рассмотрением двух коллинеарных конфигураций, то тем самым мы исключим из рассмотрения ДТК. На рисунке 2.7 показаны экспериментальные результаты для величины эффекта спинового клапана  $\Delta T_c = T_c^{\text{AP}} - T_c^{\text{P}}$  в зависимости от толщины слоя Fe1. В диапазоне  $d_{\text{Fe1}} < 0.95$  нм наблюдается обычный эффект ( $T_c^{\text{P}} < T_c^{\text{AP}}$ ),

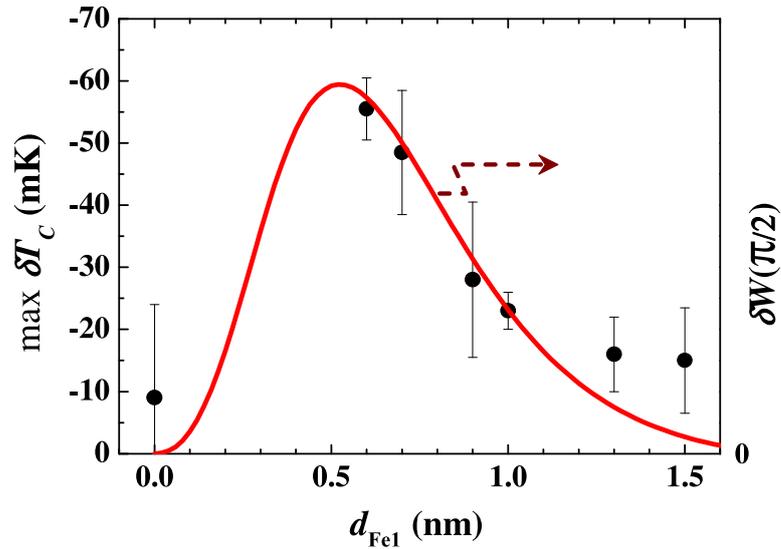


Рисунок 2.6 — Зависимость максимального отклонения  $T_c$ , которое мы обозначаем  $\max \delta T_c$ , от толщины слоя Fe1. Сплошная кривая — теоретический результат для зависимости  $\delta W(\pi/2)$  согласно формуле (2.14). [Экспериментальные данные не являются результатом данной диссертации и приведены с целью сравнения с теорией.]

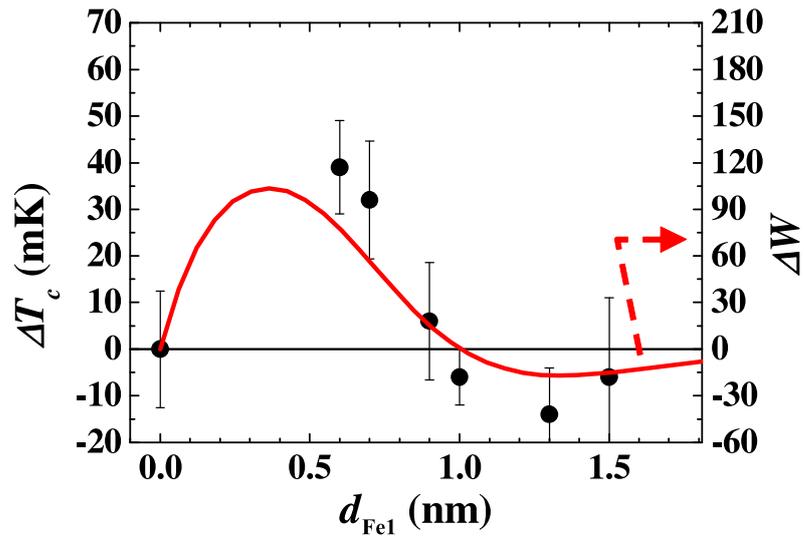


Рисунок 2.7 — Зависимость величины эффекта спинового клапана  $\Delta T_c$  от толщины слоя Fe1 в системе Pb(35 нм)/Fe1( $d_{\text{Fe1}}$ )/Cu(4 нм)/Fe2(2.5 нм). Сплошная кривая — теоретический результат для величины  $\Delta W$ . [Экспериментальные данные не являются результатом данной диссертации и приведены с целью сравнения с теорией.]

в то время как для образцов  $d_{\text{Fe1}} > 0.95$  нм обнаруживается обратный эффект спинового клапана ( $T_c^{\text{P}} > T_c^{\text{AP}}$ ). Эти результаты также являются экспериментальным подтверждением теории, представленной в разделе 2.1.

Сплошной кривой на рисунке 2.7 показаны теоретические результаты для  $\Delta W = W(0) - W(\pi)$ . Видно, что, как и предсказывает теория, имеется качественное согласие поведения  $\Delta T_c$  и  $\Delta W$ .

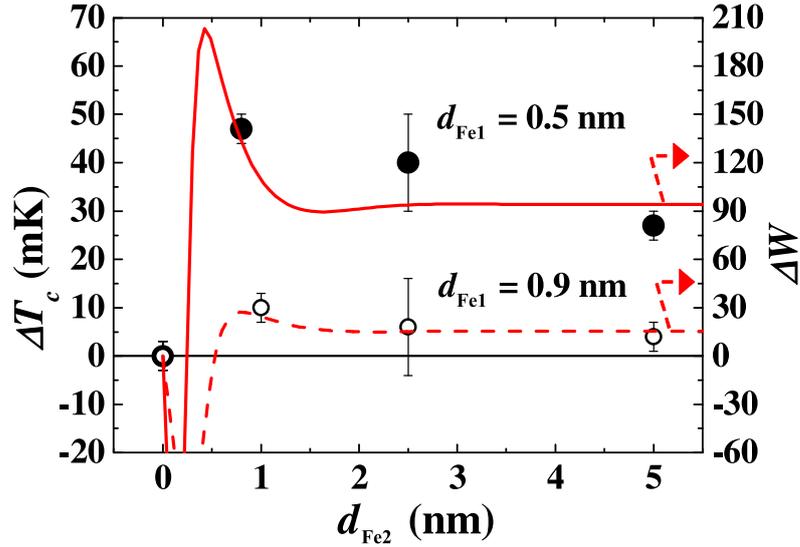


Рисунок 2.8 — Зависимость  $\Delta T_c = T_c^{\text{AP}} - T_c^{\text{P}}$  от толщины слоя Fe2  $d_{\text{Fe}2}$  для серии образцов с  $d_{\text{Fe}1} = 0.5 \text{ нм}$  (●) и  $0.9 \text{ нм}$  (○) при  $d_{\text{Pb}} = 35 \text{ нм}$ . Сплошная и штриховая кривые — теоретические результаты для  $\Delta W$ . [Экспериментальные данные не являются результатом данной диссертации и приведены с целью сравнения с теорией.]

Следующим направлением экспериментальной деятельности групп проф. И.А. Гарифуллина и проф. Б. Бюхнера явилась оптимизация параметров системы (с точки зрения работы в режиме спинового клапана) по толщине внешнего слоя железа Fe2. Предыдущие результаты соответствовали пределу, в котором  $d_{\text{Fe}2}$  в несколько раз превышало характерную обменную длину когерентности  $\xi_h \equiv k_h^{-1}$  — это с хорошей точностью соответствовало теоретическому предположению о полубесконечном внешнем ферромагнитном слое. Теперь же были получены новые данные, показанные на рисунке 2.8: величина эффекта спинового клапана  $\Delta T_c = T_c^{\text{AP}} - T_c^{\text{P}}$  в зависимости от толщины слоя Fe2 при двух различных толщинах слоя Fe1. Оказалось, что величина  $\Delta T_c$  может быть увеличена по сравнению с пределом Fe2 слоя большой толщины.

Как видно из рисунка, зависимости  $\Delta T_c(d_{\text{Fe}2})$  имеют максимум при  $d_{\text{Fe}2}$  порядка 1 нм или меньше. Максимум  $\Delta T_c(d_{\text{Fe}2})$  можно связать с эффектом компенсации обменных полей в области контакта между слоями Fe1 и Fe2, который имеет место при почти равных толщинах слоев. С ростом  $d_{\text{Fe}1}$  величина эффекта спинового клапана уменьшается. Это происходит потому, что глубина проникновения куперовских пар в слой железа имеет порядок  $\xi_h \simeq 0.8 \text{ нм}$  [156]. Таким образом, лишь малая доля всех куперовских пар может распространиться через слой Fe1 и испытать действие обменного поля слоя Fe2.

Проанализируем экспериментальные результаты, показанные на рисунке 2.8 в рамках теории эффекта близости. Для этого необходимо расширить теорию, изложенную в разделе 2.1 на случай произвольной толщины внешнего F слоя (Fe2). Наиболее полная формулировка решения задачи о  $T_c$  S/F/F системы приведена в приложении Б. В частности, из неё следуют результаты, которые мы сейчас обсудим.

В случае Р конфигурации задача эффективно сводится к S/F системе с одним F слоем толщины  $d_{\text{Fe1}} + d_{\text{Fe2}}$ . В этом случае мы воспроизводим результат работы [151]:

$$W^{\text{P}} = 2k_h \xi \frac{\sigma_F}{\sigma_S} \frac{\cosh(d_1 + d_2) - \cos(d_1 + d_2)}{\sinh(d_1 + d_2) - \sin(d_1 + d_2) + 2\kappa \tanh(k_\omega d_S)}, \quad (2.15)$$

где

$$d_1 = 2k_h d_{\text{Fe1}}, \quad d_2 = 2k_h d_{\text{Fe2}}, \quad \kappa = \frac{\sigma_S k_\omega}{\sigma_F k_h}. \quad (2.16)$$

Мы предполагаем, что отношение  $T_c/h$  достаточно мало, так что  $\kappa \ll 1$ .

В случае AP конфигурации мы получаем обобщение результатов раздела 2.1 на случай конечной  $d_{\text{Fe2}}$  (также мы учитываем разную степень беспорядка в S и F слоях, так что коэффициенты диффузии и удельные проводимости,  $D_S$ ,  $\sigma_S$  и  $D_F$ ,  $\sigma_F$  теперь различны). В результате

$$W^{\text{AP}} = 2k_h \xi \frac{\sigma_F}{\sigma_S} \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{D}}, \quad (2.17)$$

где числитель и знаменатель последней дроби имеют вид

$$\mathcal{N} = \cosh d_1 \cosh d_2 - \cos d_1 \cos d_2 - \sin d_1 \sinh d_2 - \sinh d_1 \sin d_2, \quad (2.18)$$

$$\mathcal{D} = \sinh d_1 \cosh d_2 + \cos d_1 \sinh d_2 - \cosh d_1 \sin d_2 - \sin d_1 \cos d_2 + 2\kappa \tanh(k_\omega d_S). \quad (2.19)$$

Как показывает рисунок 2.8, между измеренной величиной  $\Delta T_c$  и вычисленной  $\Delta W$  имеется качественное согласие. В вычислениях использовалось значение  $\kappa = 0.009$ .

Обсудим качественную картину, позволяющую понять зависимость эффекта спинового клапана от  $d_{\text{Fe2}}$ , имея в виду, что  $\xi_h$  является глубиной проникновения сверхпроводящих корреляций в ферромагнетик. При параллельной ориентации два F слоя действуют как единый слой, до некоторой степени подавляя сверхпроводимость в S части. Эффект спинового клапана связан с частичной взаимной компенсацией обменных полей двух F слоев, когда они образуют AP конфигурацию. Следует ожидать, что эффект будет максимален в случае, когда компенсация наиболее эффективна, что должно иметь место при  $d_{\text{Fe1}} \sim d_{\text{Fe2}}$ , если  $d_{\text{Fe1}} < \xi_h$ . Если же  $d_{\text{Fe1}} > \xi_h$ , это условие должно быть модифицировано, т.к. внешний слой такой же толщины  $d_{\text{Fe2}} > \xi_h$  не может полностью участвовать в эффекте компенсации. Эффективной оказывается лишь его часть, имеющая толщину порядка  $\xi_h$ , поэтому в этом случае мы ожидаем наибольший эффект спинового клапана при  $d_{\text{Fe2}} \sim \xi_h$ . Представленные выше теоретические результаты для  $\Delta W$  подтверждают эту качественную картину, а экспериментальные данные, показанные на рисунке 2.8, соответствующие  $\xi_h \approx 0.8$  нм, с ними согласуются. Заметим также, что теория предсказывает особенности при очень малых  $d_{\text{Fe2}}$  (из-за интерференционных эффектов в F части), однако, мы не будем уделять им внимания, т.к. эти толщины слишком малы с точки зрения эксперимента.

Дальнейшее развитие экспериментов по спиновым клапанам типа Pb/Fe/Fe оказалось связано с модификацией границы между слоями свинца и железа. Хотя первые эксперименты показали, что система действительно реализует теоретически предсказанные эффекты, образцы оказывались неустойчивыми и деградировали с течением времени, предположительно в результате интердиффузии между двумя слоями. Эта проблема была решена введением

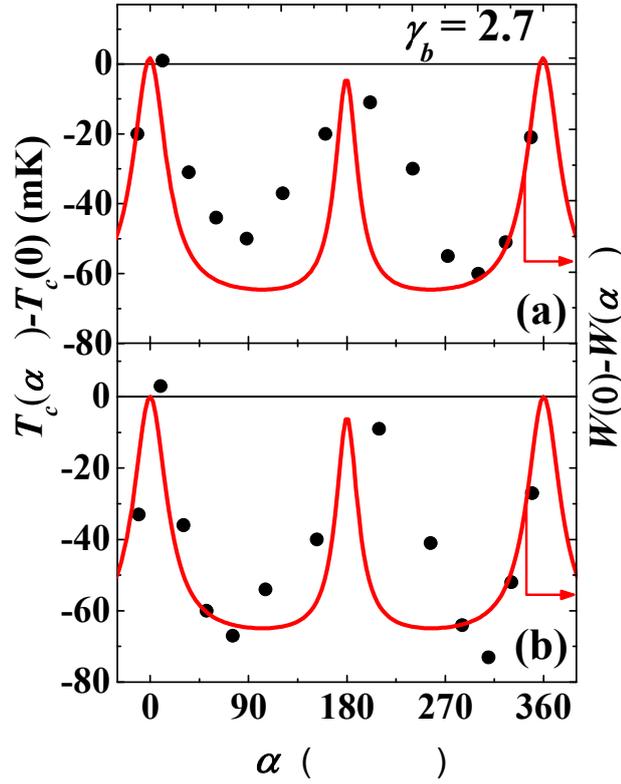


Рисунок 2.9 — Зависимость  $T_c(\alpha) - T_c(0)$  в образце Pb(60)/Cu(1.2)/Fe1(0.8)/Cu(4)/Fe(3)/CoO<sub>x</sub>(2.5) для случаев вращающего поля (а) 500 Э и (б) 1 Э. Сплошные красные кривые показывают теоретические зависимости  $W(0) - W(\alpha)$ . [Экспериментальные данные не являются результатом данной диссертации и приведены с целью сравнения с теорией.]

дополнительного тонкого слоя меди между слоями Pb и Fe (оказалось также, что в результате существенно уже по температуре становится сверхпроводящий переход, что является преимуществом с точки зрения возможных применений). В результате была получена структура Pb(60)/Cu(1.2)/Fe1(0.8)/Cu(4)/Fe(3)/CoO<sub>x</sub>(2.5) (толщины приведены в нанометрах).

На рисунке 2.9 показаны зависимости  $T_c(\alpha)$ , отсчитанные от критической температуры в Р конфигурации ( $T_c(0)$ ). Эксперимент четко демонстрирует триплетный эффект спинового клапана с минимумом  $T_c(\alpha)$  при неколлинеарной ориентации намагниченностей.

С точки зрения теории, добавленный между Pb и Fe слой меди толщиной 1.2 нм очень мал по сравнению с длиной когерентности меди, поэтому как отдельный слой его можно не учитывать, однако же его наличие является мотивацией к рассмотрению S/F границы в более общих предположения, чем раньше.

Более общий подход с использованием граничных условий Куприянова-Лукичева оперирует двумя параметрами границы:

$$\gamma = \frac{\rho_S \xi_S}{\rho_F \xi_F}, \quad \gamma_b = \frac{R_b \mathcal{A}}{\rho_F \xi_F}. \quad (2.20)$$

Все материальные параметры образцов определяются из независимых транспортных измерений и данных по измерению критической толщины S слоя  $d_S^{\text{crit}}$  во вспомогательных двухслойных SF структурах. Для параметра  $\gamma$  получается значение  $\gamma = 0.78$ . Сопротивление

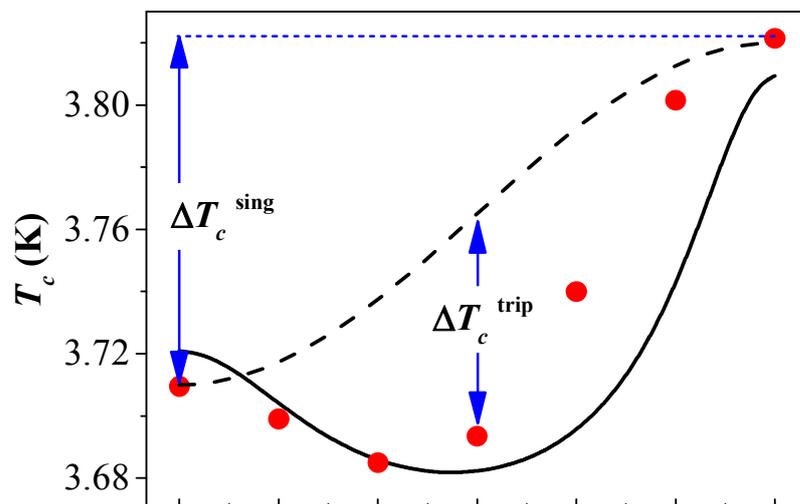


Рисунок 2.10 — Критическая температура  $T_c(\alpha)$  спинового клапана Рb(70)/Cu(2)/Pu(0.6)/Cu(4)/Pu(3). (кружки), референсная «синглетная» зависимость  $T_c^{(\text{ref})}(\alpha)$  в пренебрежении ДТК (штриховая кривая), и теоретический расчёт с учётом ДТК (сплошная кривая). [Экспериментальные данные не являются результатом данной диссертации и приведены с целью сравнения с теорией.]

границы крайне трудно измерить напрямую или извлечь из других измерений. Поэтому  $\gamma_b$  остаётся подгоночным параметром. Как показывает рисунок 2.9, при  $\gamma_b = 2.7$ , поведение  $T_c(\alpha) - T_c(0)$  качественно согласуется с поведением теоретической величины  $W(0) - W(\alpha)$ .

### 2.2.3 Анализ данных по спиновым клапанам Рb/Pu/Pu

Экспериментальными группами проф. И.А. Гарифуллина и проф. Б. Бюхнера были также проведены эксперименты на спиновых клапанах, в которых в качестве F материала был выбран пермаллой Pu, представляющий собой сплав  $\text{Ni}_{0.81}\text{Fe}_{0.19}$ .

На рисунке 2.10 показаны экспериментальные данные по измерению  $T_c(\alpha)$  на образце Рb(70)/Cu(2)/Pu(0.6)/Cu(4)/Pu(3)/ $\text{CoO}_x(3)$ . Рисунок показывает существенную роль ДТК в образце и триплетный эффект спинового клапана.

С точки зрения теории сейчас, в отличие от раздела 2.2.2, мы будем вычислять не просто входящую в граничные условия функцию  $W$ , по поведению которой можно судить о поведении  $T_c$ , но и непосредственно критическую температуру  $T_c$ . Результат вычисления показан сплошной кривой на рисунке 2.10. Был использован следующий набор параметров: сверхпроводящая длина когерентности в S и F слоях  $\xi_s = 41$  нм и  $\xi_f = 13$  нм; толщина S слоя  $d_s = 73.5$  нм; объёмная критическая температура S слоя  $T_{cs} = 7.2$  К; параметры S/F границы  $\gamma = 0.734$  и  $\gamma_b = 1.8$ ; обменное поле в F слоях  $h = 0.3$  эВ. Для теоретического описания оказалось необходимым взять  $d_{\text{Pu}1} = 0.3$  нм, что меньше номинальной толщины  $d_{\text{Pu}1} = 0.6$  нм. Причин такого расхождения может быть несколько. Во-первых, слой Pu1 зажат между двумя слоями меди. Из-за интердиффузии эффективная толщина ферромагнитного слоя может уменьшиться. Во-

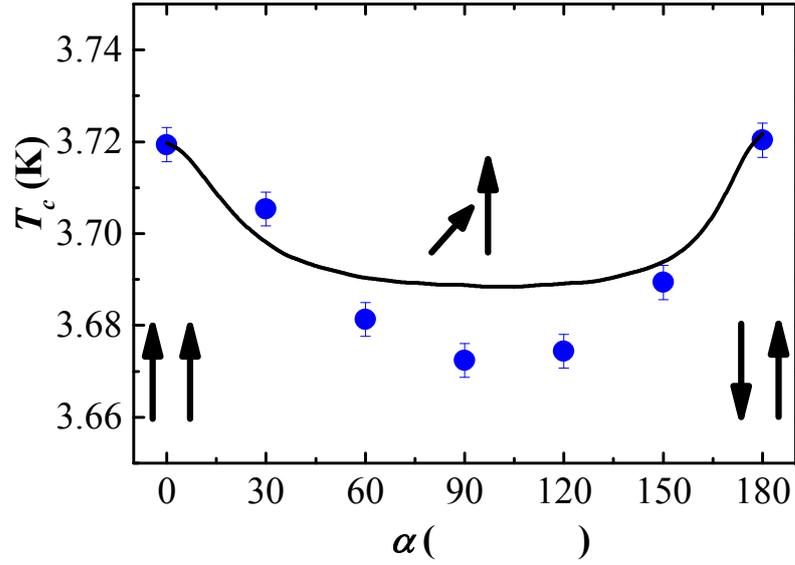


Рисунок 2.11 — «Изолированный» триплетный эффект спинового клапана в образце Рb(70)/Cu(2)/Рy(1.7)/Cu(4)/Рy(3) в отсутствие традиционного эффекта ( $T_c^{\text{AP}} = T_c^{\text{P}}$ ). Кружки — эксперимент, сплошная кривая — теория. [Экспериментальные данные не являются результатом данной диссертации и приведены с целью сравнения с теорией.]

вторых, ряд предположений теории может плохо выполняться в рассматриваемых системах (см. обсуждении в заключении). Компенсацией этого может быть модификация некоторых параметров. Как бы то ни было, рисунок 2.10 показывает, что теория удовлетворительным образом соответствует эксперименту при разумных значениях параметров.

Рисунок 2.10 свидетельствует о важной роли ДТК, но в то же время триплетный эффект спинового клапана (поведение при неколлинеарных намагниченностях) интерферирует с традиционным эффектом, связанным с коллинеарными ориентациями. В то же время, как мы уже знаем, амплитуда традиционного эффект может быть сделана равной нулю подстройкой толщины  $d_{F1}$  из-за осциллирующего характера зависимости  $\Delta T_c(d_{F1})$ . В структурах с железом в качестве F материала  $\Delta T_c$  обращалось в ноль при  $d_{Fe1} \simeq 0.8 \div 1$  нм. Анализ данных по зависимости  $T_c(d_{Py})$  позволяет сделать вывод, что глубина проникновения куперовских пар в Рy превышает аналогичное значение для Fe на 30%. Поэтому  $\Delta T_c = 0$  в образцах с Рy должно достигаться при  $d_{Py1} \sim 1 \div 1.7$  нм. Действительно, образец с  $d_{Py1} = 1.7$  демонстрирует «изолированный» триплетный эффект спинового клапана, см. рисунок 2.11.

Видно, что традиционный эффект спинового клапана отсутствует,  $\Delta T_c = T_c^{\text{AP}} - T_c^{\text{P}} = 0$ . В то же время при неколлинеарных ориентациях намагниченностей Рy1 и Рy2 слоев зависимость  $T_c(\alpha)$  имеет минимум. В соответствии с результатами раздела 2.1 на этом образце амплитуда  $\Delta T_c^{\text{trip}}$  меньше, чем на образце с рисунка 2.10 из-за большей толщины  $d_{Py1}$ . Дело в том, что ДТК генерируется в результате того, что куперовские пары, выходя из сверхпроводника и проходя через слой Рy1, достигают слоя Рy2. В результате более толстый слой Рy1 подавляет как синглетную компоненту, так и ДТК, которая генерируется из синглетной. Подгонка на рисунке 2.11 была сделана при тех же параметрах, что и на рисунке 2.10. Единственным различием была толщина  $d_{Py1}$ , взятая равной 1.7 нм.

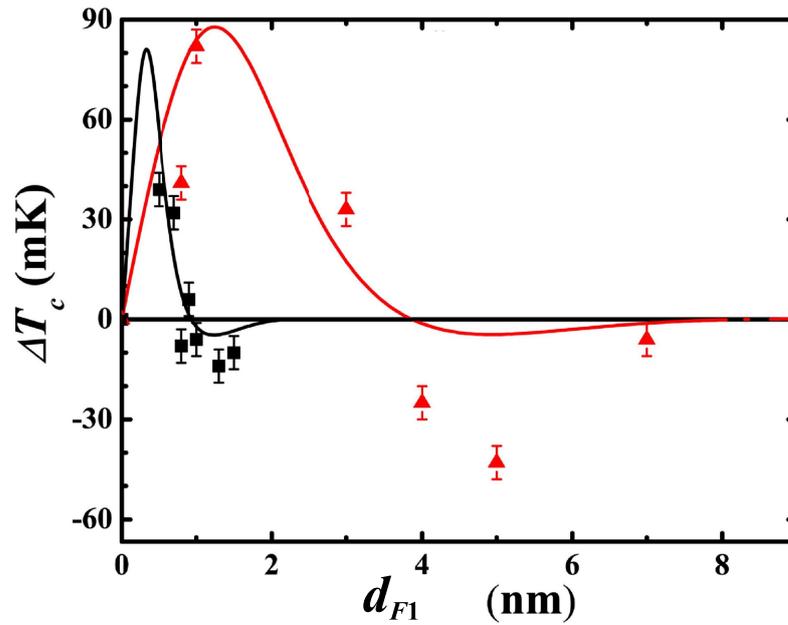


Рисунок 2.12 — Зависимость  $\Delta T_c = T_c^{\text{AP}} - T_c^{\text{P}}$  от  $d_{F1}$  в сверхпроводящих спиновых клапанах. Треугольниками показаны новые экспериментальные данные для  $\text{Pb}(50)/\text{Cu}(1.5)/\text{Co}_2\text{Cr}_{1-x}\text{Fe}_x\text{Al}_x/\text{Cu}(4)/\text{Pb}(5)$ . Для сравнения квадратами показаны также прежние результаты для структур  $\text{Pb}/\text{Cu}/\text{Fe1}/\text{Cu}/\text{Fe2}$ . Сплошная и штриховая кривые — теоретические результаты. [Экспериментальные данные не являются результатом данной диссертации и приведены с целью сравнения с теорией.]

#### 2.2.4 Анализ данных по спиновым клапанам $\text{Pb}/\text{Co}_2\text{Cr}_{1-x}\text{Fe}_x\text{Al}/\text{Pb}$

Интерес к сверхпроводящим спиновым клапанам в последнее время продолжает расти (см., например, обзор [157] и недавние публикации [158–163]). Для возможных применений спиновых клапана в устройствах микро- и нанoeлектроники желательно увеличение эффекта (амплитуда изменения  $T_c$ ) и ослабление условий на толщину слоев (возможность работать со слоями большей толщины облегчает технологический процесс).

С этой целью экспериментальной группой проф. И.А. Гарифуллина и проф. Б. Бюхнера были изготовлены и исследованы сверхпроводящие спиновые клапаны с использованием в качестве слоя F1 сплава Гейслера (Хойслера, сокращённо НА)  $\text{Co}_2\text{Cr}_{1-x}\text{Fe}_x\text{Al}$ . При определённых условиях изготовления [164] слой НА обладает существенно меньшим обменным полем по сравнению со слоем железа той же толщины.

Зависимость величины эффекта спинового клапана  $\Delta T_c$  от толщины слоя НА показана на рисунке 2.12. Наблюдается как обычный, так и обратный эффект спинового клапана (переход между ними происходит при толщине слоя F1 порядка 4 нм).

Эти экспериментальные данные потребовали дальнейшего развития теории сверхпроводящего спинового клапана. Требовалось обобщить ранее развитую теорию на случай различных материалов ферромагнитных слоев F1 и F2. Решение этой задачи представлено в приложении Б. Для построения теоретической кривой на рисунке 2.12) использовались

следующие параметры слоя НА:  $\rho_F = 130 \text{ мкОм}\cdot\text{см}$ ,  $l_F = 6.41 \text{ нм}$ ,  $D_F = 21.4 \text{ см}^2/\text{с}$ ,  $\xi_F = 14 \text{ нм}$ ,  $\xi_h = 1.25 \text{ нм}$ . Параметры S/F границы были выбраны следующим образом:  $\gamma = 0.03$ ,  $\gamma_b = 0.37$ .

И эксперимент, и теория показывают, что использование НА даёт явное преимущество в плане характерных толщин слоев. Из-за относительно малой величины обменного поля ( $h^{\text{НА}} \sim 0.2 \text{ эВ}$  [164]), характерные пространственные масштабы зависимости  $T_c(d_{F1})$  увеличиваются, что облегчает изготовление и экспериментальный контроль таких структур. Теория правильно объясняет качественные особенности эксперимента.

## 2.2.5 Заключение

Теоретические предсказания, сформулированные в разделе 2.1, были подтверждены экспериментально. Эксперимент продемонстрировал как триплетный эффект спинового клапана, так и возможность смены знака традиционного эффекта (переключение с обычного на обратный эффект спинового клапана). Для анализа экспериментов первоначальная упрощённая теория была обобщена.

Теория, основанная на использовании уравнений Узаделя, требует выполнения условий грязного предела и слабого ферромагнетизма. Это означает, что обменная энергия в ферромагнетиках должна быть мала как по сравнению с энергией Ферми, так и по сравнению с обратным временем свободного пробега. В проанализированных выше экспериментах последнее условие либо находится на границе применимости, либо не выполняется. Поэтому целью теоретического анализа являлась не количественная подгонка экспериментальных данных, а качественное объяснение наблюдающихся особенностей. С этой целью сформулированная теория успешно справилась.

Отметим также, что хотя уравнения Узаделя, на основании которых построена теория, формально неприменимы в случае сильных ферромагнетиков, зачастую оказывается, что таким образом удаётся хорошо описать реальные эксперименты (см., например, [137; 140]).

## 2.3 Расщепление куперовских пар в баллистических ферромагнитных СКВИДах

### 2.3.1 Введение

В области, связанной с изучением сверхпроводимости, физика СКВИДов представляет собой направление, очень важное как с фундаментальной, так и с прикладной точки зрения

[165]. Принцип действия СКВИДа основан на интерференции между куперовскими парами, проходящими через два рукава, которые составляют кольцо интерферометра. Внешний магнитный поток через кольцо контролирует джозефсоновский ток, переносимый устройством; критический ток при этом периодичен с периодом, равным кванту потока  $\Phi_0 = \pi c/e$ . Наличие двух рукавов допускает, по крайней мере в принципе, процессы, в которых куперовская пара разделяется и два электрона проходят по двух различным рукавам (после чего опять объединяются в куперовскую пару). Процессы переноса заряда, включающие в себя расщепление пар, обычно характеризуются зависимостью критического тока от потока с удвоенной периодичностью,  $2\Phi_0$  [166–169].

Однако, процессы с расщеплёнными парами становятся существенны только если перенос нерасщеплённых куперовских пар подавлен. Роль расщепления может быть усилена фильтрацией по энергии или по спину внутри рукавов (посредством электрически подстраиваемых квантовых точек или ферромагнитных фильтров соответственно). Коррелированный транспорт через рукава таких многотерминальных систем изучался как теоретически [170–173], так и экспериментально [174–177]. Джозефсоновский ток через СКВИДы с двумя рукавами, содержащими квантовые точки (в которых кулоновская энергия препятствует прохождению нерасщеплённых куперовских пар), изучался теоретически в работах [166–168; 178] и недавно был реализован экспериментально [179].

Хотя основное внимание до сих пор уделялось схеме расщепления куперовских пар на основе квантовых точек, ферромагнитная реализация [171; 173] имеет ряд преимуществ. Полуметаллические (Н) ферромагнетики (которые уже используются в различных сверхпроводящих гибридных структурах [48; 180; 181]) должны приводить к высокой эффективности расщепления в силу абсолютной спиновой фильтрации (мы говорим о синглетных сверхпроводниках с противоположными направлениями спинов электронов в куперовской паре и не рассматриваем спин-активные границы, которые могли бы привести к конверсии синглет-триплет [109]). В то же время возможно изменение взаимной ориентации намагниченностей двух рукавов слабым внешним магнитным полем из-за различия (обусловленного геометрией) коэрцитивных сил ферромагнитных фильтров или из-за обменного смещения, приложенного к одному из рукавов (экспериментально было продемонстрировано, что такой метод может использоваться для непрерывного изменения угла разориентации [182]). Таким образом возникает дополнительная степень свободы, с помощью которой можно управлять устройством.

Зависимость расщепления куперовских пар от угла между намагниченностями рукавов изучалась экспериментально в SF системах [183; 184]. К сверхпроводнику были присоединены два ферромагнитных рукава F на малом расстоянии друг от друга, и к одному из рукавов прикладывалось напряжение. Это приводило к току в другом F рукаве из-за перекрестного андреевского отражения (являющегося еще одним проявлением расщепления куперовских пар). Ток был чувствителен к относительной ориентации намагниченностей.

Эффект Джозефсона в СКВИДах с магнитными рукавами ранее изучался теоретически в диффузном пределе [185; 186].<sup>1</sup> В этом случае усреднённый по беспорядку

<sup>1</sup>Результаты работы [185] были пересмотрены в работе [186].

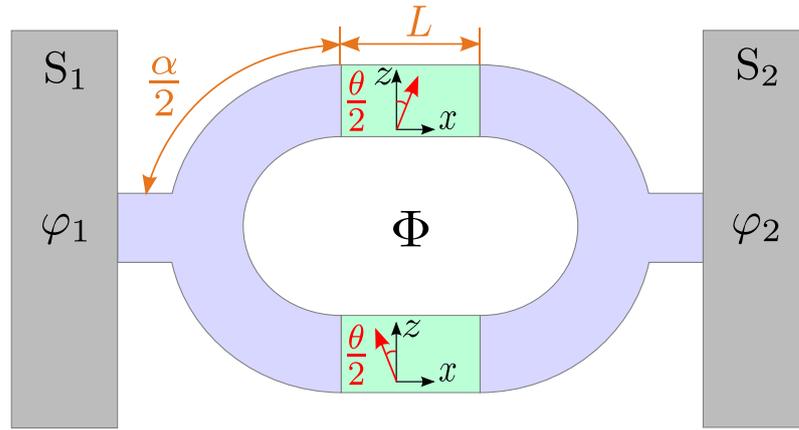


Рисунок 2.13 — Схема спин-фильтрующего ферромагнитного СКВИДа с расщеплением куперовских пар. Серые области  $S_{1,2}$  — синглетные сверхпроводящие резервуары, синие области — трёхтерминальные делители потока (нормальные провода), зелёные вставки — полуметаллические ферромагнетики (спиновые фильтры). Намагниченности фильтров (красные стрелки) лежат в плоскости  $xz$  и ориентированы симметрично относительно оси  $z$ , угол между ними равен  $\theta$ . Через интерферометр проходит магнитный поток  $\Phi$ .

Величины  $\alpha/2$  и  $L$  — фазы, набираемые квазичастицами при прохождении сегментов делителя и полуметаллических ферромагнитных фильтров.

джозефсоновский ток сильно подавлен из-за различных фаз, набираемых электронами, проходящими через разные рукава (разность фаз обусловлена различными конфигурациями беспорядка в рукавах) [187]. В то же время в конкретном образце этого подавления нет, поэтому ток через систему обусловлен, главным образом, мезоскопическими флуктуациями.

Ниже мы теоретически исследуем СКВИД со спиновой фильтрацией, приводящей к расщеплению куперовских пар, в противоположном пределе, когда рукава баллистические. Мы рассматриваем систему, схематически изображённую на рисунке 2.13. Два делителя потока обеспечивают возможность процессов расщепления куперовских пар, а две полуметаллические вставки (фильтры) запрещают процессы без расщепления (когда куперовская пара пытается пройти через один рукав как целое). Джозефсоновский ток через систему управляется двумя параметрами, которые в принципе можно менять в уже изготовленной системе: относительной ориентацией намагниченностей фильтров и магнитным потоком через кольцо интерферометра. Мы будем вычислять зависимость стационарного эффекта Джозефсона от этих параметров.

### 2.3.2 Постановка задачи

Рисунок 2.13 показывает разделение системы на блоки, которые могут быть описаны в рамках формализма матриц рассеяния [188; 189]. Слева направо это следующие блоки:  $S_1N$  граница (серая/синяя граница), левый делитель (синий), ферромагнитные спиновые

фильтры (зелёные), правый делитель (синий) и  $\text{NS}_2$  граница (синяя/серая). Два рукава интерферометра (верхний и нижний) предполагаются идентичными во всех отношениях кроме ориентации намагниченности спин-фильтрующих вставок. В отсутствии разности сверхпроводящих фаз  $\varphi$  система также предполагается симметричной в отношении лево-право.

Чтобы изучить механизмы джозефсоновского тока с расщеплёнными куперовскими парами в баллистических спин-фильтрующих СКВИДах, мы предположим, что делители и рукава сделаны из безотражательных одноканальных проводов, а ферромагнитные вставки — полуметаллические (т.е. обеспечивают абсолютную спиновую фильтрацию). Также мы предполагаем температуру равной нулю. Обратим внимание, что интерференционные эффекты в нормальном транспорте через одноканальные интерферометры изучаются уже в течение долгого времени [190; 191]. Наша цель — исследовать сверхтоки в аналогичных структурах.

Мы предполагаем предел короткого контакта, так что длина контакта (расстояние между сверхпроводниками) мала по сравнению с длиной когерентности  $\xi = v_F/\Delta$ ; в этом случае сверхток переносится только подщелевыми связанными состояниями в контакте [188]. Применяя уравнения Боголюбова – де Жена (БдЖ) в рамках формализма матриц рассеяния, мы будем сначала находить андреевский спектр  $E(\varphi)$ , а затем — джозефсоновский ток при нулевой температуре по формуле [188; 189]<sup>2</sup>

$$I(\varphi) = -e \sum_{E \in [0, \Delta]} \frac{dE}{d\varphi}. \quad (2.21)$$

Андреевские уровни должны быть найдены из спин-зависящих уравнений БдЖ [34]:

$$H_{\text{BdG}} \begin{pmatrix} u_{\uparrow} \\ u_{\downarrow} \\ v_{\uparrow} \\ v_{\downarrow} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u_{\uparrow} \\ u_{\downarrow} \\ v_{\uparrow} \\ v_{\downarrow} \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

где гамильтониан БдЖ

$$H_{\text{BdG}} = \begin{pmatrix} H_{\uparrow\uparrow} & H_{\uparrow\downarrow} & 0 & \Delta e^{i\varphi} \\ H_{\downarrow\uparrow} & H_{\downarrow\downarrow} & -\Delta e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & -\Delta e^{-i\varphi} & -H_{\uparrow\uparrow}^* & -H_{\uparrow\downarrow}^* \\ \Delta e^{-i\varphi} & 0 & -H_{\downarrow\uparrow}^* & -H_{\downarrow\downarrow}^* \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

действует в прямом произведении пространств частица-дырка и спиновом  $[(u, v)$  и  $(\uparrow, \downarrow)$  структура собственных состояний соответственно]. Здесь одночастичный гамильтониан  $H_{\alpha\beta}$  (действующий в спиновом пространстве), модуль параметра порядка  $\Delta$  и его фаза  $\varphi$  зависят от пространственных координат. Мы рассматриваем систему, в которой магнетизм (включенный в  $H_{\alpha\beta}$ ) и сверхпроводимость (описываемая  $\Delta$  и  $\varphi$ ) разделены в пространстве.

<sup>2</sup>В формуле (2.21) мы суммируем по всем физически различным андреевским состояниям. Если ферромагнетизм внутри контакта отсутствует, уровни вырождены по спину. Поскольку соответствующие спиновые состояния физически различны, каждый уровень будет участвовать в сумме дважды. В этом случае формула (2.21) может быть записана в том же виде, как в работах [188; 189].

Для системы, показанной на рисунке 2.13, одночастичный гамильтониан имеет вид

$$H_{\alpha\beta} = \left[ \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - E_F \right] \delta_{\alpha\beta} + U_{\alpha\beta}^{(\text{exch})}, \quad (2.24)$$

где  $E_F$  — энергия Ферми, а обменная часть  $U^{(\text{exch})}$  описывает два ферромагнитных рукава.

Хотя энергии элементарных возбуждений  $E$  должны быть положительны, зачастую удобно проводить рассуждения в рамках «полупроводниковой модели», в которой также существуют состояния с отрицательной энергией, которые заполнены в соответствии с распределением Ферми [123]. В этом отношении важно, что гамильтониан БдЖ (2.23) обладает электрон-дырочной симметрией

$$\{H_{\text{BdG}}, \mathcal{P}\} = 0, \quad (2.25)$$

где  $\{\cdot, \cdot\}$  обозначает антикоммутатор, а оператор симметрии есть  $\mathcal{P} = \sigma_x^{\text{PH}} \sigma_0^{\text{S}} \mathcal{K}$ . Здесь  $\mathcal{K}$  — оператор комплексного сопряжения, а матрицы Паули действуют в пространстве частица-дырка (PH) и в спиновом пространстве (S). Как следствие, собственные состояния всегда идут парами  $|\psi\rangle$  и  $\mathcal{P}|\psi\rangle$  с зеркально-симметричными энергиями  $\pm E$ .

Каждый блок нашей структуры должен быть описан соответствующей матрицей рассеяния, связывающей налетающее состояние  $(u_{\uparrow}, u_{\downarrow}, v_{\uparrow}, v_{\downarrow})^T$  с рассеянным [188; 189]. Для рассеивателя с несколькими терминалами, обозначенными  $a, b, \dots$ , мы определяем состояний рассеяния как

$$(u_{\uparrow a}, u_{\downarrow a}, u_{\uparrow b}, u_{\downarrow b}, \dots, v_{\uparrow a}, v_{\downarrow a}, v_{\uparrow b}, v_{\downarrow b}, \dots)^T. \quad (2.26)$$

Матрица рассеяния для  $n$ -терминального рассеивателя имеет размер  $4n \times 4n$ .

Внешние блоки нашей системы, см. рисунок 2.13 — это границы  $S_1N$  и  $NS_2$ , на которых квазичастицы с вероятностью один испытывают андреевское отражение. Каждая граница сама по себе описывается матрицей рассеяния  $4 \times 4$ , содержащей фазы отражения:

$$\Sigma_j = e^{-i\chi} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{i\varphi_j} \\ 0 & 0 & -e^{i\varphi_j} & 0 \\ 0 & -e^{-i\varphi_j} & 0 & 0 \\ e^{-i\varphi_j} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

где

$$\chi = \arccos \left( \frac{E}{\Delta} \right) \in [0, \pi], \quad (2.28)$$

$j = 1, 2$  нумерует сверхпроводящие резервуары, а  $\varphi_{1,2}$  — фаза сверхпроводящего параметра порядка в соответствующем резервуаре.

Рассматриваемые вместе, две SN границы образуют единый двухтерминальный рассеиватель. В базисе (2.26) соответствующая матрица рассеяния  $8 \times 8$  имеет следующий вид:

$$S_{\Sigma} = e^{-i\chi} \begin{pmatrix} 0 & S_{eh} \\ S_{he} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

где

$$S_{eh} = -S_{he}^* = \begin{pmatrix} i\sigma_y^S e^{i\varphi_1} & 0 \\ 0 & i\sigma_y^S e^{i\varphi_2} \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Оставшаяся часть структуры образована несверхпроводящими рассеивателями, в которых  $\Delta = 0$ . Описывать эти части удобно в базисе (2.26). Во-первых, поскольку электроны не перемешиваются с дырками в отсутствие сверхпроводимости, матрицы рассеяния блочно-диагональны в пространстве РН. Во-вторых, в пределе короткого контакта, разницей волновых векторов электронов и дырок можно пренебречь, следовательно, набираемые электронами и дырками фазы обратны друг другу. Поэтому электронный и дырочный блоки связаны просто комплексным сопряжением:

$$S_{\text{nonS}} = \begin{pmatrix} S_e & 0 \\ 0 & S_h \end{pmatrix}, \quad S_h = S_e^*. \quad (2.31)$$

Мы обсудим несверхпроводящие элементы нашей системы (делители и фильтры) в разделах 2.3.2 – 2.3.2.

## Делители потока

Квазичастица, андреевски отраженная от сверхпроводника, делится между двумя рукавами интерферометра. Мы описываем этот процесс с помощью трёхтерминальных делителей потока (голубые части на рисунке 2.13).

Матрица рассеяния делителя должна быть унитарной. Кроме того, мы выбираем такую калибровку, что векторный потенциал есть только внутри спиновых фильтров (зелёные части на рисунке 2.13). Поэтому внутри делителей имеется симметрия обращения времени, и матрица рассеяния симметрична.

Мы предполагаем геометрическую «Y симметрию» каждого делителя, что означает, что один из терминалов (тот, который присоединен к сверхпроводнику; номер 3) выделен, тогда как остальные два (присоединённые к рукавам интерферометра; номер 1 и 2) одинаковы. Ключевая часть матрицы рассеяния делителя — симметричная унитарная матрица  $Y$  размера  $3 \times 3$ , описывающая расщепление (бесспиновых) электронов между тремя терминалами. Y-симметрия тогда означает два независимых соотношения:  $Y_{11} = Y_{22}$  и  $Y_{13} = Y_{23}$ . Чтобы сконцентрироваться на процессах рассеяния куперовских пар, мы дополнительно предположим  $Y_{33} = 0$ , что означает, что приходящий из терминала 3 электрон не отражается, а только проходит в терминалы 1 и 2.

Наиболее общая форма матрицы рассеяния  $3 \times 3$ , удовлетворяющая вышеупомянутым условиям, параметризуется двумя вещественными фазами,  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$Y = \begin{pmatrix} -\frac{e^{i\alpha}}{2} & \frac{e^{i\alpha}}{2} & \frac{e^{i(\alpha/2+\beta)}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{i\alpha}}{2} & -\frac{e^{i\alpha}}{2} & \frac{e^{i(\alpha/2+\beta)}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{i(\alpha/2+\beta)}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{i(\alpha/2+\beta)}}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

Физически  $\alpha/2$  — фаза, набираемая электроном, движущимся по проводам терминалов 1 или 2 (см. рисунок 2.13), а  $\beta$  — аналогичная фаза для терминала 3.

Полная матрица рассеяния делителя, имеющая размер  $12 \times 12$  — это расширение матрицы  $Y$ , включающее в себя S и РН степени свободы. РН-структура соответствует виду, определяемому формулой (2.31). Поскольку в делителях нет обменных полей, матрица тривиально в спиновом пространстве, и её электронный блок имеет вид

$$S_{BS} = Y\sigma_0^S. \quad (2.33)$$

Все замкнутые квазичастичные траектории (ответственные за формирование андреевских уровней) включают в себя только целое число фаз  $2 \times \alpha/2 = \alpha$ , поэтому все физически различные значения  $\alpha$  лежат в интервале  $[0, 2\pi]$ .

Поскольку любой подщелевой электрон, налетающий из контакта 3 на SN границу, неизбежно андреевски отражается в дырку, и фазы, набираемые электроном и дыркой в проводе 3, компенсируют друг друга, фаза  $\beta$  не влияет на наши результаты и выпадает в процессе вычислений. Поэтому без ограничения общности можно положить  $\beta = 0$ .

## Спиновые фильтры

Для моделирования эффекта спиновой фильтрации в ферромагнетиках (зелёные вставки на рисунке 2.13), мы предполагаем спиновые фильтры идеальными (предел полуметаллических ферромагнетиков): налетающая квазичастица со спином  $\mathbf{s}$  вдоль направления  $\mathbf{n}$  намагниченности фильтра проходит без отражения. Для противоположного спина фильтр действует как бесконечно высокая стенка. На языке обменной энергии это означает

$$U^{(\text{exch})} = \begin{cases} 0, & \mathbf{s} \uparrow\uparrow \mathbf{n}, \\ \infty, & \mathbf{s} \uparrow\downarrow \mathbf{n}. \end{cases} \quad (2.34)$$

Каждый фильтр описывается матрицей рассеяния  $8 \times 8$ , РН-структура которой определяется формулой (2.31). Электронный блок  $4 \times 4$  имеет вид

$$S_F = \begin{pmatrix} r_{11} & t_{12} \\ t_{21} & r_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Блоки, описывающие отражение, имеют вид

$$r_{11} = r_{22} = R_{\mathbf{n}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R_{\mathbf{n}}^{-1}, \quad (2.36)$$

где матрица  $R_{\mathbf{n}}$  учитывает разрешённое направление спина с фильтре,  $\mathbf{n} = (\sin \Omega \cos \phi, \sin \Omega \sin \phi, \cos \Omega)$ :

$$R_{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\Omega}{2} & -e^{-i\phi} \sin \frac{\Omega}{2} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\Omega}{2} & \cos \frac{\Omega}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

В геометрии рисунка 2.13 мы имеем  $\phi = 0$ , при этом  $\Omega = \theta/2$  и  $\Omega = -\theta/2$  в верхнем и нижнем рукаве соответственно.

Блоки матрицы  $S_F$ , описывающие прохождение, для верхнего рукава имеют вид

$$t_{12}(\Phi) = t_{21}(-\Phi) = R_{\mathbf{n}} \begin{pmatrix} e^{i(L+\pi f/2)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R_{\mathbf{n}}^{-1}. \quad (2.38)$$

Здесь  $L$  — геометрическая фаза (пропорциональная длине фильтра), а  $\pi f/2$  — магнитная фаза, в которой  $f = \Phi/\Phi_0$  — безразмерный внешний поток (в нашей калибровке векторный потенциал отличен от нуля только внутри ферромагнитных вставок, где он равен  $\Phi/2L$ ). Для нижнего рукава знак магнитной фазы обратный.

Физически вышеприведённые матрицы означают, что в зависимости от спина, квазичастица либо проходит через фильтр, набрав фазу  $\pm(L \pm \pi f/2)$  (знаки соответствуют электронам/дыркам и верхнему/нижнему рукаву), либо отражается от бесконечно высокой стенки, получая фазу  $\pi$ .

В нашей модели введены две геометрические фазы,  $\alpha$  и  $L$ , определяемые длинами сегментов, относящихся к одному и тому же рукаву интерферометра. Это может показаться избыточным, однако их роль различна из-за нетривиальных интерференционных эффектов. Например, если мы попробуем избавиться от  $\alpha$ , положив  $\alpha = 0$ , кольцо интерферометра эффективно становится совершенно непрозрачным из-за деструктивной интерференции [190]. В то же время при  $L = 0$  поведение системы теряет многие характерные особенности. Поэтому мы будем сохранять обе фазы как геометрические параметры системы.

## Матрица рассеяния интерферометра

Объединяя матрицы рассеяния двух спиновых фильтров и двух делителей, мы находим матрицу рассеяния всего кольца интерферометра, имеющую размер  $8 \times 8$ :

$$S_{\text{interf}} = \begin{pmatrix} S_{ee} & 0 \\ 0 & S_{hh} \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Электронный и дырочный блок имеют следующую структуру:

$$S_{ee} = S_{hh}^* = \begin{pmatrix} r_{\uparrow} & r & t_{\uparrow} & t \\ -r & r_{\downarrow} & t & t_{\downarrow} \\ t_{\uparrow} & -t & r_{\uparrow} & -r \\ -t & t_{\downarrow} & r & r_{\downarrow} \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

при симметричных соотношениях между элементами:

$$\begin{aligned} r(-\Phi) &= -r(\Phi), & r_{\uparrow,\downarrow}(-\Phi) &= r_{\uparrow,\downarrow}(\Phi), \\ t(-\Phi) &= -t(\Phi), & t_{\uparrow,\downarrow}(-\Phi) &= t_{\uparrow,\downarrow}(\Phi). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Матричные элементы в формуле (2.40) получаются в нашем подходе прямолинейно, однако их явный вид громоздок, и мы не приводим здесь эти выражения.

### 2.3.3 Андреевские уровни

Вычислив матрицу рассеяния интерферометра, мы свели задачу к весьма общей формулировке, в которой несверхпроводящий [т.е. диагональный в РН-пространстве, см. формулу (2.39)] рассеиватель выступает в качестве джозефсоновской связи между двумя сверхпроводниками. В пределе короткого контакта, когда зависимостью матрицы рассеяния от энергии можно пренебречь, мы можем получить явные аналитические выражения для андреевских уровней внутри контакта в случае произвольного несверхпроводящей рассеивателя.

#### Общее аналитическое выражение

В этом разделе мы найдем андреевские уровни в случае произвольного несверхпроводящей рассеивателя между сверхпроводниками в пределе короткого контакта. Мы будем использовать обозначения формулы (2.39), однако вычисления ниже не привязаны к специфике нашей системы и требуют лишь условия диагональной РН структуры матрицы рассеяния и предела короткого контакта. В частности, матрица рассеяния может иметь произвольную спиновую структуру (из-за ферромагнетизма, спин-орбитального взаимодействия и т.д.).

Требую существования нетривиального решения задачи шивки состояний рассеяния (другими словами, существования собственного состояния  $H_{\text{BaG}}$ ) [188; 189], мы получаем спектральное уравнение

$$\det \left[ \hat{1}_{8 \times 8} - e^{-i\chi} \begin{pmatrix} 0 & S_{eh} \\ S_{he} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{ee} & 0 \\ 0 & S_{hh} \end{pmatrix} \right] = 0, \quad (2.42)$$

где  $S_{eh}$  и  $S_{he}$  даются формулой (2.30).

Вычисляя детерминант в РН-пространстве, мы можем переписать спектральное уравнение в виде

$$\det \left[ e^{2i\chi} \cdot \hat{1}_{4 \times 4} - S_{eh} S_{hh} S_{he} S_{ee} \right] = 0. \quad (2.43)$$

В этом уравнении энергия  $E$  андреевских уровней содержится в фазе  $\chi$  [см. формулу (2.28)]. Обозначая  $\lambda = e^{2i\chi}$ , мы видим, что для нахождения андреевских уровней нам необходимо найти собственные значения  $\lambda_{1, \dots, 4}$  матрицы  $M = S_{eh} S_{hh} S_{he} S_{ee}$  (здесь важно, что в силу условия короткого контакта  $M$  не зависит от  $E$ ).

Из-за симметрии БдЖ (2.25), андреевские уровни всегда идут парами  $\pm E$ , поэтому собственные значения  $M$  идут сопряжёнными парами:

$$\lambda_1 = \Lambda_1, \quad \lambda_2 = \Lambda_1^*, \quad \lambda_3 = \Lambda_2, \quad \lambda_4 = \Lambda_2^*, \quad (2.44)$$

где  $|\Lambda_{1,2}| = 1$  [эту структуру собственных значений можно явно увидеть из соотношений (2.30) и (2.31), означающих, что  $M$  — специальная унитарная матрица с  $\det M = 1$ ].

Собственные значения  $\Lambda_{1,2}$  могут быть найдены следующим образом. С одной стороны, прямое вычисление детерминанта даёт

$$\det \left[ \lambda \cdot \widehat{1}_{4 \times 4} - M \right] = \lambda^4 - \lambda^3 \cdot \text{tr } M + \dots + 1, \quad (2.45)$$

а с другой стороны, в терминах собственных значений мы можем написать

$$\begin{aligned} \det \left[ \lambda \cdot \widehat{1}_{4 \times 4} - M \right] &= (\lambda - \Lambda_1) (\lambda - \Lambda_1^*) (\lambda - \Lambda_2) (\lambda - \Lambda_2^*) \\ &= \lambda^4 - \lambda^3 \cdot (2 \text{Re } \Lambda_1 + 2 \text{Re } \Lambda_2) + \dots + 1. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Сравнивая коэффициенты перед  $\lambda^3$  и обозначая  $\mathcal{T} = \text{tr } M$ , получаем первое уравнение на  $\Lambda_{1,2}$ :

$$\mathcal{T} = 2 \text{Re } \Lambda_1 + 2 \text{Re } \Lambda_2. \quad (2.47)$$

Второе уравнение можно получить из формулы (2.46), если рассматривать  $\lambda$  как свободную переменную и положить, например,  $\lambda = i$ . Тогда, обозначая  $\mathcal{D} = \det \left[ i \cdot \widehat{1}_{4 \times 4} - M \right]$ , находим

$$\mathcal{D} = -4 \text{Re } \Lambda_1 \cdot \text{Re } \Lambda_2. \quad (2.48)$$

Выражая  $\text{Re } \Lambda_{1,2}$  из уравнений (2.47) и (2.48) и вспоминая, что  $\text{Re } \Lambda = \text{Re } e^{2ix} = 2(E/\Delta)^2 - 1$ , находим аналитическое выражения для двух положительных андреевских уровней:

$$E = \frac{\Delta}{2\sqrt{2}} \left[ \mathcal{T} + 4 \pm \sqrt{\mathcal{T}^2 + 4\mathcal{D}} \right]^{1/2}, \quad (2.49)$$

а два отрицательных уровня отличаются лишь знаком. В целом, вследствие предела короткого контакта, мы получили четыре андреевских уровня (тогда как в общем случае их число может быть больше и растёт с ростом длины контакта).

Формула (2.49) — общее выражение для андреевских уровней в случае произвольного несверхпроводящего рассеивателя в пределе короткого контакта. Чтобы продемонстрировать её связь с известными результатами, мы можем рассмотреть частный случай бесспиновой матрицы рассеяния,

$$S_{ee} = \begin{pmatrix} r_{ee} & t'_{ee} \\ t_{ee} & r'_{ee} \end{pmatrix} \sigma_0^S. \quad (2.50)$$

Это приводит к  $\mathcal{T}^2 + 4\mathcal{D} = 0$ , так что квадратный корень в формуле (2.49) пропадает, приводя к двукратному вырождению уровней. Рассматривая общий случай, в котором симметрия обращения времени может быть нарушена, так что  $t'_{ee} = t_{ee} e^{i\delta}$  с ненулевой  $\delta$ , находим

$$\mathcal{T} = 4 \left( 1 - 2T \sin^2 \frac{\varphi + \delta}{2} \right), \quad (2.51)$$

где  $T = |t_{ee}|^2$  — прозрачность канала. В результате формула (2.49) даёт

$$E = \Delta \left[ 1 - T \sin^2 \frac{\varphi + \delta}{2} \right]^{1/2}, \quad (2.52)$$

что в случае наличия симметрии обращения времени ( $\delta = 0$ ) воспроизводит известный результат для квантового точечного контакта (КТК) [188].

Ниже мы применим общее выражение для андреевского спектра (2.49) в коротком джозефсоновском контакте к СКВИД-системе, показанной на рисунке 2.13.

## Частные случаи

Зависимость андреевского спектра от управляющих параметров интерферометра  $\theta$  и  $\Phi$  показана на рисунках 2.14(а) и 2.14(с) при двух разных наборах геометрических параметров  $\alpha$  и  $L$ . Имея в виду рисунки 2.14(а) и 2.14(с), мы сначала представим и обсудим аналитические результаты для спектра в частных случаях, а затем обсудим численные результаты в общем случае.

**Параллельные намагниченности,  $\theta = 0$ .** Если намагниченности двух фильтров параллельны, андреевские уровни не зависят от  $\varphi$ , и транспорт куперовских пар полностью подавлен — сверхток равен нулю.

**Антипараллельные намагниченности,  $\theta = \pi$ .** Если спиновые фильтры ориентированы противоположно ( $\theta = \pi$ ), матрица рассеяния интерферометра (2.40) имеет следующую упрощённую структуру:

$$S_{ee} = \begin{pmatrix} r_0 \sigma_0^S & t_0 \exp(-i\sigma_x^S \frac{\pi f}{2}) \\ t_0 \exp(i\sigma_x^S \frac{\pi f}{2}) & r_0 \sigma_0^S \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

где  $r_0$  и  $t_0$  — комплексные амплитуды отражения и прохождения.

Спиновая структура формулы (2.53) означает, что отражение тривиально по спину, а прохождение поворачивает спин на зависящий от потока угол  $\pi f$  вокруг оси  $x$  (которая коллинеарна направлениям намагниченностей при  $\theta = \pi$ ).

Вследствие этого вращения, андреевские состояния имеют «перекрученную» спиновую структуру. Электрон со спином вверх вблизи  $S_1$  переходит в электрон, повернутый на угол  $\pi f$  вблизи  $S_2$  (каждый электрон сопровождается соответствующей андреевски отраженной дыркой). В предельном случае нулевого магнитного потока,  $\Phi = 0$ , вращение отсутствует, тогда как при  $\Phi = \Phi_0$  угол вращения равен  $\pi$ , поэтому спины вблизи левого и правого сверхпроводников ( $S_1$  и  $S_2$ ) перевернуты по отношению друг к другу.

Хотя магнитный поток существенно влияет на структуру андреевских связанных состояний, он не влияет на спектр. Действительно, угол  $\pi f$  выпадает из произведения  $M = S_{eh}S_{hh}S_{he}S_{ee}$  [см. формулу (2.43)], поэтому магнитный поток не входит в окончательное выражение (2.49) для спектра. Физическая причина этого состоит в том, что электрон, повернутый после прохождения интерферометра, затем андреевски отражается, и при обратном прохождении дырка испытывает вращение, компенсирующее исходное. Поэтому при вычислении спектра можно для простоты положить  $\Phi = 0$ .

Далее, при  $\Phi = 0$  угол  $\pi f$  зануляется, и матрица рассеяния интерферометра (2.53) становится тривиальной по спину. Симметрия обращения времени тогда оказывается эффективно восстановленной, и спектр воспроизводит известный результат для джозефсоновского контакта через КТК [188] [аналогично формулам (2.50)–(2.52) с  $\delta = 0$ ]. Действительно, из

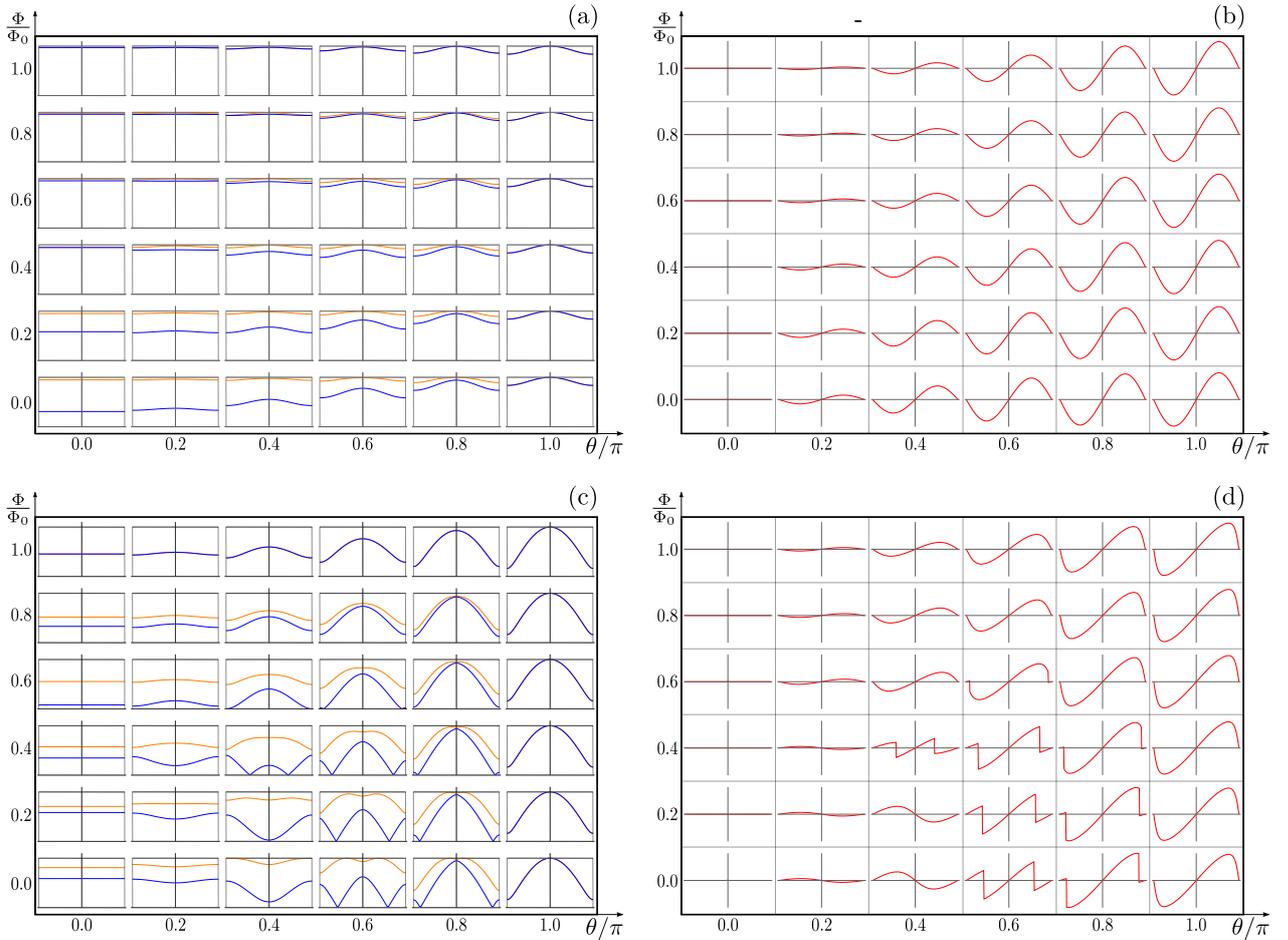


Рисунок 2.14 — Зависимость андреевского спектра [(a) и (c)] и ток-фазового соотношения [(b) и (d)] от угла  $\theta$  между намагниченностями фильтров и от магнитного потока  $\Phi$  для двух различных наборов геометрических параметров (верхний и нижний ряд). Каждый график состоит из многих «плиток», каждая из которых построена при значениях  $\theta$  и  $\Phi$ , соответствующих положению плитки на графике. В каждой плитке горизонтальная ось — разность фаз  $\varphi \in [-\pi, \pi]$ . Вертикальная ось — энергия ( $E \in [0, \Delta]$ ) и сверхток  $I$  (в единицах максимального критического тока  $I_c^{\max}$  для данной геометрии) для левой и правой колонки соответственно. Зависимость от  $\Phi$  имеет период  $2\Phi_0$ . Показаны только два положительных андреевских уровня (два отрицательных отличаются лишь знаком). Для некоторых геометрий поведение довольно простое [см. (a) и (b), соответствующие  $\alpha = 0.25\pi$  и  $L = 0.8\pi$ ]: при убывании  $\theta$  андреевские уровни становятся более плоскими, и критический ток убывает, обращаясь в ноль при параллельных намагниченностях. Для некоторых геометрий поведение гораздо более сложное [см. (c) и (d),  $\alpha = 0.5\pi$ ,  $L = 0.4\pi$ ]: при уменьшении  $\theta$  уровни могут пересекать ноль, что приводит к разрывам ток-фазового соотношения. При некоторых значениях  $\theta$  система имеет ток-фазовое соотношение типа  $\pi$ -контакта [например, при  $\theta = 0.4\pi$ ,  $\Phi = 0$  на графике (d)].

формулы (2.49) получается

$$E = \Delta \left[ 1 - T_0 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right]^{1/2}, \quad (2.54)$$

с эффективной прозрачностью  $T_0 = |t_0|^2$ , определяемой геометрическими параметрами системы:

$$T_0 = \frac{16 \sin^4 \frac{\alpha}{2}}{16 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 L + 4 \sin \left( 2L + \frac{3\alpha}{2} \right) \sin \frac{\alpha}{2}}. \quad (2.55)$$

**Нулевой поток,  $\Phi = 0$ .** Матрица рассеяния интерферометра нетривиальна по спину. В то же время, поскольку намагниченности фильтров выбраны симметричными относительно оси  $z$  (см. рисунок 2.13) и при  $\Phi = 0$  два рукава эквивалентны с точки зрения орбитального движения,  $z$ -компонента спина сохраняется. Действительно, матрица рассеяния интерферометра (2.40) принимает следующий вид:

$$S_{ee} = e^{iA} \begin{pmatrix} \rho_{\uparrow} & 0 & i\tau_{\uparrow} & 0 \\ 0 & \rho_{\downarrow} e^{i\Psi} & 0 & i\tau_{\downarrow} e^{i\Psi} \\ i\tau_{\uparrow} & 0 & \rho_{\uparrow} & 0 \\ 0 & i\tau_{\downarrow} e^{i\Psi} & 0 & \rho_{\downarrow} e^{i\Psi} \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

Здесь  $\rho_{\uparrow,\downarrow}$ ,  $\tau_{\uparrow,\downarrow}$ ,  $\Psi$  и  $A$  — вещественные величины, которые зависят от параметров системы  $\theta$ ,  $\alpha$  и  $L$ .

Коэффициенты  $\rho_{\uparrow,\downarrow}$  и  $\tau_{\uparrow,\downarrow}$  описывают отражение и прохождение (мы можем выбрать  $\rho_{\uparrow}$  и  $\rho_{\downarrow}$  положительными, тогда знаки  $\tau_{\uparrow}$  и  $\tau_{\downarrow}$  произвольны). Фаза  $\Psi$  — это разность между фазами, набираемыми электронами со спинов вверх и вниз при прохождении через интерферометр (амплитуда отражения имеет ту же фазу, что и соответствующая амплитуда прохождения, в силу унитарности). Фаза  $A$  — общая фаза всех матричных элементов; она не входит в окончательные формулы для спектра. Явные выражения для всех этих параметров могут быть найдены, но мы их не приводим по причине громоздкости.

Общее выражение (2.49) для андреевских уровней может быть записано в терминах новых параметров:

$$E = \frac{\Delta}{\sqrt{2}} \left[ 1 + (\rho_{\uparrow}\rho_{\downarrow} + \tau_{\uparrow}\tau_{\downarrow} \cos \varphi) \cos \Psi \pm \sin \Psi \sqrt{1 - (\rho_{\uparrow}\rho_{\downarrow} + \tau_{\uparrow}\tau_{\downarrow} \cos \varphi)^2} \right]^{1/2}. \quad (2.57)$$

В случае  $\Phi = 0$  и антипараллельных намагниченностей ( $\theta = \pi$ ), результат (2.57) должен согласовываться с формулами (2.54) и (2.55). В этом пределе параметры, определяющие матрицу рассеяния (2.56), принимают следующие значения:  $\rho_{\uparrow} = \rho_{\downarrow} = \sqrt{1 - T_0}$ ,  $\tau_{\uparrow} = \tau_{\downarrow} = \sqrt{T_0}$  и  $\Psi = 0$  (общая фаза  $A$  не входит в выражения для физических величин, поэтому мы её не пишем). В результате, формула (2.57) воспроизводит формулы (2.54) и (2.55).

**Поток  $\Phi = \Phi_0$ , соответствующий половине периода.** При  $\Phi = \Phi_0$  матрица рассеяния интерферометра (2.40) принимает следующий вид:

$$S_{ee} = e^{iB} \begin{pmatrix} \sqrt{1-\tau^2}e^{i\psi} & 0 & 0 & \tau \\ 0 & \sqrt{1-\tau^2}e^{-i\psi} & \tau & 0 \\ 0 & -\tau & \sqrt{1-\tau^2}e^{i\psi} & 0 \\ -\tau & 0 & 0 & \sqrt{1-\tau^2}e^{-i\psi} \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

Здесь  $\tau$ ,  $\psi$  и  $B$  вещественны:  $\tau$  определяет прозрачность системы,  $2\psi$  — разность фаз, набираемых спином вверх и спином вниз при отражении,  $B$  — общая фаза, которая не входит в выражения для спектра.

Интересно, что отражение сохраняет  $z$  компоненту спина, тогда как прохождение переворачивает её. Собственные состояния, таким образом, «перевернуты» по спину (в нелокальном смысле): имеется сектор с электроном со спином вверх вблизи  $S_1$  и спином вниз вблизи  $S_2$  плюс андреевски отраженные дырки, и второй сектор, в котором все спины противоположны (в предельном случае  $\theta = \pi$  это уже обсуждалось в случае  $\Phi = \Phi_0$ ). Это переворачивание спина эффективно восстанавливает спиновую симметрию: перевернутые секторы эквивалентны (даже при наличии выделенного  $z$  направления в конфигурации фильтров), поэтому уровни (2.49) становятся вырожденными.

В отличие от случая  $\theta = \pi$ , симметрия обращения времени теперь, вообще говоря, нарушена (т.е.  $S_{\text{interf}} \neq S_{\text{interf}}^T$ ) и система не сводится прямолинейным образом к джозефсоновскому КТК, который описывается формулой (2.54). Вместо этого, упрощая формулу (2.49), мы получаем

$$E = \Delta \left[ \cos^2 \psi + \tau^2 \sin^2 \psi - \tau^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right]^{1/2}. \quad (2.59)$$

В то же время этот результат можно привести к КТК-подобному виду

$$E = \Delta_{\text{eff}} \left[ 1 - T_{\text{eff}} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right]^{1/2}, \quad (2.60)$$

где

$$\Delta_{\text{eff}} = \Delta \sqrt{\cos^2 \psi + \tau^2 \sin^2 \psi}, \quad T_{\text{eff}} = \frac{\tau^2}{\cos^2 \psi + \tau^2 \sin^2 \psi}. \quad (2.61)$$

В терминах исходных параметров системы, мы получаем

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{eff}} = \Delta & \left\{ 16 \sin^4 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \left[ 1 + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]^2 \sin^2 L - 4 \left[ 1 + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin(\alpha+L) \sin L + 4 \sin^2(\alpha+L) \right\}^{1/2} \\ & \times \left\{ 8 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + 10 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \left( \frac{3\alpha}{2} + 2L \right) + \right. \\ & \left. + \sin^4 \frac{\theta}{2} \sin^2 L - 4 \cos \theta \sin L \sin \frac{\alpha}{2} \cos \left( \frac{3\alpha}{2} + L \right) \right\}^{-1/2}, \quad (2.62) \end{aligned}$$

$$T_{\text{eff}} = 16 \sin^4 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \left\{ 16 \sin^4 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \left[ 1 + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]^2 \sin^2 L - \right. \\ \left. - 4 \left[ 1 + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin(\alpha + L) \sin L + 4 \sin^2(\alpha + L) \right\}^{-1}. \quad (2.63)$$

Неидеальная прозрачность  $T_{\text{eff}}$ , обусловленная интерференционными эффектами, неудивительна. В то же время интересно, что величину  $T_{\text{eff}}$  можно подстраивать, меняя  $\theta$ , т.е. угол между спиновыми фильтрами. С другой стороны, эффективное подавление  $\Delta_{\text{eff}}$  в выражении для андреевских уровней (2.60) довольно неожиданно, поскольку настоящий параметр порядка  $\Delta$  в сверхпроводящих резервуарах никакого подавления не испытывает.

Можно убедиться, что при  $\theta = \pi$  полученные выражения согласуются с нашими предыдущими результатами. Действительно, при  $\theta = \pi$  мы получаем  $T_{\text{eff}} = T_0$  и  $\Delta_{\text{eff}} = \Delta$ , воспроизводя формулы (2.54) и (2.55). Поток  $\Phi = \Phi_0$  означает  $f = 1$ , поэтому спиновое перекручивание в формуле (2.53) сводится к спиновому переворачиванию (т.е. перекручиванию на  $\pi$ ).

## Численные результаты в общем случае

Частные случаи, рассмотренные в разделе 2.3.3 ( $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi$ ,  $\Phi = 0$  и  $\Phi_0 = \Phi_0$ ), соответствуют «плиткам», лежащим на периметре рисунков 2.14(a)-(d). В общем случае, соответствующем промежуточным значениям  $\theta$  и  $\Phi$ , общее аналитическое выражение (2.49) не упрощается. В то же время численные результаты рисунков 2.14(a) и 2.14(c) показывают, что качественно поведение андреевских уровней похоже то, что мы уже находили в частных случаях.

В целом, уменьшение угла  $\theta$  подавляет транспорт расщеплённых куперовских пар. В результате андреевские уровни становятся более плоскими, и в пределе параллельных фильтров зависимость от  $\varphi$  пропадает полностью.

Из графиков видно, что андреевские уровни могут пересекаться друг с другом в нуле [на рисунке 2.14(c) для положительной части спектра это выглядит как «галочка» при  $E = 0$ ]. Это возможно в силу симметрии БдЖ (2.25) гамильтониана  $H_{\text{BdG}}$ , из которой следует, что матричный элемент гамильтониана между состоянием  $|\psi\rangle$  с положительной энергией и его БдЖ-партнером  $\mathcal{P}|\psi\rangle$  с отрицательной энергией равен нулю  $\langle \psi | H_{\text{BdG}} | \mathcal{P}\psi \rangle = 0$ . Таким образом, положительный уровень не отталкивается от своего (отрицательного) зеркального отражения, поэтому уровни могут пересекаться при  $E = 0$ .

В то же время пересечение уровней при  $E = 0$  не является универсальным (защищённым симметрией БдЖ). Например, при  $\theta = \pi$  уровни вырождены по спину, и уровень с энергией  $E$  может отталкиваться не от своего БдЖ-партнера с энергией  $-E$ , а от физически отличного состояния с противоположным спином (которое также соответствует  $-E$ ). Это приводит к отталкиванию уровней при  $E = 0$ .

### 2.3.4 Джозефсоновский ток

#### Ток-фазовое соотношение

При нулевой температуре ток-фазовое соотношение СКВИДа  $I(\varphi)$  даётся формулой (2.21). В пределе короткого контакта в сумму в правой части формулы (2.21) дают вклад только два андреевских уровня, определяемых формулой (2.49) [см. примеры, показанные на рисунках 2.14(a) и 2.14(c)].

Зависимость ток-фазового соотношения  $I(\varphi)$  от угла  $\theta$  между намагниченностями спиновых фильтров и от магнитного потока  $\Phi$  существенно меняется в зависимости от геометрических параметров  $\alpha$  и  $L$  [сравните части (b) и (d) рисунков 2.14] в силу интерференционной природы транспорта куперовских пар в баллистических системах.

Когда фильтры параллельны ( $\theta = 0$ ), сверхток отсутствует,  $I(\varphi) = 0$ . В частном случае  $\theta = \pi$  от  $\Phi = \Phi_0$  ток-фазовое соотношение имеет такой же вид, как и в джозефсоновском КТК [188]:

$$I(\varphi) = \frac{e\Delta}{2} \frac{T_0 \sin \varphi}{\sqrt{1 - T_0 \sin^2(\varphi/2)}}, \quad (2.64)$$

где прозрачность  $T_0$  даётся формулой (2.55), а при  $\Phi = \Phi_0$  вид тот же самый, но  $\Delta$  и  $T_0$  нужно заменить на  $\Delta_{\text{eff}}$  и  $T_{\text{eff}}$  [формулы (2.61)].

При произвольных значениях  $\theta$  и  $\Phi$  мы можем выделить два существенно разных типа поведения  $I(\varphi)$  в зависимости от наличия или отсутствия пересечения андреевских уровней при  $E = 0$ .

Рисунок 2.14(b) иллюстрирует случай, когда андреевские уровни не пересекают ноль. В этом случае ток-фазовое соотношение качественно близко к тому, которое имеет место в джозефсоновском КТК.

Рисунок 2.14(d) иллюстрирует случай, когда андреевские уровни пересекают ноль. Пересечения [галочки при  $E = 0$  для положительной части спектра на рисунке 2.14(c)] приводят к разрывам ток-фазовых кривых. При уменьшении  $\theta$  вогнутая часть нижнего андреевского уровня сменяется выпуклым сегментом. Когда этот уровень даёт наибольший вклад (см, например, случай  $\theta = 0.6\pi$  и  $\Phi = 0$ ), это изменение кривизны означает переключение между сегментами зависимости  $I(\varphi)$  с поведением типа 0-контакта (вогнутый уровень) и  $\pi$ -контакта [10; 12] (выпуклый уровень). При достаточно малых  $\theta$  точки пересечения могут сдвигаться в  $\varphi = \pm\pi$  и исчезать, тогда система становится чистым  $\pi$ -контактом. На рисунке 2.14(d) это имеет место, например, в случае  $\theta = 0.4\pi$  и  $\Phi = 0$ . Верхний андреевский уровень в этом конкретном случае также приводит к поведению типа  $\pi$ -контакта и усиливает вклад нижнего уровня. В то же время  $\pi$ -контакт может получаться и в более сложных ситуациях, когда верхний уровень характеризуется противоположным (например, при  $\theta = 0.2\pi$  и  $\Phi = 0.4\Phi_0$ ) или смешанным (например, при  $\theta = 0.4\pi$  и  $\Phi = 0.2\Phi_0$ ) поведением.

## Критический ток

Явные аналитические результаты для критического тока  $I_c$  могут быть получены в простых частных случаях. В случае  $\theta = \pi$  или  $\Phi = \Phi_0$  критический ток имеет вид, как в джозефсоновском КТК (2.64) [188]. При  $\theta = \pi$  находим

$$I_c = e\Delta \left(1 - \sqrt{1 - T_0}\right), \quad (2.65)$$

с прозрачностью  $T_0$  из формулы (2.55), а при  $\Phi = \Phi_0$  выражение точно такое же, но вместо  $\Delta$  и  $T_0$  входят  $\Delta_{\text{eff}}$  и  $T_{\text{eff}}$  [формулы (2.61)].

При произвольных  $\theta$  и  $\Phi$  критический ток можно найти численно. Характерные примеры показаны на рисунке 2.15.

Верхний левый график показывает простой случай. Критический ток монотонно убывает при уменьшении  $\theta$ , обращаясь в ноль при параллельной ориентации. Зависимость от  $\Phi$  напоминает поведение обычного СКВИДа, но с ненулевым минимальным током (при  $\Phi = \Phi_0$ ) и с удвоенной периодичностью. Верхний правый график показывает «инвертированную» зависимость от потока:  $I_c$  имеет максимум при  $\Phi = \Phi_0$ .

Нижний графики показывают примеры более сложного поведения. Критический ток в этих случаях зависит от  $\theta$  немонотонно. Более того, зависимость  $I_c(\Phi)$  может быть немонотонной на интервале  $[0, \Phi_0]$ .

Мы можем сравнить наши результаты для зависимости критического тока от угла,  $I_c(\theta)$ , с аналогичными результатами работы [192], в которой исследовалась структура S-FIF-S. В последнем случае два ферромагнетика соединены последовательно (в то время как наша система соответствует параллельному соединению). Отличительная особенность наших результатов — возможность нескольких экстремумов в зависимости  $I_c(\theta)$  на интервале  $[0, \pi]$  (в противоположность единственному минимуму на рисунках из работы [192]).

### 2.3.5 Обсуждение результатов

Основной целью нашего исследования было выявление механизмов джозефсоновского транспорта, обусловленного расщеплёнными куперовскими парами в баллистических СКВИДах с фильтрацией по спине. Чтобы подчеркнуть отличительные физические особенности таких процессов, был сделан ряд упрощений, основное из них — предположение о безотражательных одноканальных рукавах интерферометра в пределе короткого контакта и с полуметаллическими вставками в качестве спиновых фильтров. Эти предположения трудно реализовать в реальном эксперименте. Тем не менее, недавние экспериментальные достижения позволяют приблизиться к нашему теоретическому пределу.

Экспериментально безотражательный одноканальный интерферометр может быть реализован в полупроводниковых структурах [191]. Границы хорошего качества между

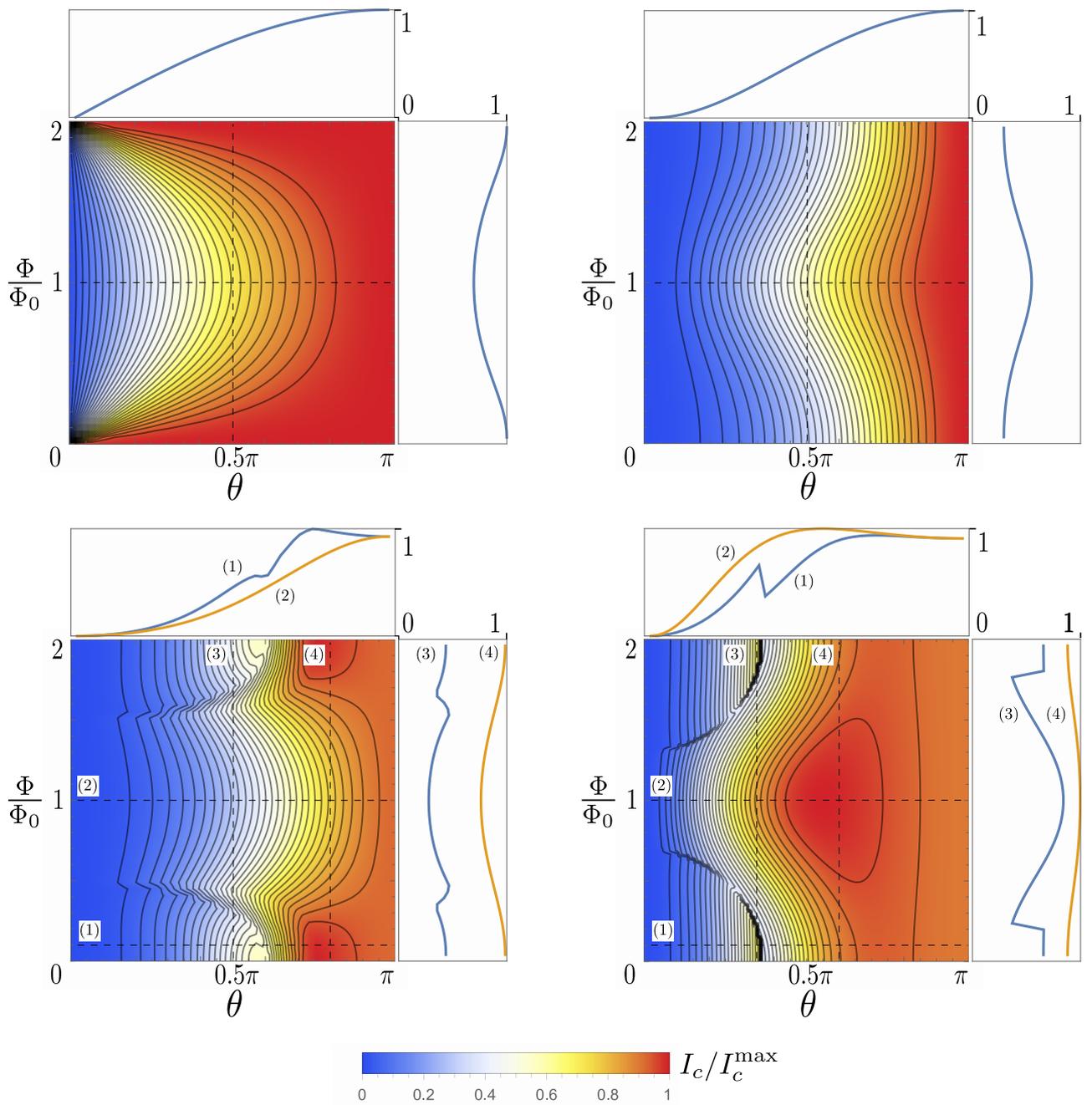


Рисунок 2.15 — Зависимость критического тока  $I_c$  от угла  $\theta$  между фильтрами (горизонтальная ось на всех частях рисунка) и магнитного потока  $\Phi$  (вертикальная ось) для разных геометрий (параметры  $\alpha$  и  $L$ ). Цветом показан критический ток, нормированный на максимальное значение для соответствующей геометрии,  $I_c/I_c^{\max}$ . Наружные графики показывают поведение  $I_c$  вдоль сечений, показанных на основных графиках. Верхний ряд (слева:  $\alpha = \pi$ ,  $L = 0$ ; справа:  $\alpha = 0.6\pi$ ,  $L = 0$ ) показывает относительно простое поведение:  $I_c$  монотонно растет как функция  $\theta$  и монотонно меняется как функция  $\Phi$  на интервале  $[0, \Phi_0]$ . Нижний ряд (слева:  $\alpha = 0.4\pi$ ,  $L = 0.5\pi$ ; справа:  $\alpha = 0.1\pi$ ,  $L = 0.3\pi$ ) показывает пример более сложного поведения с немонотонной зависимостью  $I_c$  от  $\theta$  и  $\Phi$ .

сверхпроводниками и двумерных электронным газом в полупроводниковых гетероструктурах и квантовых ямах также были реализованы в эксперименте [193–195]. Интересная возможность создать спин-фильтрующие области связана с использованием обменного взаимодействия, наведённого эффектом близости и управляемого электрическим образом, аналогично тому, как это было сделано в контексте приложений к спинтронике [196; 197].

Другой подход — изготовление кольца интерферометра с помощью монокристаллических металлических нанопроводов, получаемых методом электроосаждения с использованием шаблона. Одиночные джозефсоновские контакты через такие нанопроволоки уже реализованы [198], и развитая техника создаёт перспективу изготовления сложных гибридных структур, состоящих из нормальных и ферромагнитных частей [199]. Следующим шагом в этом направлении могла бы стать замена вставок обычного ферромагнетика на полуметаллический для достижения абсолютной спиновой фильтрации. Среди возможных кандидатов [200; 201] полуметаллический диоксид хрома  $\text{CrO}_2$  [48; 180; 181] лучше всего изучен в контексте сверхпроводящих гетероструктур. Более того,  $\text{CrO}_2$  может быть изготовлен в виде монокристаллических нанопроволок [202; 203], а кроме того, в джозефсоновских структурах могут быть реализованы хорошие границы с такими нанопроволоками [204].

Хотя мы моделировали деление потоков с помощью трёхтерминальных Y-контактов, эта конкретная геометрия непринципиально для той физики, о которой идет речь. Наши Y-делители моделируют возможность перекрестного андреевского отражения. Экспериментально этот эффект может быть также достигнут в случае прямых нанопроволок [198; 199], если они подсоединены к сверхпроводнику на расстоянии меньше, чем длина когерентности [183; 184]. Касательно качества границ, заметим, что монокристаллические золотые нанопроволоки могут образовывать почти идеальный контакт со сверхпроводящим алюминием [205].

Выбирая алюминий в качестве материала сверхпроводящих берегов и монокристаллическую медь [198; 199] или золото [205] как материал для нормальных проводов, можно достичь длины когерентности в проводах порядка нескольких микрон, так что предел короткого контакта действительно может быть реализован в СКВИД-структурах. В то же время, как следует из формулы (2.65), критический ток СКВИДа может достигать величины критического тока одноканального джозефсоновского квантового точечного контакта. В случае берегов из алюминия этот ток может достигать нескольких десятков наноампер, что вполне надежно может быть измерено с помощью современного экспериментального оборудования.

### 2.3.6 Заключение

Теоретически исследована задача о баллистическом джозефсоновском контакте через СКВИД с магнитными вставками. За счет ферромагнитных полуметаллических вставок в рукавах интерферометра происходит спиновая фильтрация (см. рисунок 2.13). В рамках этой задачи были найдены андреевские уровни в контакте и вычислен переносимый ими джозефсоновский ток в зависимости от двух управляющих параметров: угла  $\theta$  меж-

ду намагниченностями спиновых фильтров и внешнего магнитного потока  $\Phi$ . В результате абсолютной спиновой фильтрации транспорт куперовских пар полностью определяется процессами с расщеплением пар, при котором два электрона проходят через разные рукава интерферометра. Рукава считались безотражательными одноканальными проводниками, а их длина — соответствующей пределу короткого контакта.

Для решения задачи использовался метод матрицы рассеяния. Был получен общий аналитический результат для андреевских уровней в случае произвольного независящего от энергии несверхпроводящей рассеивателя между сверхпроводящими резервуарами. В пределе короткого контакта сверхток переносится именно этими двумя связанными андреевскими состояниями (которые могут быть вырождены в частных случаях).

Полученные выражения для андреевских уровней затем были применены к частным случаям  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi$ ,  $\Phi = 0$  и  $\Phi = \Phi_0$ , в которых оказывается возможным дальнейшее аналитическое решение. В частности, в случае  $\theta = \pi$  спектр оказывается нечувствительным к  $\Phi$ . Положив для простоты  $\Phi = 0$ , мы обнаруживаем, что спиновая симметрия эффективно восстановлена, спин сохраняется, и СКВИД становится эквивалентен квантовому точечному джозефсоновскому контакту с эффективной прозрачностью, определяемой геометрическими параметрами системы (фазами, набираемыми квазичастицами при прохождении тройников-делителей, и фазами, набираемыми внутри спиновых фильтров). В случае  $\Phi = \Phi_0$  сохраняется «перевернутый спин» (перевернутые спиновые секторы составлены из противоположных спинов вблизи противоположных сверхпроводников), и система опять же сводится к квантовому точечному джозефсоновскому контакту с некоторой эффективной прозрачностью. Однако, в этом случае параметр порядка в формулах для квантового точечного контакта эффективно подавлен в сравнении с  $\Delta$  в резервуарах.

Различные геометрические параметры системы приводят к качественно разному поведению характеристик СКВИДа (андреевских уровней, ток-фазового соотношения и критического джозефсоновского тока) как функций  $\theta$  и  $\Phi$ . Ток-фазовое соотношение может менять свою амплитуду и форму, в частности, демонстрируя переход из 0- в  $\pi$ -состояние. Переход происходит через промежуточные состояния, в которых  $I(\varphi)$  составлена из 0- и  $\pi$ -сегментов с резкими скачками между ними.

В результате, критический ток  $I_c$  может стать немонотонной функцией от  $\theta$  (при изменении угла между параллельной и антипараллельной конфигурациями). Периодичность по магнитному потоку равна  $2\Phi_0$ , т.е. удвоена по сравнению с обычным СКВИДом. Простой процесс, при котором два электрона из куперовской пары проходят каждый по своему рукаву, оказывается вообще нечувствительным к  $\Phi$ . Однако в подходе матрицы рассеяния эффективно суммируются все возможные траектории, и удвоенная периодичность возникает из-за более сложных процессов, в которых один электрон проходит через свой рукав, в то время как второй проходит через другой рукав, а также делает дополнительный оборот внутри несверхпроводящей части интерферометра. Из-за интерференционных эффектов  $I_c$  может демонстрировать инвертированную зависимость от  $\Phi$  (с максимумом, сдвинутым на половину периода, т.е. из 0 в  $\Phi_0$ ) или даже стать немонотонной функцией в интервале от 0 до  $\Phi_0$  (т.е. на половине периода).

## Глава 3. Сверхпроводимость и неупорядоченный магнетизм

### 3.1 Минищель в контактах сверхпроводник–ферромагнетик с неоднородной намагниченностью

#### 3.1.1 Введение

Одним из самых важных проявлений сверхпроводящего эффекта близости является образование (мини)щели в одноэлектронном спектре нормального металла. В диффузном пределе, если толщина нормального металла  $L$  больше длины когерентности, масштаб минищели  $E_g$  определяется энергией Таулеса  $E_{\text{Th}} = D/L^2$  [206]. Экспериментально минищель можно напрямую измерить с помощью сканирующей туннельной микроскопии (см., например, работу [207] и ссылки в ней). В настоящее время актуальны задачи о проявлениях эффекта близости в SF структурах (см., например, обзор [10]).

В монокристаллическом ферромагнетике обменное поле  $h$  сдвигает плотности состояний в двух спиновых подзонах в противоположных направлениях, поэтому минищель закрывается при  $h \sim E_{\text{Th}}$  [208]. Наличие доменной структуры должно приводить к эффективному усреднению неоднородного обменного поля  $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ , действующего на электроны; поэтому можно ожидать, что минищель сохранится даже при  $h \gg E_{\text{Th}}$ . В данном разделе будет исследована минищель в SF контактах с неоднородной намагниченностью.

В задаче имеются три важных масштаба энергии:  $E_{\text{Th}}$ ,  $h$  и энергия  $E_a = D/a^2$ , определяемая масштабом длины  $a$ , на котором меняется намагниченность (размер домена). Сверхпроводящая щель  $\Delta$  не будет играть роли, т.к. предполагается, что она много больше, чем  $E_{\text{Th}}$  и  $h$ . Предполагаем, что домены достаточно малы, так что

$$E_a \gg h, \quad E_a \gg E_{\text{Th}}, \quad (3.1)$$

в то же время соотношение между  $h$  и  $E_{\text{Th}}$  может быть произвольным.

Хотя основной темой данной главы является рассмотрение SF систем с *неупорядоченной* намагниченностью, в данном разделе мы рассмотрим специальный случай *неоднородной упорядоченной* (спиральной) намагниченности. Будет показано, что критическое обменное поле, при котором закрывается щель в плотности состояний, в этом случае имеет порядок

$$h_c \sim \sqrt{E_{\text{Th}} E_a} \sim \frac{L}{a} E_{\text{Th}}. \quad (3.2)$$

Рассмотрение этой задачи в данной главе оправдано тем, что позже в разделе 3.2 мы покажем, что эта оценка согласуется с результатами для случая неупорядоченной намагниченности.

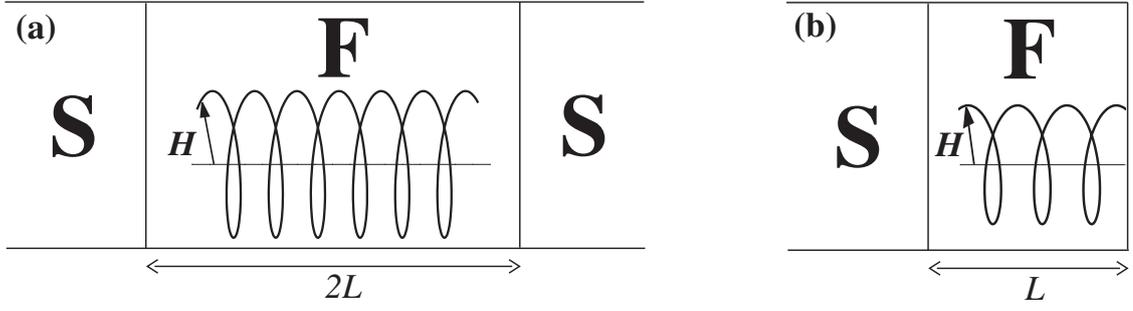


Рисунок 3.1 — (a) SFS, (b) SF контакт со спиральной намагниченностью.

### 3.1.2 Метод

Уравнение Узаделя на функцию Грина  $\check{g}$  (которая является матрицей  $4 \times 4$  в произведении пространства Горькова-Намбу и спинового пространства, удовлетворяющей условию нормировки  $\check{g}^2 = \check{1} \equiv \hat{\tau}_0 \hat{\sigma}_0$ ), может быть записано в виде

$$D\nabla(\check{g}\nabla\check{g}) + iE[\hat{\tau}_3\hat{\sigma}_0, \check{g}] - i[\hat{\tau}_3(\mathbf{h}\hat{\sigma}), \check{g}] - \Delta[\hat{\tau}_1\hat{\sigma}_0, \check{g}] = 0. \quad (3.3)$$

Поскольку мы сейчас не будем рассматривать системы с разностью фаз, параметр порядка  $\Delta$  можно выбрать вещественным.

Решение имеет вид

$$\check{g} = \hat{\tau}_3(g_0\hat{\sigma}_0 + \mathbf{g}\hat{\sigma}) + \hat{\tau}_1(f_0\hat{\sigma}_0 + \mathbf{f}\hat{\sigma}). \quad (3.4)$$

Условие нормировки допускает параметризацию

$$\begin{aligned} g_0 &= M_0 \cos \theta, & \mathbf{g} &= i\mathbf{M} \sin \theta, \\ f_0 &= M_0 \sin \theta, & \mathbf{f} &= -i\mathbf{M} \cos \theta, \end{aligned} \quad (3.5)$$

с комплексными функциями  $\theta$ ,  $M_0$  и  $\mathbf{M}$ , при условии

$$M_0^2 - \mathbf{M}^2 = 1. \quad (3.6)$$

Уравнение Узаделя (3.3) приводит тогда к одному скалярному и одному векторному уравнению:

$$\frac{D}{2}\nabla^2\theta + M_0(iE \sin \theta + \Delta \cos \theta) - (\mathbf{h}\mathbf{M}) \cos \theta = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{D}{2}(\mathbf{M}\nabla^2 M_0 - M_0\nabla^2 \mathbf{M}) - \mathbf{M}(iE \cos \theta - \Delta \sin \theta) - \mathbf{h}M_0 \sin \theta = 0. \quad (3.8)$$

Отметим следующие общие свойства уравнений (3.7) и (3.8):

(i) В отсутствие ферромагнетизма получается  $\mathbf{h} = 0$ ,  $M_0 = 1$ ,  $\mathbf{M} = 0$ , и уравнения (3.7) и (3.8) сводятся к обычному уравнению Узаделя на угол  $\theta$ .

(ii) В случае однородного ненулевого обменного поля  $\mathbf{h} = \text{const}$  уравнения (3.7) и (3.8) говорят о том, что триплетный вектор  $\mathbf{M}$  направлен вдоль поля  $\mathbf{h}$ .<sup>1</sup>

(iii) Одно из удобств параметризации (3.5) состоит в том, что в мацубаровском представлении [когда  $-iE$  в уравнениях (3.7) и (3.8) заменяется на  $\omega_n$ ] функции  $\theta$ ,  $M_0$  и  $\mathbf{M}$  оказываются вещественными.

Плотность состояний (нормированная и просуммированная по проекциям спина) выражается через запаздывающую и опережающую функцию Грина как  $\nu = \text{Tr} [\hat{\tau}_3 \hat{\sigma}_0 (\check{g}^R - \check{g}^A)] / 8$ , что даёт

$$\nu = \text{Re } g_0 = \text{Re}(M_0 \cos \theta). \quad (3.9)$$

Ниже мы будем использовать так называемые жёсткие гран.условия — это означает, что объёмное решение в сверхпроводнике с постоянной  $\Delta$  применимо вплоть до SF границы, и функция Грина непрерывна. Жёсткие гран.условия применимы, если SF граница прозрачна, а F слой имеет гораздо меньшую проводимость, чем S слой. Тогда на SF границе имеем

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad M_0 = 1, \quad \mathbf{M} = 0, \quad (3.10)$$

где первое условие оправдано в силу  $h \ll \Delta$ , и рассматриваются энергии  $E \lesssim E_{\text{Th}}$ , поэтому  $E \ll \Delta$ . Грани.условия на свободной поверхности F слоя в SF системе имеют вид

$$\frac{d\theta}{dz} = 0, \quad \frac{dM_0}{dz} = 0, \quad \frac{d\mathbf{M}}{dz} = 0. \quad (3.11)$$

Ниже будут проанализированы уравнения (3.7) и (3.8) в F части, где  $\Delta = 0$ ; сверхпроводящие корреляции в этом случае наводятся в результате гран.условий (3.10).

### 3.1.3 Спиральная намагниченность

Ниже будут рассмотрены два примера систем со спиральной намагниченностью [SFS и SF системы, см. рисунки 3.1(c) и 3.1(d)]:

$$\mathbf{h} = h(\cos kz, \sin kz, 0), \quad (3.12)$$

где ось  $z$  перпендикулярна SF границе (или границам).

<sup>1</sup>Обратим внимание, что в однородном ферромагнетике  $\mathbf{M}$ , направленное вдоль  $\mathbf{h}$  не приводит к возникновению ДТК. Для возникновения ДТК необходимо наличие компонент  $\mathbf{M}$ , перпендикулярных  $\mathbf{h}$ . Вообще, ДТК отсутствуют в любой ситуации, когда вектор  $\mathbf{M}$  оказывается сонаправлен  $\mathbf{h}$ , например, в рассмотренном в работе [52] особом случае неоднородной намагниченности.

## SFS контакт

Рассматривается спиральный ферромагнетик длины  $2L$  [рисунок 3.1(с)] с жёсткими гран.условиями (3.10) на SF границах. Для нахождения параметров закрытия щели будет найдено минимальное значение  $h$ , при котором решение  $\theta = \pi/2$  для  $E = 0$  испытывает бифуркацию (т.е. отщепляется бесщелевое решение).

Следует ожидать, что изменение  $\mathbf{h}$  в пространстве приводит к эффективному усреднению намагниченности, поэтому векторная часть  $\mathbf{M}$  функции Грина мала. Поэтому линеаризуем векторное уравнение Узаделя (3.8):

$$\left(\frac{D}{2}\nabla^2 + iE \cos \theta\right) \mathbf{M} = -\mathbf{h} \sin \theta. \quad (3.13)$$

Линеаризация по  $(\theta - \pi/2)$  и по  $\mathbf{M}$  при  $E = 0$  позволяет решить уравнение (3.13), без учёта гран.условий, с помощью осциллирующей функции:

$$\mathbf{M}_{\text{osc}} = \frac{2\mathbf{h}}{Dk^2}. \quad (3.14)$$

Гран.условиям  $\mathbf{M}(0) = \mathbf{M}(2L) = 0$  легко удовлетворить, добавив гладкий (неосциллирующий) член, линейный по  $z$ , того же порядка величины:  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\text{osc}} + \mathbf{M}_{\text{sm}}$ . Подставляя это решение в линеаризованное скалярное уравнение Узаделя, находим эффективное уравнение на гладкую часть  $\theta(z)$  [осциллирующая часть  $\theta(z)$  меньше по порядку величины и ей можно пренебречь; на этом шаге необходимо учитывать только  $\mathbf{M}_{\text{osc}}$ ]:

$$\left(\nabla_z^2 + \frac{4h^2}{D^2k^2}\right) \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (3.15)$$

с гран.условиями

$$\theta(0) = \theta(2L) = \frac{\pi}{2}. \quad (3.16)$$

Уравнение (3.15) можно интерпретировать как уравнение Шрёдингера при нулевой энергии с  $\hbar = 1$ , массой  $1/2$  в однородном потенциале  $-4h^2/(D^2k^2)$ , в то время как  $(\theta - \pi/2)$  играет роль собственной функции. Гран.условия (3.16) соответствуют непроницаемым стенкам при  $z = 0$  и  $z = 2L$ , см. рисунок 3.2(а).

Следовательно, бифуркация нетривиального решения задачи (3.15) и (3.16) (т.е. момент закрытия щели) при увеличении  $h$  соответствует тому, что энергия основного состояния проходит через ноль. Это немедленно приводит к результату

$$h_c^{\text{SFS}} = \left(\frac{\pi}{4}\right) \frac{Dk}{L}. \quad (3.17)$$

Можно проверить, что линеаризация по  $\mathbf{M}$  справедлива при выполнении условий (3.1) (где  $E_a \sim Dk^2$ ), которые в свою очередь сводятся к единственному требованию  $kL \gg 1$  при  $h \sim h_c^{\text{SFS}}$ . Критическое значение обменного поля оказывается много больше энергии Таулеса:  $h_c^{\text{SFS}} \sim (kL)E_{\text{Th}}$ . Этот результат соответствует оценке (3.2).

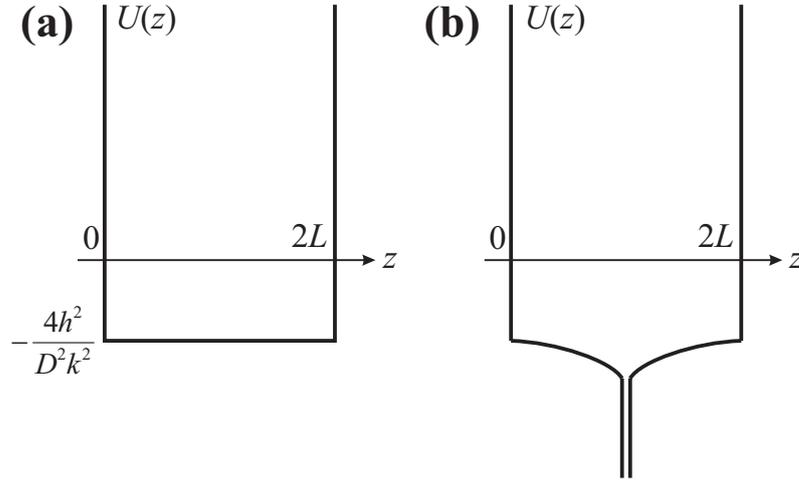


Рисунок 3.2 — Эффективные квантовомеханические потенциалы для (a) SFS и (b) SF контакта. Миницель обращается в ноль, когда гамильтониан с соответствующим потенциалом имеет основное состояние с нулевой энергией. В обоих случаях при  $z = 0$  и  $z = 2L$  расположены непроницаемые стенки. (a) Прямоугольная потенциальная яма. (b) Потенциальная яма с  $\delta$ -функцией в центре.

### SF контакт

Теперь рассмотрим SF контакт с ферромагнетиком длины  $L$  [рисунок 3.1(d)], который можно считать половиной рассмотренного выше SFS контакта. В этом случае открытые граничные условия нельзя удовлетворить при малых  $\mathbf{M}$ , и линейаризация по  $\mathbf{M}$  не работает. [Можно сказать, что  $\mathbf{M}$  усиливается, потому что электроны, налетающие на внешнюю границу F через поле  $\mathbf{h}(z)$ , чувствуют такое же поле  $\mathbf{h}(z)$  после отражения, что приводит к ненулевому эффективному среднему от  $\mathbf{h}$ .] Поэтому необходимо решать полное нелинейное уравнение (3.8) при  $E = 0$ . Под щелью  $\mathbf{M}$  вещественно, поэтому удобно ввести новую комплексную функцию

$$m(z) = M_1 + iM_2 \quad (3.18)$$

(где  $M_1$  и  $M_2$  — две вещественные компоненты вектора  $\mathbf{M}$ ). Тогда в новых комплексных обозначениях уравнение (3.8) принимает вид

$$\frac{D}{2} \left[ m'' - \left( \frac{M_0''}{M_0} \right) m \right] + h e^{ikz} = 0, \quad M_0 = \sqrt{1 + mm^*}, \quad (3.19)$$

с граничными условиями  $m(0) = 0$  и  $m'(L) = 0$ . Выделяем быстроосциллирующие моды,

$$m = b_0 + b_1 e^{ikz} + b_{-1} e^{-ikz} + \dots, \quad (3.20)$$

и удерживаем только главные вклады (амплитуды  $b_n$  — медленные функции  $z$ , и их величина убывает с ростом  $|n|$ , как будет показано ниже). Уравнения для разных мод оказываются зацеплены, и в результате амплитуды  $b_1$  и  $b_{-1}$  могут быть выражены через гладкую часть  $b_0$ :

$$b_1 = \frac{h}{Dk^2} (2 + |b_0|^2), \quad b_{-1} = \frac{h}{Dk^2} b_0^2. \quad (3.21)$$

Подставляя эти амплитуды в уравнение (3.19) и параметризуя  $b_0 = -ie^{ikL} \sinh \varphi$ , получаем эффективное уравнение на  $\varphi(z)$ :

$$\varphi'' + \frac{\varkappa^2}{2} \sinh \varphi \cosh \varphi = 0, \quad (3.22)$$

с граничными условиями

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(L) = \varkappa \cosh \varphi(L), \quad (3.23)$$

где  $\varkappa = 2h/(Dk)$ . Решение этого уравнения должно быть подставлено обратно в скалярное уравнение Узалея (3.7) для нахождения бифуркации решения  $\theta = \pi/2$ . Линеаризуя уравнение вблизи точки бифуркации, получаем

$$\left[ \nabla_z^2 + \varkappa^2 \left( 1 + \frac{\sinh^2 \varphi}{2} \right) - (k\varkappa \sinh \varphi) \sin k(z-L) - \left( \varkappa^2 \frac{\sinh^2 \varphi}{2} \right) \cos 2k(z-L) + \dots \right] \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) = 0. \quad (3.24)$$

Опять же, здесь необходимо учитывать не только гладкую часть  $\theta$ , но также и осциллирующие моды с  $\pm k$ :

$$\theta - \frac{\pi}{2} = t_0 + t_1 \sin k(z-L) + \dots \quad (3.25)$$

Решая сцепленные уравнения на амплитуды  $t_n$  (которые являются медленными функциями  $z$  и убывают по величине с ростом номера гармоники), в главном порядке по  $\varkappa/k$  находим

$$t_1 = - \left( \frac{\varkappa}{k} \sinh \varphi \right) t_0, \quad (3.26)$$

и окончательно получаем уравнение на гладкую компоненту  $t_0$ :

$$(\nabla_z^2 + \varkappa^2 \cosh^2 \varphi) t_0 = 0, \quad (3.27)$$

с граничными условиями

$$t_0(0) = 0, \quad t_0'(L) = \left[ \varkappa \sinh \varphi(L) \right] t_0(L). \quad (3.28)$$

В точке бифуркации (т.е. в момент закрытия минищели) это однородное линейное уравнение приобретает ненулевое решение. Получающаяся задача снова имеет квантовомеханическую аналогию. Действительно, можно симметричным образом продолжить потенциал  $-\varkappa^2 \cosh^2 \varphi(z)$  в уравнении Шрёдингера (3.27) с интервала  $(0, L)$  на интервал  $(L, 2L)$ ; см. рисунок 3.2(b). В результате получается уравнение Шрёдингера на нулевой энергии с  $\hbar = 1$  и массой  $1/2$ , в котором  $t_0$  играет роль собственной функции. В точках  $z = 0$  и  $z = 2L$  находятся непроницаемые стенки, в то время как граничное условие (3.28) при  $z = L$  соответствует следующей  $\delta$ -функциональной добавке к потенциалу:  $-2 [\varkappa \sinh \varphi(L)] \delta(x-L)$ .

Таким образом возникновение нетривиального решения задача (3.27) и (3.28) в точке бифуркации при увеличении  $h$  соответствует ситуации, в которой основное состояние уравнения Шрёдингера имеет нулевую энергию. Численно находим, что эта ситуация имеет место при  $\varkappa = 0.5955/L$ , что означает следующее критическое значение обменного поля:

$$h_c^{\text{SF}} = 0.2977 \frac{Dk}{L}. \quad (3.29)$$

Найдя  $h_c^{\text{SF}}$ , мы можем вернуться к нашему решению и проверить, что  $b_0 \sim 1$ ,  $b_{\pm 1} \sim 1/kL$ ,  $b_{\pm 2} \sim 1/(kL)^2$ ,  $t_1 \sim t_0/kL$ , и т.д., таким образом подтвердив справедливость разложений (3.20) и (3.25). Заметим, что критическая величина  $\mathbf{h}$  имеет тот же порядок величины, что и для SFS контакта [и таким образом также согласуется с оценкой (3.2)], но меньший численный множитель.

### 3.1.4 Заключение

Были рассмотрены SF и SFS контакты со спиральным магнитным порядком. Показано, что минищель сохраняется до обменных полей порядка (3.2), т.е. много больших, чем  $E_{\text{Th}}$ . Это является следствием ослабленного действия обменного поля в результате эффективного усреднения неоднородного распределения.

## 3.2 Эффективное рассеяние с переворотом спина в диффузных сверхпроводящих гибридных структурах с магнитным беспорядком

### 3.2.1 Введение

Многие экспериментальные работы по SF системам, в частности, исследования джозефсоновских  $\pi$ -контактов, указывают на наличие в F области значительного спин-флип рассеяния (рассеяния с переворотом спина) [8; 209–211]. Теоретическое описание сверхпроводящих корреляций на фоне неоднородной магнитной структуры является технически сложной задачей, и многие существующие теории ограничиваются рассмотрением либо точечных магнитных примесей [10; 23; 212–216], либо специальных доменных геометрий (см., например, обзор [11] и работы [217; 218]).

В данном разделе задача с магнитным беспорядком будет рассмотрена в более общей ситуации неколлинеарного беспорядка с произвольной корреляционной длиной. Будет рассмотрен сверхпроводник или гибридная система с потенциальными примесями, а также неоднородным обменным (зеemanовским) полем. Потенциально рассеяние предполагается достаточно сильным, так что движение электронов соответствует диффузионному режиму. На фоне этого диффузного движения имеется спиновое расщепление из-за неоднородного обменного поля, которое предполагается гауссовым случайным с произвольным парным коррелятором. Предполагается также, что магнитный беспорядок гораздо слабее потенциального в смысле сравнения длин рассеяния.

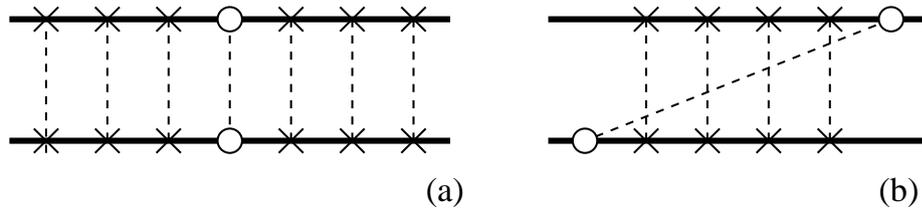


Рисунок 3.3 — Два типа спин-флип рассеяния: (а) локальное; (b) нелокальное. Диаграммы показывают, каким образом магнитное рассеяние может быть включено в куперонный пропагатор. Сплошные жирные линии — электронные функции Грина, штриховые линии — усреднение по гауссову беспорядку. Крестики и кружки — потенциальный и магнитный беспорядок.

В этом случае можно выделить три различных режима: короткокоррелированный магнитный беспорядок (т.е. точечные примеси с длиной корреляции меньше фермиевской длины), среднекоррелированный беспорядок (корреляционная длина между фермиевской и длиной свободного пробега от потенциального рассеяния) и длиннокоррелированный беспорядок (корреляционная длина больше длины свободного пробега). Короткокоррелированный случай был разобран в работе [23], средне- и длиннокоррелированный режимы в коллинеарном периодическом случае были рассмотрены в работах [217; 218] (мы же рассмотрим более общий случай), наконец длиннокоррелированный неколлинеарный случай будет рассмотрен в данном разделе.

Для рассмотрения системы мы будем использовать три разных подхода: нелинейную сигма-модель, уравнения Узаделя и диаграммную технику. Хотя вычисления этими тремя методами позволяют проследить некоторые параллели, представляется полезным обсудить эти различные подходы, чтобы продемонстрировать соответствие между ними и прояснить физический смысл и условие применимости результатов. Как будет показано ниже, спин-флип вклад в коротко- и среднекоррелированных режимах соответствует добавлению одной магнитной «ступеньки» в куперонную лестницу [рисунок 3.3(a)], а длиннокоррелированный режим соответствует магнитной линии, пересекающей много куперонных ступенек [рисунок 3.3(b)].

## 3.2.2 Основные результаты

### Параметры задачи

Рассматривается диффузное движение электронов в конечном образце магнитного металла (т.е. металл с обменным полем в нём) размера  $L$ . Этот размер задаёт энергетический масштаб — энергию Таулеса (обратное время диффузии через образец)  $E_{\text{Th}} = D/L^2$ . Ниже рассматриваются сверхпроводящие корреляции в магнитном металле за счет либо малого

(условия будут сформулированы ниже) параметра порядка  $\Delta$ , либо за счет эффекта близости со сверхпроводником (наведённая сверхпроводимость, в этом случае параметр порядка  $\Delta$  в магнитном металле равен нулю). Электроны и дырки рассматриваются на конечной энергии  $E$ . Предполагается, что обменное поле  $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{h}(\mathbf{r}) + \delta\mathbf{h}(\mathbf{r})$  содержит малую гладкую (меняющуюся на масштабе порядка  $L$ ) часть  $\mathbf{h}$  (в частности, она может быть равна нулю) и неупорядоченную компоненту  $\delta\mathbf{h}$  (типичный масштаб неупорядоченной компоненты далее будет обозначаться  $\delta h$ ). Магнитный беспорядок скоррелирован на масштабе  $a$ , который задет «таулесовскую энергию магнитной неоднородности»  $E_a = D/a^2$ . Для  $\delta\mathbf{h}$  предполагается гауссово распределение с парным коррелятором

$$\langle \delta h_i(\mathbf{r}) \delta h_j(\mathbf{r}') \rangle = F_{ij}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|). \quad (3.30)$$

Таким образом, типичная величина  $F_{ij}(r)$  имеет порядок  $(\delta h)^2$ , а её типичный носитель имеет порядок  $a$ .

Будут предполагаться выполненными следующие условия на энергетические масштабы в магнитном металле:

$$E_{\text{Th}}, E, \Delta, h, \Gamma_{\text{sf}} \ll E_a, \tau^{-1}, \quad (3.31)$$

где  $\Gamma_{\text{sf}}$  — эффективная интенсивность спин-флип рассеяния (которая будет вычислена),  $\tau$  — время свободного пробега по отношению к потенциальному рассеянию. Физический смысл этих условий состоит в том, что масштабы длин, связанным с магнитным и потенциальным беспорядками, гораздо меньше масштабов, входящих в уравнения Узаделя.

## Спин-флип вклад в сигма-модели

Действие сигма-модели в рассматриваемом случае имеет вид

$$\mathcal{S}[Q] = \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_{\text{sf}}, \quad (3.32)$$

где обычное действие сигма-модели есть

$$\mathcal{S}_0 = \pi\nu \int d^3\mathbf{r} \text{STr} \left\{ \frac{D}{4} (\nabla Q)^2 + \left( iE\hat{\tau}_3 - \hat{\Delta} - i\mathbf{h}(\mathbf{r})\hat{\tau}_3\hat{\sigma} \right) Q \right\} \quad (3.33)$$

(используются стандартные для этой техники обозначения, см. определения в разделе 3.2.3), а спин-флип вклад имеет вид

$$\mathcal{S}_{\text{sf}} = -\frac{\pi\nu}{2} \int d^3\mathbf{r} \Gamma_{\text{sf}}^{ij} \text{STr} (\hat{\tau}_3 \hat{\sigma}_i Q \hat{\tau}_3 \hat{\sigma}_j Q), \quad (3.34)$$

где  $\Gamma_{\text{sf}}^{ij}$  — симметричная матрица интенсивностей спин-флип рассеяния.

## Спин-флип вклад в уравнениях Узаделя

Спин-флип вклад в уравнения Узаделя можно получить, варьируя действие (3.32) по матрице  $Q$ . Обозначая седловое значение матрицы  $Q$  матричной функцией Грина  $\check{g}$ , можно получить уравнение

$$D\nabla(\check{g}\nabla\check{g}) + \left[ iE\hat{\tau}_3\hat{\sigma}_0 - \hat{\Delta}\hat{\sigma}_0 - i\hat{\tau}_3(\mathbf{h}\hat{\sigma}), \check{g} \right] - \Gamma_{\text{sf}}^{ij} [\hat{\tau}_3\hat{\sigma}_i\check{g}\hat{\tau}_3\hat{\sigma}_j, \check{g}] = 0. \quad (3.35)$$

Нелинейное условие нормировки  $\check{g}^2 = 1$  допускает разные параметризации. В случае, когда параметр порядка вещественный (иными словами, фаза аномальной функции Грина фиксирована), уравнения содержат четыре параметра, и в качестве них можно взять угол  $\theta$  и вектор  $\mathbf{M}$ :

$$\check{g} = M_0\hat{\sigma}_0(\hat{\tau}_3 \cos \theta + \hat{\tau}_1 \sin \theta) + i\mathbf{M}\hat{\sigma}(\hat{\tau}_3 \sin \theta - \hat{\tau}_1 \cos \theta) \quad (3.36)$$

с условием

$$M_0^2 - \mathbf{M}^2 = 1. \quad (3.37)$$

Подставляя параметризацию (3.36) в уравнение (3.35), получаем триплетные уравнения Узаделя со спин-флип вкладом:

$$\frac{D}{2}\nabla^2\theta + M_0(iE \sin \theta + \Delta \cos \theta) - (\mathbf{h}\mathbf{M}) \cos \theta - \left( \Gamma_{\text{sf}}^{\text{tot}} + 2\mathbf{M}^T \hat{\Gamma}_{\text{sf}} \mathbf{M} \right) \sin 2\theta = 0, \quad (3.38)$$

$$\frac{D}{2}(\mathbf{M}\nabla^2 M_0 - M_0\nabla^2 \mathbf{M}) - \mathbf{M}(iE \cos \theta - \Delta \sin \theta) - M_0\mathbf{h} \sin \theta + 2M_0\hat{\Gamma}_{\text{sf}}\mathbf{M} \cos 2\theta = 0, \quad (3.39)$$

где  $\hat{\Gamma}_{\text{sf}}$  — симметричная матрица  $3 \times 3$ , составленная из  $\Gamma_{\text{sf}}^{ij}$ , а  $\Gamma_{\text{sf}}^{\text{tot}} = \text{Tr} \hat{\Gamma}_{\text{sf}}$ . Эта система уравнений обобщает случай одного синглетного уравнения со спин-флип вкладом [66] на случай триплетных уравнений Узаделя.

## Длина рассеяния с переворотом спина (спин-флип рассеяния)

**Режим короткокоррелированного беспорядка.** В режиме  $a \ll k_F^{-1}$  интенсивности спин-флип рассеяния даются формулой [23]

$$\Gamma_{\text{sf}}^{ij} = \pi\nu \int d^3\mathbf{r} F_{ij}(r) \sim \nu (\delta h)^2 a^3. \quad (3.40)$$

**Режим среднекоррелированного беспорядка.** В режиме  $k_F^{-1} \ll a \ll l$  интенсивности спин-флип рассеяния даются формулой

$$\Gamma_{\text{sf}}^{ij} = \pi\nu \int d^3\mathbf{r} F_{ij}(r) \frac{1}{2(k_F r)^2} \sim \nu (\delta h)^2 a k_F^{-2}. \quad (3.41)$$

Точная формула, описывающая интерполяцию между двумя режимами (3.40) и (3.41), имеет вид

$$\Gamma_{\text{sf}}^{ij} = \pi\nu \int d^3\mathbf{r} F_{ij}(r) \frac{\sin^2(k_F r)}{(k_F r)^2}. \quad (3.42)$$

**Режим длиннокоррелированного беспорядка.** В режиме  $l \ll a$  интенсивности спин-флип рассеяния даются формулой

$$\Gamma_{\text{sf}}^{ij} = \frac{1}{D} \int d^3\mathbf{r} F_{ij}(r) \frac{1}{4\pi r} \sim \nu (\delta h)^2 \frac{a^2}{l} k_F^{-2}. \quad (3.43)$$

Точная формула, описывающая интерполяцию между двумя режимами (3.41) и (3.43), имеет вид

$$\Gamma_{\text{sf}}^{ij} = \frac{l^2}{3D} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} F_{ij}(q) \frac{\arctan(ql)}{ql - \arctan(ql)}. \quad (3.44)$$

Коэффициент диффузии связан с плотностью состояний соотношением  $D = v_F l / 3 = k_F^2 l / (6\pi^2 \nu)$ .

Формулы (3.43) и (3.44) были получены для коллинеарных периодических магнитных структур в работах [217; 218]; наш вывод снимает эти ограничения.

### 3.2.3 Сигма-модельный вывод

В предположении достаточно слабого случайного обменного поля  $\delta\mathbf{h}$  оно может быть включено в действие сигма-модели пертурбативным образом. В случае дельта-коррелированного магнитного беспорядка эта процедура хорошо известна [215; 216], а наше рассмотрение обобщает её на случай произвольной корреляционной длины.

При выводе оказывается, что имеются два разных вклада, происходящих от магнитного беспорядка. Раскладывая действие по этому беспорядку до второго порядка,

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2, \quad (3.45)$$

находим два спин-флип вклада:

$$\mathcal{S}_{\text{loc}} = \langle \mathcal{S}_2 \rangle \quad \text{и} \quad \mathcal{S}_{\text{nonloc}} = -\frac{1}{2} \langle (\mathcal{S}_1)^2 \rangle. \quad (3.46)$$

Ниже будет показано, что первый («локальный») вклад оказывается основным в случаях коротко- и среднкоррелированного беспорядка и приводит к формуле (3.42), в то время как второй («нелокальный») вклад оказывается основным в режиме длиннокоррелированного беспорядка и приводит к формуле (3.43). При усреднении по нелокальному распределению необходимо учитывать флуктуации вокруг реплично-симметричного (или суперсимметричного) седлового решения. Оказывается, что локальный и нелокальный спин-флип вклады описывают процессы, показанные на рисунке 3.3 (левый и правый рисунок соответственно). Интерполяция между этими двумя режимами выходит за рамки сигма-модельного вывода в этом разделе, но представлена в разделе 3.2.5 на диаграммном языке.

## Действие сигма-модели

Сигма-модель выводится обычным образом [215; 219]. Потенциальный беспорядок предполагается гауссовым  $\delta$ -коррелированным,

$$\langle U(\mathbf{r})U(\mathbf{r}') \rangle_U = \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{2\pi\nu\tau} \quad (3.47)$$

[здесь  $\nu = mk_F/(2\pi^2)$  — плотность состояний в расчёте на одну проекцию спина], в то время как магнитный беспорядок также предполагается гауссовым, но с произвольной корреляционной длиной, см. формулу (3.30).

Как обычно при выводе сигма-модели, предполагается грязный предел, т.е.

$$E_{\text{Th}}, E, \Delta, h \ll \tau^{-1}. \quad (3.48)$$

Кроме того, предполагается, что эффективное спин-флип рассеяние (интенсивность которого будет получена ниже) гораздо слабее потенциального,

$$\Gamma_{\text{sf}} \ll \tau^{-1}, \quad (3.49)$$

поэтому может быть рассмотрено как возмущение на фоне диффузной сигма-модели, определённой по отношению к потенциальному рассеянию.

Вывод действия сигма-модели начинается со стат.суммы для возбуждений энергии  $E$  в гамильтониане Боголюбова – де Жена, включающем также обменное поле [216]:

$$\mathcal{Z} = \int D\Psi^* D\Psi e^{-\mathcal{S}}, \quad (3.50)$$

$$\mathcal{S}[\Psi] = -i \int d^3\mathbf{r} \Psi^+ \left[ E - \mathbf{H}\hat{\sigma} - \hat{\tau}_3(\xi + U(\mathbf{r})) - \hat{\tau}_2 \text{Re} \Delta - \hat{\tau}_1 \text{Im} \Delta \right] \Psi. \quad (3.51)$$

Здесь  $\Psi^*$  и  $\Psi$  — 4-компонентные фермионные векторные поля, составленные из грассмановых антикоммутирующих элементов. Для краткости малую мнимую часть  $i0$ , которая должна быть добавлена к энергии  $E$ , не пишем. Матрицы Паули  $\hat{\sigma}_i$  действуют в спиновом пространстве, а  $\hat{\tau}_i$  — в пространстве Горькова-Намбу.

Для усреднения по потенциальному беспорядку с коррелятором (3.47) вводим реплики [220]. Далее с помощью матричного поля  $Q(\mathbf{r})$  производим преобразование Хаббарда-Стратоновича.  $Q$  — матрица в произведении пространства Горькова-Намбу и спинового пространства, а также в пространстве реплик (или ферми-бозе суперпространстве). В результате преобразования Хаббарда-Стратоновича действие становится квадратичным, и гауссово интегрирование по  $\Psi^*$  и  $\Psi$  даёт

$$\mathcal{S}[Q] = \frac{\pi\nu}{4\tau} \int d^3\mathbf{r} \text{STr} Q^2 - \int d^3\mathbf{r} \text{STr} \ln \left[ \xi - \hat{\tau}_3(E - \mathbf{H}\hat{\sigma}) - i\hat{\Delta} - \frac{iQ}{2\tau} \right], \quad (3.52)$$

$$\hat{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta^* & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.53)$$

Здесь операция “STr” означает полный след. В частности, он включает в себя след по репличному индексу или суперслед в зависимости от используемого варианта сигма-модели (репличная или суперсимметричная).

Вообще говоря,  $Q$ -матрица сигма-модели должна содержать все диффузионные мягкие моды: диффузоны и купероны. Для этого нужно дополнительно удвоить фермионные поля [215; 216; 219] и, следовательно,  $Q$ -матрицу в запаздывающе-опережающем пространстве. Удвоенная  $Q$ -матрица тогда будет удовлетворять дополнительным соотношениям, отражающим симметрию гамильтониана Боголюбова – де Жена. Наша же сигма-модель не содержит такого удвоения, поэтому включает в себя только купероны, но не диффузоны. В результате наши вычисления справедливы только на уровне седловых уравнений (уравнения Узаделя), но не воспроизводят слаболокализационных поправок, для которых необходимы диффузоны. Эта редуцированная сигма-модель используется именно потому, что рассмотрение будет ограничено изучением влияния магнитного беспорядка на уровне седловых уравнений.

В квазиклассическом режиме, когда энергия Ферми является наибольшим энергетическим масштабом,  $E_F\tau \gg 1$ , матрица  $Q$  принадлежит многообразию [215; 219]

$$Q^2 = 1. \quad (3.54)$$

Используя условие грязного предела (3.48), раскладываем действие по градиентам  $Q$  [одновременно раскладывая логарифм в действии (3.52) по  $\delta\mathbf{h}$ ] и получаем [215; 219] действие (3.45), где

$$\mathcal{S}_0 = \pi\nu \int d^3\mathbf{r} \text{STr} \left\{ \frac{D}{4} (\nabla Q)^2 + \left[ i\hat{\tau}_3(E - \hat{\sigma}\mathbf{h}) - \hat{\Delta} \right] Q \right\}, \quad (3.55)$$

$$\mathcal{S}_1 = -i\pi\nu \int d^3\mathbf{r} \delta\mathbf{h}(\mathbf{r}) \text{STr}(\hat{\tau}_3\hat{\sigma}Q(\mathbf{r})), \quad (3.56)$$

$$\mathcal{S}_2 = \frac{1}{2} \text{STr} \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \frac{d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^6} [T\hat{\tau}_3\hat{\sigma}\delta\mathbf{h}T^{-1}]_{\mathbf{r}} \frac{e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{\xi - \frac{i\Lambda}{2\tau}} [T\hat{\tau}_3\hat{\sigma}\delta\mathbf{h}T^{-1}]_{\mathbf{r}'} \frac{e^{-i\mathbf{p}'(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{\xi' - \frac{i\Lambda}{2\tau}}, \quad (3.57)$$

где локальная матрица  $T(\mathbf{r})$  параметризует вращения матрицы  $Q$ :

$$Q = T^{-1}\Lambda T, \quad \Lambda = \hat{\tau}_3. \quad (3.58)$$

Интегралы по  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$  в формуле (3.57) можно вычислить, и это даёт ядро, убывающее на упругой длине свободного пробега  $l$ . Предполагая, что  $Q$ -матрица меняется на масштабах много больше  $l$ , можем положить  $T(\mathbf{r}) = T(\mathbf{r}')$  в формуле (3.57), что даёт

$$\mathcal{S}_2 = -\frac{\pi^2\nu^2}{2} \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \frac{\sin^2(k_F|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{(k_F|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)^2} e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/l} \delta h_i(\mathbf{r}) \delta h_j(\mathbf{r}') \text{STr}(\hat{\tau}_3\hat{\sigma}_i Q(\mathbf{r})\hat{\tau}_3\hat{\sigma}_j Q(\mathbf{r})). \quad (3.59)$$

### Локальный спин-флип вклад

Усреднение  $\mathcal{S}_2$  по магнитному беспорядку (3.30) даёт спин-флип вклад (3.34), где

$$\Gamma_{\text{sf}}^{ij} = \pi\nu \int d^3\mathbf{r} F_{ij}(r) \frac{\sin^2(k_F r)}{(k_F r)^2} e^{-r/l}. \quad (3.60)$$

Это выражение обобщает результат Абрикосова и Горькова для точечных примесей [23]. Магнитный беспорядок в работе Абрикосова и Горькова предполагался дельта-коррелированным, что соответствует  $F_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta_{ij}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/(6\pi\nu\tau_s)$  и  $\Gamma_{sf}^{ij} = \delta_{ij}/(6\tau_s)$ . Приведённый выше вывод обобщает этот результат на случай среднекоррелированного беспорядка, корреляционная длина которого может достигать  $l$ . Как будет показано ниже, вклад (3.60) является основным при  $a \ll l$ , поэтому в этом режиме можно пренебречь множителем  $e^{-r/l}$ , что приводит к формуле (3.42).

### Нелокальный спин-флип вклад

Усреднение  $\mathcal{S}_1$  по магнитному беспорядку (3.30) приводит к вкладу в действие

$$-\frac{1}{2}\langle(\mathcal{S}_1)^2\rangle = \frac{\pi^2\nu^2}{2} \int d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{r}' F_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \text{STr}(\hat{\tau}_3\hat{\sigma}_i Q(\mathbf{r})) \text{STr}(\hat{\tau}_3\hat{\sigma}_j Q(\mathbf{r}')). \quad (3.61)$$

В отличие от основной части действия  $\mathcal{S}_0$ , содержащей только одну операцию  $\text{STr}$ , этот вклад является произведением двух суперследов. Седловое решение  $Q_0$  предполагается суперсимметричным (или реплично-симметричным), тогда вклад (3.61) зануляется в такой седловой точке. Однако учёт флуктуаций, нарушающих суперсимметрию (или репличную симметрию) даёт неисчезающий вклад, содержащий только один  $\text{STr}$ .

Чтобы усреднить вклад (3.61) по флуктуациям  $Q$ , параметризуем эти флуктуации локальными матрицами вращения  $W$ , антикоммутирующими с  $Q_0$ :

$$Q = Q_0 + iQ_0W + \dots \quad (3.62)$$

Эффективное действие для  $W$ , которое получается из  $\mathcal{S}_0$ , в квадратичном порядке есть

$$\mathcal{S}_W = \frac{\pi\nu D}{4} \int d^3\mathbf{r} \text{STr}(\nabla W)^2. \quad (3.63)$$

Поскольку в формуле (3.61) важны корреляции  $W$  на длинах порядка  $a$ , достаточно учесть коротковолновые флуктуации  $W$ . Поэтому можно пренебречь членами, содержащими  $E$ ,  $\mathbf{h}$ ,  $\Delta$  и  $\nabla Q_0$  в формуле (3.63), если выполнены условия

$$E_{\text{Th}}, E, \Delta, h, \Gamma_{sf} \ll E_a. \quad (3.64)$$

Для усреднения по флуктуациям с действием (3.63) для  $W$ , антикоммутирующих с  $Q_0$ , используем следующие правила слияния [215; 221]:

$$\langle \text{STr}(A_1 W(\mathbf{r})) \text{STr}(A_2 W(\mathbf{r}')) \rangle_{\mathcal{S}_W} = \frac{1}{\pi\nu D} [\nabla^{-2}]_{\mathbf{r}\mathbf{r}'} \text{STr}(A_1 Q_0 A_2 Q_0 - A_1 A_2) \quad (3.65)$$

для любых операторов  $A_1$  и  $A_2$  [здесь  $[\nabla^{-2}]_{\mathbf{r}\mathbf{r}'} = -(4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)^{-1}$  — ядро обратного оператора Лапласа в трёх измерениях]. Применяя это тождество к усреднению вклада (3.61) с матрицей  $Q$ , параметризованной по формуле (3.62), находим, что  $-\frac{1}{2}\langle(\mathcal{S}_1)^2\rangle_{\mathcal{S}_W}$  даётся обычным спин-флип вкладом (3.34), в котором

$$\Gamma_{sf}^{ij} = -\frac{1}{D} \int d^3\mathbf{r} F_{ij}(\mathbf{r}) [\nabla^{-2}]_{0\mathbf{r}}, \quad (3.66)$$

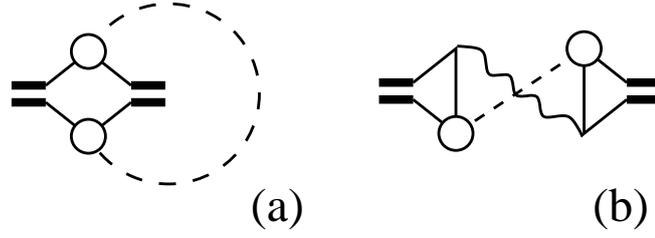


Рисунок 3.4 — Диаграммное представление (а) локального и (б) нелокального вклада в сигма-модельном вычислении. Жирная двойная линия —  $Q$ -матрица; замкнутые петли из тонких сплошных линий — операции  $S\text{Tr}$ ; пустые кружки — «магнитные вершины»  $\hat{\tau}_3 \hat{\sigma}$ . Штриховые линии — корреляционные функции магнитного беспорядка  $F_{ij}$ ; волнистые линии — пропагаторы поля  $W$ .

что совпадает с формулой (3.43).

### Обсуждение двух вкладов

Хотя два вклада (3.46) возникают из двух разных слагаемых в действии сигма-модели, ниже будет показано, что в действительности они соответствуют двум предельным случаям для магнитного беспорядка, как показано на рисунке 3.3.

Во-первых, сравним величины двух интенсивностей спин-флип рассеяния. Локальная интенсивность (3.60) имеет порядок величины

$$\Gamma_{\text{sf}}^{(\text{local})} \sim \nu (\delta h)^2 a^3, \quad a \ll k_F^{-1}, \quad (3.67)$$

$$\Gamma_{\text{sf}}^{(\text{local})} \sim \nu (\delta h)^2 a k_F^{-2}, \quad k_F^{-1} \ll a \ll l, \quad (3.68)$$

$$\Gamma_{\text{sf}}^{(\text{local})} \sim \nu (\delta h)^2 l k_F^{-2}, \quad l \ll a. \quad (3.69)$$

В то же время нелокальный вклад (3.66) можно оценить как

$$\Gamma_{\text{sf}}^{(\text{nonlocal})} \sim \frac{(\delta h)^2 a^2}{D} \sim \nu (\delta h)^2 \frac{a^2}{l} k_F^{-2}. \quad (3.70)$$

Поэтому нелокальный вклад (3.66) оказывается основным при  $a \gg l$ , а локальный вклад (3.60) — при  $a \ll l$ .

Во-вторых, можно два вклада представить графически, как это показано на рисунке 3.4. Корреляционные функции  $Q$ -матриц в сигма-модели соответствуют диффузионным лестницам в традиционной диаграммной технике [215], поэтому сигма-модельные диаграммы на рисунках 3.4(a) и 3.4(b) можно перевести на язык процессов, показанных на рисунке 3.3. Таким образом, хотя формально в процессе вывода возникает сумма двух членов  $\Gamma_{\text{sf}}^{(\text{local})} + \Gamma_{\text{sf}}^{(\text{nonlocal})}$ , в режиме  $a \ll l$  нужно сохранить только локальный член, а в противоположном режиме  $a \gg l$  — только нелокальный член. В то же время нелокальный член был выведен при условии неявно сделанного предположения  $a \gg l$ , поскольку в формуле (3.65) был использован диффузионный пропагатор для корреляционной функции  $W(\mathbf{r})$  и  $W(\mathbf{r}')$

на расстояниях порядка  $a$ . Следовательно, на промежуточных масштабах  $a \sim l$  ни один из членов (3.60) и (3.66), а также их сумма не дают правильного результата для интенсивности спин-флипа. Чтобы вычислить эту интенсивность при  $a \sim l$ , необходимо учесть переход (кроссовер) от баллистического к диффузному движению. Это вычисление представлено в разделе 3.2.5 на диаграммном языке (аналогичное вычисление для ситуации коллинеарной периодической намагниченности было проделано в работах [217; 218]).

Наконец, прокомментируем условия применимости вышеприведённого вывода. Для вывода локального вклада (при  $a \ll l$ ) требуются только условия (3.48) и (3.49). Для нелокального вклада (при  $a \gg l$ ) также предполагалось условие (3.64). В целом, условия применимости могут быть сформулированы в виде (3.31).

### 3.2.4 Вывод из уравнений Узаделя

Теперь обсудим альтернативный вывод спин-флип вклада в режиме длинномасштабных корреляций ( $a \gg l$ ) методом прямого усреднения уравнений Узаделя [11; 65; 222; 223] по магнитному беспорядку.

В режиме длинномасштабных корреляций общие предположения (3.31) можно упростить:

$$E_{\text{Th}}, E, \Delta, h, \delta h \ll E_a. \quad (3.71)$$

### Эффективная интенсивность спин-флипа

Отталкиваемся от уравнения Узаделя с обменным полем

$$D\nabla (\check{G}\nabla\check{G}) + [iE\hat{\tau}_3\hat{\sigma}_0 - \hat{\Delta}\hat{\sigma}_0 - i\hat{\tau}_3(\mathbf{H}\hat{\sigma}), \check{G}] = 0, \quad (3.72)$$

где градиентный член также можно записать в виде

$$\nabla (\check{G}\nabla\check{G}) = \frac{1}{2} [\check{G}, \nabla^2\check{G}] \quad (3.73)$$

благодаря условию нормировки  $\check{G}^2 = 1$ . Здесь  $\mathbf{H}$  — полное зависящее от реализации беспорядка обменное поле, содержащее плавное фоновое поле  $\mathbf{h}$  и гауссов беспорядок  $\delta\mathbf{h}$ , подчиняющийся формуле (3.30):

$$\mathbf{H} = \mathbf{h} + \delta\mathbf{h}. \quad (3.74)$$

Точное решение уравнения (3.72) можно записать как сумму

$$\check{G} = \check{g} + \delta\check{g} \quad (3.75)$$

усреднённой по беспорядку части  $\check{g} = \langle \check{G} \rangle$  и части  $\delta\check{g}$ , которая зависит от реализации магнитного беспорядка и имеет нулевое среднее.

Как подтверждается дальнейшим вычислением, в предположениях (3.71) зависящая от беспорядка часть  $\delta\check{g}$  мала,  $|\delta\check{g}| \ll 1$ , и достаточно считать её линейной по  $\delta\mathbf{h}$ . Наша цель состоит в получении уравнения на усреднённую по беспорядку функцию Грина  $\check{g}$ . Следует иметь в виду, что  $\check{g}$  не есть просто нулевой порядок по  $\delta\mathbf{h}$ : в сделанных предположениях на эту функцию также влияют средние, содержащие второй порядок по  $\delta\mathbf{h}$ .

Усреднение условия нормировки  $\check{G}^2 = 1$  по магнитному беспорядку и пренебрежение вкладом  $\langle \delta\check{g}^2 \rangle$  [это можно делать в предположениях (3.71)] приводят к условию нормировки  $\check{g}^2 = 1$ . Тогда зависящая от реализации беспорядка часть должна удовлетворять соотношению

$$\{\check{g}, \delta\check{g}\} = 0. \quad (3.76)$$

Усредняя уравнение (3.72) по магнитному беспорядку и учитывая формулу (3.73), находим

$$\frac{D}{2} [\check{g}, \nabla^2 \check{g}] + \left[ iE\hat{\tau}_3\hat{\sigma}_0 - \hat{\Delta}\hat{\sigma}_0 - i\hat{\tau}_3(\mathbf{h}\hat{\sigma}), \check{g} \right] - i[\hat{\tau}_3\hat{\sigma}_i, \langle \delta h_i \delta\check{g} \rangle] = 0, \quad (3.77)$$

где подразумевается суммирование по повторяющемуся индексу. Здесь опущена полная производная  $\nabla \langle [\delta\check{g}, \nabla \delta\check{g}] \rangle$ , поскольку этот член имеет дополнительную малость [это подтверждается полученным ниже результатом (3.79)].

Чтобы вычислить средние в формуле (3.77), выделим в уравнении (3.72) линейную по  $\delta\mathbf{h}$  часть:

$$\frac{D}{2} [\check{g}, \nabla^2 \delta\check{g}] - \left[ \frac{D}{2} \nabla^2 \check{g} - iE\hat{\tau}_3\hat{\sigma}_0 + \hat{\Delta}\hat{\sigma}_0 + i\hat{\tau}_3(\mathbf{h}\hat{\sigma}), \delta\check{g} \right] = i[\hat{\tau}_3(\delta\mathbf{h}\hat{\sigma}), \check{g}]. \quad (3.78)$$

Это линейное уравнение на  $\delta\check{g}$  с источником, содержащим беспорядок  $\delta\mathbf{h}$ . Чтобы отсюда найти  $\delta\check{g}$ , заметим, что первый член здесь — наибольший, поскольку производные действуют на быструю функцию  $\delta\check{g}$ , которая следует за  $\delta\mathbf{h}$  и, следовательно, меняется на масштабе  $a$ . Второй член в левой части меньше, согласно предположениям (3.71), поэтому им можно пренебречь. Используя формулу (3.76), можно получить

$$\delta\check{g} = \frac{i}{D} (\nabla^{-2} \delta h_i) \check{g} [\hat{\tau}_3 \hat{\sigma}_i, \check{g}]. \quad (3.79)$$

После этого возникающая за счет беспорядка часть формулы (3.77) принимает стандартный вид спин-флип вклада:

$$-i[\hat{\tau}_3 \hat{\sigma}_i, \langle \delta h_i \delta\check{g} \rangle] = -\Gamma_{\text{sf}}^{ij} [\hat{\tau}_3 \hat{\sigma}_i \check{g} \hat{\tau}_3 \hat{\sigma}_j, \check{g}], \quad (3.80)$$

где обозначено

$$\Gamma_{\text{sf}}^{ij} = -\frac{1}{D} \langle \delta h_i \nabla^{-2} \delta h_j \rangle \quad (3.81)$$

Таким образом, окончательно получается формула (3.35).

### 3.2.5 Диаграммное представление

Альтернативный способ получения интенсивности рассеяния с переворотом спина заключается в прямолинейном вычислении диаграмм, показанных на рисунке 3.3. Эти диаграммы — сверхпроводящие куперонные пропагаторы: они построены из запаздывающих функций Грина для электронов [с дисперсией  $\xi(\mathbf{p})$ ] и запаздывающих функций Грина для дырок [с дисперсией  $-\xi(\mathbf{p})$ ]. Последние можно переписать через опережающие функции для электронов с противоположной энергией, что и будет подразумеваться ниже. Эти куперонные мягкие моды естественным образом возникают в диаграммном разложении нелинейной сигма-модели, обсуждавшейся в разделе 3.2.3. Таким образом, показанные на рисунке 3.3 диаграммы напрямую соответствуют диаграммам сигма-модели на рисунке 3.4.

Куперонные моды являются безмассовыми в отсутствие сверхпроводящих корреляций (т.е. становятся сингулярными, если полный внешний импульс и энергия равны нулю). При учёте спин-флип процессов купероны приобретают массу, напрямую связанную с интенсивностью спин-флип процессов.

Сверхпроводящие корреляции в системе также делают купероны массивными. Ниже при вычислении спин-флип интенсивности мы будем пренебрегать этим эффектом в силу условий (3.31). Все механизмы, дающие массу куперона, включая спин-флип процессы, являются слабыми и их вклады могут быть вычислены независимо.

Чтобы найти эффективную интенсивность спин-флип процессов, нужно вычислить две диаграммы, показанные на рисунке 3.3, при нулевом полном импульсе и нулевой энергии. Диаграммы (а) и (б) дают следующие вклады в собственную энергию куперона:

$$\gamma_{(a)}^{ij} = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} F_{ij}(q) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} G^R(\mathbf{p} + \mathbf{q}) G^A(-\mathbf{p} - \mathbf{q}) G^R(\mathbf{p}) G^A(-\mathbf{p}), \quad (3.82)$$

$$\gamma_{(b)}^{ij} = 2 \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} F_{ij}(q) C(q) \left| \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} G^R(\mathbf{p} + \mathbf{q}) G^R(\mathbf{p}) G^A(-\mathbf{p}) \right|^2, \quad (3.83)$$

где  $G^{R,A}(\mathbf{p}) = [-\xi(\mathbf{p}) \pm \frac{i}{2\tau}]^{-1}$  — запаздывающая и опережающая функции Грина на нулевой энергии.  $C(q)$  обозначает куперон, содержащий только потенциальные примеси:

$$C(q) = \frac{1 + B(q) + B^2(q) + \dots}{2\pi\nu\tau} = \frac{1}{2\pi\nu\tau} \frac{1}{1 - B(q)}, \quad (3.84)$$

где

$$B(q) = \frac{1}{2\pi\nu\tau} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} G^R(\mathbf{p} + \mathbf{q}) G^A(-\mathbf{p}) \quad (3.85)$$

— одна ступенька лестницы, содержащая примесную линию и две гриновские функции. Множитель 2 в формуле (3.83) учитывает две возможные диаграммы типа (б).

Полная интенсивность рассеяния с переворотом спина есть сумма формул (3.82) и (3.83) с коэффициентом, который легко найти из сравнения с пределом точечных примесей [23]. В этом пределе  $F_{ij}(q)$  не зависит от импульса  $q$ , и вклад даёт только член (3.82), что приводит к формуле

$$\gamma_{(a)}^{ij} = 4\pi^2\nu^2\tau^2 \int d^3\mathbf{r} F_{ij}(r). \quad (3.86)$$

Сравнение с формулой (3.40) приводит к следующему результату:

$$\Gamma_{\text{sf}}^{ij} = \frac{1}{4\pi\nu\tau^2} \left( \gamma_{(a)}^{ij} + \gamma_{(b)}^{ij} \right). \quad (3.87)$$

Далее вычисление спин-флип интенсивности удобно произвести в двух перекрывающихся режимах: средне-длинно-масштабные магнитные корреляции ( $a \gg k_F^{-1}$ ) и коротко-средне-масштабные магнитные корреляции ( $a \ll l$ ).

В средне-длинно-масштабном режиме интегрирование в формулах (3.82) и (3.83) ограничено на  $q \ll k_F$  и может быть выполнено с помощью перехода к интегрированию по  $\xi$  в окрестности ферми-поверхности. Для начала используем тождество

$$G^R(\mathbf{p})G^A(-\mathbf{p}) = i\tau [G^R(\mathbf{p}) - G^A(-\mathbf{p})] \quad (3.88)$$

и отбрасываем все интегралы, содержащие только запаздывающие или только опережающие функции Грина (т.к. все их полюса лежат в одной полуплоскости переменной  $\xi$ ). Это позволяет переписать формулы (3.82) и (3.83) через функцию  $B(q)$ , определённую в формуле (3.85):

$$\gamma_{(a)}^{ij} = 4\pi\nu\tau^3 \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} F_{ij}(q)B(q), \quad (3.89)$$

$$\gamma_{(b)}^{ij} = 4\pi\nu\tau^3 \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{F_{ij}(q)B^2(q)}{1 - B(q)}. \quad (3.90)$$

В результате формула (3.87) приводит к

$$\Gamma_{\text{sf}}^{ij} = \tau \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{F_{ij}(q)B(q)}{1 - B(q)}. \quad (3.91)$$

Прямое вычисление  $B(q)$  (интегрированием по  $\xi$ ) даёт

$$B(q) = \frac{1}{2\pi\nu\tau} \int \frac{d^3\mathbf{p}/(2\pi)^3}{(-\xi - \mathbf{v}\mathbf{q} + \frac{i}{2\tau})(-\xi - \frac{i}{2\tau})} = \left\langle \frac{1}{1 + i\tau\mathbf{v}\mathbf{q}} \right\rangle_{\mathbf{v}} = \frac{\arctan(ql)}{ql}. \quad (3.92)$$

Подставляя это выражение в формулу (3.91), получаем результат (3.44) для режима средне- и длинномасштабных корреляций.

В коротко-средне-масштабном режиме интегралы (3.82) и (3.83) определяются импульсами  $q \gg l^{-1}$ , что позволяет пренебречь вкладом (3.83) по сравнению с (3.82). Если корреляционная длина магнитного беспорядка становится сравнима с  $k_F^{-1}$ , интегралами от  $G^R G^R$  и  $G^A G^A$  уже нельзя пренебрегать, поэтому интеграл (3.82) нужно вычислять иначе. Основной вклад в интегрирование по  $\mathbf{p}$  даёт пересечение двух массовых поверхностей «ширины»  $l^{-1}$ , сдвинутых на вектор  $\mathbf{q}$ . Используя неравенство  $q \gg l^{-1}$ , можно приблизить  $G^R(\mathbf{p})G^A(-\mathbf{p})$  дельта-функцией и получить

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} G^R(\mathbf{p} + \mathbf{q})G^A(-\mathbf{p} - \mathbf{q})G^R(\mathbf{p})G^A(-\mathbf{p}) \\ & = 4\pi^2\tau^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \delta[\xi(\mathbf{p})] \delta[\xi(\mathbf{p} + \mathbf{q})] = \frac{2\pi^2\nu\tau^3}{ql} \theta(2k_F - q). \end{aligned} \quad (3.93)$$

Подстановка этого выражения в формулу (3.82) приводит к результату (3.42) для кроссовера между коротко- и среднемасштабным режимами.

В рассматриваемом квазиклассическом пределе  $k_F l \gg 1$  можно объединить два перекрывающихся режима в одну формулу

$$\Gamma_{\text{sf}}^{ij} = \tau \int_{q < 2k_F} \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{F_{ij}(q) \arctan(ql)}{ql - \arctan(ql)}. \quad (3.94)$$

### 3.2.6 Заключение

Было исследовано влияние магнитных неоднородностей на неупорядоченные сверхпроводящие системы. Рассмотрен магнитный беспорядок с произвольной длиной корреляции, что обобщает теорию Абрикосова и Горькова [23], а также некоторые работы по сверхпроводимости в системах с неоднородной намагниченностью [217; 218]. Основной вывод состоит в том, что если корреляционная длина магнитного беспорядка гораздо меньше всех макроскопических масштабов задачи [условия (3.31)], то эффект магнитного беспорядка может быть описан как эффективное рассеяние с переворотом спина (спин-флип рассеяние), и соответствующий вклад в уравнения имеет тот же вид, что и для случая магнитных примесей [23]). Были получены точные выражения для эффективной спин-флип интенсивности в предположении гауссова магнитного беспорядка.

Полученные результаты могут быть применены для оценок спин-флип эффекта, вызванного магнитной неоднородностью в различных экспериментах. В качестве примера такого применения рассмотрим эксперименты по SFS  $\pi$ -контактам, в которых спин-флип процессы играют важную роль [8; 211]. Если применить полученные оценки к экспериментальным данным, изложенным в работе [8] (предполагая  $\delta h \sim h$ ), то получается оценка для длины корреляции магнитного беспорядка  $a \sim 2$  нм. Следует отметить, что эта корреляционная длина оказывается порядка масштабов длины, связанных с однородной компонентой обменного поля  $h$  и с эффективным спин-флип рассеянием, поэтому этот пример находится на границе применимости изложенной теории. Получившийся размер неоднородностей явно слишком мал для доменов (в недавнем эксперименте на плёнках CuNi, похожих на плёнки, которые использовались в  $\pi$ -контактах, были обнаружены домены размера около 100 нм [224]). Однако наши оценки согласуются с указаниями на наличие кластеров атомов никеля в таких сплавах [225; 226] (неоднородности внутри доменов).

Наконец, прокомментируем сравнение результатов для эффективной интенсивности спин-флип процессов в двух случаях неоднородной намагниченности: неупорядоченном и периодическом. Неупорядоченный случай рассмотрен в данном разделе, а примеры периодических магнитных структур были ранее изучены в работах [217; 218; 227], а также в разделе 3.1. Полученные результаты для интенсивности спин-флип рассеяния все имеют один и тот же порядок величины, различаясь только численными множителями. Проверим это утверждение для результатов раздела 3.1. В нём рассматривалась задача о критической амплитуде периодического обменного поля, подавляющего минищель в SFS и SF контактах.

Найденные результаты по порядку величины даются формулой (3.2). В предположениях раздела 3.1 минищель в отсутствие обменного поля определялась бы энергией Таулеса. Если интерпретировать подавление минищели как результат действия эффективного спин-флип рассеяния, то для его интенсивности нужно брать формулу (3.43). Оказывается, что при  $h$ , определяемом формулой (3.2), спин-флип интенсивность (3.43) даёт  $\Gamma_{\text{sf}} \sim E_{\text{Th}}$ . В случае настоящего спин-флип рассеяния именно такая его интенсивность должна была бы подавлять таулесовскую минищель.

Таким образом, по-видимому нет качественной разницы между эффективными интенсивностями в неупорядоченных и периодических магнитных структурах в пределе, когда характерные длины неоднородностей достаточно малы.

### 3.3 Поверхностный импеданс в диффузных сверхпроводниках со слабыми неборновскими магнитными примесями

#### 3.3.1 Введение

Рассеяние электронов на магнитных примесях, в отличие от потенциального рассеяния, существенно меняет свойства  $s$ -волновых сверхпроводников. В классической работе Абрикосова и Горькова [23] (АГ) было показано, что магнитные примеси подавляют сверхпроводящую щель и могут привести к бесщелевой сверхпроводимости. Подавление щели исследовалось экспериментально с помощью туннелирования между нормальным металлом и сверхпроводником [228; 229]. Далее, при выходе за рамки теории АГ (в которой магнитные примеси считались борновскими) было обнаружено, что каждая магнитная примесь создаёт локализованное состояние внутри щели БКШ [24; 25; 230; 231]. При конечной концентрации примесей эти состояния образуют примесную зону [24; 25], которая сливается с континуумом, когда концентрация превышает некоторое значение (см. обзор [232]). (Исходная теория АГ применима при больших концентрациях.) Примесная зона исследовалась в туннельных экспериментах со сплавами (такими как PbMn) [233] и в бислоях нормальный металл–сверхпроводник [234; 235], а также с помощью переноса тепла в сверхпроводящих плёнках [236]. Наблюдение дискретных уровней, связанных с отдельными магнитными примесями, стало возможным благодаря туннельной микроскопии [237–240].

Эффект магнитных примесей сейчас привлекает внимание, в частности, с точки зрения ограничений работы сверхпроводящих элементов в кубитах [241] и детекторах фотонов [242]. В этих приложениях сверхпроводники работают в режиме переменного поля. Также имеется экспериментальная деятельность, направленная непосредственно на наблюдение влияния магнитных примесей на поверхностный импеданс сверхпроводящих многослойных структур [243] и необычных сверхпроводников [244–246]. Теоретически результаты по им-

педансу [243–246] анализировались в рамках простой двухжидкостной модели. Эта модель предполагает упрощённую независящую от частоты диссипативную проводимость  $\sigma$ , в то время как на самом деле влияние магнитных примесей на спектр электронов приводит к нетривиальной зависимости проводимости от частоты,  $\sigma(\omega)$ .

Теоретический подход к описанию поверхностного импеданса в сверхпроводниках был развит в известной работе Маттиса и Бардина [118], в которой рассматривался аномальный скин-эффект (глубина скин-слоя меньше длины свободного пробега) с учётом немагнитного беспорядка. Независимо чистый случай был рассмотрен Абрикосовым, Горьковым и Халатниковым [104; 247; 248] на языке функций Грина. Позже Нам [119; 249], используя ту же технику, показал, что экстремально аномальный предел эквивалентен (с точностью до выражения для проводимости нормального состояния) локальному пределу, который реализуется в грязном режиме. Комплексная проводимость сверхпроводника, содержащего как потенциальные, так и магнитные примеси, исследовалась Скальским и др. [250]. Их статья содержит общие результаты, применимые в случае слабого магнитного рассеяния; в то же время, как и в теории АГ, рассеяние на магнитных примесях рассматривалось в борновском приближении, которое не позволяет учесть влияние локализованных состояний на импеданс. В работе [251] Ларкин и Овчинников рассмотрели сверхпроводники с неоднородным спариванием, что при определённых условиях формально эквивалентно магнитным примесям в режиме АГ. Следовательно, некоторые их результаты могут быть применены к этой задаче. Однако, насколько известно автору, до развития изложенной ниже теории не существовало удобного подхода, применимого в экспериментально важном грязном пределе для случая произвольных спектральных характеристик квазичастиц, позволяющего единообразно описать как режим АГ, так и примесную зону. Также, насколько известно автору, не было подробно исследовано влияние магнитных примесей на поверхностный импеданс в разных режимах по температуре, частоте и интенсивности рассеяния на магнитных примесях.

В данном разделе будет изучено влияние магнитных примесей на комплексную проводимость и поверхностный импеданс грязного сверхпроводника. Особое внимание будет уделено пределу низких частот падающего излучения и низких температур, а также влиянию примесной зоны на диссипацию.

### 3.3.2 Основные уравнения

Будем предполагать, что время свободного пробега  $\tau_p$  за счет потенциального рассеяния мало и выполнено условие грязного предела  $\Delta \ll 1/\tau_p$ . В грязном пределе магнитные примеси малой концентрации можно описать в рамках уравнения Узаделя [65]. Запись уравнения Узаделя, широко используемая в литературе [222; 223], соответствует борновскому пределу для магнитного рассеяния (со случайными положениями и ориентациями магнитных примесей). В то же время можно обобщить уравнения на случай произвольной силы магнитного рассеяния — это было показано Маркетти и Саймонсом [252]. Магнитные примеси

предполагаются локализованными классическими спинами величины  $S$ , константа обменного взаимодействия с электронами проводимости —  $J$ . Тогда «сила» отдельной примеси описывается безразмерным параметром  $\zeta = \pi\nu_0JS$ , где  $\nu_0$  — плотность состояний в нормальной фазе в расчёте на одну проекцию спина.

Используя стандартную  $\theta$ -параметризацию нормальной и аномальной функций Грина,

$$G = \cos \theta, \quad F = \sin \theta, \quad (3.95)$$

можем записать обобщённое уравнение в виде [252]

$$\frac{D}{2}\nabla^2\theta + iE \sin \theta + \Delta \cos \theta - \frac{1}{2\tau_s} \frac{\sin 2\theta}{1 + \zeta^4 + 2\zeta^2 \cos 2\theta} = 0. \quad (3.96)$$

Нас интересует однородное решение. Следуя работе [252], определим «перенормированную» энергию и параметр порядка:

$$\tilde{E} = E + \frac{i}{2\tau_s} \frac{\cos \theta}{1 + \zeta^4 + 2\zeta^2 \cos 2\theta}, \quad (3.97)$$

$$\tilde{\Delta} = \Delta - \frac{1}{2\tau_s} \frac{\sin \theta}{1 + \zeta^4 + 2\zeta^2 \cos 2\theta}. \quad (3.98)$$

После этого однородное уравнение Узалея принимает простой вид

$$i\tilde{E} \sin \theta + \tilde{\Delta} \cos \theta = 0, \quad (3.99)$$

и может быть формально решено:

$$\cos \theta = \frac{u}{\sqrt{u^2 - 1}}, \quad \sin \theta = \frac{i}{\sqrt{u^2 - 1}}, \quad (3.100)$$

где  $u = \tilde{E}/\tilde{\Delta}$ . В то же время это на самом деле ещё не решение, а лишь альтернативная параметризация функций Грина через величину  $u$ . Уравнение Узалея определяет зависимость функций Грина от энергии  $E$ ; следовательно, в формулах (3.100)  $u$  само зависит от  $E$ . Эта зависимость определяется уравнением, следующим из формул (3.97) и (3.98):

$$u \left( 1 + \gamma_s \frac{\sqrt{1 - u^2}}{u^2 - \epsilon_0^2} \right) = \frac{E}{\Delta}, \quad (3.101)$$

где

$$\gamma_s = \frac{1}{(1 + \zeta^2)^2} \frac{1}{\tau_s \Delta}, \quad \epsilon_0 = \left| \frac{1 - \zeta^2}{1 + \zeta^2} \right|. \quad (3.102)$$

Здесь  $\gamma_s$  — точная интенсивность рассеяния на магнитных примесях, нормированная на  $\Delta$ , а величина  $\epsilon_0$  — нормированное положение центра примесной зоны. Примеси предполагаются неборновскими, но слабыми, т.е.  $\zeta \ll 1$ , поэтому приведённые выше выражения можно упростить:

$$\gamma_s = \frac{1}{\tau_s \Delta}, \quad \epsilon_0 = 1 - 2\zeta^2. \quad (3.103)$$

Если найти  $u$ , можно сразу получить свойства спектра. Плотность состояний в расчёте на одну проекцию спина есть

$$\frac{\nu(E)}{\nu_0} = \text{Re } G(E) = \text{Re} \frac{u}{\sqrt{u^2 - 1}}. \quad (3.104)$$

Оказывается, что потенциальное рассеяние не влияет на спектр, поскольку формулы (3.101), (3.102) и (3.104) совпадают [252] с аналогичными формулами, полученными Шибой [24] и Русиновым [25] в чистом пределе.

### 3.3.3 Функции Грина и плотность состояний

Конечная плотность состояний соответствует комплексным решениям уравнения (3.101) для  $u$ . Анализируя поведение функции в левой части уравнения (3.101) при  $0 < u < 1$ , Шиба [24] обнаружил интервал энергий [правая часть уравнения (3.101)], в котором значение  $u$  не может быть вещественным. При положительных энергиях этот интервал есть примесная зона, центр которой находится в  $E_0 = |\varepsilon_0|\Delta$ . Вычислив  $u$  внутри узкой примесной зоны, для плотности состояний находим

$$\nu(E) = \frac{n_s}{\pi W} \operatorname{Re} \sqrt{1 - \left(\frac{E - E_0}{W/2}\right)^2}, \quad (3.105)$$

где

$$W = 4 \frac{1}{2^{1/4} \pi^{1/2}} \left(\frac{n_s}{\nu_0 \Delta}\right)^{1/2} \left(\frac{\Delta}{|\varepsilon_0|}\right)^{1/4} |\varepsilon_0| \quad (3.106)$$

— ширина зоны. Плотность состояний при  $E < 0$  — зеркальное отражение формулы (3.105). Полное число состояний в двух примесных зонах равно  $n_s$ .

При увеличении концентрации магнитных примесей (а значит при увеличении  $\gamma_s$ ) верхний край зоны сливается с континуумом при  $n_s/\zeta\nu_0\Delta = 16\pi(2/\sqrt{3}-1)^{3/2} \approx 3.06$ . При бóльших концентрациях реализуется режим АГ, и ширина щели уменьшается за счет магнитных примесей. Как следует из формулы (3.101), квазичастичный континуум начинается при энергии меньше, чем энергия связанного состояния на одной примеси  $E_0$ , и щель  $E_g$  монотонно подавляется с ростом  $\gamma_s$ . При  $\gamma_s^{2/3} \gg \zeta^2$  в формуле (3.101) можно заменить  $u^2 - \varepsilon_0^2$  на  $u^2 - 1$ . Тогда эта формула упрощается:

$$u \left(1 - \gamma_s \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}\right) = \frac{E}{\Delta}, \quad (3.107)$$

принимая точно такой же вид, как в работе АГ [23]. Заметив, что параметр  $\gamma_s$  по-прежнему может быть мал, и мы в основном рассматриваем именно этот случай:

$$\gamma_s \ll 1. \quad (3.108)$$

Режим АГ, соответствующий одной щели в спектре, обладает двумя характерными особенностями, важными для низкочастотной диссипации: во-первых, щель подавлена (относительный масштаб подавления равен  $\gamma_s^{2/3}$ ), а во-вторых, корневая расходимость в плотности состояний БКШ при  $E = \Delta$  размыта. Щель  $E_g$  в единицах  $\Delta$  равна [23]

$$\frac{E_g}{\Delta} = (1 - \gamma_s^{2/3})^{3/2} \approx 1 - \frac{3}{2}\gamma_s^{2/3}. \quad (3.109)$$

Решая уравнение Узаделя на энергиях, близких к истинной щели,  $(E - E_g) \ll \gamma_s^{2/3}\Delta$ , получаем

$$G(E) = -\frac{i}{\gamma_s^{1/3}} + \frac{1}{\gamma_s^{2/3}} \sqrt{\frac{2(E - E_g)}{3\Delta}}. \quad (3.110)$$

Корневое поведение плотности состояний [см. формулу (3.104)] в окрестности щели было найдено в работах [250; 253].

При низких концентрациях магнитные примеси существенно модифицируют спектр в относительно узком интервале энергий,  $|E - \Delta| \lesssim \gamma_s^{2/3} \Delta$ . Взяв  $E = \Delta$  как характерную точку в этом интервале, находим  $G$  и её производную по энергии:

$$G(\Delta) = \frac{1}{(2i)^{1/3} \gamma_s^{1/3}}, \quad G'(\Delta) = \frac{i}{3\gamma_s} + \frac{\sqrt{3} - i}{3 \cdot 2^{4/3} \gamma_s^{1/3}}. \quad (3.111)$$

Максимум плотности состояний достигается чуть выше  $E = \Delta$ . В то же время, рассматривая производную  $G'(\Delta)$  и решение БКШ, которое позволяет подойти к максимуму со стороны больших энергий, мы приходим к выводу, что максимальная плотность состояний имеет тот же порядок величины, что и значение, определяемое формулой (3.111). Этот результат был получен в работе [251].

Результаты для плотности состояний подытожены на рисунке 3.5. Заметим, что корневое поведение плотности состояний вблизи края щели, будучи применено при  $E = \Delta$  (что уже за пределами применимости корневого закона) даёт  $\nu(\Delta) = \gamma_s^{-1/3}$ , что лишь немного отличается от правильного результата  $\nu(\Delta) = (\sqrt{3}/2^{4/3}) \gamma_s^{-1/3} \approx 0.7 \gamma_s^{-1/3}$ , следующего из формулы (3.111).

При вычислении диссипации с помощью формулы (3.113) хорошее приближение для плотности состояний даёт следующий закон:

$$\operatorname{Re} G(E) \simeq \begin{cases} \frac{1}{\gamma_s^{2/3}} \sqrt{\frac{2(E-E_g)}{3\Delta}}, & E_g \lesssim E \lesssim \Delta, \\ \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3} \gamma_s^{1/3}}, & \Delta \lesssim E \lesssim \Delta(1 + \gamma_s^{2/3}), \\ \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}}, & \Delta(1 + \gamma_s^{2/3}) \lesssim E. \end{cases} \quad (3.112)$$

В точках сшивки приведённые здесь выражения согласуются по порядку величины, отличаясь лишь численными множителями порядка единицы. Следовательно, это довольно аккуратное приближение для вычисления диссипации с точностью до коэффициентов порядка единицы (в то же время в рассматриваемых ниже предельных случаях численные множители будут асимптотически точными).

При малых  $\zeta$  и  $\gamma_s$  магнитные примеси существенно меняют электронный спектр только при энергиях, близких к  $\Delta$ . В этом интервале энергий [соответствующем формуле (3.105) и первым двум строчкам формулы (3.112)] имеем  $u \approx 1$ , откуда  $F \approx iG$  [как следует из формулы (3.100)], так что в результате  $\operatorname{Im} F \approx \operatorname{Re} G$ . Вне этого интервала функции  $F$  и  $G$  в главном порядке имеют обычный БКШ вид [с  $\operatorname{Im} F(E) \approx \Delta/\sqrt{E^2 - \Delta^2}$  вместо последней строчки формулы (3.112)].

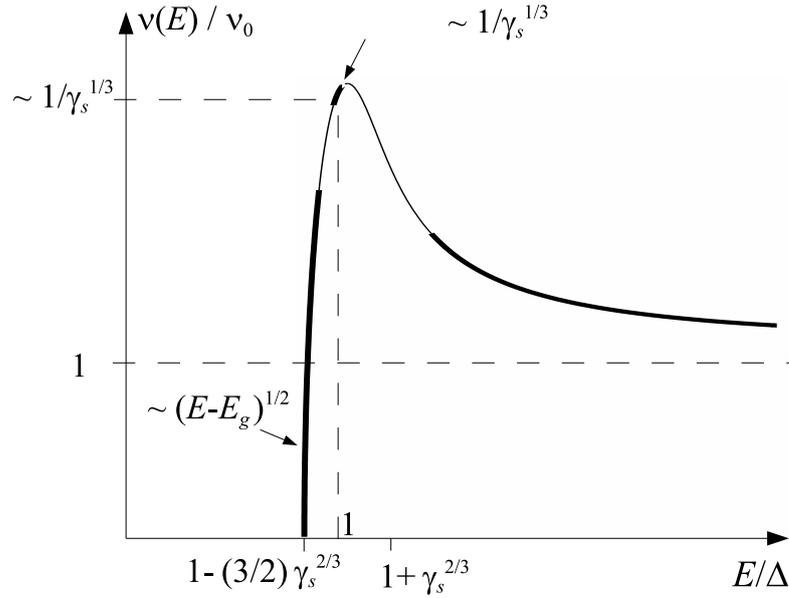


Рисунок 3.5 — Схематическая зависимость плотности состояний для сверхпроводника в режиме АГ при малой концентрации магнитных примесей. Жирные участки кривой найдены аналитически.

### 3.3.4 Диссипативная проводимость

Из формулы A.37 следует, что вещественная часть проводимости имеет вид

$$\frac{\sigma_1(\omega)}{\sigma_0} = \frac{1}{\omega} \int_0^\infty dE \left( \tanh \frac{E_+}{2T} - \tanh \frac{E_-}{2T} \right) [\operatorname{Re} G(E_+) \operatorname{Re} G(E_-) + \operatorname{Im} F(E_+) \operatorname{Im} F(E_-)], \quad (3.113)$$

где  $E_\pm = E \pm \omega/2$ .

#### $T = 0$ : переходы через щель

При нулевой температуре диссипация отсутствует ниже определённой пороговой частоты. В отсутствие магнитных примесей  $\omega$  должно превысить  $2\Delta$ , так что куперовская пара может быть разрушена, а две квазичастицы окажутся над щелью. При частотах непосредственно выше порога,  $(\omega - 2\Delta) \ll \Delta$ , диссипативная часть проводимости есть [118; 119; 247–249; 254]

$$\frac{\sigma_1(\omega)}{\sigma_0} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{\omega}{2\Delta} - 1 \right). \quad (3.114)$$

При наличии магнитных примесей сингулярность БКШ в функции Грина размывается, поэтому пороговое поведение диссипации меняется. Пороговая частота в режиме АГ равна  $2E_g$ , и ненулевой вклад в интеграл (3.113) происходит только от области энергий  $0 < E <$

$(\omega/2 - E_g)$ . Здесь мы получаем

$$\text{Im } F \approx \text{Re } G - \text{Re } \frac{1}{2G} \quad (3.115)$$

и находим поведение вблизи порога,  $(\omega - 2E_g) \ll \gamma_s^{2/3} \Delta$ :

$$\frac{\sigma_1(\omega)}{\sigma_0} = \frac{\pi}{6\gamma_s^{2/3}} \left( \frac{\omega}{2E_g} - 1 \right)^2. \quad (3.116)$$

Этот результат был получен в работе [251].

При самых низких концентрациях магнитных примесей внутри щели существует примесная зона, поэтому пороговая частота для поглощения определяется переходами, при которых куперовская пара разрывается, а две квазичастицы возникают в примесной зоне. Пороговая частота для такого процесса равна  $\omega_{\text{th}} = 2(E_g - W/2)$ . Непосредственно выше порога, при  $(\omega - \omega_{\text{th}}) \ll W$ , в формулу для диссипации (3.113) входит только поведение  $\text{Re } G$  и  $\text{Im } F$  вблизи края примесной зоны. Согласно формуле (3.105), обе эти функции вблизи края растут по корневому закону. В первом порядке возникает сокращение, поэтому нужно использовать формулу (3.115). Функциональная форма ответа оказывается такой же, как и в режиме АГ, и результат отличается от формулы (3.116) только коэффициентами:

$$\frac{\sigma_1^{(b)}(\omega)}{\sigma_0} = \frac{2\zeta^2 n_s^2}{\pi \nu_0^2 W^3 \omega_{\text{th}}} (\omega - \omega_{\text{th}})^2. \quad (3.117)$$

Далее будет рассмотрен случай конечных (хотя и низких) температур, в котором порог поглощения отсутствует, т.к. равновесные термически возбуждённые квазичастицы могут поглощать фотоны произвольно малых энергий.

## Низкие $T$ : переходы внутри состояний АГ

Рассмотрим режим АГ в пределе малых  $\gamma_s$ , так что квазичастичные состояния существуют только выше щели  $E_g$ , которая слабо подавлена по сравнению с  $\Delta$ , в соответствии с формулами (3.108) и (3.109). Большинство результатов данного подраздела были получены ранее, хотя иногда в рамках других физических задач и другими методами. Наше рассмотрение позволяет объединить эти результаты в рамках единого метода.

В рассматриваемом пределе  $\text{Re } G(E)$  и  $\text{Im } F(E)$ , входящие в формулу (3.113), отличны от нуля только выше  $E_g$ , которая близка к  $\Delta$ , так что при низких частотах и температурах,

$$\omega, T \ll \Delta, \quad (3.118)$$

возможны два упрощения: (а) гиперболические тангенсы можно заменить на их асимптотический экспоненциальный вид, и (б) поскольку экспоненты ограничивают интегрирование областью  $|E - \Delta| \lesssim T$ , где  $\text{Im } F(E) \approx \text{Re } G(E)$ , вклад от члена  $(\text{Im } F \text{Im } F)$  такой же, как от

( $\text{Re } G \text{ Re } G$ ). Поэтому можно упростить формулу (3.113) следующим образом:

$$\frac{\sigma_1(\omega)}{\sigma_0} = \frac{4}{\omega} \int_{E_g}^{\infty} dE (e^{-E/T} - e^{-(E+\omega)/T}) \text{Re } G(E) \text{Re } G(E + \omega). \quad (3.119)$$

В то же время при  $\omega \ll \Delta$  внешнее электромагнитное поле не может возбудить квазичастицы через щель, поэтому диссипация будет обусловлена только квазичастицами, уже существующими за счёт низкой, но конечной температуры. Естественно записывать результаты для диссипации через равновесную концентрацию квазичастиц

$$n_{\text{qp}} = 4\nu_0 \int_0^{\infty} dE \text{Re } G(E) \frac{1}{e^{E/T} + 1}, \quad (3.120)$$

для которой в тех же предположениях ( $T \ll \Delta$ ,  $\gamma_s \ll 1$ ) получаем два предельных случая:

$$\frac{n_{\text{qp}}}{\nu_0} = \frac{2}{\gamma_s^{2/3}} \sqrt{\frac{2\pi}{3\Delta}} T^{3/2} e^{-E_g/T}, \quad \text{at } T \ll \gamma_s^{2/3} \Delta, \quad (3.121)$$

$$\frac{n_{\text{qp}}}{\nu_0} = 2\sqrt{2\pi T \Delta} e^{-\Delta/T}, \quad \text{at } T \gg \gamma_s^{2/3} \Delta. \quad (3.122)$$

Ниже будут рассмотрены различные соотношения между тремя масштабами энергии:  $\omega$ ,  $T$  и  $\gamma_s^{2/3} \Delta$  (при этом все они много меньше  $\Delta$ ). Начиная со случая относительно сильного магнитного рассеяния,  $\omega, T \ll \gamma_s^{2/3} \Delta$ , заметим, что основной вклад в интеграл в формуле (3.119) даётся узкой областью выше  $E_g$ , где справедливо корневое поведение плотности состояний [первая строчка в формуле (3.112)]. В результате

$$\frac{\sigma_1(\omega)}{\sigma_0} = \frac{8T}{3\gamma_s^{4/3} \Delta} e^{-E_g/T} \sinh\left(\frac{\omega}{2T}\right) K_1\left(\frac{\omega}{2T}\right), \quad (3.123)$$

где  $K_1$  — функция Макдональда. Асимптотики функции Макдональда при больших и малых аргументах описывают два предельных случая относительно параметра  $\omega/T$ , так что в пределе  $\omega \ll T \ll \gamma_s^{2/3} \Delta$  воспроизводится результата Маки [253]

$$\frac{\sigma_1(\omega)}{\sigma_0} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \frac{1}{\gamma_s^{2/3}} \left(\frac{\Delta}{T}\right)^{1/2} \frac{n_{\text{qp}}}{\nu_0 \Delta}, \quad (3.124)$$

а при  $T \ll \omega \ll \gamma_s^{2/3} \Delta$  мы получаем

$$\frac{\sigma_1(\omega)}{\sigma_0} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\gamma_s^{2/3}} \left(\frac{\Delta}{\omega}\right)^{1/2} \frac{n_{\text{qp}}}{\nu_0 \Delta}. \quad (3.125)$$

Результат (3.123) был получен Ларкиным и Овчинниковым [251] в другой физической задаче. Они рассматривали сверхпроводник к неоднородным эффективным взаимодействиям между электронами. В случае мелкомасштабных неоднородностей задача оказывается математически эквивалентна случаю однородного эффективного взаимодействия, но в присутствии магнитных примесей. Поэтому результаты работы [251] применимы к рассматриваемой здесь задаче.

В пределе слабого магнитного рассеяния,  $\omega, T \gg \gamma_s^{2/3} \Delta$ , основной вклад в интеграл в формуле (3.119) возникает от области энергий выше размытой особенности БКШ. В этой области можно применять невозмущённый результат для плотности состояний [последняя строчка формулы (3.112)]. Так воспроизводятся результаты, полученные в отсутствие магнитных примесей [119; 247–249; 254]:

$$\frac{\sigma_1(\omega)}{\sigma_0} = \frac{4\Delta}{\omega} e^{-\Delta/T} \sinh\left(\frac{\omega}{2T}\right) K_0\left(\frac{\omega}{2T}\right). \quad (3.126)$$

Асимптотики функции Макдональда  $K_0$  при больших и малых аргументах описывают два предела для отношения  $\omega/T$ . В случае  $\gamma_s^{2/3} \Delta \ll \omega \ll T$  находим

$$\frac{\sigma_1(\omega)}{\sigma_0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\Delta}{T}\right)^{3/2} \frac{n_{\text{qp}}}{\nu_0 \Delta} \ln \frac{4T}{\gamma\omega} \quad (3.127)$$

(где  $\gamma \approx 1.78$  — постоянная Эйлера), в то время как при  $\gamma_s^{2/3} \Delta \ll T \ll \omega$  результат имеет вид

$$\frac{\sigma_1(\omega)}{\sigma_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\Delta}{\omega}\right)^{3/2} \frac{n_{\text{qp}}}{\nu_0 \Delta}. \quad (3.128)$$

Логарифмическая расходимость в формуле (3.127) при  $\omega \rightarrow 0$  возникает в результате перекрытия двух корневых БКШ сингулярностей плотности состояний.

Аналогично случаю формулы (3.128), при  $T \ll \gamma_s^{2/3} \Delta \ll \omega$  второй экспонентой в выражении (3.119) можно пренебречь, в то время как сдвинутая на  $\omega$  плотность состояний почти постоянна,  $\text{Re } G(E + \omega) \approx \sqrt{\Delta/2\omega}$ , в существенной области интегрирования. В результате остающийся интеграл в обоих случаях точно такой же, как тот, что определяет концентрацию квазичастиц (3.120) при  $T \ll E_g$ . Следовательно, мы получаем в точности результат (3.128), записанный через  $n_{\text{qp}}$ , хотя сами выражения для  $n_{\text{qp}}$  при  $\gamma_s^{2/3} \Delta \ll T \ll \omega$  и  $T \ll \gamma_s^{2/3} \Delta \ll \omega$  — другие [формулы (3.122) и (3.121) соответственно]. Это следует также из работы [251].

Наконец, при  $\omega \ll \gamma_s^{2/3} \Delta \ll T$  относительно высокая температура приводит к относительно широкому интервалу интегрирования в формуле (3.119), в то время как сдвигом плотностей состояний можно пренебречь. Аналогично случаю формулы (3.127) в интеграле возникает логарифмическая расходимость; однако теперь она обрезается не конечным сдвигом  $\omega$  [как это было в случае формулы (3.127)], а размытием корневой сингулярности БКШ магнитными примесями. В результате с логарифмической точностью

$$\frac{\sigma_1(\omega)}{\sigma_0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\Delta}{T}\right)^{3/2} \frac{n_{\text{qp}}}{\nu_0 \Delta} \ln \frac{T}{\gamma_s^{2/3} \Delta}. \quad (3.129)$$

### Низкие $T$ : переходы внутри примесной зоны

В равновесии результаты для диссипации  $\sigma_1$ , полученные в разделе 3.3.4 для режима АГ в пределе низких температур всегда содержат экспоненциально малый множитель

$\exp(-E_g/T)$ , поскольку поглощение электромагнитного поля обусловлено квазичастицами, термически возбуждёнными над щелью. В то же время, как обсуждалось выше, при малых концентрациях магнитных примесей ниже континуума возникает примесная зона. Это означает, что при температурах много меньше, чем расстояние между зоной и континуумом, основной вклад в диссипацию будет обусловлен квазичастицами, находящимися в примесной зоне. Ниже будет рассмотрен именно этот случай, который представляет для нас наибольший интерес.

Наша цель состоит в вычислении диссипации (3.113) в случае, когда она обусловлена переходами внутри примесной зоны, поэтому  $\omega < W$ . В то же время зона предполагается узкой, так что её ширина, которая может быть записана как  $W = 4\sqrt{\zeta\gamma_s}\Delta$ , много меньше, чем расстояние от центра зоны  $E_0$  до дна континуума  $\Delta$ : поскольку  $E_0 = (1 - 2\zeta^2)\Delta$ , это условие может быть записано как

$$\gamma_s^{1/2} \ll \zeta^{3/2}. \quad (3.130)$$

Вклад от примесной зоны оказывается основным при  $T \ll \zeta^2\Delta$ , когда вклад континуума экспоненциально меньше в силу множителя  $\exp(-2\zeta^2\Delta/T)$ .

Поскольку мы рассматриваем энергии порядка  $E_0$ , т.е. порядка  $\Delta$ , а внутри узкой зоны  $\text{Re } G(E) = \text{Im } F(E)$ , можно сделать те же упрощения, которые привели к формуле (3.119). Единственное отличие будет в том, что теперь область интегрирования по энергии ограничена примесной зоной. Учитывая явный вид плотности состояний внутри зоны [формула (3.105)], получаем

$$\frac{\sigma_1^{(b)}(\omega)}{\sigma_0} = \frac{4n_s^2}{\pi^2\nu_0^2\omega W} e^{-\frac{E_0}{T}} \sinh \frac{\omega}{2T} \int_{-(1-\frac{\omega}{W})}^{1-\frac{\omega}{W}} d\epsilon e^{-\frac{W}{2T}\epsilon} \sqrt{1 - \left(\epsilon - \frac{\omega}{W}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\epsilon + \frac{\omega}{W}\right)^2}. \quad (3.131)$$

Интеграл содержит произведение двух полуокружностей для плотности состояний (3.105), сдвинутых на частоту  $\omega$ . Перекрывание между ними существует и приводит к конечной диссипации только при  $\omega < W$ .

Аналогично разделу 3.3.4 итоговые результаты можно записать через равновесную концентрацию квазичастиц (на этот раз — внутри зоны). Вычисляя формулу (3.120) для примесной зоны, находим

$$n_{\text{qp}}^{(b)} = \frac{4n_s T}{W} e^{-E_0/T} I_1 \left( \frac{W}{2T} \right), \quad (3.132)$$

где  $I_1$  — модифицированная функция Бесселя первого рода. В двух предельных случаях для отношения  $W/T$  получаем

$$n_{\text{qp}}^{(b)} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} n_s \left( \frac{T}{W} \right)^{3/2} e^{-\frac{E_0 - W/2}{T}}, \quad \text{at } T \ll W, \quad (3.133)$$

$$n_{\text{qp}}^{(b)} = n_s e^{-E_0/T}, \quad \text{at } T \gg W. \quad (3.134)$$

Ниже будут рассмотрены различные соотношения между тремя энергетическими масштабами:  $\omega$ ,  $T$  и  $W$  (при этом все они много меньше, чем  $\Delta$ ). Начиная со случая относительно

широкой зоны,  $\omega, T \ll W$ , замечаем, что из-за экспонент основной вклад в интеграл в формуле (3.131) возникает от узкой области вблизи нижнего предела интегрирования, в которой применим корневой результат для плотности состояний:  $\nu(E) \propto \sqrt{E - (E_0 - W/2)}$ . Эта ситуация очень похожа на случай формулы (3.123). В результате получается тот же функциональный вид:

$$\frac{\sigma_1^{(b)}(\omega)}{\sigma_0} = \frac{16n_s^2 T}{\pi^2 \nu_0^2 W^3} e^{-\frac{E_0 - W/2}{T}} \sinh\left(\frac{\omega}{2T}\right) K_1\left(\frac{\omega}{2T}\right). \quad (3.135)$$

Асимптотики функции Макдональда при больших и малых значениях аргумента описывают два предельных случая относительно параметра  $\omega/T$ . При  $\omega \ll T \ll W$  получаем

$$\frac{\sigma_1^{(b)}(\omega)}{\sigma_0} = \frac{4}{\pi^{3/2}} \frac{n_s n_{\text{qp}}^{(b)}}{\nu_0^2 W^{3/2} T^{1/2}}, \quad (3.136)$$

в то время как при  $T \ll \omega \ll W$  результат имеет вид

$$\frac{\sigma_1^{(b)}(\omega)}{\sigma_0} = \frac{2}{\pi} \frac{n_s n_{\text{qp}}^{(b)}}{\nu_0^2 W^{3/2} \omega^{1/2}}. \quad (3.137)$$

При  $(W - \omega) \ll T$  (в то время как  $W$  и  $\omega$  не обязательно близки друг к другу) экспоненту в формуле (3.131) в области интегрирования можно заменить на единицу, а оставшийся интеграл можно записать как

$$\frac{\sigma_1^{(b)}(\omega)}{\sigma_0} = \frac{16n_s^2(W + \omega)}{3\pi^2 \nu_0^2 W^2 \omega} e^{-\frac{E_0}{T}} \sinh\frac{\omega}{2T} \left[ \left(1 + \frac{\omega^2}{W^2}\right) E(k) - \frac{2\omega}{W} K(k) \right]. \quad (3.138)$$

Здесь  $K$  и  $E$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. Их аргумент есть

$$k = \frac{W - \omega}{W + \omega}. \quad (3.139)$$

В пределе малой частоты и высокой температуры,  $\omega \ll W \ll T$ , с помощью формулы (3.134) выражение (3.138) можно упростить:

$$\frac{\sigma_1^{(b)}(\omega)}{\sigma_0} = \frac{8}{3\pi^2} \frac{n_s n_{\text{qp}}^{(b)}}{\nu_0^2 W T}. \quad (3.140)$$

Для поглощения в примесной зоне существует верхний порог:  $\omega = W$ . Вблизи порога формула (3.138) даёт  $\sigma_1^{(b)}(\omega) \propto (W - \omega)^2 \theta(W - \omega)$ , где  $\theta$  — функция Хевисайда.

### 3.3.5 Магнитные примеси как ловушки для неравновесных квазичастиц

При низких температурах концентрация равновесных квазичастиц становится пренебрежимо малой и в реальных экспериментах главный вклад в  $n_{\text{qp}}$  дают квазичастицы,

привнесённые в систему из окружения [255]. В квантовых устройствах, основанных на джозефсоновских контактах, нежелательное влияние квазичастиц на когерентность может быть ослаблено с помощью включения в систему «ловушек» — пространственных областей с уменьшенной величиной щели. Можно рассмотреть импеданс с этой же точки зрения и задать вопрос: могут ли магнитные примеси уменьшить диссипацию, вызванную неравновесными квазичастицами? Эта возможность наиболее интересна в диапазоне частот  $\omega \lesssim |\varepsilon_0|$  и концентраций квазичастиц  $n_{\text{qp}} \ll \zeta\nu_0\Delta$ . Мы используем полученные выше результаты для выяснения зависимости нормированной диссипативной проводимости  $\sigma_1/\sigma_0$  от  $n_s$ .

Для оценок предположим, что концентрация квазичастиц  $n_{\text{qp}}$  фиксирована, а их эффективная температура низка,  $T \ll |\varepsilon_0|/\ln(\zeta\nu_0\Delta/n_{\text{qp}})$ , так что термическая ионизация в континуум не мешает магнитным примесям захватывать квазичастицы. В отсутствие магнитных примесей диссипативный отклик определяется формулой (3.128). При малых концентрациях примеси уменьшают концентрацию квазичастиц на дне непрерывного спектра на величину  $n_s$ , таким образом приводя к результату  $\sigma_1/\sigma_0 \approx (1/\sqrt{2})(\Delta/\omega)^{3/2}(n_{\text{qp}} - n_s)/(\nu_0\Delta)$ . В диапазоне концентраций  $n_{\text{qp}} < n_s \ll \zeta\nu_0\Delta$  примесная зона может вместить в себя все квазичастицы, будучи при этом слишком узкой для того, чтобы допустить поглощение поля частоты  $\omega$ . Этот режим слабого поглощения распространяется до концентраций  $n_s \lesssim (\pi/8)(\zeta\nu_0\Delta)(\omega/|\varepsilon_0|)^2$ . При больших  $n_s$  примесная зона становится достаточно широкой для того, чтобы возникли процессы поглощения внутри неё; по сравнению с уровнем диссипации при  $n_s = 0$  формула (3.137) тогда даёт  $\sigma_1/\sigma_0$  меньше на множитель  $\sim (\omega/|\varepsilon_0|)(n_s/\zeta\nu_0\Delta)^{1/4}$ . При дальнейшем увеличении  $n_s$  примесная зона сливается с континуумом. Глубоко в режиме АГ,  $n_s \gg \zeta\nu_0\Delta$ , для оценки диссипации можно использовать формулу (3.125); по сравнению с уровнем диссипации при  $n_s = 0$  формула (3.125) даёт  $\sigma_1/\sigma_0$  меньше на множитель  $\sim (\omega/|\varepsilon_0|)(\zeta\nu_0\Delta/n_s)^{2/3}$ .

Подводя итог вышеприведённым оценкам, можно сказать, что в обсуждаемом диапазоне частот,  $\omega \lesssim |\varepsilon_0|$ , и неравновесных концентраций квазичастиц,  $n_{\text{qp}} \ll \zeta\nu_0\Delta$ , магнитные примеси действительно уменьшают диссипативную часть проводимости благодаря уменьшению плотности состояний, доступных для квазичастичных переходов.

### 3.3.6 Поверхностный импеданс

Переформулируем полученные выше результаты для комплексной проводимости  $\sigma(\omega)$  на языке поверхностного импеданса:

$$Z(\omega) = R(\omega) - iX(\omega) = \sqrt{\frac{4\pi\omega}{i\sigma(\omega)c^2}}. \quad (3.141)$$

Поскольку мы всегда рассматривали случай слабой диссипации,  $\sigma_1 \ll \sigma_2$ , мы также получаем  $R \ll X$ . Отклик сверхпроводника тогда почти чисто реактивный с

$$X(\omega) = \sqrt{\frac{4\pi\omega}{\sigma_2(\omega)c^2}}. \quad (3.142)$$

В предположениях раздела 3.3.4 можно вычислить  $\sigma_2(\omega)$  в простейшей нультемпературной модели БКШ без учёта магнитного рассеяния (поскольку поправки за счёт низкой температуры и слабого магнитного рассеяния,  $T, \gamma_s^{2/3} \Delta \ll \Delta$ , пренебрежимо малы). В то же время новая качественная особенность, возникающая из-за конечности  $\sigma_1$  — диссипация, т.е. малая, но конечная величина  $R$ :

$$R(\omega) = \frac{X^3(\omega)c^2}{8\pi\omega} \sigma_1(\omega). \quad (3.143)$$

В околороговой ситуации раздела 3.3.4, интересуясь частотами  $\omega \approx 2\Delta$ , при которых [123]  $\sigma_2(2\Delta) = \sigma_0$ , находим

$$R(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi\Delta}}{c\sigma_0^{3/2}} \sigma_1(\omega). \quad (3.144)$$

В низкочастотном пределе, рассмотренном в разделах 3.3.4 и 3.3.4, при  $\omega \ll \Delta$ , находим [123]  $\sigma_2(\omega) = (\pi\Delta/\omega)\sigma_0$ , что окончательно даёт

$$R(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi c(\sigma_0\Delta)^{3/2}} \sigma_1(\omega). \quad (3.145)$$

Таким образом формулы (3.144) и (3.145) позволяют перевести результаты для  $\sigma_1(\omega)$ , полученные в разделе 3.3.4, в результаты для поверхностного импеданса.

### 3.3.7 Заключение

С помощью квазиклассического подхода была исследована диссипация в сверхпроводниках с малой концентрацией магнитных примесей. Предполагался грязный предел по отношению к потенциальному рассеянию. Концентрация магнитных примесей считалась достаточно малой, так что подавление щели малó. С помощью обобщения (полученного Маркетти и Саймонсом [252]) уравнения Узаделя на случай неборновских магнитных примесей были рассмотрены в рамках единого подхода различные режимы: режим АГ (с континуумом состояний выше щели) и предел самых малых концентраций магнитных примесей, в котором из-за перекрытия подщелевых примесных состояний ниже края континуума образуется примесная зона. Отклонение от борновского предела предполагалось конечным, но малым, поэтому подщелевые примесные состояния лежат близко к краю континуума.

Основные полученные результаты относятся к пределу, в котором температура  $T$ , частота  $\omega$  и подавление щели  $\gamma_s^{2/3} \Delta$  много меньше щели БКШ  $\Delta$  в отсутствие магнитных

примесей. В то же время соотношение между  $T$ ,  $\omega$  и  $\gamma_s^{2/3} \Delta$  предполагалось произвольным, и явные аналитические ответы были получены в различных предельных случаях.

Получены результаты для величин, описывающих отклик сверхпроводника на внешнее электромагнитное поле: диссипативной проводимости  $\sigma_1$  (вещественной части комплексной проводимости  $\sigma$ ) и поверхностного сопротивления  $R$  (вещественной части поверхностного импеданса  $Z$ ).

В рассмотренном пределе низких температур и малых частот в равновесии диссипация всегда пропорциональна концентрации термически возбуждённых квазичастиц, поэтому экспоненциально подавлена из-за щелевого характера спектра. С другой стороны, флуктуационные эффекты, обусловленные магнитными примесями могут приводить к конечной плотности состояний внутри щели, найденной по теории среднего поля [216; 252; 256]. Этот эффект будет рассмотрен в следующем разделе.

### 3.4 Подщелевые состояния в диффузных сверхпроводниках с сильными магнитными примесями

#### 3.4.1 Введение

Влияние локальных неоднородностей на плотность состояний в сверхпроводниках зависит от природы беспорядка. В  $s$ -волновых сверхпроводниках потенциальные примеси не меняют плотность состояний, которая, следовательно, имеет такой же вид, как и в теории БКШ [257–259], в то время как магнитные примеси обрезают пики когерентности и подавляют сверхпроводящую щель. В простейшей модели борновских магнитных примесей, изученной Абрикосовым и Горьковым (АГ) [23], щель в спектре  $E_g$  оказывается меньше параметра порядка  $\Delta$ , и сингулярность БКШ  $\rho(E) \propto (E - \Delta)^{-1/2}$  заменяется корневым занулением плотности состояний на границе спектра,  $\rho(E) \propto (E - E_g)^{1/2}$ .

Влияние магнитных примесей на сверхпроводящее состояние становится более интересным за рамками борновского приближения. В этом случае одна магнитная примесь создаёт локализованное состояние внутри щели БКШ [24; 25; 230; 231], что можно подтвердить экспериментально [237–240]. При конечной концентрации магнитных примесей состояния, локализованные на разных магнитных примесях, перекрываются и образуют примесную зону. При увеличении концентрации зона становится шире. Если она сливается с континуумом квазичастичных состояний, реализуется режим типа АГ. С другой стороны, примесная зона может коснуться энергии Ферми ( $E = 0$ ) раньше слияния с континуумом (см. обзор [232]). В то время как в зависимости от параметров магнитного беспорядка (сила отдельных примесей и их концентрация) могут реализоваться различные структуры плотности состояний с несколькими краями спектра, общей особенностью среднеполевых результатов [23–25; 230;

231] является резкость всех краёв спектра  $E_{gi}$ , т.е. эти края чётко разделяют интервалы энергии с нулевой и конечной [ $\rho(E) \propto |E - E_{gi}|^{1/2}$ ] плотностью состояний.

Наличие резких краёв спектра является следствием приближения среднего поля. Точное рассмотрение обнаруживает «хвосты» плотности состояний в областях, соответствующих щели согласно теории среднего поля. Физически эти состояния связаны с флуктуациями, в результате которых некоторые редкие конфигурации беспорядка, которые упускаются из виду на уровне среднего поля, приводят к локальным сдвигам краёв спектра. Усреднение по флуктуациям тогда приводит к пространственно однородной, но ненулевой плотности подщелевых состояний.

Флуктуационное размытие края спектра впервые рассматривалось Ларкиным и Овчинниковым (ЛО) в модели диффузного сверхпроводника с мелкомасштабным беспорядком константы взаимодействия в куперовском канале [251]. Они описали образование подщелевых состояний на языке оптимальных флуктуаций поля параметра порядка  $\Delta(\mathbf{r})$ , обобщив метод, развитый ранее для изучения допированных полупроводников (см. [260]). Получившаяся плотность состояний убывала по растянутому экспоненциальному закону как функция  $|E - E_g|$ , а ширина хвоста определялась величиной флуктуаций  $\Delta(\mathbf{r})$ .

Другой подход к описанию подщелевых состояний в диффузных сверхпроводниках был разработан в начале 2000-ых годов Саймонсом и соавторами [216; 252; 256; 261] — они рассматривали инстантонные конфигурации в формализме нелинейной сигма-модели. Они также получили растянутый экспоненциальный закон убывания средней плотности состояний в зависимости от расстояния  $|E - E_g|$ . Однако, в противоположность теории ЛО малость эффекта определялась кондактансом нормального состояния  $g$ , а не величиной флуктуаций  $\Delta(\mathbf{r})$ , что свидетельствовало о том, что найденный хвост определяется только флуктуациями потенциального беспорядка. В других работах было показано, что инстантоны того же типа определяют размытие минищели в SNS контактах [262]. Физическое происхождение подщелевых состояний, полученных в работах [216; 252; 256; 261; 262] связано с мезоскопическими флуктуациями, происходящими от случайности потенциального беспорядка. В этом отношении они напоминают состояния за пределами вигнеровского полукруга в теории случайных матриц [263; 264]. Эта аналогия использовалась в работах [265; 266], где изучались хвосты в нульмерных сверхпроводящих системах. Результаты Саймонса и др. [216; 252; 256; 261] могут, таким образом, рассматриваться как прямое обобщение предшествующих результатов теории случайных матриц на ненулевые размерности.

Очевидное расхождение результатов Ларкина и Овчинникова [251] и Майер и Саймонса [261] для модели случайной константы связи было недавно объяснено в работе [267], где было показано, что эти два режима соответствуют различным пределам одного и того же инстантонного решения. Достаточно близко к краю щели, при малых  $|E - E_g|$ , флуктуации  $\Delta(\mathbf{r})$  (непотенциальный беспорядок) более важны, и подщелевая плотность состояний описывается теорией ЛО. В дальней же асимптотике, имеющей место при достаточно больших  $|E - E_g|$ , хвост плотности состояний определяется более эффективными мезоскопическими флуктуациями (потенциальный беспорядок). Математическое одновременное существование

двух различных физических источников беспорядка проявляется как конкуренция между двумя типами нелинейностей в инстантонных уравнениях.

Важной особенностью размытия щели за счёт беспорядка является высокая степень универсальности поведения вблизи  $E_g$ , где любой тип непотенциального беспорядка можно отобразить на эффективную модель случайного параметра порядка (СПП) [267]. Это отображение нужно понимать в том смысле, что размытие плотности состояний в исходной задаче эквивалентно размытию в некоторой вспомогательной (искусственной) модели, в которой  $\Delta(\mathbf{r})$  — единственная флуктуирующая величина (даже несмотря на то, что в исходной задаче параметр порядка может и не флуктуировать). Параметры исходного беспорядка при этом содержатся в корреляционной функции  $f(\mathbf{q}) = \langle\langle\Delta\Delta\rangle\rangle_{\mathbf{q}}$  искусственной модели СПП, которая должна быть определена для конкретной задачи. Таким образом, модель СПП приводит к универсальному описанию подщелевой плотности состояний и, в частности, описывает конкуренцию флуктуаций, обусловленных потенциальным и непотенциальным беспорядком.

Задача о бесконечно слабых магнитных примесях была сведена к модели СПП в работе [267]; главным источником непотенциальных флуктуаций оказался беспорядок в локальной намагниченности (триплетный сектор). Из-за нелинейности уравнения Узаделя этот беспорядок приводит к флуктуациям в синглетном секторе, которые эквивалентны неоднородности эффективного параметра порядка. Этот механизм (который в работе [267] был назван прямым) приводит к достаточно малой корреляционной функции СПП, поэтому возможна ситуация, в которой режим ЛО ненаблюдаем и весь хвост обусловлен мезоскопическими флуктуациями, описанными Ламакрафтом и Саймонсом [216; 256].

Цель данного раздела состоит в том, чтобы обобщить подход работы [267] на случай сильных магнитных примесей и количественнописать флуктуационное размытие краёв щели (см. рисунок 3.6). Вблизи среднеполевых краёв спектра задача будет сведена к модели СПП и будет вычислена эффективная корреляционная функция  $f(0)$ . Основное отличие от борновского предела состоит в том, что теперь главный источник беспорядка — флуктуации концентрации магнитных примесей, ведущие к бóльшей корреляционной функции  $f(0)$  модели СПП, поскольку генерация триплетных мод уже не требуется. Вследствие этого предыдущие результаты Маркетти и Саймонса [252] описывают только дальнюю асимптотику хвостов плотности состояний, обусловленную мезоскопическими флуктуациями, в то время как главные асимптотики даются выражением ЛО-типа, возникающими из-за пуассоновых флуктуаций магнитного беспорядка. Важность пуассоновой статистики магнитных примесей была отмечена Сильвой и Иоффе [268] — они нашли главную асимптотику подщелевой плотности состояний в случае слабых примесей (близких к борновскому пределу). Мы воспроизводим их результат в соответствующем предельном случае.

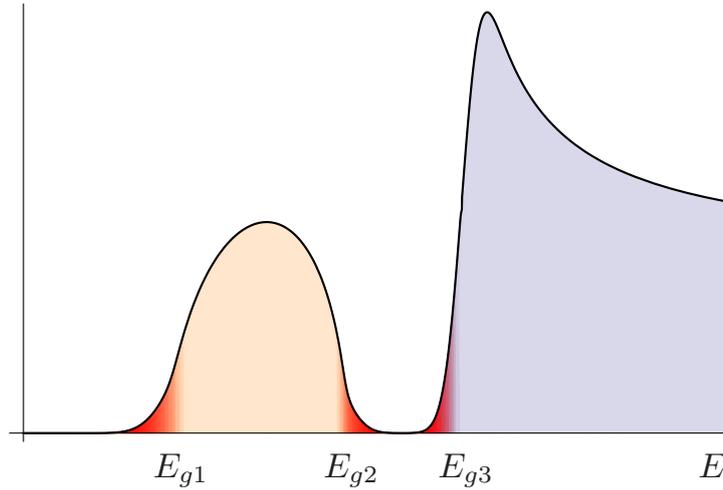


Рисунок 3.6 — Схематический вид средней плотности состояний. Среднеполевые резкие края спектра при энергиях  $E_{gi}$  размываются за счёт флуктуаций концентраций магнитных примесей и/или мезоскопических флуктуаций потенциального беспорядка.

### 3.4.2 Формулировка задачи и результаты

#### Модель магнитных примесей

Рассмотрим грязный  $s$ -волновой сверхпроводник с потенциальным и магнитным беспорядком. Рассеяние на потенциальных примесях, сохраняющих спин электрона, предполагается основным механизмом релаксации импульса. На временах больше упругой длины свободного пробега  $\tau$  движение электронов становится диффузным с коэффициентом диффузии  $D$ . Гораздо более слабое магнитное (действующее на спин) рассеяние описывается гамильтонианом

$$H_{\text{mag}} = J \int d^3\mathbf{r} \hat{\psi}_\sigma^\dagger(\mathbf{r}) \mathbf{S}(\mathbf{r}) \boldsymbol{\sigma} \hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r}). \quad (3.146)$$

Делаем те же предположения относительно магнитного беспорядка, что и в работах [24; 25; 230; 231; 252]: (а) магнитный беспорядок представлен классическими примесями с плотностью спина

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \mathbf{S}_i, \quad (3.147)$$

где точки  $\mathbf{r}_i$  подчиняются распределению Пуассона; (б) спины разных магнитных примесей статистически независимы, а распределение по ориентациям однородно,  $P(\{\mathbf{S}_i\}) = \prod_i \delta(\mathbf{S}_i^2 - S^2)$ .

Магнитные примеси описываются двумя безразмерными параметрами:  $0 < \mu \leq 1$  и  $0 < \eta$ . Параметр «унитарности»  $\mu$ , определяемый как

$$\mu = \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2}, \quad \alpha = (\pi\nu JS)^2, \quad (3.148)$$

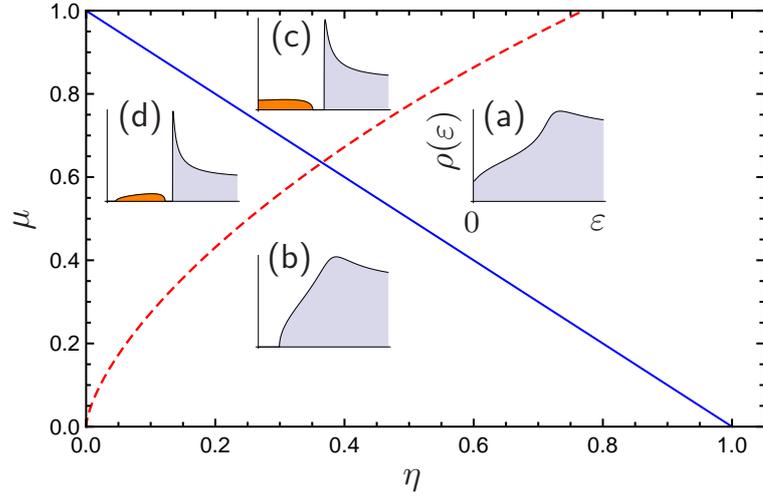


Рисунок 3.7 — Области различного поведения среднеполевой плотности состояний  $\rho(E)$  на плоскости  $(\eta, \mu)$ . Плотность состояний АГШР при  $E = 0$  равна нулю (конечна) ниже (выше) сплошной синей линии. Примесная зона отделена от континуума (слита с континуумом) выше (ниже) штриховой красной кривой. Вставки показывают типичное поведение  $\rho(E)$  в каждой области (они соответствуют следующим значениям параметров: (a)  $\eta = 0.6, \mu = 0.5$ ; (b)  $\eta = 0.25, \mu = 0.15$ ; (c)  $\eta = 0.3, \mu = 0.9$ ; (d)  $\eta = 0.15, \mu = 0.6$ ).

Подробности см. в приложении В.

показывает силу отдельной примеси ( $\mu \rightarrow 0$  — это борновский предел, а  $\mu \sim 1$  — унитарный), в то время как информация о концентрации примесей содержится в параметре

$$\eta = \frac{\bar{n}_s \mu}{\pi \nu \Delta}, \quad (3.149)$$

где  $\bar{n}_s$  — средняя концентрация магнитных примесей. В работе АГ [23] был рассмотрен дельта-функциональный магнитный беспорядок в борновском пределе (очень много очень слабых магнитных рассеивателей), что соответствует  $\bar{n}_s \rightarrow \infty$  и  $\mu \rightarrow 0$  при фиксированной  $\eta$  (в этом пределе  $\eta = 1/\Delta\tau_s$ , где  $\tau_s$  — время рассеяния с переворотом спина). Формула (3.148) указывает на дуальность между случаями слабых ( $\alpha < 1$ ) и сильных ( $\alpha > 1$ ) примесей:  $\mu(\alpha) = \mu(1/\alpha)$ . Однако предел сильных примесей более сложен из-за частичного экранирования магнитной примеси неспаренной квазичастицей, что приводит к основному состоянию не такого типа, как в теории БКШ [232; 269]. Чтобы не сталкиваться с этой дополнительной сложностью ниже мы всегда будем рассматривать диапазон  $\alpha < 1$ .

В формуле (3.149)  $\Delta$  обозначает *среднее значение* параметра порядка при наличии магнитных примесей. Он подавлен по сравнению со случаем без магнитных примесей и должен находиться самосогласованно. Случайность расположения магнитных примесей приводит к пространственным флуктуациям  $\Delta(\mathbf{r})$ , которые будут рассмотрены в разделе 3.4.3 и приложении Г.

## Теория среднего поля

Результаты вычисления плотности состояний в рамках теории среднего поля, представленные в работах Абрикосова и Горькова [23], Шибы [24] и Русинова [25] (АГШР) можно подытожить следующим образом.

Абрикосов и Горьков [23] рассмотрели подавление щели  $E_g$  в спектре (т.е. нижнего края континуума боголюбовских квазичастиц) борновскими магнитными примесями ( $\mu \rightarrow 0$ ) и нашли

$$E_g^{\text{AG}} = (1 - \eta^{2/3})^{3/2} \Delta. \quad (3.150)$$

Позже было показано [24; 25; 230; 231], что при конечном  $\mu$  отдельная магнитная примесь создаёт подщелевое состояние с энергией

$$E_0 = \Delta \sqrt{\frac{1 - \mu}{1 + \mu}} = \Delta \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}, \quad (3.151)$$

локализованное на длине

$$L_0 = \xi_0 (1 - E_0^2/\Delta^2)^{-1/4}. \quad (3.152)$$

Формула (3.152) применима в случае диффузного сверхпроводника,<sup>2</sup> где  $\xi_0$  — длина когерентности в грязном пределе:

$$\xi_0 = \sqrt{D/2\Delta}. \quad (3.153)$$

При добавлении примесей происходит перекрытие состояний, локализованных на разных примесях, что приводит к образованию примесной зоны между энергиями  $E_{g1}$  и  $E_{g2}$  внутри сверхпроводящей щели. Ширина зоны растёт с ростом концентрации магнитных примесей (т.е. с ростом  $\eta$ ). Шиба [24] и Русинов [25] описали свойства примесной зоны и показали, что в зависимости от значений  $\mu$  и  $\eta$  возможны четыре сценария, показанные на рисунке 3.7:

- (a) краёв спектра нет, бесщелевой режим;
- (b) режим АГ с одним краем спектра  $E_{g1}$  (примесная зона слилась с континуумом);
- (c) примесная зона касается нуля, так что есть два края спектра — верхний край примесной зоны  $E_{g2}$  и нижний край континуума  $E_{g3}$ ;
- (d) примесная зона отделена как от нуля, так и от континуума, так что есть два края примесной зоны ( $E_{g1}$  и  $E_{g2}$ ) и нижний край континуума ( $E_{g3}$ ).

Эволюция краёв спектра  $E_{gi}(\eta, \mu)$ , показывающая переходы между перечисленными режимами, показана на рисунке 3.8.

В теории среднего поля плотность состояний  $\rho(E)$  (нормированная на значение в нормальном состоянии  $\rho_0$ ) даётся формулой

$$\rho(E)/\rho_0 = \text{Im} \sinh \psi. \quad (3.154)$$

<sup>2</sup>При произвольной силе потенциального рассеяния убывание состояния, локализованного на одной магнитной примеси определяется полюсом куперонного пропагатора (Г.12):  $\Pi_{iE_0}^{(l)}(i/L_0) = \infty$ . В баллистическом случае получается  $L_0 = (v_F/2\Delta)(1 - E_0^2/\Delta^2)^{-1/2}$ , что согласуется в работой [25].

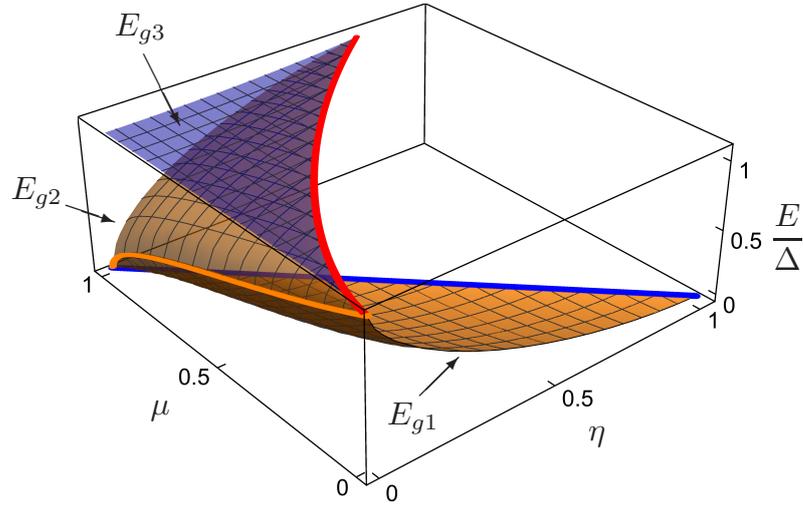


Рисунок 3.8 — Края спектра  $E_{gi}$  (нормированные на  $\Delta$ ) как функции от  $\eta$  и  $\mu$ . В зависимости от значений  $\eta$  и  $\mu$  число краёв спектра меняется от нуля до трёх (соответствующие три листа на графике обозначены  $E_{g1}$ ,  $E_{g2}$ ,  $E_{g3}$ ). Жирная жёлтая кривая (лежащая в плоскости  $\eta = 0$ ) показывает положение однопримесного локализованного состояния  $E_0$  [формула (3.151)] и соединяет листы  $E_{g1}$  и  $E_{g2}$ . Жирная синяя линия лежит в плоскости  $E = 0$  (это то же самое, что и сплошная синяя линия на рисунке 3.7) и отмечает точки появления конечной плотности состояний на нулевой энергии; на этой линии заканчивается лист  $E_{g1}$ . Жирная красная кривая отмечает слияние примесной зоны и континуума (слияние листов  $E_{g2}$  и  $E_{g3}$ ). Эта линия начинается в точке  $E/\Delta = 1$  при  $\eta = \mu = 0$  и растёт до значения немного выше уровня  $E/\Delta = 1$ . Её проекция на плоскость  $(\eta, \mu)$  — это штриховая красная кривая, показанная на рисунке 3.7.

Здесь зависящий от энергии спектральный угол  $\psi$  находится из алгебраического уравнения

$$F(\psi) = 0, \quad (3.155)$$

где [23–25; 252]

$$F(\psi) = -\frac{E}{\Delta} \cosh \psi + \sinh \psi - \frac{\eta}{2} \frac{\sinh 2\psi}{1 - \mu \cosh 2\psi}. \quad (3.156)$$

Поскольку вещественное  $\psi$  приводит к нулевой плотности состояний, исчезновение вещественного решения уравнения (3.155) означает край спектра  $E_g$  (либо край континуума, либо примесной зоны). Уравнение, определяющее  $E_g$ , и положения линий, разделяющих четыре области на рисунке 3.7, обсуждаются в приложении В.

Отметим, что среднеполевые структуры плотности состояний, аналогичные изображённым на рисунке 3.7, как недавно показано в работе [270], могут также быть получены в диффузных сверхпроводниках с беспорядком в параметре порядка. В то же время в работе [270] зависимость  $\Delta(\mathbf{r})$  рассматривалась как внешнее заданное поле без учёта самосогласования (аналогично модели СПП) в предположении мелкомасштабных неоднородностей (с размером много меньше длины когерентности). Рассеяние на таких «примесях» параметра порядка рассматривалось во всех порядках теории возмущений (метод  $T$ -матрицы). В

нашей модели мы учитываем самосогласование, поэтому такие точечные примеси параметра порядка не возникают.

## Результаты: подщелевые состояния

Резкие края щели, получающиеся в теории среднего поля, размываются флуктуациями, что приводит к средней плотности состояний, показанной на рисунке 3.6. Если магнитные примеси не слишком слабы [точное условие — формула (3.169)], основной источник размывания при  $E \rightarrow E_g$  — флуктуации их концентрации. При больших  $|E - E_g|$  этот механизм становится менее эффективным, и основным механизмом может стать размывание за счёт мезоскопических флуктуаций потенциального беспорядка. Чтобы изучить конкуренцию этих механизмов, отобразим задачу на модель СПП и вычислим среднюю подщелевую плотность состояний с экспоненциальной точностью:

$$\langle \rho(E) \rangle \propto \exp(-\mathcal{S}_{\text{inst}}), \quad (3.157)$$

где  $\mathcal{S}_{\text{inst}}$  — действие инстантона с нарушенной репличной симметрией.

Хотя исходная задача трёхмерна, эффективная размерность инстантона,  $d = 0, 1, 2$  или 3, определяется сравнением размеров образца с размером инстантона (оптимальной флуктуации)  $L_E$ , который даётся формулой (3.214). Мы будем рассматривать трёх- и нульмерную геометрии. Случаи  $d = 1$  и  $d = 2$  требуют отдельного рассмотрения из-за наличия множественных инстантонных решений [271].

**Сводка результатов модели СПП.** Согласно общему рассмотрению, представленному в работе [267], подщелевые состояния в широком классе неупорядоченных сверхпроводящих систем с резкой среднеполевой щелью типа АГ могут быть описаны единым образом в модели СПП. Этот подход основан на наблюдении о том, что при  $E \rightarrow E_g$  любой источник непотенциального беспорядка (случайная константа взаимодействия [251; 261], мезоскопические флуктуации параметра порядка [272], борновские магнитные примеси [23; 216; 256]) эффективно действуют как гауссово случайное поле параметра порядка  $\Delta(\mathbf{r}) = \Delta + \Delta_1(\mathbf{r})$ , описываемое соответствующей корреляционной функцией

$$f(\mathbf{q}) = \langle \Delta_1 \Delta_1 \rangle_{\mathbf{q}}. \quad (3.158)$$

Если отображение на модель СПП установлено, можно применять известные результаты [267] для плотности подщелевых состояний, которые кратко изложены ниже.

В модели СПП ненулевая плотность состояний в щелевой области возникает в результате конкуренции между потенциальным беспорядком и беспорядком в  $\Delta(\mathbf{r})$ , и это определяется параметром  $K$ . Действие инстантона  $\mathcal{S}_{\text{inst}}$  пропорционально [см. формулу (3.163)] действию  $\mathcal{S}_0(K)$ , определяемому как

$$\mathcal{S}_0(K) = \frac{1}{6} \int (\phi_2^3 - \phi_1^3) d^d \tilde{\mathbf{r}}, \quad (3.159)$$

где функции  $\phi_1(\tilde{\mathbf{r}})$  и  $\phi_2(\tilde{\mathbf{r}})$  должны определяться из системы связанных дифференциальных уравнений

$$-\tilde{\nabla}^2 \phi_1 + \phi_1 - \phi_1^2 = K(\epsilon)(\phi_2 - \phi_1), \quad (3.160a)$$

$$-\tilde{\nabla}^2 \phi_2 + \phi_2 - \phi_2^2 = K(\epsilon)(\phi_2 - \phi_1). \quad (3.160b)$$

Система уравнений (3.160) управляется одним безразмерным параметром

$$K(\epsilon) = \sqrt{\epsilon_*/\epsilon}, \quad (3.161)$$

который определяется безразмерным расстоянием до края щели

$$\epsilon = \frac{|E_g - E|}{\Delta} \ll 1 \quad (3.162)$$

(заметим, что наше определение безразмерного расстояния  $\epsilon$  отличается от  $\epsilon$  из работы [267], которое было нормировано на  $E_g$ ; поскольку мы рассматриваем задачу с несколькими краями щели, нормировка на  $\Delta$  более удобна). Значение  $\epsilon_*$  в формуле (3.161) определяется корреляционной функцией непотенциального беспорядка на нулевом импульсе,  $f(0)$  [см. формулу (3.165)].

Уравнения (3.159)–(3.161) определяют инстантонное действие при произвольном соотношении между  $\epsilon$  и  $\epsilon_*$ . Однако при произвольном значении  $K$  систему (3.160) можно решить только численно. Аналитическое решение возможно в предельных случаях большого  $K$  [вблизи края щели,  $\epsilon \ll \epsilon_*$ , см. формулу (3.166)] и малого  $K$  [достаточно далеко от края щели,  $\epsilon \gg \epsilon_*$ , см. формулу (3.167)]. Эти пределы соответствуют ситуациям, в которых подщелевые состояния обусловлены оптимальными флуктуациями либо непотенциального (при  $K \rightarrow \infty$ ), либо потенциального беспорядка (при  $K \rightarrow 0$ ). Инстантон при произвольном  $K$  описывает оптимальную флуктуацию за счёт совместного действия потенциального и непотенциального беспорядка [267; 272].

**Общие результаты для магнитных примесей.** Как показано в разделе 3.4.4, задача о пуассоновских магнитных примесях также вписывается в феноменологию модели СПП. Чтобы иметь возможность применить результаты работы [267], необходимо

- (i) обобщить их на случай произвольной функции  $F(\psi)$  [формула (3.156)], которая определяет плотность состояний в теории среднего поля (в работе [267] рассматривался только случай АГ, т.е.  $\mu = 0$ ),
- (ii) перевести магнитный беспорядок на язык модели СПП и вычислить эффективную корреляционную функцию  $f(\mathbf{q})$ .

Ниже представлено общее выражение для подщелевой плотности состояний и корреляционной функции  $f(\mathbf{q})$  в случае магнитных примесей. В приведённых ниже формулах эффективная размерность инстантона может принимать значения  $d = 3$  и  $d = 0$ .

Действие инстантона

$$\mathcal{S}_{\text{inst}} = 2g\xi \frac{(2\epsilon \cosh \psi_g)^{(6-d)/4}}{|F''(\psi_g)|^{(2+d)/4}} \mathcal{S}_0(K) \quad (3.163)$$

пропорционально  $\mathcal{S}_0(K)$ , определяемому формулой (3.159), а префактор зависит от кривизны функции  $F(\psi)$  при  $\psi_g$ , соответствующем краю щели  $E_g$ . В формуле (3.163)  $g_\xi$  — безразмерный (в единицах  $e^2/h$ ) кондактанс куска образца, представляющего собой гиперкуб размера  $\xi_0$  в эффективной размерности  $d$ , который при этом ограничен размерами образца в поперечных направлениях. Обозначая объём такого куска  $V_\xi = A_{3-d}\xi_0^d$ , где  $A_{3-d}$  — «поперечное сечение» в редуцированных  $3 - d$  измерениях, можем написать

$$g_\xi = 8\pi\nu\Delta V_\xi \gg 1. \quad (3.164)$$

Наконец, величина  $\epsilon_*$ , входящая в определение  $K(\epsilon)$  в формуле (3.161), даётся формулой

$$\epsilon_* = \frac{g_\xi^2}{8} \left[ \frac{f(0)}{\Delta^2 V_\xi} \right]^2 \frac{\sinh^4 \psi_g}{|F''(\psi_g)| \cosh \psi_g}. \quad (3.165)$$

Формулы (3.157) и (3.163) дают общее описание флуктуационной плотности состояний вблизи среднеголевого края спектра. При  $\epsilon \ll \epsilon_*$  подщелевые состояния обусловлены оптимальными флуктуациями концентрации магнитных примесей, и результат имеет универсальный вид [251; 267]

$$\langle \rho(E) \rangle \propto \exp \left[ -\alpha_d(\eta, \mu) \frac{\Delta^2 V_\xi}{f(0)} \epsilon^{(8-d)/4} \right]. \quad (3.166)$$

С ростом  $\epsilon$  роль мезоскопических флуктуаций усиливается. В режиме  $\epsilon \gg \epsilon_*$  подщелевые состояния полностью обусловлены оптимальными флуктуациями потенциального беспорядка, и плотность состояний принимает другой универсальный вид [252; 267]

$$\langle \rho(E) \rangle \propto \exp \left[ -\beta_d(\eta, \mu) g_\xi \epsilon^{(6-d)/4} \right]. \quad (3.167)$$

Безразмерные функции  $\alpha_d(\eta, \mu)$  и  $\beta_d(\eta, \mu)$  определены формулами (3.225) и (3.222) соответственно. Несколько предельных случаев формул (3.166) и (3.167) будут обсуждаться в разделе 3.4.5.

**Параметры эффективной модели СПП.** Сведение задачи о магнитных примесях к модели СПП, справедливой в окрестности среднеголевого края спектра, является сложным вопросом. Дело в том, что существует несколько физически различных механизмов, дающих вклад в эффективную корреляционную функцию (3.158), задающую модель СПП. Можно выделить три различных вклада в  $f(q)$ , которые входят в задачу аддитивным образом (при условии, что получающееся размытие щели относительно слабое):

$$f = \underbrace{f_{n_s}}_{\propto 1/g_\xi} + \underbrace{f_s + f_{MF}^\Delta}_{\propto 1/g_\xi^2}. \quad (3.168)$$

Вклады в эту формулу соответствуют следующим типам эффективных неоднородностей:

1.  $f_{n_s}(q)$  — флуктуации из-за неоднородности концентрации магнитных примесей;
2.  $f_s(q)$  — флуктуации с участием триплетного сектора, индуцированного случайной ориентацией спинов магнитных примесей;

3.  $f_{\text{MF}}^{\Delta}(q)$  — мезоскопические флуктуации параметра порядка  $\Delta(\mathbf{r})$  из-за случайности расположения потенциальных примесей.

Два последних вклада,  $f_s(q)$  и  $f_{\text{MF}}^{\Delta}(q)$ , были рассмотрены в случае борновских магнитных примесей ( $\mu \rightarrow 0$ ) в работе [267]. Они подавлены в силу множителя  $1/g_{\xi}^2$ , типичного для мезоскопических флуктуаций [273; 274], поэтому очень малы в хорошем металле.

Ниже будет рассмотрен вклад  $f_{n_s}(q)$ , который пропорционален  $1/g_{\xi}$ , но содержит дополнительный маленький множитель  $\mu$ , обращающийся в ноль в борновском пределе ( $\mu \rightarrow 0$ ). Он даёт основной вклад в корреляционную функцию (3.168) при условии, что магнитные примеси не слишком слабые:

$$\eta^{1/3}\mu \gg 1/g_{\xi}, \quad (3.169)$$

что и будет предполагаться ниже. При выполнении этого условия эффективная корреляционная функция СПП  $f(q) \approx f_{n_s}(q)$  определяется флуктуациями концентрации магнитных примесей  $n_s(\mathbf{r}) = \bar{n}_s + \delta n_s(\mathbf{r})$ . В пределе нулевого импульса она может быть записана как

$$f(0) = \bar{n}_s [C(0) + C_{\Delta}(0)]^2, \quad (3.170)$$

где первый член в сумме происходит от флуктуаций интенсивности спин-флип рассеяния (при постоянной  $\Delta$ ), а второй член происходит от флуктуаций  $\Delta(\mathbf{r})$  (при постоянной  $\eta$ ). Они входят в формулу (3.170) аддитивно, поскольку оба наводятся за счёт  $\delta n_s(\mathbf{r})$ .

Выражение для  $C(0)$  даётся формулой

$$C(0) = \left( \frac{\Delta^2 V_{\xi} 8\mu\eta}{\bar{n}_s g_{\xi}} \right)^{1/2} \frac{\cosh \psi_g}{1 - \mu \cosh 2\psi_g}, \quad (3.171)$$

где  $\psi_g$  — значение спектрального угла на краю спектра [см. формулу (B.1) ниже]. Значение  $C(0)$  зависит от того, какой именно край спектра рассматривается. Оно положительно для  $E_{g1}$  и отрицательно для  $E_{g2}$  и  $E_{g3}$ . Неявная температурная зависимость  $C(0)$  происходит от температурной зависимости  $\psi_g$ , поскольку параметр  $\eta$  выражается через зависящую от температуры  $\Delta(T)$  [формула (3.149)]. Результаты Сильвы и Иоффе [268] соответствуют вкладу в плотность состояний от  $C(0)$  в пределе  $\mu^{3/2} \ll \eta \ll 1$  (слабые магнитные примеси в режиме АГ), см. раздел 3.4.5.

Ядро  $C_{\Delta}(q)$ , описывающее флуктуации параметра порядка, наведённые за счёт  $\delta n_s(\mathbf{r})$ , вычислено в приложении Г [формула (Г.10)]; оно оказывается положительным. Поскольку оно включает в себя самосогласование, результат оказывается зависящим от температуры. В пределе нулевого импульса и малых температур в целевой фазе [области (b) и (d) на рисунке 3.7] находим

$$C_{\Delta}(0) = \left( \frac{\Delta^2 V_{\xi} 8\mu\eta}{\bar{n}_s g_{\xi}} \right)^{1/2} \frac{\pi}{2(1 + \mu + \sqrt{1 - \mu^2}) - \pi\eta}. \quad (3.172)$$

В отличие от  $C(0)$  [формула (3.171)] параметр  $C_{\Delta}(0)$  одинаков для разных краёв спектра  $E_{gi}$ .

Относительная величина двух вкладов,  $C(0)$  и  $C_{\Delta}(0)$ , зависит от  $\eta$  и  $\mu$ , а также от того, какой край спектра рассматривается. Каждый из этих вкладов может оказаться основным в некоторой области параметров — это обсуждается в разделе 3.4.5.

Чтобы найти среднюю подщелевую плотность состояний при заданных значениях  $\eta$  и  $\mu$  в окрестности одного из краёв спектра  $E_g$  нужно сначала вычислить соответствующий краю среднеполевой угол  $\psi_g$  [из уравнения (B.1)], среднеполевую щель  $E_g$  [из формулы (B.2)] и производную  $F''(\psi_g)$  [из формулы (3.156)]. Эти величины определяют значения  $f(0)$  [формула (3.170)],  $\alpha_d(\eta, \mu)$  [формула (3.225)] и  $\beta_d(\eta, \mu)$  [формула (3.222)], которые определяют асимптотическое поведение средней плотности состояний, см. формулы (3.166) и (3.167). В некоторых предельных случаях эти вычисления будут проделаны в разделе 3.4.5.

### 3.4.3 Теоретико-полевое описание

#### Нелинейная сигма-модель

Для исследования плотности состояний в неупорядоченных сверхпроводниках с магнитными примесями будет использован подход сигма-модели в репличной формулировке [220; 275], применимой в грязном пределе ( $\Delta\tau \ll 1$ ). Она формулируется в терминах матричного поля  $Q$ , описывающего мягкие диффузные моды, и сверхпроводящего параметра порядка  $\Delta$ . Поле  $Q(\mathbf{r})$  — матрица в тензорном произведении мацубаровского-энергетического (E) пространства, репличного (R) пространства, пространства Горькова-Намбу (N) и спинового (S) пространства. Параметр порядка  $\Delta^a(\mathbf{r})$  также имеет репличный индекс.

Формулировка задачи такая же, как и в работе Маркетти и Саймонса [252] и аналогично Саймонсу с соавторами [216; 252; 256; 261] мы будем использовать технику нелинейной сигма-модели (но в репличном, а не суперсимметричном варианте). В то же время пуассоновское усреднение по магнитным примесям будет выполнено без каких-либо упрощений (см. раздел 3.4.3), что принципиально важно для правильного нахождения решения, нарушающего репличную симметрию. Результаты работы [252] будут предельным случаем этой теории. Другое отличие от работы [252] состоит в учёте неоднородностей параметра порядка, вызванных магнитными примесями. Чтобы учесть этот эффект самосогласованным образом, необходимо использовать мацубаровскую версию сигма-модели, рассматривая всё энергетическое пространство.

Будет рассматриваться ситуация, в которой рассеяние на магнитных примесях гораздо слабее, чем на потенциальных,  $\tau \ll \tau_s$ ; однако отдельные магнитные примеси (характеризуемые параметром  $\mu$ ) не обязательно слабые. В этом случае усреднение по магнитному беспорядку удобно отложить до последнего шага вывода. После усреднения по потенциальному беспорядку и интегрирования по фермионам получаем [215; 220; 252] выражение для стат.суммы  $\mathcal{Z}$ ,

$$\mathcal{Z} = \int D\Delta DQ e^{-S[\Delta, Q]}, \quad (3.173)$$

записанное через действие  $\mathcal{S}$  во мнимом времени:

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_\Delta + \frac{\pi\nu}{8\tau} \int d^3\mathbf{r} \operatorname{tr} Q^2 - \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \ln G^{-1}, \quad (3.174)$$

$$\mathcal{S}_\Delta = \frac{\nu}{\lambda T} \sum_{a=1}^n \int d^3\mathbf{r} |\Delta^a(\mathbf{r})|^2. \quad (3.175)$$

Здесь  $\lambda$  — константа взаимодействия в куперовском канале,  $T$  — температура,  $n$  — число реплик,  $\operatorname{tr}$  обозначает след по пространствам  $\mathbb{E} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{N} \otimes \mathbb{S}$ , в то время как  $\operatorname{Tr}$  действует также и в координатном пространстве.

Обратный гриновский оператор даётся формулой

$$G^{-1} = G_0^{-1} + i\varepsilon\tau_3 + i\hat{\Delta} - JS\sigma\tau_3, \quad (3.176)$$

$$G_0^{-1} = -\frac{p^2}{2m} + \mu_F + \frac{i}{2\tau}Q, \quad (3.177)$$

$$\hat{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta^* & 0 \end{pmatrix}_{\mathbb{N}}, \quad (3.178)$$

где  $\varepsilon$  — мацубаровская энергия,  $\tau_i$  и  $\sigma_i$  — матрицы Паули в спиновом пространстве и пространстве Горькова-Намбу. Матрица  $Q$  должна удовлетворять нелинейному условию  $Q^2 = 1$  и подчиняться симметрии [276]

$$Q = \tau_1\sigma_2Q^T\tau_1\sigma_2, \quad (3.179)$$

где транспонирование действует и в пространстве энергий. Средняя плотность состояний может быть получена из выражения  $\langle Q_{\varepsilon\varepsilon} \rangle$ , аналитически продолженного на вещественные энергии  $E$ , см. формулу (3.203) ниже.

Следующий шаг вывода сигма-модели — разложение логарифма (оправданное в диффузном пределе). В случае сильных магнитных примесей, однако, нужно оставить магнитную часть логарифма неразложенной [252]:

$$\ln G^{-1} \approx \ln G_0^{-1} + iG_0(\varepsilon\tau_3 + \hat{\Delta}) + \ln(1 - G_0JS\sigma\tau_3). \quad (3.180)$$

Получающееся действие сигма-модели можно записать как

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_\Delta + \mathcal{S}_D + \mathcal{S}_{\text{mag}}, \quad (3.181)$$

где  $\mathcal{S}_D$  — обычное диффузное действие

$$\mathcal{S}_D = \frac{\pi\nu}{8} \int d^3\mathbf{r} \operatorname{tr} [D(\nabla Q)^2 - 4(\varepsilon\tau_3 + \Delta\tau_1)Q] \quad (3.182)$$

( $\Delta$  выбрана вещественной), а магнитная часть  $\mathcal{S}_{\text{mag}}$  возникает из последнего слагаемого в формуле (3.180) после усреднения по магнитным примесям. Оно будет рассмотрено ниже.

## Усреднение по магнитному беспорядку

Если расстояние между магнитными примесями  $\bar{n}_s^{-1/3}$  много больше, чем длина свободного пробега для потенциального беспорядка  $l$ , можно использовать приближение

$$G_0(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \approx -i\pi\nu\tau_3 Q(\mathbf{r}_i)\delta_{ij}. \quad (3.183)$$

Магнитная часть действия тогда разделяется на вклады от отдельных магнитных примесей [252]:

$$\mathcal{S}_{\text{mag}} \approx -\frac{1}{2} \sum_i \text{tr} \ln (1 + i\sqrt{\alpha} Q(\mathbf{r}_i)\tau_3\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}_i), \quad (3.184)$$

где безразмерный параметр  $\alpha$  определяется формулой (3.148). Замена полного действия  $\mathcal{S}_{\text{mag}}$  на формулу (3.184) эквивалентно самосогласованному приближению  $T$ -матрицы [277] для магнитного рассеяния, в котором учитываются все порядки рассеяния на отдельной примеси, но не учитываются диаграммы с пересечением примесных линий.

В дальнейшем не будет учитываться эффект наведённой спиновой намагниченности и будет рассмотрен только синглетный сектор теории,  $Q = Q_0\sigma_0$  [это приближение оправдано при условии (3.169), когда основной источник эффективного беспорядка — флуктуации положений магнитных примесей]. Тогда усреднение по направлениям намагниченности примесей  $\mathbf{n}_i$  становится тривиальным, и мы получаем

$$\mathcal{S}_{\text{mag}} = -\frac{1}{4} \sum_i \text{tr} \ln [1 + \alpha Q(\mathbf{r}_i)\tau_3 Q(\mathbf{r}_i)\tau_3] = -\frac{1}{4} \int d^3\mathbf{r} n_s(\mathbf{r}) \text{tr} \ln [1 + \alpha(Q\tau_3)^2], \quad (3.185)$$

где введена концентрация магнитных примесей [ср. с формулой (3.147)]:

$$n_s(\mathbf{r}) = \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (3.186)$$

Выполняя пуассоновское усреднение по магнитному беспорядку с помощью соотношения [278]

$$\left\langle \exp \left\{ \sum_i f(\mathbf{r}_i) \right\} \right\rangle = \exp \left\{ \bar{n}_s \int d^3\mathbf{r} [e^{f(\mathbf{r})} - 1] \right\}, \quad (3.187)$$

где  $\bar{n}_s$  — средняя концентрация магнитных примесей, находим магнитный вклад в действие сигма-модели:

$$\mathcal{S}_{\text{mag}}^{\text{av}} = -\bar{n}_s \int d^3\mathbf{r} \left( \exp \frac{\text{tr} \ln [1 + \alpha(Q\tau_3)^2]}{4} - 1 \right). \quad (3.188)$$

Существенной особенностью этого выражения (в котором легко узнать производящую функцию для распределения Пуассона) является нелинейная зависимость от  $\text{tr} \ln [1 + \alpha(Q\tau_3)^2]$ , которая окажется важной при рассмотрении подщелевых состояний.

Формула (3.188) является той точкой, в которой наш вывод начинает отличаться от вывода, представленного Маркетти и Саймонсом [252]. Их подход эквивалентен замене точного

действия  $\mathcal{S}_{\text{mag}}^{\text{av}}$  формулой (3.185), в которой  $n_s(\mathbf{r})$  заменяется средним значением,  $n_s(\mathbf{r}) \mapsto \bar{n}_s$  [см. формулу (3.196) ниже]. Это приближение полностью пренебрегает всеми эффектами, вызванными флуктуациями концентрации магнитных примесей, которые содержатся в высших степенях  $\text{tr} \ln[1 + \alpha(Q\tau_3)^2]$ . Пренебрежение такими эффектами оправдано только для реплично-симметричных конфигураций  $Q$  (т.к. тогда каждый след даёт дополнительную степень  $n$ , которая исчезает в репличном пределе), что позволяет воспроизвести результаты АГШР, но неприменимо для нахождения подщелевых состояний, связанных с решениями, нарушающими репличную симметрию.

В задаче о магнитных примесях поле

$$\delta n_s(\mathbf{r}) = n_s(\mathbf{r}) - \bar{n}_s \quad (3.189)$$

можно рассматривать как *первичный флуктуатор*, отвечающий за формирование подщелевых состояний по механизму ЛО [251; 267]. Его важность в задаче о пуассоновых магнитных примесях была впервые отмечена Сильвой и Иоффе [268].

Другой аспект, в котором наше рассмотрение отличается от работы [252], состоит в наличии поля параметра порядка  $\Delta(\mathbf{r})$ , которое нельзя заменить на среднее значение. Действительно, поле  $\Delta(\mathbf{r})$  подстраивается под неоднородности  $n_s(\mathbf{r})$ , выступая, таким образом, в качестве дополнительного канала беспорядка. Его роль будет рассмотрена ниже.

## Неоднородный параметр порядка и эффективное действие

Из-за самосогласования параметр порядка подстраивается под флуктуации концентрации магнитных примесей. Этот эффект можно описать как (реплично-симметричный) линейный отклик  $\Delta_1(\mathbf{r}) = \Delta(\mathbf{r}) - \Delta$  на  $\delta n_s(\mathbf{r})$ , что в импульсном представлении может быть записано в виде

$$\Delta_1(\mathbf{q}) = -C_\Delta(q)\delta n_s(\mathbf{q}). \quad (3.190)$$

Зависящее от температуры ядро отклика  $C_\Delta(q)$  вычисляется в приложении Г [формула (Г.10)]. Ядро  $C_\Delta(q)$  положительно, и знак в формуле (3.190) отражает тот факт, что параметр порядка подавляется в областях, где концентрация магнитных примесей превышает среднее значение. В реальном пространстве ядро убывает на масштабе нультемпературной длины когерентности, которая много меньше размера инстантона  $L_E$  [формула (3.214)] в окрестности края спектра. По этой причине дальше будет важна только величина  $C_\Delta(q)$  на нулевом импульсе. Тогда интегрирование по флуктуациям параметра порядка в действии (3.181) выдаёт локальный член:

$$\mathcal{S}_{\text{OPF}} = \gamma \int d^3\mathbf{r} \delta n_s(\mathbf{r}) \text{tr} \tau_1 Q, \quad (3.191)$$

где

$$\gamma = \pi\nu C_\Delta(0)/2. \quad (3.192)$$

Учтя таким образом флуктуации параметра порядка, мы получаем действие  $\mathcal{S}[Q] = \mathcal{S}_D + \mathcal{S}_{\text{mag}} + \mathcal{S}_{\text{ORF}}$ , после чего можно выполнить окончательное усреднение по магнитному беспорядку. Как  $\mathcal{S}_{\text{mag}}$ , так и  $\mathcal{S}_{\text{ORF}}$  линейны по  $n_s$ , и отражают собой два способа влияния неоднородного распределения магнитных примесей на систему: через флуктуации перекрытий между локализованными состояниями ( $\mathcal{S}_{\text{mag}}$ ) и через самосогласованное изменение параметра порядка  $\Delta$  ( $\mathcal{S}_{\text{ORF}}$ ).

Усредняя  $\mathcal{S}_{\text{mag}} + \mathcal{S}_{\text{ORF}}$  по распределению Пуассона для  $n_s(\mathbf{r})$ , получаем следующий член в действии [который в отсутствие флуктуаций параметра порядка сводится к  $\mathcal{S}_{\text{mag}}^{\text{av}}$ , определяемому формулой (3.188)]:

$$\mathcal{S}_{n_s} = -\bar{n}_s \int d^3\mathbf{r} \left[ e^{\text{tr} \frac{\ln[1 + \alpha(Q\tau_3)^2] - \gamma \text{tr} \tau_1 Q}{4}} - 1 + \gamma \text{tr} \tau_1 Q \right]. \quad (3.193)$$

Формулу (3.193) нужно рассматривать как эффективное действие, справедливое, если  $Q(\mathbf{r})$  медленно меняется на масштабе  $\xi_0$ . Это условие гарантирует локальность соотношения между  $Q(\mathbf{r})$  и  $\delta n_s(\mathbf{r})$ , как это утверждает формула (3.191), что делает возможным усреднение членов (3.191) и (3.185) единообразным способом. С другой стороны необходимо понимать, что в противоположность  $n_s(\mathbf{r})$ , которое есть набор  $\delta$ -функций,  $\Delta_1(\mathbf{r})$  представляет собой непрерывную функцию (набор  $\delta$ -функций, размазанных на масштабе  $\xi_0$ ). По этой причине в формуле (3.180) достаточно сохранить ведущий член по  $\Delta$ , т.е. следующие члены малы по параметру  $\Delta\tau$  и ими, как обычно, можно пренебречь.

Вместе с обычным диффузным действием  $\mathcal{S}_D$  [формула (3.182) с постоянной  $\Delta$ ], формула (3.193) приводит к искомому эффективному действию для поля  $Q$  на больших масштабах:

$$\mathcal{S}_{\text{eff}}[Q] = \mathcal{S}_D + \mathcal{S}_{n_s}. \quad (3.194)$$

## Упрощение вблизи края спектра

Нелинейное действие  $\mathcal{S}_{n_s}$  существенно упрощается вблизи края спектра, при  $E \rightarrow E_g$ , где нарушение репличной симметрии является слабым, все следы в формуле (3.193) малы, и магнитная часть действия может быть разложена в степенной ряд:

$$\mathcal{S}_{n_s} = \mathcal{S}_{\text{mag}}^{(1)} + \mathcal{S}_{\text{mag}}^{(2)} + \dots, \quad (3.195)$$

где

$$\mathcal{S}_{\text{mag}}^{(1)} = -\frac{\bar{n}_s}{4} \int d^3\mathbf{r} \text{tr} \ln[1 + \alpha(Q\tau_3)^2], \quad (3.196)$$

$$\mathcal{S}_{\text{mag}}^{(2)} = -\frac{\bar{n}_s}{2} \int d^3\mathbf{r} \left\{ \text{tr} \left( \frac{\ln[1 + \alpha(Q\tau_3)^2]}{4} - \gamma \tau_1 Q \right) \right\}^2, \quad (3.197)$$

а опущенные вклады содержат более высокие степени следа. В разделе 3.4.4 будет показано, что первых двух членов действия (3.195) достаточно для описания подщелевых состояний

вблизи края спектра (аналогичное упрощение недавно использовалось в задаче о вакансиях в киральном металле [279]). При бóльших отклонениях от края действие  $\mathcal{S}_{n_s}$  нужно сохранять в полном виде (3.193).

Член  $\mathcal{S}_{\text{mag}}^{(2)}$  естественно интерпретировать как результат усреднения действия  $\mathcal{S}_{\text{mag}} + \mathcal{S}_{\text{ORF}}$  по гауссовым флуктуациям величины  $\delta n_s$ , задаваемым корреляционной функцией

$$\langle \delta n_s(\mathbf{r}) \delta n_s(\mathbf{r}') \rangle = \bar{n}_s \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (3.198)$$

Тот факт, что пуассоновское распределение магнитных примесей может быть эффективно описано гауссовыми флуктуациями, неудивителен. Вблизи края спектра, при  $E \rightarrow E_g$ , характерный пространственный масштаб [ $L_E$ , см. формулу (3.214) ниже] расходится, поэтому в объёме инстантона содержится много магнитных примесей, так что работает центральная предельная теорема.

Следовательно, при достаточно малом  $\epsilon$  (условия приведены в разделе 3.4.4 ниже) эффективное действие (3.194) может быть приближённо записано как

$$\mathcal{S}_{\text{eff}}[Q] \approx \mathcal{S}_D + \mathcal{S}_{\text{mag}}^{(1)} + \mathcal{S}_{\text{mag}}^{(2)}. \quad (3.199)$$

Здесь два первых члена линейны по следу и приводят к теории АГШР в реплично-симметричной седловой точке (раздел 3.4.4), в то время как последний член квадратичен по следу и отвечает за флуктуации щели из-за флуктуаций  $n_s(\mathbf{r})$ .

### 3.4.4 Инстантоны и подщелевые состояниях

#### Реплично-симметричная седловая точка

Начнём рассмотрение эффективного действия (3.199) с простейшего реплично-симметричного случая. Стационарная реплично-диагональная спин-синглетная седловая точка может быть параметризована через спектральный угол  $\theta_\epsilon^a$ :

$$Q_{\epsilon\epsilon'}^{ab} = \delta_{\epsilon\epsilon'} \delta_{ab} (\tau_3 \cos \theta_\epsilon^a + \tau_1 \sin \theta_\epsilon^a) \sigma_0. \quad (3.200)$$

Тогда важна только часть действия, линейная по следу:

$$\mathcal{S}_D + \mathcal{S}_{\text{mag}}^{(1)} = \int d^3\mathbf{r} \sum_{a=1}^n \sum_{\epsilon} \mathcal{L}_a \quad (3.201)$$

с лагранжианом (написанным с точностью до постоянного члена, исчезающего в репличном пределе)

$$\mathcal{L}(\theta) = \frac{\pi\nu}{2} [D(\nabla\theta)^2 - 4(\epsilon \cos \theta + \Delta \sin \theta) - (\Delta\eta/\mu) \ln(1 + \mu \cos 2\theta)]. \quad (3.202)$$

Средняя плотность состояний находится как

$$\frac{\langle \rho(E) \rangle}{\rho_0} = \lim_{n \rightarrow 0} \operatorname{Re} \frac{\operatorname{tr}_{\mathbf{R}, \mathbf{N}, \mathbf{S}} \langle Q_{EE} \rangle \tau_3}{4n}, \quad (3.203)$$

где  $\langle Q_{EE} \rangle$  — среднее значение  $Q$  с действием  $\mathcal{S}$ , аналитически продолженное на вещественные энергии:  $\varepsilon \mapsto -iE$ . Чтобы упростить рассмотрение подщелевых состояний, удобно перейти к переменной  $\psi$  [262]:

$$\theta = \pi/2 + i\psi. \quad (3.204)$$

В терминах  $\psi_E^a$  лагранжиан  $\mathcal{L}$  принимает вид

$$\mathcal{L}(\psi) = -\frac{\pi\nu}{2} [D(\nabla\psi)^2 - 4(E \sinh \psi - \Delta \cosh \psi) + (\Delta\eta/\mu) \ln(1 - \mu \cosh 2\psi)]. \quad (3.205)$$

Варьирование действия (3.201) и поиск реплично-симметричного решения приводят к уравнению  $F(\psi) = 0$ , в котором функция  $F(\psi)$  определяется формулой (3.156). Тогда формула (3.203) сводится к (3.154), и воспроизводятся результаты АГШР, изложенные в разделе 3.4.2. Действие  $\mathcal{S}_{\text{mag}}^{(2)}$ , как и вклады в формулу (3.193) более высокого порядка, не влияют на реплично-симметричное решение.

## Универсальное описание вблизи края спектра

Подщелевые состояния связаны с инстантонами, нарушающими репличную симметрию [261; 267]. В нашем случае, когда необходимо учитывать разные мацубаровские энергии, мы используем анзац, в котором репличная симметрия нарушена на заданной энергии  $\varepsilon_0$ . Чтобы удовлетворить симметрии (3.179), которая приводит к соотношению  $\psi_\varepsilon + \psi_{-\varepsilon} = 0$ , необходимо также учесть энергию  $-\varepsilon_0$ :

$$\psi_\varepsilon^a(\mathbf{r}) = \begin{cases} \psi_1(\mathbf{r}), & \varepsilon = \varepsilon_0 \text{ и } a = 1; \\ \psi_2(\mathbf{r}), & \varepsilon = \varepsilon_0 \text{ и } a = 2, \dots, n; \\ -\psi_1(\mathbf{r}), & \varepsilon = -\varepsilon_0 \text{ и } a = 1; \\ -\psi_2(\mathbf{r}), & \varepsilon = -\varepsilon_0 \text{ и } a = 2, \dots, n; \\ \psi_\varepsilon(\mathbf{r}), & |\varepsilon| \neq \varepsilon_0. \end{cases} \quad (3.206)$$

(Похожий вид нарушения репличной симметрии в пространстве энергий рассматривался в контексте статистики уровней в случайных матрицах [280; 281].) Можно проверить, что такой анзац совместим с седловыми уравнениями для действия (3.194). Заметим, что хотя репличная симметрия предполагается нарушенной при энергиях  $\pm\varepsilon_0$ , седловые решения  $\psi_\varepsilon(\mathbf{r})$  при других энергиях приобретают нетривиальную пространственную зависимость. Однако они не меняют уравнений на  $\psi_1(\mathbf{r})$  и  $\psi_2(\mathbf{r})$  при  $\varepsilon = \pm\varepsilon_0$ , которые отцепляются от других

энергий. Делая аналитическое продолжение, мы можем таким образом рассматривать одну вещественную энергию  $E = i\varepsilon_0$  [267], а роль энергии  $-\varepsilon_0$  сводится к удвоению вклада в действие в формуле (3.208).

Чтобы получить инстантонное уравнение для полей  $\psi_1(\mathbf{r})$  и  $\psi_2(\mathbf{r})$ , нужно подставить анзац (3.206) в седловые уравнения для действия (3.194). Получающаяся система уравнений может быть записана в виде

$$-\xi_0^2 \nabla^2 \psi_a - \frac{E}{\Delta} \cosh \psi_a + \left(1 + \frac{2\eta\gamma}{\mu}\right) \sinh \psi_a \pm \frac{\eta}{2\mu} \frac{\partial}{\partial \psi_a} \left[ \sqrt{\frac{1 - \mu \cosh 2\psi_1}{1 - \mu \cosh 2\psi_2}} e^{-4\gamma(\cosh \psi_1 - \cosh \psi_2)} \right] = 0, \quad (3.207)$$

где положительный (отрицательный) знак перед последним членом соответствует  $a = 1$  (2).

Вблизи края спектра, при  $E \rightarrow E_g$ , рассмотрение существенно упрощается, можно использовать упрощённое действие (3.199) и отобразить систем на модель СПП с соответствующим коррелятором  $f(0)$ . Ключевым моментом для такого отображения является то, что вблизи края спектра нарушение репличной симметрии является слабым, т.е.  $\psi_1$  и  $\psi_2$  близки, поэтому действие (3.199) можно разложить по  $\psi_1 - \psi_2$ .

В репличном пределе ( $n \rightarrow 0$ ) линейная по следу часть (3.201) принимает вид

$$\mathcal{S}_D + \mathcal{S}_{\text{mag}}^{(1)} = 2 \int d^3 \mathbf{r} [\mathcal{L}(\psi_1) - \mathcal{L}(\psi_2)], \quad (3.208)$$

где множитель 2 учитывает дублет  $\{\varepsilon_0, -\varepsilon_0\}$  в формуле (3.206). Вблизи края лагранжианы  $\mathcal{L}(\psi_i)$  можно заменить на их тейлоровские разложения в окрестности среднеполевого решения  $\psi_0$ :

$$\mathcal{L}(\psi_i) - \mathcal{L}(\psi_0) \approx -\pi\nu\Delta [\xi_0^2 (\nabla\psi_i)^2 + F'(\psi_0)(\psi_i - \psi_0)^2 + F''(\psi_0)(\psi_i - \psi_0)^3/3]. \quad (3.209)$$

Кубический член необходимо удерживать, т.к. коэффициент перед квадратичным членом,  $F'(\psi_0) \approx F''(\psi_g)(\psi_0 - \psi_g)$ , обращается в ноль при  $E = E_g$ :

$$F'(\psi_0) \approx \sqrt{2 \frac{E - E_g}{\Delta} F''(\psi_g) \cosh \psi_g} \propto \epsilon^{1/2}, \quad (3.210)$$

где  $\epsilon$  определено в формуле (3.162). В зависимости от значений  $\eta$  и  $\mu$  среднеполевой спектр может иметь до трёх краёв (см. рисунки 3.7 и 3.8, а также приложение В), и щелевые области теории среднего поля соответствуют интервалам  $E < E_{g1}$ ,  $E > E_{g2}$  и  $E < E_{g3}$ . Можно показать, что  $F''(\psi_g)$  во всех этих случаях имеет тот же знак, что и  $E - E_g$ , так что выражение под корнем в формуле (3.210) всегда положительно. Также с нашей точностью можно заменить  $F''(\psi_0)$  на  $F''(\psi_g)$  в формуле (3.209) и заменить энергию  $E$  в аргументе этой функции на  $E_g$  [так что в наших формулах  $F''(\psi_g)$  всегда берётся при  $E = E_g$ ].

Чтобы завершить отображение на модель СПП, рассмотрим квадратичную по следу часть  $\mathcal{S}_{\text{mag}}^{(2)}$  в действии (3.199). Хотя зависимость от  $Q$  двух членов под знаком следа в формуле (3.197) различна, в пределе  $E \rightarrow E_g$  оба пропорциональны  $\psi_1 - \psi_2$ , что позволяет написать

$$\mathcal{S}_{\text{mag}}^{(2)} \approx -8(\pi\nu)^2 f(0) \sinh^2 \psi_g \int d^3 \mathbf{r} (\psi_1 - \psi_2)^2, \quad (3.211)$$

где  $f(0)$  принимает вид (3.170), причём

$$C(0) = \frac{\mu \cosh \psi_g}{(\pi\nu)(1 - \mu \cosh 2\psi_g)}. \quad (3.212)$$

Чтобы записать получающееся действие в стандартном виде, введём новые поля  $\phi_{1,2}$  по формулам

$$\psi_{1,2}(\mathbf{r}) = \psi_0 - \frac{2F'(\psi_0)}{F''(\psi_g)} \phi_{1,2}(\tilde{\mathbf{r}}), \quad (3.213)$$

и перейдём к безразмерной координате  $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/L_E$ . Здесь масштаб длины

$$L_E = \frac{\xi_0}{\sqrt{F'(\psi_0)}} \propto \epsilon^{-1/4}, \quad (3.214)$$

где  $F'(\psi_0)$  даётся формулой (3.210), определяет размер инстантона и расходится на краю спектра. В новых переменных действие (3.199) принимает вид (3.163) с безразмерным действием

$$\mathcal{S}_0(K) = \int d^d \tilde{\mathbf{r}} \left[ \frac{(\tilde{\nabla} \phi_2)^2}{2} + \frac{\phi_2^2}{2} - \frac{\phi_2^3}{3} - \frac{(\tilde{\nabla} \phi_1)^2}{2} - \frac{\phi_1^2}{2} + \frac{\phi_1^3}{3} - K \frac{(\phi_1 - \phi_2)^2}{2} \right]. \quad (3.215)$$

Степень перемешивания реплик определяется безразмерным параметром

$$K(\epsilon) = \frac{4\pi\nu f(0) \sinh^2 \psi_g}{\Delta F'(\psi_0)} = \sqrt{\frac{\epsilon_*}{\epsilon}}, \quad (3.216)$$

где масштаб  $\epsilon_*$  можно представить в виде (3.165).

Варьируя действие (3.215), получаем универсальную систему связанных дифференциальных уравнений (3.160) на функции  $\phi_{1,2}(\tilde{\mathbf{r}})$ . Вычисленное с помощью этих решений действие  $\mathcal{S}_0(K)$  можно записать в компактном виде (3.159).

## Инстантонное действие как функция $K$

Обсудим кратко свойства системы (3.160), полученные в работах [267; 272]. Мы рассматриваем случаи  $d = 3$  и  $d = 0$ . Как и работах [216; 251; 252; 256; 268], в случае  $d = 3$  будем рассматривать только сферически-симметричные инстантонные решения. Существование менее симметричных инстантонов с меньшим действием априори исключить нельзя, но этот вопрос требует отдельного рассмотрения.

**Нульмерная геометрия.** Этот случай реализуется в сверхпроводящих гранулах с размерами меньше, чем размер инстантона  $L_E$ . В этом случае  $\langle \rho(E) \rangle \propto \exp(-\mathcal{S}_{\text{inst}})$  даёт плотность состояний, усреднённую по ансамблю гранул [266; 268]. Пренебрегая градиентными членами в уравнениях (3.160), получаем систему алгебраических уравнений, которая легко решается:

$$\phi_{1,2} = 1/2 \pm K \mp \sqrt{K^2 + 1/4}, \quad (3.217)$$

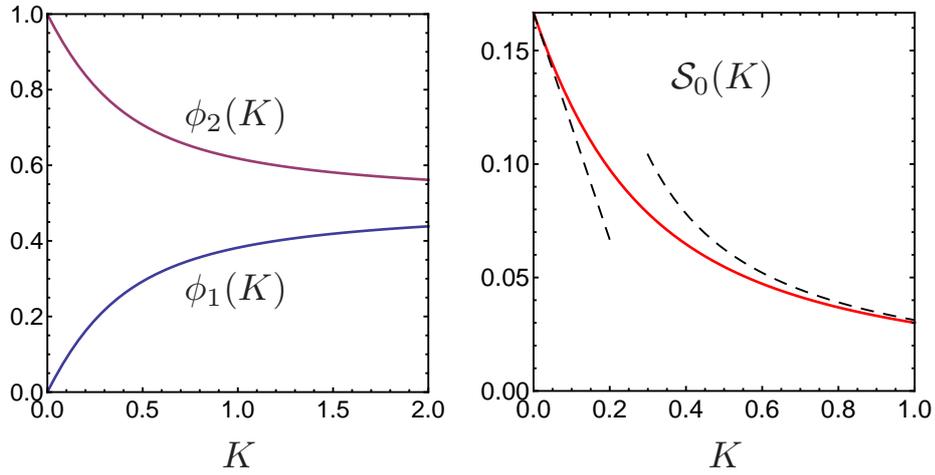


Рисунок 3.9 — Инстантон в геометрии маленькой гранулы. Левая часть: решения  $\phi_1$  (нижняя кривая) и  $\phi_2$  (верхняя кривая) системы уравнений (3.160) в зависимости от параметра  $K$ . Правая часть: зависимость от  $K$  действия  $\mathcal{S}_0(K)$  [штриховые линии показывают поведение асимптотик, см. формулу (3.219)].

где знаки выбраны так, чтобы действие получалось положительным. Вычисляя действие инстантона с помощью формулы (3.159), получаем

$$\mathcal{S}_0(K) = \frac{(4K^2 + 1)^{3/2} - K(8K^2 + 3)}{6}. \quad (3.218)$$

Эволюция решений  $\phi_{1,2}$  и действия  $\mathcal{S}_0$  в зависимости от  $K$  показана на рисунке 3.9. Асимптотики

$$\mathcal{S}_0(K) = \begin{cases} 1/6 - K/2 + \dots, & K \ll 1; \\ 1/32K + \dots, & K \gg 1; \end{cases} \quad (3.219)$$

показаны на рисунке 3.9(b) штриховыми линиями.

**Инстантон в пределе  $K \rightarrow 0$ .** В пределе  $K \rightarrow 0$  (т.е. достаточно далеко от края спектра,  $\epsilon \gg \epsilon_*$ ), уравнения (3.160) распадаются, выдавая единственное уравнение

$$-\tilde{\nabla}^2 \phi + \phi - \phi^2 = 0 \quad (3.220)$$

как для  $\phi_1(\tilde{\mathbf{r}})$ , так и для  $\phi_2(\tilde{\mathbf{r}})$ . Это уравнение имеет решение типа «отскока»  $\varphi_{\text{inst}}^{(d)}(\tilde{r})$ , обращающееся в ноль при  $\tilde{r} \rightarrow \infty$  (в 1D это решение известно явно, в других размерностях может быть найдено численно). Действие (3.159) минимизируется, если взять тривиальное решение  $\phi_1(\tilde{\mathbf{r}}) = 0$  для первой реплики и решение типа отскока,  $\phi_2(\tilde{\mathbf{r}}) = \varphi_{\text{inst}}^{(d)}(\tilde{r})$ , для остальных реплик. Безразмерное действие инстантона  $\mathcal{S}_0(0) = s_d$  тогда даётся числом

$$s_d \equiv \frac{1}{6} \int [\varphi_{\text{inst}}^{(d)}(\tilde{r})]^3 d^d \tilde{\mathbf{r}} = \begin{cases} 1/6, & d = 0, \\ 43.7, & d = 3. \end{cases} \quad (3.221)$$

Наконец, с помощью формулы (3.163), получаем формулу (3.167) для плотности состояний, в которой

$$\beta_d(\eta, \mu) = 2s_d \frac{(2 \cosh \psi_g)^{(6-d)/4}}{|F''(\psi_g)|^{(2+d)/4}}. \quad (3.222)$$

**Инстантон в пределе  $K \rightarrow \infty$ .** В пределе  $K \rightarrow \infty$  (т.е. близко к краю спектра,  $\epsilon \ll \epsilon_*$ ) нарушение репличной симметрии малó:  $\phi_1 - \phi_2 \rightarrow 0$ . Благодаря размерной редукции [267; 268] нетривиальная оптимальная флуктуация для  $\phi(\tilde{\mathbf{r}}) = \phi_1(\tilde{\mathbf{r}}) \approx \phi_2(\tilde{\mathbf{r}})$  в  $d$  измерениях — это просто решение типа отскока для уравнения (3.220) в  $d - 2$  измерениях:  $\phi^{(d)}(\tilde{r}) = \varphi_{\text{inst}}^{(d-2)}(\tilde{r})$ . Инстантонное действие (3.159) в пределе  $K \rightarrow \infty$  тогда принимает вид

$$\mathcal{S}_0(K) = c_d/K, \quad (3.223)$$

где  $c_d$  — зависящая от размерности константа [267]

$$c_d = 2 \int \left( \frac{\partial \varphi_{\text{inst}}^{(d-2)}(\tilde{r})}{\partial \tilde{r}} \right)^2 \frac{d^d \tilde{\mathbf{r}}}{\tilde{r}^2} = \begin{cases} 1/32, & d = 0, \\ 24\pi/5, & d = 3. \end{cases} \quad (3.224)$$

Подставляя результат (3.223) в действие (3.163), получаем формулу (3.166), в которой

$$\alpha_d(\eta, \mu) = 4c_d \frac{(2 \cosh \psi_g)^{(8-d)/4}}{|F'''(\psi_g)|^{d/4} \sinh^2 \psi_g}. \quad (3.225)$$

## Пределы универсального описания

Подытожим условия на  $\epsilon$ , которые позволяют получить универсальное описание вблизи края спектра, представленное в разделе 3.4.4.

Это описание основано на следующих приближениях: (i) разложение линейного по следу действия, определённого формулами (3.201) и (3.205), по степеням  $(\psi_i - \psi_0)$ , и сопутствующие приближения, приводящие к универсальному виду, заданному формулами (3.208) и (3.209), (ii) разложение квадратичного по следу действия (3.197), приводящее к универсальному виду (3.211) члена, перемешивающего реплики, (iii) упрощение полного действия (3.194) до вида (3.199), в котором удержаны только вклады, линейные и квадратичные по следу.

Рассматривая приближение (i), видим, что для разложения по степеням  $(\psi_i - \psi_0)$  необходимо

$$\epsilon \ll \epsilon_1, \quad \epsilon_1 \sim \frac{|F'''(\psi_g)|}{\cosh \psi_g}, \quad (3.226)$$

где характерное значение  $\epsilon_1$  оценивается из формул (3.210) и (3.213). В то же время можно проверить, что само по себе приближение (3.210) требует выполнения условия

$$\epsilon \ll \epsilon_2, \quad \epsilon_2 \sim \frac{\epsilon_1}{[\tanh \psi_g + F'''(\psi_g)/F''(\psi_g)]^2}. \quad (3.227)$$

Можно показать, что условия (3.226) и (3.227) также оправдывают и остальные приближения, связанные с линейным по следу действием [пренебрежение членом четвёртого порядка по  $(\psi_i - \psi_0)^4$  в формуле (3.209) и замена  $F'''(\psi_0)$  на энергии  $E$  на  $F'''(\psi_g)$  на энергии  $E_g$ ]. Для  $\epsilon \gtrsim \epsilon_1, \epsilon_2$  разность  $(\psi_i - \psi_0)$  становится больше единицы и гиперболические функции в формуле (3.205) нужно брать в их полном виде.

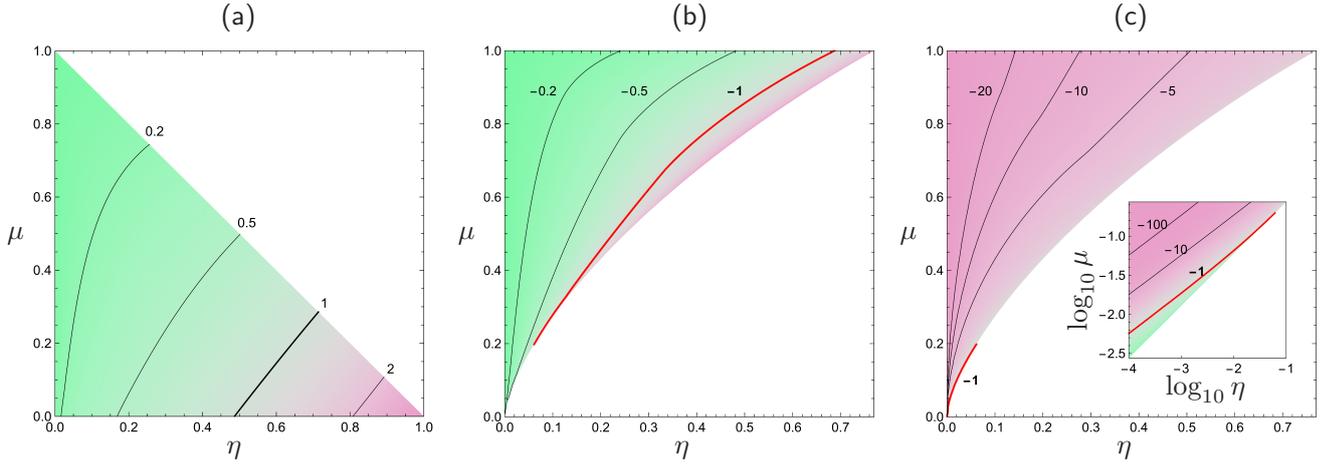


Рисунок 3.10 — Отношение  $C_{\Delta}(0)/C(0)$  для краёв спектра (a)  $E_{g1}$ , (b)  $E_{g2}$ , (c)  $E_{g3}$  как функция от  $\eta$  и  $\mu$  при нулевой температуре. Вставка на рисунке (c) показывает область малых  $\eta$  и  $\mu$  в логарифмическом масштабе. Области, в которых размытие щели в основном обусловлено флуктуациями интенсивности спин-флип рассеяния (параметра порядка) показаны зелёным (розовым) цветом. Красная линия на рисунках (b) и (c) соответствует соотношению  $C(0) + C_{\Delta}(0) = 0$ , при котором два эффекта в точности компенсируют друг друга и  $f(0) = 0$ . В этом случае размытие щели полностью определяется мезоскопическими флуктуациями потенциального беспорядка.

В параметризации (3.200) и (3.204) квадратичное по следу действие (3.197) на одной вещественной энергии  $E$  принимает вид

$$\mathcal{S}_{\text{mag}}^{(2)} = -\frac{\bar{n}_s}{2} \int d^3 \mathbf{r} [\text{tr}_R \Phi(\psi)]^2, \quad (3.228)$$

где

$$\Phi(\psi) = \frac{1}{2} \ln(1 - \mu \cosh 2\psi) - 4\gamma \cosh \psi. \quad (3.229)$$

В этих обозначениях приближение (ii), требующее, чтобы кубическим членом  $(\psi_1 - \psi_2)^3$  можно было пренебречь в формуле (3.211), накладывает дополнительное требование

$$\epsilon \ll \epsilon_3, \quad \epsilon_3 \sim \epsilon_1 \left[ \frac{\Phi'(\psi_g)}{\Phi''(\psi_g)} \right]^2. \quad (3.230)$$

Наконец, приближение (iii), означающее, что можно пренебречь вкладом  $\mathcal{S}_{\text{mag}}^{(3)}$ , требует условия

$$\epsilon \ll \epsilon_4, \quad \epsilon_4 \sim \epsilon_1 \left[ \frac{1}{\Phi'(\psi_g)} \right]^2. \quad (3.231)$$

Таким образом условия (3.226), (3.227), (3.230), (3.231) определяют верхний предел применимости универсального описания вблизи края спектра. С другой стороны нижний предел даётся условием  $\mathcal{S}_{\text{inst}} \gg 1$ , означающим применимость седлового приближения (это условие нарушается во флуктуационной области очень близко к краю спектра).

### 3.4.5 Подщелевые состояния: предельные случаи

В режиме ЛО, при  $\epsilon \ll \epsilon_*$ , подщелевая плотность состояний определяется оптимальными флуктуациями концентрации магнитных примесей и описывается параметром  $f(0) = \bar{n}_s[C(0) + C_\Delta(0)]^2$ . Два вклада соответствуют флуктуациям паразитизирующего параметра ( $\eta$ ) и параметра порядка ( $\Delta$ ), при этом оба эти вклада наводятся за счёт  $\delta n_s(\mathbf{r})$ . Отношение двух вкладов  $C_\Delta(0)/C(0)$ , найденное численно, представлено на рисунке 3.10. Оно положительно для  $E_{g1}$  и, неожиданным образом, отрицательно для  $E_{g2}$  и  $E_{g3}$ , что говорит о частичной взаимной компенсации флуктуаций  $\eta$  и  $\Delta$  в последних двух случаях.

Разные знаки  $C(0)$  и  $C_\Delta(0)$  для разных краёв спектра можно качественно понять из среднеполевых выражений для  $E_g$  в предельных случаях: в то время как  $E_g$  всегда растёт с ростом  $\Delta$ , оно убывает с ростом  $\eta$  в случае  $E_{g1}$  [формулы (3.150) и (3.241)] и растёт с ростом  $\eta$  в случае  $E_{g2}$  и  $E_{g3}$  [формулы (3.241) и (3.247)]. Поскольку локальное увеличение  $\delta n_s(\mathbf{r})$  подавляет  $\Delta$  и увеличивает  $\eta$ , оно приводит к убыванию  $E_{g1}$ , в то время как влияние на  $E_{g2}$  и  $E_{g3}$  определяется конкуренцией двух вкладов разных знаков. Два эффекта полностью компенсируют друг друга,  $C(0) + C_\Delta(0) = 0$ , на красной кривой на рисунках 3.10(b) и 3.10(c). На языке оптимальной флуктуации подщелевые состояния возникают из-за флуктуаций  $\delta n_s(\mathbf{r})$ , которые локально сдвигают  $E_g$  в щелевую область. Из вышеприведённого анализа получается, что оптимальная флуктуация  $\delta n_s(\mathbf{r})$  положительна за исключением узкой области ниже красной кривой на рисунках 3.10(b) и 3.10(c).

Дальнейшее аналитическое продвижение возможно в предельных случаях, которые обсуждаются ниже.

Достаточно далеко от края спектра, при  $\epsilon \gg \epsilon_*$  (но при  $\epsilon \ll \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ , так что наши приближения справедливы, см. раздел 3.4.4) средняя плотность состояний даётся формулой (3.167). Учитывая выражение (3.222) для  $\beta_d(\eta, \mu)$ , мы воспроизводим результаты Маркетти и Саймонса [252]. Это лишь дальняя асимптотика плотности состояний из-за редких флуктуаций потенциального беспорядка, в то время как основная часть подщелевой плотности состояний определяется вкладом типа ЛО (3.166) от флуктуаций концентрации магнитных примесей.

### Слабые магнитные примеси (малое $\mu$ )

Рассмотрим щелевой режим АГ (магнитные примеси слабые, почти в борновском пределе, так что есть только один край спектра  $E_{g1}$ ):

$$\mu \ll \eta^{2/3} < 1, \quad (3.232)$$

соответствующий нижней части области (b) на рисунке 3.7. В этом пределе формулы (B.1) и (B.2) упрощаются и мы получаем обычное решение АГ,  $\cosh \psi_g \approx 1/\eta^{1/3}$ , со щелью  $E_g^{\text{AG}}$ , определяемой формулой (3.150), и  $F''(\psi_g) \approx -3\eta^{1/3}(1 - \eta^{2/3})^{1/2}$ .

Параметр эффективной модели СПП даётся формулой (3.170), где  $C_\Delta(0)$  зависит от температуры. Для упрощения дальнейшего анализа рассмотрим случай  $T = 0$ . Тогда с помощью формул (3.171) и (3.172) получаем

$$\frac{f(0)}{\Delta^2 V_\xi} \approx \frac{8\mu\eta^{1/3}}{g_\xi} \left(1 + \frac{\pi\eta^{1/3}}{4 - \pi\eta}\right)^2, \quad (3.233)$$

где два вклада в скобках соответствуют вкладам от  $C(0)$  и  $C_\Delta(0)$  соответственно. В пределе слабого паразарушения ( $\eta \ll 1$ ) значение  $f(0)$  определяется в основном параметром  $C(0)$ , который описывает флуктуации  $\eta$ . С другой стороны вблизи закрытия щели, при  $\eta \sim 1$ , флуктуации параметра порядка за счёт магнитных примесей дают сравнимый вклад [с умеренно большим численным множителем  $C_\Delta(0)/C(0) \approx 3.6$  при  $\eta \rightarrow 1$ ]. Отношение  $C_\Delta(0)/C(0)$  для края спектра  $E_{g1}$  показано на рисунке 3.10(a). С помощью формул (3.165) и (3.233) получаем энергию перехода между двумя асимптотиками:

$$\epsilon_* = \frac{8\mu^2(1 - \eta^{2/3})^{3/2}}{3\eta^{2/3}} \left(1 + \frac{\pi\eta^{1/3}}{4 - \pi\eta}\right)^4. \quad (3.234)$$

Основная асимптотика хвоста плотности состояний при  $\epsilon \ll \epsilon_*$  определяется действием

$$\mathcal{S}_{\text{inst}} = \frac{16c_d}{6^{d/4}(1 - \eta^{2/3})^{1+d/8}} \frac{\Delta^2 V_\xi}{f(0)} \epsilon^{(8-d)/4}, \quad (3.235)$$

где  $f(0)$  даётся формулой (3.233). В случае слабого магнитного рассеяния,  $\eta \ll 1$ , формула (3.235) упрощается:

$$\mathcal{S}_{\text{inst}} = \frac{c_d}{\mu} \frac{2 \cdot 6^{-d/4}}{\eta^{1/3}} g_\xi \epsilon^{(8-d)/4} = \tilde{a}_d \frac{\bar{n}_s V_\xi}{\eta^{4/3}} \epsilon^{(8-d)/4}, \quad (3.236)$$

где  $\tilde{a}_d = 16 \cdot 6^{-d/4} c_d$ . Результат (3.236) совпадает с результатом Сильвы и Иоффе [268], которые изучали оптимальную флуктуацию концентрации магнитных примесей.

Дальняя асимптотика хвоста плотности состояний при  $\epsilon \gg \epsilon_*$  определяется инстантонным действием

$$\mathcal{S}_{\text{inst}} = s_d g_\xi \frac{4 \cdot 6^{(2-d)/4}}{3\eta^{2/3}(1 - \eta^{2/3})^{(2+d)/8}} \epsilon^{(6-d)/4}, \quad (3.237)$$

что совпадает с результатом Ламакрафта и Саймонса [216; 256].

Рассматривая ограничения сверху на  $\epsilon$ , сформулированные в разделе 3.4.4, находим, что наиболее строгое из них — это  $\epsilon \ll \epsilon_2$ , причём

$$\frac{\epsilon_*}{\epsilon_2} \sim \left(\frac{\mu}{\eta^{2/3}}\right)^2 \ll 1. \quad (3.238)$$

Это означает, что наша теория, основанная на универсальном описании (см. раздел 3.4.4) может описать как главную асимптотику хвоста из-за магнитного беспорядка (при  $\epsilon < \epsilon_*$ ), так и дальнюю асимптотику из-за потенциального беспорядка (при  $\epsilon > \epsilon_*$ ).

Физический смысл  $\epsilon_2$  становится ясен в случае слабого магнитного рассеяния,  $\eta \ll 1$ . В этом пределе  $\epsilon_2 \sim \eta^{2/3}$ , и эта величина имеет тот же порядок, что и среднеполевое смещение края щели.

## Предел малых концентраций (малых $\eta$ )

Рассмотрим предел малых концентраций магнитных примесей,

$$\eta^{2/3} \ll \mu, \quad (3.239)$$

соответствующий левой границе области (d) на фазовой диаграмме рисунке 3.7. В этом режиме образуется узкая примесная зона, поэтому возникает вопрос о флуктуационном размытии её краёв при  $E \rightarrow E_{g1}-0$  и  $E \rightarrow E_{g2}+0$ , а также о размытии края континуума при  $E \rightarrow E_{g3}-0$ .

**Размытие примесной зоны ( $E_{g1}$  и  $E_{g2}$ ).** В пределе (3.239) значения спектральных углов, определяющий края примесной зоны в теории среднего поля, даются формулами

$$\psi_{g1,g2} \approx \frac{1}{2} \operatorname{arccch} \frac{1}{\mu} \mp \frac{(1+\mu)^{1/4}}{2^{5/4}\mu^{3/4}} \sqrt{\eta}. \quad (3.240)$$

Края примесной зоны выражаются как

$$\frac{E_{g1,g2}}{\Delta} \approx \frac{E_0}{\Delta} \mp \frac{2^{3/4}\mu^{1/4}}{(1+\mu)^{3/4}} \sqrt{\eta}, \quad (3.241)$$

где  $E_0$  — энергия связанного состояния на одной примеси (3.151). Из формулы (3.156) находим

$$F''(\psi_{g1,g2}) \approx \mp \frac{2^{11/4}\mu^{5/4}}{(1+\mu)^{3/4}} \frac{1}{\sqrt{\eta}}. \quad (3.242)$$

Размытие примесной зоны, определяемое действием (3.163), таким образом в главном порядке симметрично.

Как видно из рисунков 3.10(a) и 3.10(b) [см. также формулы (3.171) и (3.172)],  $C_{\Delta}(0)/C(0) \ll 1$  для малых  $\eta$ . Таким образом вкладом  $C_{\Delta}(0)$  в  $f(0)$  можно пренебречь при нулевой температуре [точное условие  $\eta \ll \mu^{1/2}$  в пределе (3.239) определённо выполняется], и мы находим

$$\frac{f(0)}{\Delta^2 V_{\xi}} \approx \frac{2^{5/2}\mu^{3/2}}{g_{\xi}(1+\mu)^{1/2}(1-\mu)} \quad (3.243)$$

независимо от значения  $\eta$ . Для переходной энергии получаем

$$\epsilon_* = \frac{\mu^{1/4}\sqrt{\eta}}{2^{9/4}(1+\mu)^{3/4}}. \quad (3.244)$$

Анализируя условия на верхний предел применимости для  $\epsilon$ , сформулированные в разделе 3.4.4, находим, что достаточно потребовать  $\epsilon \ll \epsilon_2$ , while  $\epsilon_2 \sim \epsilon_*$ . Это означает, что результаты, основанные на универсальном описании (см. раздел 3.4.4) справедливы только в режиме главной асимптотики,  $\epsilon < \epsilon_*$ . Эта асимптотика плотности состояний [формула (3.166)] определяется действием

$$\mathcal{S}_{\text{inst}} = c_d g_{\xi} \frac{(1+\mu)^{3/2+d/16}}{2^{13d/16-3/2}\mu^{3/2+3d/16}} \eta^{d/8} \epsilon^{(8-d)/4}. \quad (3.245)$$

Размер инстантона  $L_E$  [см. формулу (3.214)], взятый на энергии  $E_*$ , соответствующей  $\epsilon_*$ , оказывается того же порядка, что и  $L_0$ . Поэтому условие верхнего предела  $\epsilon < \epsilon_*$ , необходимое для справедливости универсального описания, означает, что размер инстантона больше, чем длина локализации связанного состояния на одной примеси.

Полезно вычислить инстантонное действие (3.245) при  $\epsilon \sim (E_{g2} - E_{g1})/2\Delta$ , что соответствует полуширине примесной зоны. Параметрически этот масштаб энергии совпадает с  $\epsilon_*$ , и действие можно оценить как

$$\mathcal{S}_{\text{inst}}(\epsilon_*) \sim \bar{n}_s V_\xi \left( \frac{1 + \mu}{\mu} \right)^{d/4}. \quad (3.246)$$

Это действие должно быть велика, чтобы теория работала на таких энергиях. Если образец толще, чем  $\xi_0$  (трёхмерный случай,  $d = 3$ ), это условие эквивалентно требованию, что внутри объёма локализации  $L_0^3$  однопримесного связанного состояния [см. формулу (3.152)] должно быть много магнитных примесей. Физически это означает хорошее перекрытие между локализованными примесными состояниями, что необходимо для хорошо определённой примесной зоны.

**Размытие края континуума ( $E_{g3}$ ).** Наконец, рассмотрим флуктуационное размытие края непрерывного спектра,  $E \rightarrow E_{g3} - 0$ . В пределе (3.239) третий, наибольший корень уравнения (B.1) даётся формулой  $e^{\psi_{g3}} \approx 4\mu/\eta$ , и край спектра в теории среднего поля есть

$$\frac{E_{g3}}{\Delta} \approx 1 + \frac{\eta^2}{8\mu^2} \quad (3.247)$$

(заметим, что  $E_{g3}$  немного больше  $\Delta$ ; этот факт можно считать результатом отталкивания уровней между примесной зоной и континуумом). Тогда  $F''(\psi_{g3}) \approx -\eta/2\mu$ .

В пределе нулевой температуры эффективный коррелятор модели СПП (3.170) даётся формулой

$$\frac{f(0)}{\Delta^2 V_\xi} \approx \frac{\eta}{2g_\xi \mu^3} \left( -\eta + \frac{2\pi\mu^2}{1 + \mu + \sqrt{1 - \mu^2}} \right)^2, \quad (3.248)$$

где два вклада в скобках соответствуют вкладам от  $C(0)$  и  $C_\Delta(0)$  соответственно. При не слишком малых  $\mu$  побеждает  $C_\Delta(0)$ , в то время как  $C(0)$  становится главным вкладом в очень узкой области  $\mu^{4/3} \ll \eta^{2/3} \ll \mu \ll 1$ , см. рисунок 3.10(с).

Переходная энергия следует из формулы (3.248):

$$\epsilon_* = \frac{1}{2\mu^2 \eta^2} \left( \eta - \frac{2\pi\mu^2}{1 + \mu + \sqrt{1 - \mu^2}} \right)^4. \quad (3.249)$$

Формула (3.248) определяет главную асимптотику хвоста плотности состояний при  $\epsilon \ll \epsilon_*$ :

$$\mathcal{S}_{\text{inst}} = 2^{4-d/4} c_d \frac{\Delta^2 V_\xi}{f(0)} \epsilon^{(8-d)/4}. \quad (3.250)$$

Дальняя асимптотика при  $\epsilon \gg \epsilon_*$  определяется действием

$$\mathcal{S}_{\text{inst}} = 2^{(18-d)/4} s_d g_\xi \left( \frac{\mu}{\eta} \right)^2 \epsilon^{(6-d)/4}. \quad (3.251)$$

Итог сформулированных в разделе 3.4.4 условий применимости зависит от соотношения между двумя вкладками в скобках в формулах (3.248) и (3.249).

В режиме  $\mu^{4/3} \ll \eta^{2/3} \ll \mu \ll 1$  [очень узкая зелёная полоска на рисунке 3.10(с)], когда главным оказывается первый вклад, достаточно потребовать  $\epsilon \ll \epsilon_2$ , где  $\epsilon_2 \sim \epsilon_* \approx \eta^2/2\mu^2$ . Это означает, что наши результаты, основанные на универсальном описании (см. раздел 3.4.4) применимы только в режиме главной асимптотики,  $\epsilon < \epsilon_*$ . Заметим, что в этом пределе  $\epsilon_2$  имеет тот же порядок, что и безразмерное расстояние между краем спектра  $E_{g3}$  и  $\Delta$ , см. формулу (3.247).

В то же время безразмерный энергетический масштаб  $\eta^2/\mu^2$  не только определяет разницу между  $E_{g3}$  и  $\Delta$ , но также задаёт ширину «когерентного пика» в плотности состояний выше  $E_{g3}$ . В режиме  $\mu^{4/3} \ll \eta^{2/3} \ll \mu \ll 1$  этот масштаб совпадает с  $\epsilon_*$ , и отступив на шаг такого же порядка от  $E_{g3}$  в подщелевую область, мы находим  $\mathcal{S}_{\text{inst}}(\epsilon \sim \epsilon_*) \sim \bar{n}_s A_{3-d} \zeta_0^d \epsilon_*^{-d/4}$ . Требование  $\mathcal{S}_{\text{inst}} \gg 1$  при таких энергиях означает тогда, что число магнитных примесей внутри объёма инстантона велико.

В режиме  $\eta^{2/3} \ll \mu^{4/3}$ , в котором главным оказывается второй вклад в скобках в формулах (3.248) и (3.249) [левая часть розовой области на рисунке 3.10(с)], наиболее сильным условием оказывается  $\epsilon \ll \epsilon_4$ , причём

$$\epsilon_*/\epsilon_4 \sim (\mu^2/\eta)^6 \gg 1. \quad (3.252)$$

Это означает, что универсальное описание становится неприменимым при  $\epsilon \sim \epsilon_4 \ll \epsilon_*$ , когда подщелевые состояния все ещё обусловлены флуктуациями магнитного беспорядка.

Наконец, если  $\eta \sim \mu^2$ , так что два вклада почти компенсируют друг друга [красная линия на рисунке 3.10(с)], наиболее сильным оказывается условие  $\epsilon \ll \epsilon_3$ , while  $\epsilon_* \ll \epsilon_3$ . Это означает, что универсальное описание применимо как для главной асимптотики хвоста (при  $\epsilon < \epsilon_*$ ), так и для дальней (при  $\epsilon > \epsilon_*$ ), обусловленной флуктуациями потенциального беспорядка.

### 3.4.6 Обсуждение

С точки зрения возможного эксперимента ширина хвоста плотности состояний  $\Gamma_{\text{tail}}$ , для которой должно хватить разрешающей способности, зависит от конкретного края спектра. Чтобы получить представление о возможных численных величинах, рассмотрим предел слабых магнитных примесей и слабого спин-флип рассеяния,  $\mu \ll \eta^{2/3} \ll 1$ , когда имеется

только один край спектра,  $E_{g1}$ . Записывая главную асимптотику хвоста плотности состояний [формула (3.236)] в виде

$$\langle \rho(E) \rangle \propto \exp \left[ - \left( \frac{E_g - E}{\Gamma_{\text{tail}}} \right)^{(8-d)/4} \right], \quad (3.253)$$

находим ширину хвоста:

$$\frac{\Gamma_{\text{tail}}}{\Delta} = \left( \frac{6^{d/4} \mu \eta^{1/3}}{2c_d g_\xi} \right)^{4/(8-d)}. \quad (3.254)$$

Для маленькой сверхпроводящей гранулы ( $d = 0$ ) с параметрами, например,  $\mu = 0.1$ ,  $\eta = 0.2$ ,  $g_\xi = 10$  получаем  $\Gamma_{\text{tail}}/\Delta \approx 0.2$ . Поэтому мы ожидаем, что найденные хвосты плотности состояний могут быть измерены с помощью современных экспериментальных методов. Для того, чтобы отличить размытие края спектра от температурного размытия температура должна быть меньше, чем  $\Gamma_{\text{tail}}$ .

### 3.4.7 Заключение

Были вычислены подщелевые хвосты плотности состояний в диффузных сверхпроводниках с точечными магнитными примесями произвольной силы, которые описываются статистикой Пуассона. Резкие края спектра, предсказываемые приближением среднего поля, размываются из-за редких флуктуаций, приводящих к образованию локализованных квази-частичных состояний в классически запрещённых областях. Центральным вопросом в этой ситуации является идентификация флуктуатора, отвечающего за формирование подщелевых состояний. В рассмотренной задаче имеется два вида таких флуктуаторов: (i) случайный потенциал, приводящий к мезоскопическим флуктуациям (потенциальный беспорядок), и (ii) концентрация магнитных примесей (непотенциальный беспорядок).

В рамках подхода репличной сигма-модели размытие резких среднеполевых краёв спектра и возникновение подщелевых состояний описывается инстантонами с нарушенной репличной симметрией. Вблизи  $E_{gi}$  систему инстантонных уравнений (3.207) можно упростить до универсального вида (3.160), стандартного для модели СПП. Следуя общему подходу модели СПП [267], заключаем, что конкуренция между потенциальным и непотенциальным беспорядком регулируется параметром  $\epsilon_*$  [формула (3.165)]: вблизи края, при  $\epsilon \ll \epsilon_*$  подщелевые состояния связаны с флуктуациями непотенциального беспорядка (режим ЛО), в то время как дальняя асимптотика плотности состояний, при  $\epsilon \gg \epsilon_*$ , связана с флуктуациями потенциального беспорядка [252]. В обоих режимах подщелевая плотность состояний найдена с экспоненциальной точностью [формулы (3.166) и (3.167)]. Таким образом получено обобщение предыдущих результатов [216; 251; 252; 256; 261; 267] на случай произвольной функции  $F(\psi)$ , которая определяет плотность состояний в теории среднего поля [см. формулы (3.154) и (3.155)].

В результате вывода эффективной корреляционной функции  $f(q)$  модели СПП показано, что имеются два механизма влияния магнитных примесей (непотенциального беспорядка) на плотность состояний: прямой, через флуктуации параразрушающего параметра [см. формулу (3.171)], и не прямой, через наведённые флуктуации параметра порядка [см. формулу (3.172)]. В разделе 3.4.5 показано, что в зависимости от значений  $\eta$  и  $\mu$ , а также от рассматриваемого края спектра, два механизма могут как усиливать, так и подавлять друг друга. Оба механизма связаны с конечностью силы отдельных примесей и отсутствуют в борновском пределе ( $\mu \rightarrow 0$ ). В последнем случае магнитный беспорядок приводит к размытию плотности состояний через механизм, связанный с возбуждением триплетных мод, чему соответствует крайне малый эффективный параметр  $f(0)$  модели СПП [267]. В противоположность этому для не слишком слабых магнитных примесей [см. формулу (3.169)] непотенциальный беспорядок не столь мал и может успешно конкурировать с потенциальным в соответствии с общей феноменологией модели СПП.

Представленное рассмотрение применимо к трёх- и нульмерным геометриям инстантона. Хотя сведение задачи к эффективной модели СПП справедливо в любой размерности  $d$ , образование подщелевых состояний в модели СПП в одно- и двумерном случаях требует особого рассмотрения в силу наличия множественных инстантонных решений [271].

## Глава 4. Кулоновские эффекты в гранулированных сверхпроводниках в магнитном поле

### 4.1 Диэлектрическое состояние гранулированного сверхпроводника в режиме хорошей межгранульной проводимости

#### 4.1.1 Введение

В недавних экспериментах на сверхпроводящих плёнках был обнаружен гигантский пик низкотемпературного магнитосопротивления, соответствующий росту от нескольких раз (в поликристаллических образцах [28]) до нескольких порядков величины (в аморфных плёнках [282–284]) по сравнению со значением вблизи перехода сверхпроводник-диэлектрик. При дальнейшем увеличении магнитного поля пик сменялся «возвратным» падением магнитосопротивления. Вообще говоря, индуцированная магнитным полем диэлектрическая фаза и связанный с этим переход сверхпроводник-диэлектрик известны уже довольно давно и многие особенности этого явления выяснены (см., например, обзор [285]). Тем не менее полученные гигантские пики магнитосопротивления необычны и требуют теоретического объяснения. Имеются теоретические модели [286; 287], предсказывающие возможное усиление пространственных неоднородностей в аморфных образцах и максимум сопротивления в результате этого эффекта [287]. С другой стороны численно [288] изучалась модель, предполагающая образование в образце сетки сверхпроводящих островков; обнаруженное поведение магнитосопротивления оказывается в качественном согласии с экспериментом.

В данном разделе будет рассмотрена модель поликристаллической и/или гранулированной плёнки, в которой имеет место гигантский пик магнитосопротивления. Сверхпроводящая плёнка в сильном магнитном поле моделируется как сетка чередующихся сверхпроводящих (S) и нормальных (N) гранул. Как будет показано, в режиме хорошей межгранульной проводимости может возникать сверхпроводящая диэлектрическая фаза (SI), в которой плёнка в целом является диэлектриком, но на фоне локальной сверхпроводимости. В реальных системах чередование S и N гранул может возникать в результате разброса размеров гранул, который в свою очередь приводит к разбросу критических полей для них. Магнитное поле, близкое к среднему критическому полю отдельной гранулы, переводит порядка половины гранул в нормальное состояние, таким образом создавая сетку S и N гранул, см. рисунок 4.1. Даже при хорошей межгранульной проводимости эта сетка проявляет особенности, связанные с кулоновской блокадой (аналогично SN контакту [27]), что и приводит к отсутствию проводимости через систему в целом. Изменение магнитного поля приводит к изменению относительной доли S и N гранул.

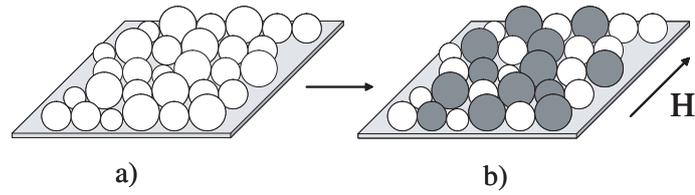


Рисунок 4.1 — (а) Сверхпроводящая плёнка, состоящая из гранул немного разных размеров. (б) Та же гранулированная сетка под действием магнитного поля, близкого к среднему критическому полю отдельной гранулы. Изменение магнитного поля приводит к изменению относительной концентрации сверхпроводящих (белые) и нормальных (серые) гранул.

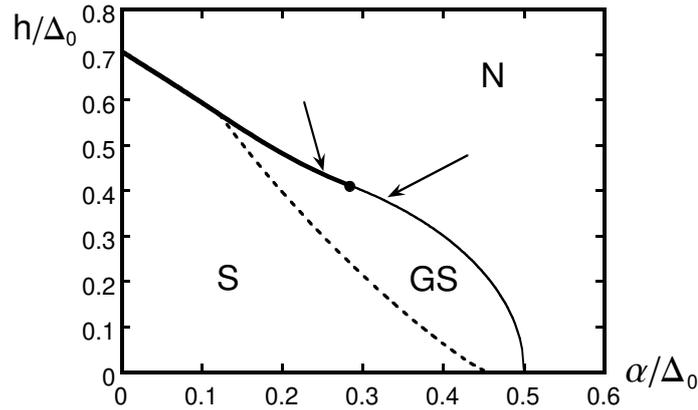


Рисунок 4.2 — Фазовая диаграмма сверхпроводящей гранулы при  $T = 0$  в координатах земановская энергия  $h$  – параразрушающий параметр  $\alpha$ . Штриховая линия разделяет щелевое (GS) и бесщелевое (S) сверхпроводящие состояния. Линии фазового перехода первого и второго рода показаны соответственно толстой и тонкой сплошной линией.

Заметим, что «стандартная» модель сетки идентичных S гранул [289; 290] не может описать образование диэлектрического состояния в режиме хорошей межгранульной проводимости. Зарядовая энергия отдельной гранулы перенормируется [291] до уменьшенного значения  $\tilde{E}_c \sim \Delta/G$ , где  $\Delta$  – параметр порядка отдельной гранулы,  $G$  – туннельный кондактанс границы между гранулами. При  $G \gg 1$  джозефсоновская энергия есть  $E_J \sim G\Delta \gg \tilde{E}_c$ , что приводит к сверхпроводящему (а не к диэлектрическому) состоянию [292; 293].

Будет рассматриваться случай, когда большинство гранул достаточно малы, так что эффект Зеемана по крайней мере того же порядка, как орбитальный, поэтому сверхпроводящий переход в отдельной грануле – первого порядка [294]. Такие образцы являются хорошими кандидатами для наблюдения SI фазы, поскольку приложенное сильное магнитное поле с  $H$ , близкое к клогстоновскому полю  $H_0$ , будет образовывать сильно неоднородную смесь S и N гранул, причём параметр порядка в S гранулах будет близок к значению без магнитного поля,  $\Delta_0$ .

На рисунке 4.2 показана фазовая диаграмма одиночной сверхпроводящей гранулы (вывод дан ниже) в координатах земановская энергия  $h = \mu_B H$  (где  $\mu_B$  – магнетон Бора) – зависящий от размера параразрушающий параметр  $\alpha$  (орбитальный механизм параразрушения) [в сферических гранулах [295]  $\alpha = D(eHa/2c)^2/5$ , где  $a$  – диаметр гранулы,  $D$  – коэффициент диффузии в объёме вещества, из которого сделана гранула]. Меняя размер

гранулы, можно пересечь линию фазового перехода, который при достаточно сильных полях всегда происходит первым родом.

Вспомним теперь известный результат теории перколяции о том, что в задаче узлов на двумерной квадратной решётке (или решётке типа сот) существует диапазон относительных концентраций белых и чёрных узлов, в котором нет перколяции ни по одним, ни по другим [296]. В рассматриваемой модели такое неперколирующее состояние неизбежно приводит к транспорту через последовательность SN контактов; этот факт является важным ингредиентом для объяснения SI фазы. Чтобы упростить вычисления, в то же время учитывая эту качественную особенность, рассмотрим систему с шахматным порядком S и N гранул.

## Основные результаты

Ниже будет показано, что приложенное сильное магнитное поле, близкое к клогстоновскому полю  $H_0 = \Delta_0/\sqrt{2}\mu_B$ , приводит к образованию диэлектрического состояния с щелью в спектре электронных возбуждений

$$\Delta^{(e)} \approx \frac{\Delta_0}{16\sqrt{2}\pi G} \ln \frac{GE_c}{\Delta_0}, \quad (4.1)$$

где  $G$  — туннельная проводимость (в единицах  $2e^2/\hbar$ ),  $E_c$  — зарядовая энергия отдельной гранулы. Это означает, что проводимость ведёт себя как

$$\sigma \sim \exp\left(-\frac{\Delta^{(e)}}{T}\right). \quad (4.2)$$

Формула (4.1) получена в приближении туннелирования между ближайшими соседями.

Чтобы убедиться в том, что туннельными процессами более высоких порядков действительно можно пренебречь, рассматриваются (i) туннелирование электронов между двумя N гранулами через виртуальное состояние в S грануле, и (ii) туннелирование куперовских пар между S гранулами через N гранулу. Малость амплитуд этих процессов обеспечивает устойчивость диэлектрического состояния по отношению к образованию металлического и сверхпроводящего состояния соответственно. Анализ этих поправок показывает, что диэлектрическое состояние устойчиво при  $G < G^*$ , где

$$G^* \sim \left(\frac{\Delta_0}{\delta}\right)^{1/3}, \quad (4.3)$$

а  $\delta$  — среднее расстояние между уровнями в отдельной грануле. Поскольку отношение  $\Delta_0/\delta$  велико (иначе для отдельной гранулы нельзя использовать даже приближение среднего поля),  $G^*$  оказывается больше, чем критическое значение

$$G_c \approx \frac{1}{4\pi} \ln \frac{E_c}{\delta}, \quad (4.4)$$

которое соответствует возникновению сильных кулоновских корреляций в двумерной гранулированной сетке в отсутствие сверхпроводимости [297; 298]. Таким образом в образцах с межгранульной проводимостью в интервале

$$G_c < G < G^* \quad (4.5)$$

диэлектрическое состояние действительно индуцируется локальными сверхпроводящими корреляциями.

### 4.1.2 Фазовая диаграмма сверхпроводящей гранулы

Теперь обсудим аналитический вывод вышеперечисленных результатов. Начнём с обсуждения одиночной гранулы размера меньше, чем длина когерентности. Разность термодинамических потенциалов для такой гранулы в сверхпроводящем и нормальном состоянии может быть записана в виде

$$\Omega = \frac{|\Delta|^2}{\lambda\delta} + \frac{\pi T}{\delta} \sum_{\omega} [\alpha f f^\dagger - 2\tilde{\omega}(g - \text{sgn } \omega) - \Delta f^\dagger - \Delta^* f], \quad (4.6)$$

где  $\lambda$  — константа эффективного электрон-электронного притяжения,  $\tilde{\omega} = \omega - ih$ ,  $\omega$  — фермионные мацубаровские частоты, а  $g$ ,  $f$ ,  $f^\dagger$  — узделевские функции Грина [66], удовлетворяющие условию нормировки  $g^2 + f f^\dagger = 1$ . Варьируя  $\Omega$  по  $f^\dagger$  с учётом условия нормировки, получаем нульмерное уравнение Узделя

$$\alpha g f = \Delta g - \tilde{\omega} f, \quad (4.7)$$

тогда как вариация по  $\Delta^*$  даёт уравнение самосогласования

$$\Delta = \lambda\pi T \sum_{\omega} f, \quad (4.8)$$

(ниже  $\Delta$  берётся вещественным, поэтому  $f = f^\dagger$ ). Линию фазового перехода второго рода можно получить, решая уравнение (4.7) в первом порядке по  $\Delta$  и подставляя получившуюся функцию  $f$  в формулу (4.8). При нулевой температуре,  $T = 0$ , получаем [299]

$$\alpha^2 + h^2 = \frac{\Delta_0^2}{4}. \quad (4.9)$$

Линия фазового перехода второго рода превращается в линию перехода первого рода (см. рисунок 4.2), которую можно найти, решая уравнения (4.7) и (4.8) при условии  $\Omega = 0$ . При  $\alpha = 0$  воспроизводится результат Клогстона [294] для критического поля  $h_0 = \Delta_0/\sqrt{2}$ .

Граница между щелевой (S) и бесщелевой (GS) фазами получается из условия  $\Delta_g = 0$  [23; 295]:

$$\Delta_g = (\Delta^{2/3} - \alpha^{2/3})^{3/2} - h, \quad (4.10)$$

где  $\Delta$  должна быть определена из уравнения (4.8). В щелевом режиме зеемановский вклад выпадает из этого уравнения (поскольку спиновая восприимчивость в этом режиме равна нулю при  $T = 0$ ), поэтому уравнение принимает простой вид [295]

$$\ln \frac{\Delta_0}{\Delta} = \frac{\pi\alpha}{4\Delta}. \quad (4.11)$$

Таким образом при достаточно малых размерах гранулы (малые  $\alpha$ ) бесщелевой области не существует. В дальнейшем будет подразумеваться именно такая ситуация, когда все сверхпроводящие гранулы имеют щель в спектре. Разумность такого предположения подтверждается тем, что фаза сверхпроводящего диэлектрика экспериментально наблюдалась в очень больших магнитных полях порядка клогстоновского предела. В целом бесщелевой режим неблагоприятен для образования SI фазы.

### 4.1.3 Сетка сверхпроводящих гранул

Сетка из S и N гранул описывается фазовым действием [300]

$$S = \sum_i \int d\tau \frac{\dot{\phi}_i^2(\tau)}{4E_c} + S_{ns}, \quad (4.12a)$$

где первый член — кулоновская часть действия, а сумма идёт по всем гранулам. Член  $S_{ns}$  описывает связь между нормальными и сверхпроводящими гранулами:

$$S_{ns} = \frac{\pi G}{2} \sum_{\langle ij \rangle} \int d\tau d\tau' \alpha(\tau - \tau') \left(1 - e^{i\phi_{ij} - i\phi'_{ij}}\right), \quad (4.12b)$$

где суммирование идёт по гранулам, являющимся ближайшими соседями. Здесь разность фаз определена как  $\phi_{ij} \equiv \phi_{ij}(\tau) = \phi_i(\tau) - \phi_j(\tau)$ , а ядро

$$\alpha(\tau) = T^2 \sum_{\omega, \omega'} e^{-i(\omega - \omega')\tau} g_s(\omega) g_n(\omega') \quad (4.13)$$

записано через узаделевские функции Грина S и N гранул  $g_s(\omega)$  и  $g_n(\omega)$ .

В пределе  $G \gg G_c$  член  $S_{ns}$  можно упростить, разложив его до второго порядка по  $\phi_{ij}(\tau)$  и воспользовавшись локальным приближением для ядра  $\alpha$ :

$$S_{ns} = \frac{G g'_s(0)}{4} \sum_{\langle ij \rangle} \int d\tau \phi_{ij}^2(\tau), \quad (4.14)$$

где  $g'_s(0)$  — производная функции  $g$  по  $\omega$ , взятая при  $\omega = 0$ . Её можно найти из формулы (4.7):  $g'_s(0) = (-\alpha + \Delta/f^3(0))^{-1}$ , что в предполагаемом нами предельном случае  $h \approx h_0 \gg \alpha$  сводится к

$$g'_s(0) \approx \frac{2\sqrt{2}}{\Delta_0}. \quad (4.15)$$

В фурье-представлении получаем

$$S = \frac{a^2}{4} \int d\tau \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} [E_c^{-1} + B(1 - E_{\mathbf{q}})] |\dot{\phi}_{\mathbf{q}}|^2, \quad (4.16)$$

где введено обозначение

$$E_{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{a}} \cos \mathbf{q}\mathbf{a}. \quad (4.17)$$

Здесь  $\mathbf{a}$  обозначает векторы решётки, а

$$B = 8Gg'_s(0). \quad (4.18)$$

Интегрирование по квазиимпульсу  $\mathbf{q}$  ведётся по первой зоне Бриллюэна. Формулу (4.16) можно интерпретировать как перенормировку зарядовой энергии:

$$E_c \rightarrow \tilde{E}_c(\mathbf{q}) = \frac{1}{E_c^{-1} + B(1 - E_{\mathbf{q}})}. \quad (4.19)$$

Щель в спектре электронов принимает вид

$$\Delta^{(e)} = \tilde{E}_{00} = a^2 \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \tilde{E}_c(\mathbf{q}), \quad (4.20)$$

где  $\tilde{E}_{00}$  — диагональный элемент матрицы кулоновского взаимодействия  $\tilde{E}_{ij}$ , который равен обратному фурье-образу функции  $\tilde{E}_c(\mathbf{q})$ . С логарифмической точностью получаем

$$\Delta^{(e)} = \frac{1}{8\pi Gg'_s(0)} \ln \frac{GE_c}{\Delta_0}, \quad (4.21)$$

что приводит к формуле (4.1) в случае сильных полей, когда применима формула (4.15). Таким образом  $\Delta^{(e)}$  действительно меньше, чем  $\Delta_0$  при условии  $G \gg G_c$ . Этот факт оправдывает локальное по времени приближение, использованное при выводе формулы (4.14). Отметим, что на языке фазового функционала нет разницы между S и N гранулами. Однако необходимо помнить, что S гранулы имеют «большую» одночастичную щель  $\Delta_g$ . При малых, но ненулевых температурах электронные возбуждения «живут» только на N гранулах, выше щели  $\Delta^{(e)}$ . Несмотря на наличие сверхпроводящей щели, электроны могут туннелировать между двумя N гранулами через виртуальное состояние в S грануле, см. диаграмму на рисунке 4.3(a) (этот процесс более высокого порядка по туннелированию рассмотрен ниже). Поэтому транспорт имеет активационный характер со щелью  $\Delta^{(e)}$ .

Ниже будут рассмотрены туннельные процессы более высокого порядка, которыми мы пока пренебрегали, и будут найдены условия, при которых диаграммы, показанные на рисунке 4.3, несущественны.

## Устойчивость состояния сверхпроводящего диэлектрика по отношению к переходу в нормальное состояние

Для проверки устойчивости SI состояния относительно образования нормального состояния нужно исследовать диаграмму на рисунке 4.3(a). Такие туннельные процессы приводят

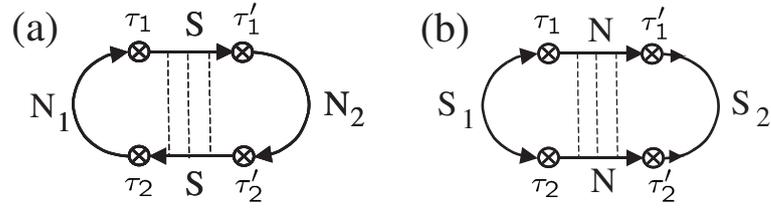


Рисунок 4.3 — Диаграмма (a) описывает связь нормальных гранул ( $N_1$  и  $N_2$ ) через сверхпроводящую гранулу  $S$ . Диаграмма (b) описывает туннелирование куперовской пары между сверхпроводящими гранулами ( $S_1$  и  $S_2$ ) через нормальную гранулу  $N$ . Сплошные (электронные) линии связаны штриховыми линиями, соответствующими примесям — таким образом возникают диффузоны и купероны. Сплошные линии с двумя стрелками обозначают аномальные функции Грина в сверхпроводниках.

к эффективной связи между  $N$  гранулами, которую в силу условия  $\Delta^{(e)} \ll \Delta_0$  можно рассматривать как эффективную туннельную связь с кондактансом [301]

$$G_{ij}^{(n)} = \frac{t_{ij}}{4} G^2 g'_s(0) \delta, \quad (4.22)$$

где безразмерные матричные элементы принимают значения  $t_{ij} = 2$  и  $t_{ij} = 1$  для, соответственно, ближайших и следующих за ближайшими соседями в  $N$  подрешётке. Эта эффективная связь приводит к дополнительному вкладу в фазовое действие

$$S_{nn} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{ij} G_{ij}^{(n)} \int d\tau d\tau' \frac{e^{i\phi_{ij}(\tau) - i\phi_{ij}(\tau')}}{(\tau - \tau')^2}. \quad (4.23)$$

Чтобы найти поправку к кулоновской щели  $\Delta^{(e)}$  в первом порядке по  $S_{nn}$ , достаточно рассмотреть только нормальную подрешётку. Тогда задача становится эквивалентна вычислению поправки к моттовской щели в сетке из  $N$  гранул. Используя результат работы [298], получаем поправку к  $\Delta^{(e)}$ :

$$\delta\Delta^{(e)} = -\frac{4 \ln 2}{\pi} \sum_i G_{0i}^{(n)} (\tilde{E}_{00} - \tilde{E}_{0i}). \quad (4.24)$$

Поскольку  $E_c G \gg \Delta_0$ , с помощью формул (4.19) и (4.24) получаем

$$\delta\Delta^{(e)} = -\frac{2 \ln 2}{\pi} G \delta. \quad (4.25)$$

Сопоставляя формулы (4.1) и (4.25), приходим к выводу, что  $\delta\Delta^{(e)} \ll \Delta^{(e)}$  при условии

$$G \ll \left( \frac{\Delta_0}{\delta} \right)^{1/2}. \quad (4.26)$$

Заметим, что эффективная связь (4.22) также определяет префактор в формуле для проводимости:

$$\sigma = 4e^2 G^2 \delta g'_s(0) \exp\left(-\frac{\Delta^{(e)}}{T}\right), \quad (4.27)$$

где функция  $g'_s(0)$  была определена в формуле (4.15).

## Устойчивость состояния сверхпроводящего диэлектрика по отношению к переходу в сверхпроводящее состояние

Теперь изучим вопрос устойчивости диэлектрического состояния по отношению к установлению глобальной сверхпроводимости образца — это может произойти благодаря джозефсоновской связи S гранул, см. диаграмму на рисунке 4.3(b). Для этого введём эффективный гамильтониан, действующий на куперовские пары и определённый на подрешётке S гранул:

$$\hat{H} = 4 \sum_{ij} \hat{n}_i \tilde{E}_{ij} \hat{n}_j - \frac{J}{2} \sum_{ij} t_{ij} e^{i\varphi_i - i\varphi_j}. \quad (4.28)$$

Этот гамильтониан записан через сверхпроводящую фазу  $\varphi$ , связанную с «нормальной» фазой  $\phi$  соотношением  $\varphi = 2\phi$ . Здесь  $i, j$  принадлежат S подрешётке,  $\hat{n} = -i\partial/\partial\varphi$  — оператор плотности куперовских пар,  $J$  — эффективная джозефсоновская связь S гранул через N гранулу,  $t_{ij} = 2$  и  $t_{ij} = 1$  для ближайших и следующих за ближайшими соседями на S подрешётке соответственно. Диэлектрическое состояние модели (4.28) характеризуется энергетической щелью в спектре возбуждений куперовских пар [302]. Из-за удвоенного заряда куперовских пар в пределе  $J = 0$  эта щель равна

$$\Delta^{(s)} = 4\Delta^{(e)}. \quad (4.29)$$

Джозефсоновская связь  $J$  приводит к подавлению  $\Delta^{(s)}$ , которое в пределе слабой связи может быть найдено с помощью теории возмущений [302]:

$$\delta\Delta^{(s)} = -\frac{J}{2} \sum_i t_{0i} = -6J. \quad (4.30)$$

Условие  $\delta\Delta^{(s)} \ll \Delta^{(s)}$  выполнено, если  $J \ll \Delta^{(s)} \sim \Delta_0/G$ . Диаграмма на рисунке 4.3(b) в случае большой зеемановской энергии,  $h \approx h_0 \gg \alpha$ , даёт<sup>1</sup>

$$J = \frac{G^2\delta}{4} \ln\left(\frac{\Delta_0^2}{h^2} - 1\right), \quad (4.31)$$

и мы получаем оценку сверху для кондактанса (4.3).<sup>2</sup> Можно проверить, что процессы двухэлектронного (андреевского) туннелирования между нормальными гранулами через промежуточную сверхпроводящую также подавлены при том же самом условии.

<sup>1</sup>Кулоновским взаимодействием в нормальной грануле можно пренебречь при  $h \gg \tilde{E}_c \sim \Delta_0/G$ . Заметим, что в противоположном пределе сильного кулоновского взаимодействия,  $\Delta_0 \gg \tilde{E}_c \gg h$ , результат имеет вид  $J = (G^2\delta/2) \ln(\Delta/\tilde{E}_c)$ .

<sup>2</sup>При  $h = h_0 \equiv \Delta_0/\sqrt{2}$  формула (4.31) даёт ноль, поэтому результат для джозефсоновского тока нужно записывать более аккуратно. При малых  $\alpha$  и  $h_1 \equiv h_0 - h \ll h_0$  получается  $J = G^2\delta\sqrt{2}(h_1/\Delta_0 - 2\alpha/3\Delta_0)$ .

#### 4.1.4 Обсуждение

Прокомментируем поведение проводимости в окрестности пика намагниченности. При меньших магнитных полях концентрация сверхпроводящей компоненты возрастает, что приводит к установлению прямой джозефсоновской связи между сверхпроводящими гранулами. Щель для куперовских пар  $\Delta^{(s)}$  убывает и в конце концов оказывается меньше, чем щель для электронов  $\Delta^{(e)}$ . В то же время нет причин для заметного подавления электронной щели из-за джозефсоновской связи. Поэтому ближе к переходу диэлектрик-сверхпроводник (IS) при конечных, но низких температурах, транспорт осуществляется посредством активации *куперовских пар*, а не одноэлектронных возбуждений, следовательно  $\sigma \sim \exp(-\Delta^{(s)}/T)$  при  $T \ll \Delta^{(s)}$ . Таким образом следует ожидать, что сопротивление на IS переходе может быть описано эффективной бозе-моделью аналогично работе [303]. С противоположной стороны пика магнитосопротивления (т.е. при более высоких полях) возрастает доля нормальной компоненты, что приводит к прямой связи между нормальными гранулами. Это приводит [298] к уменьшению электронной щели  $\Delta^{(e)}$  и в конце концов к разрушению диэлектрического состояния.

#### 4.1.5 Заключение

Было рассмотрено образование диэлектрического состояния (соответствующего гигантскому пику магнитосопротивления) в двумерной гранулированной сетке с чередующимися сверхпроводящими и нормальными гранулами. Эта модель может соответствовать реальным гранулированным (или поликристаллическим) системам с разбросом размеров гранул в сильном магнитном поле.

### 4.2 Эффект близости в присутствии кулоновского взаимодействия и магнитного поля

#### 4.2.1 Введение

Если нормальная часть в контакте сверхпроводник–нормальный металл является маленькой гранулой, тогда в дополнение к эффекту близости  $t$  возникают эффекты кулоновского взаимодействия (за добавление электрона на гранулу нужно «заплатить» зарядовую энергию). Эти эффекты наиболее сильно проявляются в туннельных экспериментах, где изме-

ряется дифференциальная проводимость между иглой из нормального металла и гранулой (эта величина пропорциональная так называемой туннельной плотности состояний). Кулоновское отталкивание между туннелирующими электронами уменьшает ток. Это явление известно как туннельная аномалия или, в нульмерном случае, кулоновская блокада [26]. Помимо зарядовой энергии существенным параметром, определяющим важность кулоновской блокады, является  $G$  — проводимость границы между гранулой и сверхпроводящим берегом. В случае нормального берега кулоновская блокада возникает [26] при  $G \ll 1$  (здесь  $G$  измеряется в единицах  $e^2/\hbar$ ) и исчезает [304] при  $G \gg 1$  из-за того, что туннелирующие на гранулу электроны быстро переносятся в берег, таким образом не мешая туннелированию следующего электрона. В то же время, если берег сделан из сверхпроводника, кулоновская блокада сохраняется даже при  $G \gg 1$ , потому что один электрон не может уйти в берег из-за наличия там щели  $\Delta$  в одночастичной плотности состояний. Эта ситуация изучалась Матвеевым и Глазманом [27].

Кроме туннельного тока кулоновское взаимодействие подавляет также и эффект близости. Зарядовая энергия мешает куперовским парам туннелировать на нормальную гранулу и обратно, таким образом разрушая сверхпроводящие корреляции, наведённые в нормальной части контакта. Качественно можно сказать, что кулоновское взаимодействие пытается зафиксировать заряд (нейтральность) нормальной гранулы, в то время как эффект близости фиксирует фазу. Заряд и фаза — сопряжённые переменные, подчиняющиеся принципу неопределённости: они не могут быть зафиксированы одновременно. Полное количественное описание этой конкуренции между эффектом близости и кулоновскими эффектами в контактах между сверхпроводником и нормальным металлом при большой проводимости границы было представлено в работе [305]. Очевидно, что кулоновское взаимодействие подавляет минищель. В данном разделе результаты работы [305] будут расширены: будет рассмотрена задача, в которой есть также внешнее магнитное поле. Магнитное поле можно легко менять в эксперименте, и будет показано, что минищель качественным образом зависит от его силы.

Рассматривается нормальная гранула, связанная со сверхпроводящим берегом туннельным контактом с низкой прозрачностью, но большой полной проводимостью  $G$  (которая определяется произведением прозрачности на число каналов). Предполагается нульмерный предел, т.е. энергия Таулеса  $E_{\text{Th}} = D/d^2$  велика по сравнению со всеми другими характеристическими энергиями системы, включая сверхпроводящую щель  $\Delta$  в береге (здесь  $d$  — характерный размер гранулы). В этом пределе наведённая в результате эффекта близости минищель [206] равна  $E_g = G\delta/4$  при условии  $E_g \ll \Delta$ , где  $\delta$  — среднее расстояние между уровнями в грануле в расчёте на одну проекцию спина.

Наша цель состоит в одновременном учёте эффектов кулоновского взаимодействия и магнитного поля. Предполагаем (аналогично работе [305]), что характерная кулоновская энергия  $E_C = e^2/2C$  лежит в том же диапазоне, что и  $E_g$ :

$$\Delta \gg (E_g, E_C) \gg \delta. \quad (4.32)$$

Ёмкость гранулы  $C$  уже учитывает перенормировку  $C = C_0 + e^2 G/2\Delta$  за счёт виртуального туннелирования квазичастиц [291]. Эта перенормировка обеспечивает выполнение неравенства  $E_C \ll \Delta$  и позволяет рассматривать произвольно малую геометрическую ёмкость  $C_0$ .

Будут рассмотрены относительно слабые магнитные поля  $H$ , которые не влияют на сверхпроводящий берег. Это означает, что  $H$  должно быть много меньше, чем критическое поле берега:  $H \ll H_{c2} = \Phi_0/2\pi\xi_S^2$ , где  $\Phi_0$  — квант потока, а  $\xi_S = \sqrt{D_S/\Delta}$  — сверхпроводящая длина когерентности. Заметим, что поскольку парамагнитный предел гораздо больше, чем  $H_{c2}$ , условие  $H \ll \Delta$  определённо выполнено (здесь и ниже  $H$  выражено в энергетических единицах, т.е. опущен множитель  $g\mu_B/2$ ).

Если нормальная гранула достаточно мала, орбитальным эффектом магнитного поля можно пренебречь. Действительно, с уменьшением  $d$  вызванное орбитальными эффектами критическое поле в сверхпроводнике со щелью  $E_g$  растёт как  $\Phi_0/\xi d$ , где  $\xi = \sqrt{D/E_g}$  — длина когерентности, соответствующая наведённой за счёт эффекта близости сверхпроводимости. В то же время спиновый (зеemanовский) эффект магнитного поля определяет парамагнитный предел с критическим полем порядка  $E_g$  независимо от размера гранулы. Поэтому пренебрежение орбитальным эффектом закономерно для малых гранул с размером  $d \ll \Phi_0/\sqrt{DE_g}$ .

Для одновременного описания эффекта близости и зарядовых эффектов в работе [305] использовалось адиабатическое приближение. Неравенство  $E_C \gg \delta$  обеспечивает разделение энергетических масштабов: электронные степени свободны (содержащиеся в  $Q$ -матрице сигма-модели; см. ниже) оказываются медленными по сравнению с характерной частотой флуктуаций электрического потенциала. Это позволяет вычислить перенормированное (за счёт взаимодействия) значение минищели  $\tilde{E}_g$ . Результат конкуренции между зарядовыми эффектами и эффектом близости определяется отношением зарядовой энергии  $E_C$  и эффективной «джозефсоновской» энергии  $E_J \propto G^2 \delta \ln(\Delta/E_g)$ . Последняя имеет смысл джозефсоновской энергии связи [306] между сверхпроводящим берегом и воображаемым слабым сверхпроводником с параметром порядка  $E_g$ . Имеются два предельных случая для указанного отношения: (i) режим *слабой кулоновской блокады*  $E_J \gg E_C$ , в котором возникает малая отрицательная поправка к минищели в отсутствие взаимодействия  $E_g$ , и (ii) режим *сильной кулоновской блокады*  $E_J \ll E_C$ , в котором минищель экспоненциально подавлена. В разделе 4.2.2 развит самосогласованный подход, позволяющий учесть эффект магнитного поля.

Как показано ниже, магнитное поле не влияет на минищель  $\tilde{E}_g$ , если  $H < \tilde{E}_g/2$ , в то время как в противоположном случае возникают дополнительные решения, приводящие к богатой фазовой диаграмме, описывающей различные возможные значения минищели. Подробное рассмотрение этих решений представлено в разделе 4.2.3.

Туннельная плотность состояний также сильно модифицируется магнитным полем. Эта величина представляет особый интерес, потому что может быть напрямую измерена в эксперименте как дифференциальная проводимость между нормальной гранулой и нормальной иглой туннельного микроскопа. Кулоновское взаимодействие существенно влияет на туннельную плотность состояний: с ростом зарядовой энергии минищель постепенно трансформируется в кулоновскую щель порядка  $E_C$ . Магнитное поле существенно меняет

зависимость туннельной плотности состояний от энергии в результате спиновой поляризации туннелирующих электронов. Этот эффект описан в разделе 4.2.4.

### 4.2.2 Модель

Для рассмотрения задачи будет использована репличная нульмерная сигма-модель [220] в мнимом времени  $\tau$ . Это модель формулируется для вычисления среднего по беспорядку от  $n$ -ой степени ( $n$  — число реплик) стат.суммы  $\langle \mathcal{Z}^n \rangle$ . Стандартное представление стат.суммы [307] записывается через функциональный интеграл  $\mathcal{Z}^n = \int D\Psi^* D\Psi e^{-S[\Psi^*, \Psi]}$  с действием

$$\mathcal{S}[\Psi^*, \Psi] = \sum_{a=1}^n \int_0^{1/T} d\tau \left\{ \int d\mathbf{r} \Psi^+ \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} + H + \hat{\tau}_3 (\xi + U_{\text{imp}}(\mathbf{r})) \right] \Psi + \frac{e^2}{2C} \left[ \int d\mathbf{r} \Psi^+ \hat{\tau}_3 \Psi \right]^2 \right\}. \quad (4.33)$$

Фермионное двухкомпонентное поле  $\Psi = \{\psi_\uparrow, \psi_\downarrow^*\}$  содержит грассмановы (антикоммутирующие) переменные, зависящие от координаты  $\mathbf{r}$ , мнимого времени  $\tau$  и репличного индекса  $a$ . Двухкомпонентная структура  $\Psi$  соответствует представлению Горькова-Нambu, которое необходимо для изучения сверхпроводящих корреляций, наведённых в нормальной грануле за счёт эффекта близости. Остальные обозначения, использованные в формуле (4.33) следующие:  $\xi = (-i\nabla)^2/2m - \mu$ ,  $U_{\text{imp}}(\mathbf{r})$  — потенциал примесей,  $\hat{\tau}_i$  — матрицы Паули в пространстве Горькова-Нambu. Контакт с берегом описывается туннельным членом, который будет добавлен к действию позже.

Действие (4.33) содержит член четвёртого порядка, описывающий кулоновское взаимодействие. Усреднение по беспорядку (предполагается гауссов  $\delta$ -коррелированный беспорядок) порождает ещё один четвертый член, который перемешивает разные реплики. Эти два члена расщепляются преобразованием Хаббарда-Стратоновича с помощью скалярной переменной  $\phi_\tau^a$  и матричного поля  $Q_{\tau\tau'}^{ab}$ . Эти два объекта определены в пространстве реплик и мнимых времён (или мацубаровских энергий).  $Q$  также является матрицей  $2 \times 2$  в пространстве Горькова-Нambu. После преобразования Хаббарда-Стратоновича действие становится квадратичным по  $\Psi$ , и гауссово интегрирование даёт

$$\mathcal{S}[Q, \phi] = \frac{\pi\nu}{4\tau_{\text{imp}}} \mathbf{Tr} Q^2 + \sum_a \int_0^{1/T} d\tau \frac{(\phi_\tau^a)^2}{4E_C} - \mathbf{Tr} \ln \left[ \xi - i\hat{\tau}_3(\varepsilon + iH) - i\phi - \frac{iQ}{2\tau_{\text{imp}}} \right]. \quad (4.34)$$

Здесь  $\varepsilon = i\partial/\partial\tau$  — мацубаровская энергия,  $\tau_{\text{imp}}$  — время свободного пробега. Операция “ $\mathbf{Tr}$ ” включает в себя взятие следа во всех трёх пространствах (реплик, энергий, Горькова-Нambu), а также интегрирование по координатному пространству. Размер гранулы предполагается достаточно малым для того, чтобы можно было учитывать лишь зеэмановский, но не орбитальный эффект магнитного поля,  $d \ll \Phi_0/\sqrt{DE_g}$ . Нульмерное приближение ( $d < \sqrt{D/\Delta}$ ) также означает, что  $Q$  и  $\phi$  не меняются в пространстве, поэтому коммутируют с  $\xi$ .

При выводе модели (4.34) использовалась однородность магнитного поля. Ось квантования спина выбрана вдоль направления поля. В этом представлении взаимодействие с полем имеет только диагональные матричные элементы в пространстве Горькова-Намбу [см. формулу (4.33)]. Поэтому зависящая от спина матрица  $Q$  сводится к блочно-диагональной форме, в которой блоки «спин вверх» и «спин вниз» независимы. Действие (4.34) определяет полную динамику одного из этих блоков («спин вверх»). Действие для второго блока отличается от формулы (4.34) только знаком  $H$ . Поэтому любая физическая величина даётся средним двух значений, вычисленных с действием (4.34) при  $\pm H$ .

Следующий шаг в выводе сигма-модели — разложение логарифма в формуле (4.34) по мягким модам поля  $Q$  [215]. Эти моды сосредоточены на малых энергиях,  $|\varepsilon| < 1/\tau_{\text{imp}}$ , и принадлежат многообразию  $Q^2 = 1$ . На больших энергиях матрица диагональна,  $Q = \hat{\tau}_3 \text{sgn } \varepsilon$ . До разложения логарифма необходимо исключить из  $Q$ -матрицы высокоэнергетические моды, связанные с флуктуациями химического потенциала. Это можно сделать с помощью калибровочного преобразования [308]

$$Q_{\tau\tau'}^{ab} = e^{i\hat{\tau}_3 K_\tau^a} \tilde{Q}_{\tau\tau'}^{ab} e^{-i\hat{\tau}_3 K_{\tau'}^b}, \quad (4.35)$$

при правильном выборе фазы  $K_\tau^a$ . Матрица  $Q_{\tau\tau'}^{ab}$  зависит от двух мнимых времён, причём она *антiperиодична* на отрезке  $[0, 1/T]$ . Калибровочное преобразование не должно нарушать этих граничных условий, поэтому требуем

$$K_{1/T}^a - K_0^a = 2\pi W^a, \quad (4.36)$$

с произвольным целым числом  $W^a$ . Строго говоря, в общем случае необходимо учитывать также полуцелые значения  $W^a$ . Такие значения числа намоток фазы означают, что  $\tilde{Q}$  *непериодична* по отношению к обоим мнимым временам. Полуцелые  $W^a$  отвечают за эффект чётности [301; 309]. Однако этот эффект крайне мал в системах с эффектом близости. Для его наблюдения должны быть выполнены два условия: (i) минищель имеет порядок  $E_C$  и (ii) система находится в режиме сильной кулоновской блокады [305], в которой ярко выражена «кулоновская лестница». Эти два требования несовместны в силу большого значения проводимости контакта  $G$ . Поэтому в дальнейшем рассматриваются только целые значения  $W^a$ .

Предполагая, что  $\tilde{Q}$  содержит только мягкие моды, раскладываем логарифм и получаем [308]

$$\mathcal{S}[\tilde{Q}, \phi] = -\frac{\pi}{\delta} \text{Tr} \left[ ((\varepsilon + iH)\hat{\tau}_3 + \phi - \dot{K})\tilde{Q} \right] + \sum_a \int_0^{1/T} d\tau \left[ \frac{(\phi_\tau^a)^2}{4E_C} + \frac{(\phi_\tau^a - \dot{K}_\tau^a)^2}{\delta} \right]. \quad (4.37)$$

Здесь операция “Tr” означает взятие следа во всех трёх пространствах поля  $Q$ . Последний член в формуле (4.37) возникает от разложения логарифма на энергиях существенно выше  $1/\tau_{\text{imp}}$ . Он соответствует статической сжимаемости электронного газа. Поэтому нужно выбирать  $K$  так, чтобы минимизировать величину  $|\phi - \dot{K}|$ . Электрический потенциал  $\phi_\tau^a$  — вещественное бозонное поле,  $\phi_\tau^a = T \sum_\omega \phi_\omega^a e^{-i\omega\tau}$ . Разделяем нулевую фурье-компоненту на целую и дробную части,  $\phi_{\omega=0}^a = 2\pi(W^a + w^a)$ , и выбираем  $K_\tau^a$  в виде

$$K_\tau^a = C^a + 2\pi T W^a \tau - T \sum_{\omega \neq 0} \frac{\phi_\omega^a}{i\omega} e^{-i\omega\tau}. \quad (4.38)$$

Калибровочное преобразование при таком определении фазы  $K$  было предложено в работе [310]. Заметим, что у нас ещё есть свобода по отношению к добавлению к  $K$  произвольной независимой от времени константы  $C^a$ . Действительно, при это не меняется  $|\phi - \dot{K}|$  и не нарушается условие (4.36). Значение этой константы будет выбрано позже после добавление в действие граничного члена.

Теперь перепишем действие (4.37) через  $K$ , избавившись от потенциала  $\phi$ . При этом функциональное интегрирование по  $\phi$  заменяется на интегрирование по  $K$  с ограничением (4.36) и с суммированием по  $W$  и интегрированием по  $w$  на интервале  $[-1/2, 1/2]$ . Используя неравенство  $E_C \gg \delta$ , получаем

$$\mathcal{S}[\tilde{Q}, K] = -\frac{\pi}{\delta} \text{Tr} \left[ ((\varepsilon + iH)\hat{\tau}_3 + 2\pi T w) \tilde{Q} \right] + 4\pi^2 T \sum_a \left[ \frac{(w^a)^2}{\delta} + \frac{W^a w^a}{2E_C} \right] + \sum_a \int_0^{1/T} d\tau \frac{(\dot{K}_\tau^a)^2}{4E_C}. \quad (4.39)$$

До сих пор мы не учитывали туннелирование электронов из гранулы в сверхпроводящий берег и обратно. Действие (4.39) содержит только один нетривиальный, но тем не менее диагональный в пространстве Горькова-Намбу, член (тот, который содержит  $\hat{\tau}_3$ ). Связь со сверхпроводником даст недиагональные вклады. Для вывода сигма-модели с граничным членом [215] необходимо добавить туннельный член в одночастичный гамильтониан. Этот член затем возникнет в аргументе логарифма в формуле (4.34). Разложение до второго порядка по туннельной амплитуде тогда даст дополнительный вклад в действие:

$$\mathcal{S}_b = -\frac{\pi G}{4} \text{Tr} (Q_1 Q_2) = -\frac{\pi G}{4} \text{Tr} \left( Q_S e^{i\hat{\tau}_3 K} \tilde{Q} e^{-i\hat{\tau}_3 K} \right), \quad (4.40)$$

который должен быть добавлен в формулу (4.39). Вообще говоря, граничный член содержит след произведения  $Q$ -матриц с двух сторон контакта (обозначим их  $Q_1$  и  $Q_2$ ). Вариация полного действия, включающего граничный член, по  $Q$ , приводит к граничным условиям Куприянова-Лукичёва [55]. В частном случае нормальной гранулы, контактирующей со сверхпроводником, выражаем  $Q$  через  $\tilde{Q}$  и  $K$  согласно формуле (4.35). В объёмном сверхпроводнике  $Q$ -матрица принимает значение

$$Q_S = 2\pi \delta^{ab} \delta(\varepsilon - \varepsilon') \hat{\tau}_1. \quad (4.41)$$

Этот вид  $Q_S$  применим при низких энергиях  $\varepsilon \ll \Delta$ . Ниже будут рассмотрены различные свойства нормальной гранулы при энергиях, не превышающих  $E_g$ ; для этих целей достаточно вышеприведённого приближения. Высокоэнергетический вклад в действие (4.39), учитывающий зависимость  $Q_S$  от энергии, приводит к перенормировке ёмкости  $C = C_0 + e^2 G / 2\Delta$ , как это описано в работе [291].

Везде ниже будет предполагаться, что температура лежит в диапазоне

$$\delta \ll T \ll \tilde{E}_g. \quad (4.42)$$

Согласно формуле (4.39) условие  $T \gg \delta$  фиксирует  $w^a = 0$ . Дробная часть числа намоток замерзает при тех же температурах, что и в работе [310]. Однако в отличие от системы нормальных гранул с большой межгранульной проводимостью целая часть числа намоток

может сильно флуктуировать. Причина этого состоит в необычности эффекта кулоновской блокады в сверхпроводящем случае [27], как это обсуждалось во введении.

Параметр  $\tilde{E}_g$ , появившийся в формуле (4.42), задаёт характерный масштаб матрицы  $\tilde{Q}$ . Определение  $\tilde{E}_g$  будет дано ниже [см. формулу (4.48)]. В отсутствие магнитного поля этот параметр был найден в работе [305]. Ограничение на температуру сверху позволяет упростить последующие формулы, заменяя суммы по мацубаровским энергиям на интегралы. Сигма-модельное действие тогда принимает вид

$$\mathcal{S} = -\frac{\pi}{\delta} \text{Tr} \left[ (\varepsilon + iH) \hat{\tau}_3 \tilde{Q} \right] + \sum_a \int d\tau \left\{ \frac{(\dot{K}_\tau^a)^2}{4E_C} - \frac{\pi E_g}{\delta} \text{tr} \left[ \tilde{Q}_{\tau\tau}^{aa} (\hat{\tau}_1 \cos 2K_\tau^a + \hat{\tau}_2 \sin 2K_\tau^a) \right] \right\}, \quad (4.43)$$

где “tr” означает взятие следа в пространстве Горькова-Намбу. В отсутствие магнитного поля и кулоновского взаимодействия действие (4.43) имеет такой же вид, как для сверхпроводящей гранулы с параметром порядка  $E_g = G\delta/4$ ; следовательно в рассматриваемой задаче  $E_g$  играет роль затравочной минищели [206].

В силу условия  $E_C \gg \delta$  применимо адиабатическое приближение [305]. Рассматривая  $K$  как быструю, по сравнению с  $\tilde{Q}$ , переменную, интегрируем действие по  $K$  при фиксированном  $\tilde{Q}$ . Это даёт действие только на  $\tilde{Q}$ , и мы применяем седловое приближение. Простейшая седловая точка действия диагональна по репликам и мацубаровским энергиям, но не в пространстве Горькова-Намбу. Условие  $\tilde{Q}^2 = 1$  можно разрешить с помощью параметризации

$$\tilde{Q}_{\varepsilon\varepsilon'}^{ab} = 2\pi\delta^{ab}\delta(\varepsilon - \varepsilon') [\hat{\tau}_3 \cos \theta_\varepsilon^a + \hat{\tau}_1 \sin \theta_\varepsilon^a]. \quad (4.44)$$

Здесь  $\theta_\varepsilon$  — стандартный узаделевский угол [65; 311]. В общем случае матрица  $\tilde{Q}$  также может содержать компоненту  $\hat{\tau}_2$ , которая не написана в формуле (4.44). Этот член всегда можно устранить соответствующим выбором константы  $C^a$  в определении (4.38) фазы  $K$ .

Подставляя анзац (4.44) в формулу (4.43), получаем, что действие для  $K^a$  локально по мнимому времени. Это позволяет описать динамику  $K^a$  следующим гамильтонианом:

$$\hat{H}^a = E_C \left( -\frac{\partial^2}{\partial K^2} - 2q^a \cos 2K \right), \quad (4.45)$$

где параметр  $q^a$  определён как

$$q^a = \frac{\pi E_g}{2E_C\delta} \text{tr}(\hat{\tau}_1 \tilde{Q}_{\tau\tau}^{aa}) = \frac{E_g}{2E_C\delta} \int_{-\Delta}^{\Delta} d\varepsilon \sin \theta_\varepsilon^a. \quad (4.46)$$

Логарифмическую расходимость при интегрировании по  $\Delta$  необходимо обрезать, поскольку использованное для  $Q_S$  выражение (4.41) применимо только при  $\varepsilon \ll \Delta$ . Динамика  $K$  ограничена условием (4.36). Суммирование по всем целым  $W^a$  приводит к периодическим граничным условиям на собственные функции гамильтониана (4.45) на отрезке  $[0, 2\pi]$ . Этот гамильтониан обладает важной симметрией: он коммутирует с преобразованием  $K \mapsto K + \pi$ . Это связано с сохранением чётности числа электронов на грануле. Оператор числа электронов есть  $\hat{n} = -i\partial/\partial K$ . В этом представлении первый член в гамильтониане (4.45) диагонален, тогда как второй может менять  $n$  только на  $\pm 2$ . Это свойство является следствием механизма

андреевского отражения, при котором заряд меняется на  $\pm 2e$ . Ещё одна симметрия гамильтониана (4.45) — инверсия  $K \mapsto -K$ . Она связана с симметрией частица-дырка. Эту симметрию можно устранить с помощью внешнего затвора, но этот случай мы рассматривать не будем.

Адиабатическое приближение опирается на тот факт [305], что характерные частоты флуктуаций фазы  $K$  много больше, чем  $\tilde{E}_g$ . При сделанных предположениях относительно температуры [см. формулу (4.42)]  $K$  заморожено в основном состоянии гамильтониана (4.45) с энергией  $E_0(q) = E_C a_0(q)$ , где  $a_0(q)$  — нулевое характеристическое значение Матьё. Эффективное действие для матрицы  $\tilde{Q}$  через угол  $\theta$  записывается как

$$\mathcal{S} = \sum_a \int d\tau \left[ -\frac{1}{\delta} \int d\varepsilon (\varepsilon + iH) \cos \theta_\varepsilon^a + E_0(q^a) \right]. \quad (4.47)$$

Тот факт, что действие представляется в виде суммы независимым одинаковых вкладов от каждой реплики, связан с тривиальным репличным анзацем (4.44). Следующим шагом применяется седловое приближение. Особый вид действия (4.47) означает, что седловое значение угла  $\theta$  не зависит от репличного индекса. Используя этот факт, в дальнейшем не будет писать репличные индексы.

Варьирование действия (4.47) даёт  $\text{tg } \theta_\varepsilon = \tilde{E}_g / (\varepsilon + iH)$ , где константа  $\tilde{E}_g$  определяется системой самосогласованных уравнений

$$\frac{\tilde{E}_g}{E_g} = -\frac{1}{2E_C} \frac{\partial E_0}{\partial q}, \quad q = \frac{E_g \tilde{E}_g}{E_C \delta} \ln \frac{2\Delta}{\Omega(\tilde{E}_g, H)}. \quad (4.48)$$

Здесь введено обозначение

$$\Omega(\tilde{E}_g, H) = \max(\tilde{E}_g, H) + \sqrt{\max^2(\tilde{E}_g, H) - \tilde{E}_g^2}. \quad (4.49)$$

Последнее из уравнений (4.48) получено из формулы (4.46), в которую подставлено найденное значение угла  $\theta_\varepsilon$ .

Параметр  $\tilde{E}_g$  имеет смысл перенормированной минищели в термодинамической плотности состояний для одной спиновой подзоны. Сама термодинамическая плотность состояний (для спина вверх) получается из  $\tilde{Q}$  после аналитического продолжения на вещественные энергии  $E$  следующим образом:

$$\rho_\uparrow(E) = \frac{1}{\delta} \text{Re tr } \hat{\tau}_3 \tilde{Q}_{\varepsilon\varepsilon} \Big|_{\varepsilon \rightarrow -iE+0}. \quad (4.50)$$

В результате она принимает обычный БКШ вид, сдвинутый на  $H$  (тогда как плотность состояний  $\rho_\downarrow$  для спина вниз сдвинута на  $-H$ ). Полная плотность состояний равна

$$\rho(E) = \frac{1}{2} \left[ \rho^{\text{BCS}}(E + H) + \rho^{\text{BCS}}(E - H) \right], \quad (4.51)$$

$$\rho^{\text{BCS}}(E) = \frac{2}{\delta} \text{Re } \cos \theta_\varepsilon \Big|_{\varepsilon \rightarrow -iE+0} = \frac{2}{\delta} \text{Re} \frac{|E|}{\sqrt{E^2 - \tilde{E}_g^2}}. \quad (4.52)$$

Итак, мы нашли седловое решение в тривиальном по репликами секторе сигма-модели. Это эквивалентно прямому вычислению свободной энергии системы, усреднённой по беспорядку. Действительно, вид действия (4.47) означает, что средняя стат.сумма подчиняется

тождеству  $\langle \mathcal{Z}^n \rangle = \langle \mathcal{Z} \rangle^n$ . Используя это тождество и полагая число реплик равным 1, для свободной энергии находим  $\mathcal{F} = -T \langle \ln \mathcal{Z} \rangle = -T \ln \langle \mathcal{Z} \rangle = T \mathcal{S}|_{n=1}$ . Наконец, подставляя седловое решение  $\theta_\varepsilon$  в действие (4.47) и замечая, что интегрирование по мнимому времени выдаёт множитель  $1/T$  в этом выражении, находим

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{\delta} \int \frac{d\varepsilon(\varepsilon + iH)^2}{\sqrt{(\varepsilon + iH)^2 + \tilde{E}_g^2}} + E_0(q). \quad (4.53)$$

Эта свободная энергия имеет смысл функционала Гинзбурга-Ландау, причём  $\tilde{E}_g$  играет роль параметра порядка. Интеграл в вышеприведённом выражении содержит расходящийся вклад от высоких энергий. Как и в стандартной теории сверхпроводимости, избавляемся от этой расходимости, вычитая значение свободной энергии «нормального» состояния, т.е. состояния с  $\tilde{E}_g = 0$ . Тогда результат интегрирования принимает вид

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_N = \frac{\tilde{E}_g^2}{\delta} \left[ \ln \frac{2\Delta}{\Omega(\tilde{E}_g, H)} - \frac{1}{2} \right] + \frac{H}{\delta} \left( H - \sqrt{\max^2(\tilde{E}_g, H) - \tilde{E}_g^2} \right) + E_0(q). \quad (4.54)$$

Уравнение самосогласования (4.48) можно получить, варьируя этот функционал свободной энергии. Решение уравнений (4.48) даёт экстремумы свободной энергии; в частности эти уравнения всегда имеют тривиальное решение  $\tilde{E}_g = 0$ . Седловое приближение применимо, а флуктуации малы при условии  $\tilde{E}_g \gg \delta$  [312].

### 4.2.3 Термодинамическая минищель

В общем случае самосогласованную систему (4.48) не получается решить аналитически. Тем не менее энергию основного состояния гамильтониана (4.45) можно явно найти в двух предельных случаях малого и большого  $q$  (эти два предела означают предел сильной и слабой кулоновской блокады соответственно).

#### Сильная кулоновская блокада

В этом пределе  $q \ll 1$ , т.е. кулоновская энергия  $E_C$  много больше, чем эффективная джозефсоновская энергия  $E_J$ . Фаза  $K$ , определяемая гамильтонианом (4.45), делокализована и сильно флуктуирует. В то же время заряд гранулы почти фиксирован. Кулоновская блокада оказывается гораздо сильнее эффекта близости, и минищель экспоненциально подавлена.

При  $q \ll 1$  потенциальную энергию в гамильтониане (4.45) можно рассматривать как возмущение. Теория возмущений даёт энергию основного состояния  $E_0(q) = -E_C q^2/2$ . После этого уравнение самосогласования (4.48) принимает вид

$$\frac{2E_C \delta}{E_g^2} = \ln \frac{2\Delta}{\Omega(\tilde{E}_g, H)}. \quad (4.55)$$

Ненулевые решения этого уравнения существуют только если магнитное поле меньше следующего значения:

$$H_c^S = 2\Delta \exp\left(-\frac{2E_C\delta}{E_g^2}\right). \quad (4.56)$$

Величина  $\Omega(\tilde{E}_g, H)$  определена в формуле (4.49) и имеет разные значения для  $H$  меньше и больше  $\tilde{E}_g$ . В результате при  $H < H_c^S$  формула (4.55) имеет два ненулевых решения, соответствующих этим двум случаям:

$$\tilde{E}_g = \begin{cases} H_c^S & \text{at } H < H_c^S, \\ \sqrt{H_c^S(2H - H_c^S)} & \text{at } H_c^S/2 < H < H_c^S. \end{cases} \quad (4.57)$$

Здесь условия на две ветви,  $H < \tilde{E}_g(H)$  и  $H > \tilde{E}_g(H)$ , записаны через фиксированное значение  $H_c^S$ . Двухзначная структура всего решения в этом представлении становится наглядной.

Первая ветвь решения (4.57), которую мы будем называть целевым (S) состоянием, соответствует локальному минимуму свободной энергии (4.54), в то время как вторая ветвь соответствует максимуму. Бесцелевое (N) состояние  $\tilde{E}_g = 0$  [это тривиальное решение уравнения (4.55) существует при любом  $H$ ] минимизирует свободную энергию, если  $H > H_c^S/2$  и максимизирует её в противном случае. Поля  $H_c^S$  и  $H_c^N = H_c^S/2$  соответствуют абсолютной неустойчивости S и N состояний соответственно. В интервале  $H_c^N < H < H_c^S$  два минимума свободной энергии существуют одновременно. При некотором значении магнитного поля  $H_c^I$ , лежащем в этом интервале, энергии двух состояний сравниваются. Это точка фазового равновесия, в которой возникает фазовый переход первого рода. Используя свободную энергию (4.54), находим это критическое поле:

$$H_c^I = \frac{H_c^S}{\sqrt{2}}. \quad (4.58)$$

Зависимость  $\tilde{E}_g(H)$  показана на рисунке 4.4.

Механизм, приводящий к фазовому переходу первого рода между целевым и бесцелевым состояниями, точно такой же, как в объёмном ферромагнитном сверхпроводнике [1]. Обменное поле ферромагнетика играет такую же роль, как магнитное поле в нашем случае. Соответствие становится полным, если взять константу сверхпроводящего взаимодействия  $\lambda = E_g^2/2E_C\delta$ , параметр порядка  $\tilde{E}_g$  и заменить дебаевскую обрезку  $\omega_D$  на  $\Delta$  [см. формулу (4.56)]. Тогда критическое магнитное поле  $H_c^I$ , при котором происходит фазовый переход первого рода, становится просто критическим полем Клогстона-Чандрасекара [294; 313].

## Слабая кулоновская блокада

В противоположно пределе слабой кулоновской блокады  $q$  велико, что означает, что зарядовая энергия  $E_C$  много меньше эффективной джозефсоновской энергии  $E_J$ . Потенциал в форме косинуса в гамильтониане (4.45) локализует фазу  $K$  вблизи значений 0 и  $\pi$ . В

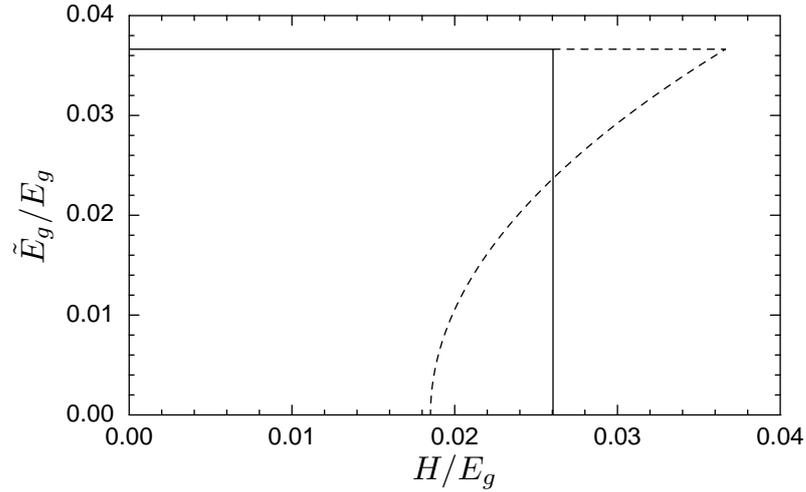


Рисунок 4.4 — Зависимость  $\tilde{E}_g(H)$  в пределе сильной кулоновской блокады. Сплошная линия соответствует значению  $\tilde{E}_g$ , при котором достигается абсолютный минимум свободной энергии. Фазовый переход первого рода имеет место при  $H = H_c^I$ , при этом  $\tilde{E}_g$  скачком обращается в ноль. Штриховая линия показывает решения уравнений самосогласования (4.48). Эти дополнительные решения существуют только в интервале  $H_c^N < H < H_c^S$ , в котором сосуществуют щелевое и бесщелевое состояния. Кривые построены при  $E_C\delta/E_g^2 = 4.5$ ,  $G = 40$ ,  $\Delta/E_g = 150$ .

то же время флуктуации заряда оказываются сильными. Эффект близости побеждает кулоновскую блокаду, и минищель лишь немного подавляется по сравнению с затравочным значением  $E_g$ .

Чтобы решить уравнения (4.48), приблизим глубокие минимумы потенциала  $\cos 2K$  одномерным осциллятором с энергией основного состояния  $E_0(q) = -2E_C(q - \sqrt{q})$ . Тогда, решая уравнения (4.48), находим малую поправку к затравочной минищели:

$$\tilde{E}_g = E_g - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_C\delta}{\ln(2\Delta/\Omega(E_g, H))}}. \quad (4.59)$$

Эта зависимость опять качественно различна для магнитного поля выше и ниже  $\tilde{E}_g$  (что примерно равно  $E_g$ ). При малых магнитных полях минищель не зависит от  $H$ . Состояние с независимой от поля минищелью, совпадающей со значением  $\tilde{E}_g(0)$  для нулевого поля, аналогично S состоянию в режиме сильной кулоновской блокады. При более высоких полях  $\tilde{E}_g$  подавляется логарифмически. Это состояние будем обозначать S'. Рассматривать окрестность точки  $H = \tilde{E}_g$  нужно более аккуратно. Оказывается, что фазовый переход первого рода, найденный в противоположном пределе сильной кулоновской блокады, сохраняется и здесь. Однако теперь минищель  $\tilde{E}_g$ , будучи независимой от магнитного поля при малых  $H$ , испытывает очень слабое скачкообразное убывание, и только потом непрерывно уменьшается. Это означает переход первого рода S–S'. Зависимость  $\tilde{E}_g(H)$  показана на рисунке 4.5, где вставка показывает более подробно поведение вблизи точки  $H = \tilde{E}_g(0)$ .

Отталкиваясь от свободной энергии (4.54), можно вычислить все детали фазового перехода первого рода в пределе  $q \gg 1$ , который теперь происходит между двумя разными

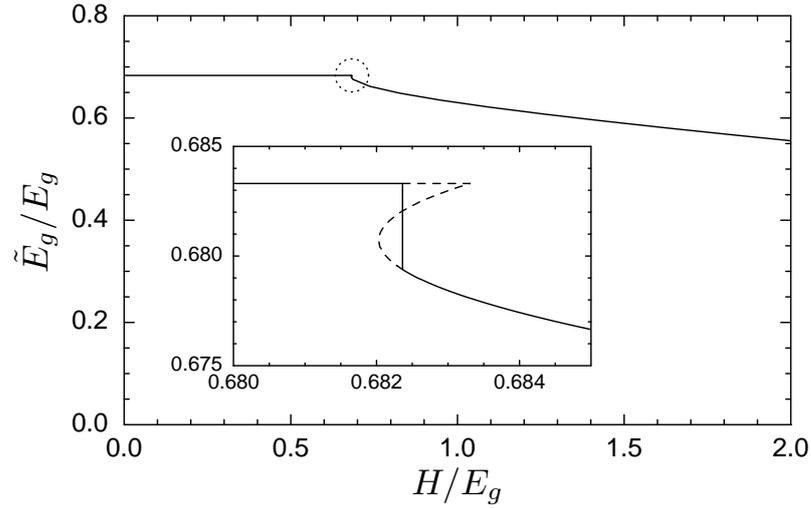


Рисунок 4.5 — Зависимость  $\tilde{E}_g(H)$  в пределе слабой кулоновской блокады. Вставка показывает увеличенную окрестность точки  $H = \tilde{E}_g(0)$ , которая обведена окружностью на основном графике. Как и на рисунке 4.4, сплошная линия показывает значение  $\tilde{E}_g$ , при котором достигается абсолютный минимум свободной энергии, а штриховые линии соответствуют дополнительным решениям уравнений самосогласования (4.48). Кривые построены при  $E_C\delta/E_g^2 = 1.5$ ,  $G = 40$ ,  $\Delta/E_g = 150$ .

щелевыми состояниями. Магнитное поле  $H_c^S$ , при котором S состояние оказывается абсолютно неустойчиво, равно  $H_c^S = \tilde{E}_g(0)$ . Поле абсолютной неустойчивости состояния S' обозначим  $H_c^{S'}$ . Тогда

$$H_c^{S'} = \tilde{E}_g(0) - \frac{E_g}{2}x, \quad H_c^I = \tilde{E}_g(0) - \frac{E_g}{3}x, \quad (4.60)$$

$$x = \frac{E_C\delta}{16E_g^2 \ln^3(2\Delta/E_g)}, \quad (4.61)$$

где  $\tilde{E}_g(0)$  берётся из формулы (4.59). Параметр  $x$ , определяющий масштаб области сосуществования фаз, линеен при малых  $E_C$ , но содержит очень малый численный коэффициент. Именно поэтому эта область очень мала на рисунке 4.5.

Когда происходит фазовый переход первого рода, свободная энергия имеет два минимума с одинаковыми энергиями. Каков энергетический барьер между этими двумя минимумами? Этот барьер также численно мал и равен  $2E_g^2x^{3/2}/3\delta$ . Очевидно, что когда высота барьера оказывается сравнимой с температурой, флуктуации размывают переход первого рода. Тогда вместо фазового перехода между состояниями S и S' происходит кроссовер.

Наконец, достаточно большое магнитное поле (за рамками представленной модели) подавляет сверхпроводимость в береге. В отсутствие кулоновских эффектов минищель сохраняется, пока берег остаётся сверхпроводящим, и исчезает при критическом поле берега  $H_{c2}$ . Если при  $H = 0$  имеет место слабая кулоновская блокада, то минищель исчезнет при поле лишь немного меньшем, чем  $H_{c2}$ .

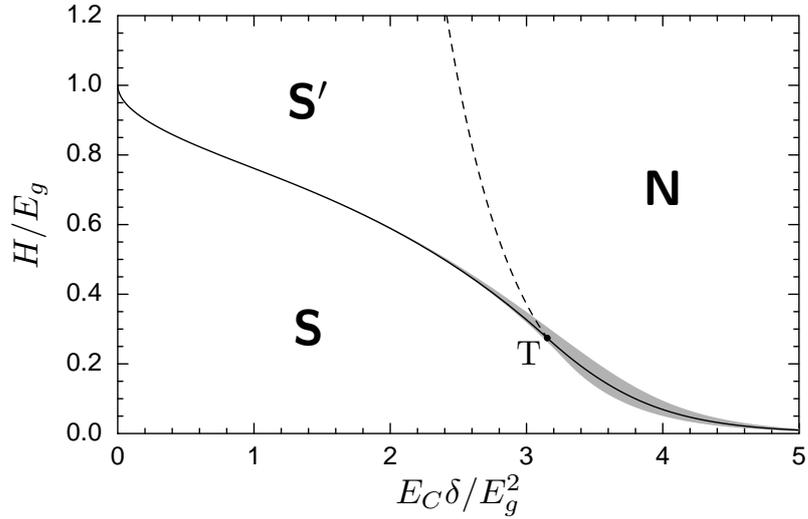


Рисунок 4.6 — Фазовая диаграмма  $E_C$ – $H$ . Сплошная линия показывает фазовый переход первого рода из S в N либо S' состояние. Область сосуществования фаз затенена. Штриховая линия показывает S'–N переход второго рода. Все три фазы находятся в равновесии в тройной точке T. Подробная диаграмма в окрестности тройной точки показана на рисунке 4.7. Диаграмма построена при  $G = 40$ ,  $\Delta/E_g = 150$ .

### Промежуточный случай

Теперь обсудим промежуточный режим, в котором эффекты кулоновского взаимодействия сравнимы с эффектом близости. На рисунке 4.6 представлена фазовая диаграмма в плоскости  $E_C$ – $H$ . Эта диаграмма покрывает все предельные случаи, рассмотренные выше, а также промежуточный случай.

Выше уже был исследован фазовый переход первого рода между S и N состояниями (при больших  $E_C$ ), а также между S и S' состояниями (при малых  $E_C$ ). В то же время линию абсолютной неустойчивости S фазы можно найти из результатов работы [305], полученных при  $H = 0$ . Действительно, при малых магнитных полях  $H < \tilde{E}_g$  уравнения самосогласования (4.48) не содержат  $H$ . Следовательно миничель не зависит от магнитного поля (S состояние) и совпадает со значением при нулевой поле  $\tilde{E}_g(0)$ . Максимально возможное магнитное поле для этого состояния есть  $H_c^S = \tilde{E}_g(0)$ . Очевидно, этот результат справедлив при любом значении  $q$ . Зависимость  $\tilde{E}_g(E_C)$  в отсутствие магнитного поля изучалась в работе [305].

Теперь рассмотрим фазовый переход второго рода S'–N и окрестность тройной точки, в которой все три фазы находятся в равновесии. Линию перехода S'–N можно найти аналитически. Любое решение уравнений самосогласования (4.48) означает экстремум свободной энергии:  $\partial\mathcal{F}/\partial\tilde{E}_g = 0$ . Нормальное состояние ( $\tilde{E}_g = 0$ ) удовлетворяет этому условию всегда. Нормальное состояние устойчиво при условии  $\partial^2\mathcal{F}/\partial\tilde{E}_g^2 > 0$ . Вычисляя вторую производную свободной энергии (4.54) и переходя к пределу  $\tilde{E}_g \rightarrow 0$ , находим критическое магнитное поле:

$$H_c^N = \Delta \exp(-2E_C\delta/E_g^2). \quad (4.62)$$

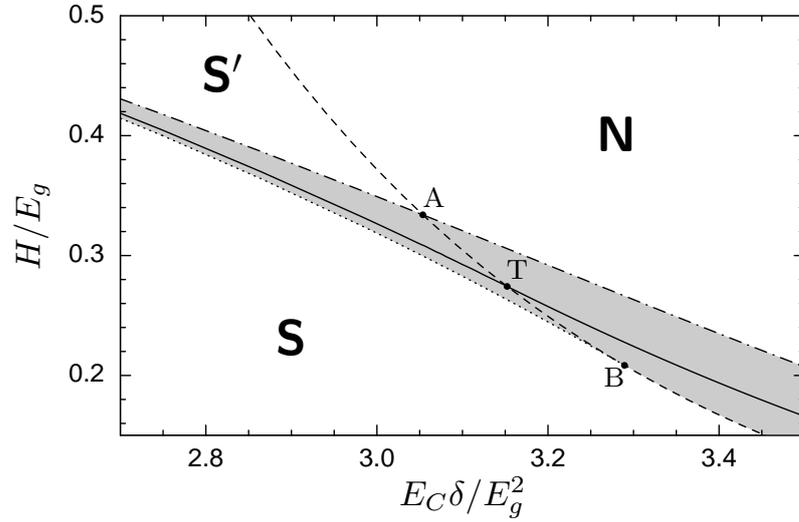


Рисунок 4.7 — Фазовая диаграмма вблизи тройной точки. Сплошная линия — переход первого рода из S в N состояние для  $E_C$  выше тройной точки и из S в S' в остальных случаях. Штриховая линия соответствует критическому полю  $H_c^N$ , которое даётся формулой (4.62). Пунктирная линия обозначает абсолютную неустойчивость фазы S' при поле  $H_c^{S'}$ . Эта линия оканчивается точкой, обозначенной B. Штрих-пунктирная линия — это  $H_c^S$ . Она пересекается с  $H_c^N$  в точке A. Область возможных метастабильных состояний затенена. Диаграмма построена при  $G = 40$ ,  $\Delta/E_g = 150$ .

Это критическое поле определяет границу нормальной области на фазовой диаграмме рисунке 4.6. Что происходит непосредственно ниже этой границы? Вторая производная свободной энергии становится отрицательной. Если при этом четвёртая производная положительна, то свободная энергия имеет минимум при некотором малом  $\tilde{E}_g$ . Это переход второго рода между N и S' состояниями. В противном случае, если четвёртая производная также отрицательна, то ниже  $H_c^N$  минимум при малом  $\tilde{E}_g$  пропадает, и единственное устойчивое состояние имеет конечное значение миницели  $\tilde{E}_g(0)$ . Таким образом  $H_c^N$  — это поле абсолютной неустойчивости нормального состояния для фазового перехода первого рода N–S. В пределе сильного кулоновского взаимодействия критическое поле (4.62) совпадает с  $H_c^N = H_c^S/2$ , которое было найдено в разделе 4.2.3.

Точка на критической линии (4.62), в которой четвёртая производная свободной энергии меняет знак, обозначена B (см. рисунок 4.7). Чтобы найти эту точку, нужно использовать более точное значение энергии основного состояния гамильтониана (4.45), учитывающее поправку четвёртого порядка теории возмущений:  $E_0(q) = E_C(-q^2/2 + 7q^4/128)$ . Тогда, взяв четвёртую производную свободной энергии (4.54), получаем уравнение  $H_B^2 = E_g^4/7E_C\delta$ , которое вместе с уравнением (4.62) определяет положение точки B.

На рисунке 4.7 показана увеличенная окрестность тройной точки. Кривая  $H_c^N$  показана штриховой линией. Линия абсолютной неустойчивости S' состояния  $H_c^{S'}$  (пунктирная линия на рисунке 4.7) оканчивается точкой B. Действительно, фаза S' с произвольно малым  $\tilde{E}_g$  существует только если четвёртая производная свободной энергии положительна. Ещё одна характерная особенность фазовой диаграммы, точка A, — это точка, в которой переход

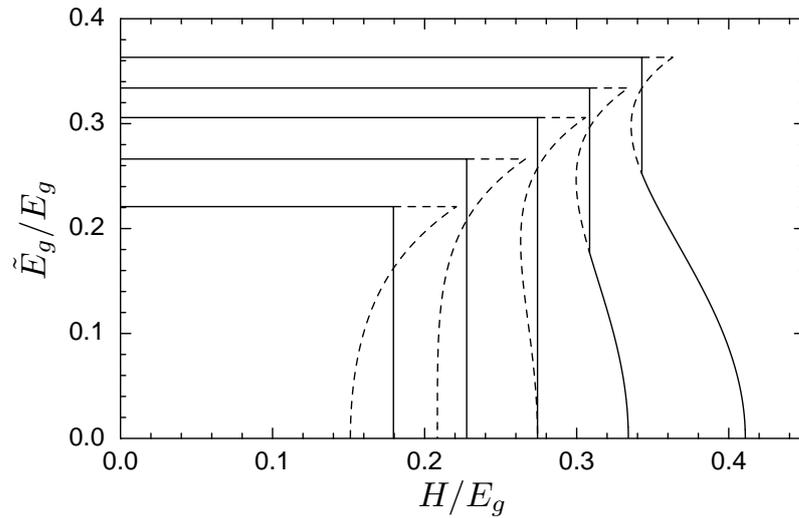


Рисунок 4.8 — Минищель в зависимости от магнитного поля (сплошные линии) для нескольких значений  $E_C$  вблизи тройной точки. Штриховая линия показывает дополнительные решения уравнений самосогласования (4.48). Слева направо кривые соответствуют значениям  $E_C\delta/E_g^2 = 3.45, 3.289$  (точка В),  $3.152$  (точка Т),  $3.054$  (точка А),  $2.95$ . Другие параметры:  $G = 40, \Delta/E_g = 150$ .

второго рода N-S' и абсолютная неустойчивость S состояния имеют место одновременно. Наконец, между точками А и В на линии  $H_c^N$  лежит тройная точка Т. Это точка пересечения линий переходов первого и второго рода. В ней все три фазы имеют одинаковые энергии.

Ещё одна иллюстрация сложной фазовой структуры вблизи критической точки даётся рисунком 4.8, на котором показаны несколько зависимостей  $\tilde{E}_g(H)$ . Самая левая кривая соответствует  $E_C$  выше точки В. Качественно этот случай похож на предел сильной кулоновской блокады (см. рисунок 4.4). Следующая кривая построена при  $E_C$ , соответствующем точке В. Она выглядит похоже, но неустойчивое решение (штриховая линия) обращается в ноль как корень не второй, а четвёртой степени от магнитного поля. Следующая кривая соответствует точке Т. Переходы первого и второго рода (сплошная и штриховая кривые) имеют место при одном и том же магнитном поле. Вторая справа кривая соответствует точке А [ $H_c^N = \tilde{E}_g(0)$ ]. Самая правая кривая иллюстрирует ситуацию, в которой  $E_C$  лежит ниже точки А. Она похожа на режим слабого взаимодействия (см. рисунок 4.5). Минищель обращается в ноль непрерывным образом при  $H_c^N$ . При дальнейшем уменьшении  $E_C$  это критическое поле экспоненциально растёт и быстро выходит за рамки применимости рассматриваемой модели.

#### 4.2.4 Туннельная плотность состояний

Измерение термодинамической плотности состояний экспериментально затруднено из-за малого размера образца. В этом случае более актуальны туннельные измерения. Непосредственно измеряемая величина — это туннельный ток, который зависит от напряжения,

приложенного между системой и иглой туннельного микроскопа. Из измеренного тока извлекается дифференциальная проводимость  $dI/dV$ , которая пропорциональна локальной *туннельной* плотности состояний на энергии  $eV$ . Последняя определяется мнимой частью одночастичной функции Грина. В отсутствие взаимодействия термодинамическая плотность состояний совпадает с туннельной. Однако во взаимодействующей системе функция Грина «одета» взаимодействием, что приводит к различию двух величин. На языке сигма-модели термодинамическая плотность состояний определяется матрицей  $\tilde{Q}$  [см. формулу (4.50)], в то время как туннельная плотность состояний даётся аналогичным выражением, но с «одетой» матрицей  $Q$ .

Дифференциальная проводимость непосредственно даёт туннельную плотность состояний только при нулевой температуре. Если  $T > 0$ , туннелирующие электроны имеют разброс энергий порядка  $T$ . Формула для  $dI/dV$  тогда имеет вид

$$\frac{dI}{dV} = \frac{\delta}{2R_T} \int dE \frac{\rho^{\text{tun}}(E + eV)}{4T \cosh^2(E/2T)}, \quad (4.63)$$

где  $R_T$  — туннельное сопротивление между иглой и гранулой. Чтобы измерить сложную структуру туннельной плотности состояний, обусловленную зеемановским расщеплением, температура должна быть достаточно низкой:

$$T \ll \min(\tilde{E}_g, H). \quad (4.64)$$

Для нахождения туннельной плотности состояний для одной спиновой проекции (спин вверх), нужно аналитически продолжить выражение

$$\rho_{\uparrow}^{\text{tun}}(\varepsilon) = \frac{1}{\delta} \text{tr} \langle \hat{\tau}_3 Q_{\varepsilon\varepsilon} \rangle = \frac{1}{\delta} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\varepsilon\tau} \text{tr} \langle \hat{\tau}_3 e^{i\hat{\tau}_3 K\tau} \tilde{Q}_{\tau 0} e^{-i\hat{\tau}_3 K_0} \rangle \quad (4.65)$$

на вещественные энергии,  $i\varepsilon \rightarrow E + i0$ , и взять его вещественную часть. Угловые скобки означают усреднение с весом  $e^{-S[\tilde{Q}, K]}$ , где действие даётся формулой (4.43). Туннельная плотность состояний для спина вниз тогда получается изменением знака магнитного поля. Адиабатическое и седловое приближения позволяют взять  $\tilde{Q}$  в виде (4.44) и усреднить по  $K$ . Это даёт

$$\rho_{\uparrow}^{\text{tun}}(\varepsilon) = \frac{2}{\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{(\omega + iH)}{\sqrt{(\omega + iH)^2 + \tilde{E}_g^2}} C(\varepsilon - \omega), \quad (4.66)$$

где  $C(\omega)$  — коррелятор фаз, содержащий усреднение по основному состоянию гамильтониана (4.45):

$$C(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \langle \cos(K\tau - K_0) \rangle. \quad (4.67)$$

Эту величину можно выразить через собственные значения  $E_n$  и собственные функции  $|n\rangle$  гамильтониана (4.45):

$$C(\omega) = \sum_n P_n \frac{2A_n}{\omega^2 + A_n^2}, \quad A_n = E_n - E_0, \quad (4.68)$$

$$P_n = |\langle 0 | \cos K | n \rangle|^2 + |\langle 0 | \sin K | n \rangle|^2. \quad (4.69)$$

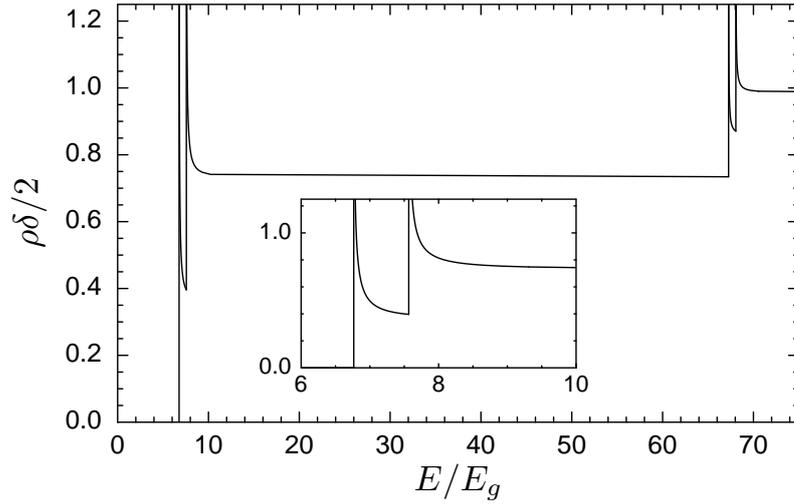


Рисунок 4.9 — Зависимость туннельной плотности состояний от энергии для фазы S при параметрах  $E_C\delta/E_g^2 = 2.5$ ,  $H/\tilde{E}_g = 0.4$ ,  $\Delta/E_g = 150$ . На вставке показаны детали зеемановского расщепления первого пика. Второй пик расщеплён аналогичным образом.

Теперь мы можем выполнить аналитическое продолжение на вещественные энергии в формуле (4.66). При этом результат будет определяться полюсами, вычеты в которых равны термодинамической плотности состояний. В результате, суммируя вклады от всех слагаемых в сумме (4.68) и симметризуя результат по спину, получаем

$$\rho^{\text{tun}}(E) = \frac{1}{2} \left[ \rho_{\uparrow}^{\text{tun}}(E) + \rho_{\downarrow}^{\text{tun}}(E) \right] = \sum_n P_n \vartheta(|E| - A_n) \rho(|E| - A_n). \quad (4.70)$$

Здесь  $\vartheta(x)$  — функция Хевисайда,  $\rho(E)$  — термодинамическая плотность состояний, определяемая формулой (4.51).

Получившееся выражение для туннельной плотности состояний имеет ясный физический смысл. Каждый член в сумме (4.70) получается из  $\rho(E)$  вставкой кулоновской щели  $2A_n = 2(E_n - E_0)$  вокруг  $E = 0$  и умножением на  $P_n$ . Зависимость туннельной плотности состояний от энергии качественно различна для двух щелевых фаз S и S'. В S фазе, когда  $H < \tilde{E}_g$ , пики туннельной плотности состояний (см. рисунок 4.9) расщеплены из-за эффекта Зеемана, но в целом картина напоминает результат работы [305]. При высоких магнитных полях  $H > \tilde{E}_g$  гранула находится в фазе S'. Кулоновская щель и щель от эффекта близости теперь разделены, как показано на рисунке 4.10. Кулоновская щель всегда центрирована в  $E = 0$ , в то время как минищель сдвинута на  $H$ . Плотность состояний внутри этой сдвинутой минищели уже не равна нулю из-за вклада от электронов с противоположным спином.

Получившееся выражение (4.70) содержит матричные элементы  $P_n$  и расстояния между уровнями энергий  $A_n = E_n - E_0$ . Обе эти величины можно найти аналитически в пределах слабого и сильного кулоновского взаимодействия. Ранее уже упоминались две симметрии гамильтониана (4.45): он коммутирует с операторами  $K \mapsto -K$  и  $K \mapsto K + \pi$ . Поэтому коэффициенты  $P_n$  отличны от нуля только при  $n = 4k + 1$  и  $n = 4k + 2$ . Другим их свойством является нормировка  $\sum_n P_n = 1$ , откуда  $\rho(E) = \rho^{\text{tun}}(E) = 2/\delta$ , если энергия  $E$  далека от энергии Ферми. Последовательность  $P_n$  быстро убывает при любой силе кулоновского взаимодействия. Это позволяет сохранить в сумме (4.70) только члены с  $n = 1$  и  $n = 2$ .

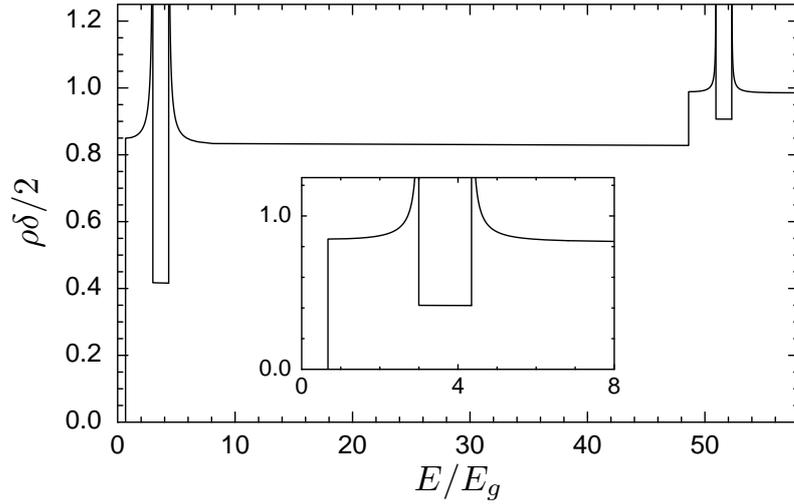


Рисунок 4.10 — Зависимость туннельной плотности состояний от энергии для фазы  $S'$  при параметрах  $E_C\delta/E_g^2 = 1.0$ ,  $H/\tilde{E}_g = 3.0$ ,  $\Delta/E_g = 150$ . На вставке показана структура первого пика. Кулоновская щель и щель от эффекта близости чётко разделены при  $H > \tilde{E}_g$ .

В режиме слабой кулоновской блокады,  $q \gg 1$ , можем приблизить потенциал  $\cos 2K$  двумя глубокими параболическими ямами. Расщепление двух наинизших уровней экспоненциально малó. В главном порядке по  $1/\sqrt{q}$  получаем

$$P_1 = 1 - \frac{1}{4\sqrt{q}}, \quad P_2 = \frac{1}{4\sqrt{q}}, \quad (4.71)$$

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 4E_C\sqrt{q}. \quad (4.72)$$

В противоположном случае сильного кулоновского взаимодействия,  $q \ll 1$ , применяем теорию возмущений по  $q$  и находим

$$P_{1,2} = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \frac{q}{2} \right), \quad A_{1,2} = E_C(1 \mp q). \quad (4.73)$$

В пределе сильного кулоновского взаимодействия, при больших магнитных полях  $H > H_c^I$  минищель отсутствует, и гранула находится в  $N$  состоянии. В этом случае туннельная плотность состояний демонстрирует чисто кулоновскую щель на энергиях ниже  $E_C$ , будучи константой выше этой щели:  $\rho^{\text{tun}}(E) = (2/\delta)\vartheta(|E| - E_C)$ . На самом деле даже в  $N$  режиме из-за флуктуаций в туннельной плотности состояний сохраняется очень маленькая минищель порядка  $\sqrt{\delta/H}\tilde{E}_g(0)$  [где  $\tilde{E}_g(0)$ , минищель при  $H = 0$ , совпадает с  $H_c^S$  из формулы (4.56)] — мы пренебрегаем этим эффектом. Механизм этого эффекта аналогичен тому, который имеет место в сверхпроводящей грануле в сильном магнитном поле [314].

## 4.2.5 Заключение

Была развита самосогласованная теория эффекта близости и зарядовых эффектов в присутствии внешнего магнитного поля. Минищель, которая наводится в грануле, демонстрирует сложное поведение в магнитном поле. Возникают два различных состояния с

минищелью, между которыми имеется фазовый переход первого рода. Переход в бесщелевое состояние происходит первым родом из S состояния и вторым родом из состояния S'. Туннельная плотность состояний для S и S' фаз также различна. При больших магнитных полях  $H > \tilde{E}_g$  в туннельной плотности состояний возникают две различные щели: кулоновская щель при нулевой энергии и щель от эффекта близости, сдвинутая магнитным полем относительно нуля.

Рассмотренная система может быть экспериментально реализована при следующих параметрах: гранула может быть изготовлена из благородного металла и иметь форму диска толщиной  $d \sim 25$  нм и диаметром на порядок больше. При прозрачности границы порядка  $2 \times 10^{-6}$  (диэлектрический оксид) получаются оценки  $\delta \sim 5 \times 10^{-4}$  К,  $E_g \sim 0.01$  К,  $E_C \sim 0.1$  К,  $E_J \sim 1$  К и  $G \sim 100$ . Берез может быть изготовлен из ниобия; в этом случае  $\Delta \sim 12$  К, и магнитные поля должны быть меньше 1 Т.

## Заключение

Итоги выполненного исследования:

1. Рассмотрен джозефсоновский SFS контакт с неелевской доменной структурой в F слое. Показано, что в доменных стенках возникает нечётная по частоте ( $\omega$ -нечётная) дальнодействующая триплетная компонента, которая в грязном пределе проникает вглубь доменов на расстояние порядка  $\xi_T = \sqrt{D/2\pi T}$ . Вычислен вклад этой компоненты в джозефсоновский ток в случае, когда обычные короткодействующие компоненты экспоненциально затухают на толщине F слоя и дают пренебрежимо малый вклад. В пределе толщины F слоя, малой по сравнению с глубиной проникновения дальнодействующей компоненты, обнаружено, что контакт находится в  $\pi$ -состоянии. В SF контакте вычислено изменение плотности состояний на свободной поверхности F слоя благодаря  $\omega$ -нечётной компоненте. Показано, что если вращение намагниченности во всех доменных стенках происходит в одном и том же направлении, то изменение плотности состояний при сканировании вдоль поверхности обращается в ноль в середине доменов.
2. Исследована проводимость контакта между нормальным металлом и сверхпроводником, имеющим симметрию, предложенную Березинским. Главная особенность этой симметрии — нечётная зависимость аномальной функции Грина от частоты, что делает возможным  $s$ -волновое триплетное сверхпроводящее состояние (сверхпроводник Березинского). Андреевское отражение (связывающее положительные и отрицательные энергии) чувствительно к частотной симметрии; в результате этого проводимость контакта со сверхпроводником Березинского качественно отличается от случая обычного сверхпроводника. Полученные результаты могут быть использованы для экспериментального обнаружения  $\omega$ -нечётных компонент, предсказанных в ряде систем.
3. Исследованы симметрии и магнитные свойства сверхпроводящих корреляций, возникающих как наведённые компоненты в неоднородных сверхпроводниках. Частотная симметрия, пространственная чётность и тип магнитного отклика наведённых корреляций оказываются противоположны аналогичным характеристикам в объёме. Этот вывод остаётся справедливым и при обобщении теории сверхпроводимости на случай недавно предложенных диамагнитных  $\omega$ -нечётных однородных сверхпроводников. В результате сверхпроводящие корреляции можно разбить на восемь классов, учитывая их симметрии и магнитные свойства. С учётом возможности нарушения трансляционной инвариантности и спиновой симметрии эти восемь типов состояний делятся на две несмешивающиеся группы, причём  $\omega$ -нечётные состояния с диамагнитным и парамагнитным откликом принадлежат разным группам. Далее рассмотрены физические свойства однородного сверхпроводника с недавно предложенным новым типом  $\omega$ -нечётного спаривания, обладающего диамагнитным мейснеровским откликом ( $\omega$ -нечётное-диа состояние). Такое состояние было предложено в

качестве решения проблемы устойчивости объёмного  $\omega$ -нечётного сверхпроводящего состояния с парамагнитным откликом ( $\omega$ -нечётное-пара состояние). В предположении существования  $\omega$ -нечётного-диа состояния (за счёт некоторого запаздывающего взаимодействия) был изучен вопрос о его сосуществовании с  $\omega$ -нечётным-пара состоянием. Последнее, как известно, реализуется в качестве наведённой сверхпроводящей компоненты в системах с эффектом близости. В результате вычисления сверхтекучей плотности смешанного  $\omega$ -нечётного-пара/диа состояния и джозефсоновского тока между  $\omega$ -нечётным-пара и -диа состояниями оказалось, что выражения для тока в обоих случаях имеют мнимые вклады, т.е. являются нефизическими. Показано, что реализация  $\omega$ -нечётного-диа состояния означает отсутствие гамильтонова описания системы. На основании этого сделан вывод о том, что в действительности не существует физически реализуемых возмущений, способных привести к спонтанному нарушению симметрии, необходимому для фактической реализации  $\omega$ -нечётного-диа сверхпроводящего состояния. В этом случае противоречие, связанное с нефизическими результатами для тока, устраняется. Физически реализуемой оказывается только группа состояний, содержащая  $\omega$ -нечётное-пара состояние.

4. Вычислена локальная комплексная проводимость и импеданс на диффузной границе кирального  $p$ -волнового сверхпроводника. Рассмотрен отклик на внешнее электромагнитное поле как на подщелевых, так и на надщелевых частотах. Изучены аномальные особенности поверхностного импеданса, связанные с генерацией вблизи границы  $\omega$ -нечётных сверхпроводящих корреляций. Полученные результаты дают микроскопическое обоснование феноменологической двухжидкостной модели с увеличенной плотностью нормальной компоненты, ранее предложенной для объяснения аномальных особенностей микроволнового отклика в рутенате стронция. Теоретические результаты сопоставлены с измерениями поверхностного импеданса  $\text{Sr}_2\text{RuO}_4$ , проведёнными в ИФТТ РАН. Наблюдается качественное согласие теории и эксперимента, что подтверждает киральную  $p$ -волновую симметрию  $\text{Sr}_2\text{RuO}_4$ .
5. Исследована критическая температура  $T_c$  трёхслойной SFF структуры, в которой при неколлинеарных намагниченностях  $F$  слоёв возникает дальнедействующая триплетная сверхпроводящая компонента. Показано, что  $T_c$  может быть немонотонной функцией угла  $\alpha$  между намагниченностями двух  $F$  слоёв. Минимум достигается при промежуточном значении  $\alpha$ , лежащем между параллельным (P,  $\alpha = 0$ ) и антипараллельным (AP,  $\alpha = \pi$ ) случаями. Это означает возможность «триплетного» эффекта спинового клапана: при температурах выше минимума  $T_c^{\text{Tr}}$ , но ниже  $T_c^{\text{P}}$  и  $T_c^{\text{AP}}$ , система будет в сверхпроводящем состоянии только при ориентациях, близких к коллинеарным. При определённых параметрах зависимость  $T_c(\alpha)$  может иметь возвратный характер. Если же рассматривать только P и AP конфигурации, то в зависимости от параметров системы возможен как «стандартный» ( $T_c^{\text{P}} < T_c^{\text{AP}}$ ), так и «обратный» ( $T_c^{\text{P}} > T_c^{\text{AP}}$ ) эффект переключения. Проведён теоретический анализ экспериментов, подтвердивших как триплетный эффект спинового клапана, так и обратный эффект переключения; получено согласие теории и эксперимента.

6. Исследован спиновый клапан, представляющий собой баллистический СКВИД со спиновой фильтрацией в рукавах за счёт полуметаллических ферромагнетиков. Синглетная куперовская пара не может пройти через такой рукав, поэтому джозефсоновский ток полностью обусловлен процессами с расщеплением пар, когда два электрона идут по разным рукавам интерферометра. Для выяснения основных механизмов транспорта через расщеплённые куперовские пары рассмотрен предел одноканальных проводников и короткого контакта. При различных геометрических параметрах системы зависимость характеристик СКВИДа (андреевские уровни, ток-фазовое соотношение и критический ток) от двух управляющих параметров (угол между намагниченностями и магнитный поток) имеет качественно различный характер. Ток-фазовая характеристика может менять амплитуду и форму, в частности менять знак (что означает переход в состояние  $\pi$ -контакта) и иметь дополнительные пересечения нуля. Критический ток может быть немонотонной функцией угла между намагниченностями и магнитного потока (на половине периода). Периодичность по магнитному потоку оказывается удвоенной по сравнению с обычным СКВИДом.
7. Рассмотрена задача об эффекте близости в диффузной системе, составленной из сверхпроводящих и нормальных (или ферромагнитных) областей с магнитным беспорядком. В случае слабого магнитного беспорядка показано, что на масштабах много больше его корреляционной длины эффект магнитного беспорядка может быть описан локальным членом в уравнениях Узаделя, соответствующим процессам рассеяния электронов с переворотом спина (спин-флип). Спин-флип член в уравнении Узаделя и соответствующая интенсивность спин-флип рассеяния выведены в общем случае трёхмерного зеемановского поля с произвольной корреляционной длиной. В данной задаче можно выделить три основных режима: точечные примеси (корреляционная длина меньше фермиевской длины волны), среднемасштабный беспорядок (корреляционная длина больше фермиевской длины волны, но меньше длины свободного пробега) и крупномасштабный беспорядок (корреляционная длина больше длины свободного пробега). Эти три режима исследованы с помощью трёх дополняющих друг друга подходов: уравнения Узаделя, нелинейная сигма-модель и диаграммное разложение. Полученные общие результаты согласуются с частными случаями, изучавшимися ранее.
8. Рассмотрена диссипативная часть поверхностного импеданса в диффузном сверхпроводнике с со слабыми неборновскими магнитными примесями. Исследована зависимость импеданса от частоты, концентрации магнитных примесей и их силы, и от концентрации и температуры квазичастиц. Даже малая концентрация неборновских магнитных примесей существенно меняет спектр возбуждений вблизи щели БКШ, создавая подщелевые состояния. Поэтому особое внимание было уделено пороговому поведению при нулевой температуре, а также низкочастотному поглощению за счет квазичастиц. Показано, что примесные состояния, возникающие при малых плотностях магнитных примесей, могут служить ловушками для неравновесных

квазичастиц, уменьшая поглощение в некотором диапазоне низких частот электромагнитного поля.

9. Исследована плотность состояний в диффузных сверхпроводниках с магнитными примесями, подчиняющимися статистике Пуассона. Таким образом могут быть описаны примеси произвольной «силы», а известный случай борновских магнитных примесей с гауссовой статистикой является предельным случаем этого рассмотрения. Теория среднего поля предсказывает нетривиальную структуру плотности состояний, содержащую континуум квазичастичных состояний, а также (в некотором диапазоне параметров) примесную зону. В приближении среднего поля все края спектра являются жёсткими и обозначают чёткие границы между областями конечной и нулевой плотности состояний. С помощью инстантонного подхода в технике репличной сигма-модели вычислена средняя плотность состояний за рамками среднеполевого приближения. Таким образом найдены подщелевые состояния («хвосты»), которые размывают края спектра за счёт флуктуаций потенциального (обычные примеси) и непотенциального (магнитные примеси) беспорядка. Неоднородность концентрации магнитных примесей приводит к появлению подщелевых состояний за счёт двух механизмов: флуктуаций паразитирующего параметра (магнитный аналог мезоскопических флуктуаций) и флуктуаций параметра порядка (определяемого самосогласованно).
10. Исследована возможность перехода двумерного гранулированного сверхпроводника с хорошей проводимостью межгранульных границ в диэлектрическое состояние под действием магнитного поля. В случае пространственных вариаций размеров гранул меняется и критическое магнитное поле отдельной гранулы, поэтому во внешнем поле часть гранул переходит в нормальное состояние. Показано, что диэлектрическое состояние возникает в предположении шахматного порядка чередования сверхпроводящих и нормальных гранул.
11. Исследовано влияние магнитного поля и кулоновского взаимодействия на эффект близости в контакте между сверхпроводником и гранулой из нормального металла в пределе большой безразмерной проводимости границы. Изучено подавление наведённой сверхпроводимости в грануле магнитным полем в зависимости от силы кулоновского взаимодействия. Построена фазовая диаграмма в координатах кулоновская энергия – магнитное поле. Возможны три фазы нормальной гранулы: сильное (S) и слабое (S') сверхпроводящее (т.е. щелевое), а также нормальное (т.е. бесщелевое) состояние (N). Переход из S фазы в S' и N является фазовым переходом первого рода, а переход между S' и N состояниями — переходом второго рода. Кроме того, исследована туннельная плотность состояний в нормальной грануле. В туннельной плотности состояний можно различить две щели, соответствующие эффекту близости (минищель) и кулоновской блокаде (кулоновская щель). Такое различие становится возможным благодаря магнитному полю, которое смещает положение минищели за счет эффекта Зеемана.

## Список сокращений и условных обозначений

<b>S</b>	superconductor, синглетный сверхпроводник
<b>F</b>	ferromagnet, ферромагнитный металл с двумя спиновыми подзонами на уровне Ферми
<b>H</b>	half-metallic ferromagnet, ферромагнитный металл с одной спиновой подзоной на уровне Ферми
<b>N</b>	normal metal, нормальный (несверхпроводящий и немагнитный) металл
<b>P</b>	parallel, параллельная конфигурация магнитных слоев
<b>AP</b>	antiparallel, антипараллельная конфигурация магнитных слоев
<b>НА</b>	Heusler alloy, сплав Гейслера (Хойслера)
<b>ДТК</b>	дальнодействующая триплетная компонента сверхпроводящего спаривания (нечётная по частоте)
<b>КТК</b>	квантовый точечный контакт
<b>теория АГ</b>	теория Абрикосова и Горькова
<b>теория ЛО</b>	теория Ларкина и Овчинникова
<b>модель СПП</b>	модель случайного параметра порядка

## Список публикаций по теме диссертации

1. A. F. Volkov, Ya. V. Fominov, K. B. Efetov, *Long-range odd triplet superconductivity in superconductor–ferromagnet structures with Néel walls*, Phys. Rev. B **72**, 184504 (2005).
2. D. A. Ivanov, Ya. V. Fominov, *Minigap in superconductor–ferromagnet junctions with inhomogeneous magnetization*, Phys. Rev. B **73**, 214524 (2006).
3. I. S. Beloborodov, Ya. V. Fominov, A. V. Lopatin, V. M. Vinokur, *Insulating state of granular superconductors in a strong-coupling regime*, Phys. Rev. B **74**, 014502 (2006).
4. P. M. Ostrovsky, Ya. V. Fominov, M. V. Feigel'man, *Proximity effect in the presence of Coulomb interaction and magnetic field*, Phys. Rev. B **74**, 104505 (2006).
5. Ya. V. Fominov, A. F. Volkov, K. B. Efetov, *Josephson effect due to the long-range odd-frequency triplet superconductivity in SFS junctions with Néel domain walls*, Phys. Rev. B **75**, 104509 (2007).
6. Ya. V. Fominov, *Conductance of a junction between a normal metal and a Berezinskii superconductor*, Письма в ЖЭТФ **86**, 842 (2007).
7. D. A. Ivanov, Ya. V. Fominov, M. A. Skvortsov, P. M. Ostrovsky, *Effective spin-flip scattering in diffusive superconducting proximity systems with magnetic disorder*, Phys. Rev. B **80**, 134501 (2009).
8. Ya. V. Fominov, A. A. Golubov, T. Yu. Karminskaya, M. Yu. Kupriyanov, R. G. Deminov, L. R. Tagirov, *Superconducting triplet spin valve*, Письма в ЖЭТФ **91**, 329 (2010).
9. Yasuhiro Asano, Alexander A. Golubov, Yakov V. Fominov, Yukio Tanaka, *Unconventional Surface Impedance of a Normal-Metal Film Covering a Spin-Triplet Superconductor Due to Odd-Frequency Cooper Pairs*, Phys. Rev. Lett. **107**, 087001 (2011).
10. Ya. V. Fominov, M. Houzet, L. I. Glazman, *Surface impedance of superconductors with weak magnetic impurities*, Phys. Rev. B **84**, 224517 (2011).
11. P. V. Leksin, N. N. Garif'yanov, I. A. Garifullin, Ya. V. Fominov, J. Schumann, Y. Krupskaya, V. Kataev, O. G. Schmidt, B. Büchner, *Evidence for Triplet Superconductivity in a Superconductor-Ferromagnet Spin Valve*, Phys. Rev. Lett. **109**, 057005 (2012).
12. P. V. Leksin, A. A. Kamashev, N. N. Garif'yanov, I. A. Garifullin, Ya. V. Fominov, J. Schumann, C. Hess, V. Kataev, B. Büchner, *Peculiarities of performance of the spin valve for the superconducting current*, Письма в ЖЭТФ **97**, 549 (2013).
13. Yasuhiro Asano, Yakov V. Fominov, Yukio Tanaka, *Consequences of bulk odd-frequency superconducting states for the classification of Cooper pairs*, Phys. Rev. B **90**, 094512 (2014).
14. Ya. V. Fominov, Y. Tanaka, Y. Asano, M. Eschrig, *Odd-frequency superconducting states with different types of Meissner response: Problem of coexistence*, Phys. Rev. B **91**, 144514 (2015).
15. P. V. Leksin, N. N. Garif'yanov, A. A. Kamashev, Ya. V. Fominov, J. Schumann, C. Hess, V. Kataev, B. Büchner, I. A. Garifullin, *Superconducting spin-valve effect and triplet*

- superconductivity in CoO<sub>x</sub>/Fe1/Cu/Fe2/Cu/Pb multilayer*, Phys. Rev. B **91**, 214508 (2015).
16. P. V. Leksin, N. N. Garif'yanov, A. A. Kamashev, A. A. Validov, Ya. V. Fominov, J. Schumann, V. Kataev, J. Thomas, B. Büchner, I. A. Garifullin, *Isolation of proximity-induced triplet pairing channel in a superconductor/ferromagnet spin valve*, Phys. Rev. B **93**, 100502(R) (2016).
  17. Yakov V. Fominov, Mikhail A. Skvortsov, *Subgap states in disordered superconductors with strong magnetic impurities*, Phys. Rev. B **93**, 144511 (2016).
  18. P. L. Stroganov, Ya. V. Fominov, *Cooper pair splitting in ballistic ferromagnetic SQUIDS*, Phys. Rev. B **96**, 174508 (2017).
  19. Andrey A. Kamashev, Aidar A. Validov, Joachim Schumann, Vladislav Kataev, Bernd Büchner, Yakov V. Fominov, Ilgiz A. Garifullin, *Increasing the performance of a superconducting spin valve using a Heusler alloy*, Beilstein J. Nanotechnol. **9**, 1764 (2018).
  20. S. V. Bakurskiy, Ya. V. Fominov, A. F. Shevchun, Y. Asano, Y. Tanaka, M. Yu. Kupriyanov, A. A. Golubov, M. R. Trunin, H. Kashiwaya, S. Kashiwaya, Y. Maeno, *Local impedance on a rough surface of a chiral p-wave superconductor*, Phys. Rev. B **98**, 134508 (2018).

## Список литературы

1. *Sarma, G.* On the influence of a uniform exchange field acting on the spins of the conduction electrons in a superconductor // *J. Phys. Chem. Solids.* — 1963. — Vol. 24. — P. 1029.
2. *Ларкин, А. И., Обчинников, Ю. Н.* Неоднородное состояние сверхпроводников // *ЖЭТФ.* — 1964. — Т. 47. — С. 1136.
3. *Fulde, P., Ferrell, R. A.* Superconductivity in a Strong Spin-Exchange Field // *Phys. Rev.* — 1964. — Vol. 135. — A550.
4. *Буздин, А. И., Булаевский, Л. Н., Панюков, С. В.* Осцилляции критического тока в зависимости от обменного поля и толщины ферромагнитного металла (F) в джозефсоновском контакте S-F-S // *Письма в ЖЭТФ.* — 1982. — Т. 35. — С. 147.
5. *Буздин, А. И., Курриянов, М. Ю.* Критическая температура сверхрешетки ферромагнетик-сверхпроводник // *Письма в ЖЭТФ.* — 1990. — Т. 52. — С. 1089.
6. *Ryazanov, V. V., Oboznov, V. A., Rusanov, A. Y., Veretennikov, A. V., Golubov, A. A., Aarts, J.* Coupling of Two Superconductors through a Ferromagnet: Evidence for a  $\pi$  Junction // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Vol. 86. — P. 2427.
7. *Kontos, T., Aprili, M., Lesueur, J., Grison, X.* Inhomogeneous superconductivity induced in a ferromagnet by proximity effect // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Vol. 86. — P. 304.
8. *Oboznov, V. A., Bol'ginov, V. V., Feofanov, A. K., Ryazanov, V. V., Buzdin, A. I.* Thickness dependence of the josephson ground states of superconductor-ferromagnet-superconductor junctions // *Phys. Rev. Lett.* — 2006. — Vol. 96. — P. 197003.
9. *Frolov, S. M., Stoutimore, M. J. A., Crane, T. A., Van Harlingen, D. J., Oboznov, V. A., Ryazanov, V. V., Ruosi, A., Granata, C., Russo, M.* Imaging spontaneous currents in superconducting arrays of  $\pi$ -junctions // *Nature Phys.* — 2008. — Vol. 4. — P. 32.
10. *Buzdin, A. I.* Proximity effects in superconductor-ferromagnet heterostructures // *Rev. Mod. Phys.* — 2005. — Vol. 77. — P. 935.
11. *Bergeret, F. S., Volkov, A. F., Efetov, K. B.* Odd triplet superconductivity and related phenomena in superconductor-ferromagnet structures // *Rev. Mod. Phys.* — 2005. — Vol. 77. — P. 1321.
12. *Golubov, A. A., Kupriyanov, M. Y., Il'ichev, E.* The current-phase relation in Josephson junctions // *Rev. Mod. Phys.* — 2004. — Vol. 76. — P. 411.
13. *Березинский, В. Л.* Новая модель анизотропной фазы сверхтекучего  $\text{He}^3$  // *Письма в ЖЭТФ.* — 1974. — Т. 20. — С. 628.
14. *Belitz, D., Kirkpatrick, T. R.* Even-parity spin-triplet superconductivity in disordered electronic systems // *Phys. Rev. B.* — 1992. — Vol. 46. — P. 8393.
15. *Balatsky, A., Abrahams, E.* New class of singlet superconductors which break the time reversal and parity // *Phys. Rev. B.* — 1992. — Vol. 45. — 13125(R).

16. *Solenov, D., Martin, I., Mozyrsky, D.* Thermodynamical stability of odd-frequency superconducting state // Phys. Rev. B. — 2009. — Vol. 79. — P. 132502.
17. *Kusunose, H., Fuseya, Y., Miyake, K.* On the Puzzle of Odd-Frequency Superconductivity // J. Phys. Soc. Jpn. — 2011. — Vol. 80. — P. 054702.
18. *Tanaka, Y., Tanuma, Y., Golubov, A. A.* Odd-frequency pairing in normal-metal/superconductor junctions // Phys. Rev. B. — 2007. — Vol. 76. — P. 054522.
19. *Asano, Y., Tanaka, Y.* Majorana fermions and odd-frequency Cooper pairs in a normal-metal nanowire proximity-coupled to a topological superconductor // Phys. Rev. B. — 2013. — Vol. 87. — P. 104513.
20. *Radović, Z., Ledvij, M., Dobrosavljević-Grujić, L., Buzdin, A. I., Clem, J. R.* Transition temperatures of superconductor-ferromagnet superlattices // Phys. Rev. B. — 1991. — Vol. 44. — P. 759.
21. *Tagirov, L. R.* Low-field superconducting spin switch based on a superconductor/ferromagnet multilayer // Phys. Rev. Lett. — 1999. — Vol. 83. — P. 2058.
22. *Buzdin, A. I., Vedyayev, A. V., Ryzhanova, N. V.* Spin-orientation-dependent superconductivity in F/S/F structures // Europhys. Lett. — 1999. — Vol. 48. — P. 686.
23. *Абрикосов, А. А., Горьков, Л. П.* К теории сверхпроводящих сплавов с парамагнитными примесями // ЖЭТФ. — 1960. — Т. 39. — С. 1781.
24. *Shiba, H.* Classical Spins in Superconductors // Prog. Theor. Phys. — 1968. — Vol. 40. — P. 435.
25. *Русинов, А. И.* К теории бесщелевой сверхпроводимости в сплавах, содержащих парамагнитные примеси // ЖЭТФ. — 1969. — Т. 56. — С. 2047.
26. Single Charge Tunneling / ed. by H. Grabert, M. H. Devoret. — New York : Plenum, 1992.
27. *Matveev, K. A., Glazman, L. I.* Charge quantization in a normal coulomb island strongly coupled to a superconductor // Phys. Rev. Lett. — 1998. — Vol. 81. — P. 3739.
28. *Baturina, T. I., Strunk, C., Baklanov, M. R., Satta, A.* Quantum Metallicity on the High-Field Side of the Superconductor-Insulator Transition // Phys. Rev. Lett. — 2007. — Vol. 98. — P. 127003.
29. *Maeno, Y., Kittaka, S., Nomura, T., Yonezawa, S., Ishida, K.* Evaluation of Spin-Triplet Superconductivity in  $\text{Sr}_2\text{RuO}_4$  // J. Phys. Soc. Jpn. — 2012. — Vol. 81. — P. 011009.
30. *Минеев, В. П., Самохин, К. В.* Введение в теорию необычной сверхпроводимости. — М. : Издательство МФТИ, 1998.
31. *Demler, E. A., Arnold, G. B., Beasley, M. R.* Superconducting proximity effects in magnetic metals // Phys. Rev. B. — 1997. — Vol. 55. — P. 15174.
32. *Eschrig, M.* Spin-polarized supercurrent for spintronics // Phys. Today. — 2011. — Vol. 64. — P. 43.

33. *Lyuksyutov, I. F., Pokrovsky, V. L.* Ferromagnet-superconductor hybrids // *Adv. Phys.* — 2005. — Vol. 54. — P. 67.
34. *de Gennes, P. G.* Superconductivity of Metals and Alloys. — Boulder, CO : Westview Press, 1999.
35. *Kontos, T., Aprili, M., Lesueur, J., Genêt, F., Stephanidis, B., Boursier, R.* Josephson junction through a thin ferromagnetic layer: Negative coupling // *Phys. Rev. Lett.* — 2002. — Vol. 89. — P. 137007.
36. *Blum, Y., Tsukernik, A., Karpovski, M., Palevski, A.* Oscillations of the superconducting critical current in Nb-Cu-Ni-Cu-Nb junctions // *Phys. Rev. Lett.* — 2002. — Vol. 89. — P. 187004.
37. *Bauer, A., Bentner, J., Aprili, M., Rocca, M. L. D., Reinwald, M., Wegscheider, W., Strunk, C.* Spontaneous Supercurrent Induced by Ferromagnetic  $\pi$  Junctions // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Vol. 92. — P. 217001.
38. *Sellier, H., Baraduc, C., Lefloch, F., Calemczuk, R.* Half-Integer Shapiro Steps at the  $0-\pi$  Crossover of a Ferromagnetic Josephson Junction // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Vol. 92. — P. 257005.
39. *Bergeret, F. S., Volkov, A. F., Efetov, K. B.* Long-Range Proximity Effects in Superconductor-Ferromagnet Structures // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Vol. 86. — P. 4096.
40. *Kadigrobov, A., Shekhter, R. I., Jonson, M.* Quantum spin fluctuations as a source of long-range proximity effects in diffusive ferromagnet-superconductor structures // *Europhys. Lett.* — 2001. — Vol. 54. — P. 394.
41. *Петрашов, В. Т., Антонов, В. Н., Максимов, С. В., Шайхайдаров, Р. Ш.* Проводимость мезоскопических структур с ферромагнитными и сверхпроводящими областями // *Письма в ЖЭТФ.* — 1994. — Т. 59. — С. 523.
42. *Lawrence, M. D., Giordano, N.* Weak-localization-like effects in superconductor-ferromagnet-superconductor structures // *J. Phys.: Condens. Matter.* — 1996. — Vol. 8. — P. L563.
43. *Giroud, M., Courtois, H., Hasselbach, K., Mailly, D., Pannetier, B.* Superconducting proximity effect in a mesoscopic ferromagnetic wire // *Phys. Rev. B.* — 1998. — Vol. 58. — R11872.
44. *Petrashov, V. T., Sosnin, I. A., Cox, I., Parsons, A., Troadec, C.* Giant mutual proximity effects in ferromagnetic/superconducting nanostructures // *Phys. Rev. Lett.* — 1999. — Vol. 83. — P. 3281.
45. *Peña, V., Sefrioui, Z., Arias, D., Leon, C., Santamaria, J., Varela, M., Pennycook, S. J., Martinez, J. L.* Coupling of superconductors through a half-metallic ferromagnet: Evidence for a long-range proximity effect // *Phys. Rev. B.* — 2004. — Vol. 69. — P. 224502.

46. *Nugent, P., Sosnin, I., Petrashov, V. T.* The long range influence of a superconductor on the electron transport in ferromagnetic wires // *J. Phys.: Condens. Matter.* — 2004. — Vol. 16. — P. L509.
47. *Stamopoulos, D., Moutis, N., Pissas, M., Niarchos, D.* Effective ferromagnetic coupling between a superconductor and a ferromagnet in LaCaMnO/Nb hybrids // *Phys. Rev. B.* — 2005. — Vol. 72. — P. 212514.
48. *Keizer, R. S., Goennenwein, S. T. B., Klapwijk, T. M., Miao, G., Xiao, G., Gupta, A.* A spin triplet supercurrent through the half-metallic ferromagnet CrO<sub>2</sub> // *Nature (London).* — 2006. — Vol. 439. — P. 825.
49. *Sosnin, I., Cho, H., Petrashov, V. T., Volkov, A. F.* Superconducting phase coherent electron transport in proximity conical ferromagnets // *Phys. Rev. Lett.* — 2006. — Vol. 96. — P. 157002.
50. *Volkov, A. F., Anishchanka, A., Efetov, K. B.* Odd triplet superconductivity in a superconductor/ferromagnet system with a spiral magnetic structure // *Phys. Rev. B.* — 2006. — Vol. 73. — P. 104412.
51. *Aharoni, A.* Introduction to the Theory of Ferromagnetism. — New York : Oxford, 2001.
52. *Champel, T., Eschrig, M.* Switching superconductivity in superconductor/ferromagnet bilayers by multiple-domain structures // *Phys. Rev. B.* — 2005. — Vol. 71. — 220506(R).
53. *Champel, T., Eschrig, M.* Effect of an inhomogeneous exchange field on the proximity effect in disordered superconductor-ferromagnet hybrid structures // *Phys. Rev. B.* — 2005. — Vol. 72. — P. 054523.
54. *Bergeret, F. S., Efetov, K. B., Larkin, A. I.* Nonhomogeneous magnetic order in superconductor-ferromagnet multilayers // *Phys. Rev. B.* — 2000. — Vol. 62. — P. 11872.
55. *Куприянов, М. Ю., Лукичев, В. Ф.* Влияние прозрачности границ на критический ток грязных SS'S структур // *ЖЭТФ.* — 1988. — Т. 94. — С. 139.
56. *Golubov, A. A., Kupriyanov, M. Y., Fominov, Y. V.* Critical current in SFIFS junctions // *Письма в ЖЭТФ.* — 2002. — Т. 75. — С. 223.
57. *Volkov, A. F., Bergeret, F. S., Efetov, K. B.* Odd triplet superconductivity in superconductor-ferromagnet multilayered structures // *Phys. Rev. Lett.* — 2003. — Vol. 90. — P. 117006.
58. *Bergeret, F. S., Volkov, A. F., Efetov, K. B.* Manifestation of triplet superconductivity in superconductor-ferromagnet structures // *Phys. Rev. B.* — 2003. — Vol. 68. — P. 064513.
59. *Tanaka, Y., Golubov, A. A.* Theory of the Proximity Effect in Junctions with Unconventional Superconductors // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 98. — P. 037003.
60. *Geshkenbein, V. B., Larkin, A. I., Barone, A.* Vortices with half magnetic-flux quanta in heavy-fermion superconductors // *Phys. Rev. B.* — 1987. — Vol. 36. — P. 235.

61. *Van Harlingen, D. J.* Phase-sensitive tests of the symmetry of the pairing state in the high-temperature superconductors — Evidence for  $d_{x^2-y^2}$  symmetry // *Rev. Mod. Phys.* — 1995. — Vol. 67. — P. 515.
62. *Андреев, А. Ф.* Теплопроводность промежуточного состояния сверхпроводников // *ЖЭТФ.* — 1964. — Т. 46. — С. 1823.
63. *Lambert, C. J., Raimondi, R.* Phase-coherent transport in hybrid superconducting nanostructures // *J. Phys.: Condens. Matter.* — 1998. — Vol. 10. — P. 901.
64. *Pannetier, B., Courtois, H.* Andreev reflection and proximity effect // *J. Low Temp. Phys.* — 2000. — Vol. 118. — P. 599.
65. *Usadel, K. D.* Generalized diffusion equation for superconducting alloys // *Phys. Rev. Lett.* — 1970. — Vol. 25. — P. 507.
66. *Kopnin, N. B.* *Theory of Nonequilibrium Superconductivity.* — Oxford : Oxford Univ. Press, 2001.
67. *Tanaka, Y., Asano, Y., Golubov, A. A., Kashiwaya, S.* Anomalous features of the proximity effect in triplet superconductors // *Phys. Rev. B.* — 2005. — Vol. 72. — 140503(R).
68. *Volkov, A. F., Zaitsev, A. V., Klapwijk, T. M.* Proximity effect under nonequilibrium conditions in double-barrier superconducting junctions // *Physica C.* — 1993. — Vol. 210. — P. 21.
69. *Kastalsky, A., Kleinsasser, A. W., Greene, L. H., Bhat, R., Milliken, F. P., Harbison, J. P.* Observation of pair currents in superconductor-semiconductor contacts // *Phys. Rev. Lett.* — 1991. — Vol. 67. — P. 3026.
70. *van Wees, B. J., de Vries, P., Magnée, P., Klapwijk, T. M.* Excess conductance of superconductor-semiconductor interfaces due to phase conjugation between electrons and holes // *Phys. Rev. Lett.* — 1992. — Vol. 69. — P. 510.
71. *Hekking, F. W. J., Nazarov, Y. V.* Subgap conductivity of a superconductor normal-metal tunnel interface // *Phys. Rev. B.* — 1994. — Vol. 49. — P. 6847.
72. *Volkov, A., Allsopp, N., Lambert, C. J.* Crossover from mesoscopic to classical proximity effects, induced by particle-hole symmetry breaking in Andreev interferometers // *J. Phys.: Condens. Matter.* — 1996. — Vol. 8. — P. L45.
73. *Charlat, P., Courtois, H., Gandit, P., Mailly, D., Volkov, A. F., Pannetier, B.* Reentrance of the Metallic Conductance in a Mesoscopic Proximity Superconductor // *Phys. Rev. Lett.* — 1996. — Vol. 77. — P. 4950.
74. *Emery, V. J., Kivelson, S.* Mapping of the 2-channel Kondo problem to a resonant-level model // *Phys. Rev. B.* — 1992. — Vol. 46. — P. 10812.
75. *Balatsky, A. V., Bonča, J.* Even- and odd-frequency pairing correlations in the one-dimensional  $t$ - $J$ - $h$  model: A comparative study // *Phys. Rev. B.* — 1993. — Vol. 48. — P. 7445.

76. *Coleman, P., Miranda, E., Tsvetlik, A.* Possible realization of odd-frequency pairing in heavy-fermion compounds // *Phys. Rev. Lett.* — 1993. — Vol. 70. — P. 2960.
77. *Heid, R.* On the thermodynamic stability of odd-frequency superconductors // *Z. Phys. B.* — 1995. — Vol. 99. — P. 15.
78. *Abrahams, E., Balatsky, A., Scalapino, D. J., Schrieffer, J. R.* Properties of odd-gap superconductors // *Phys. Rev. B.* — 1995. — Vol. 52. — P. 1271.
79. *Fuseya, Y., Kohno, H., Miyake, K.* Realization of odd-frequency p-wave spin-singlet superconductivity coexisting with antiferromagnetic order near quantum critical point // *J. Phys. Soc. Jpn.* — 2003. — Vol. 72. — P. 2914.
80. *Shigeta, K., Onari, S., Tanaka, Y.* Symmetry of superconducting pairing state in a staggered field // *Phys. Rev. B.* — 2012. — Vol. 85. — P. 224509.
81. *Kusunose, H., Fuseya, Y., Miyake, K.* Possible Odd-Frequency Superconductivity in Strong-Coupling Electron-Phonon Systems // *J. Phys. Soc. Jpn.* — 2011. — Vol. 80. — P. 044711.
82. *Yanagi, Y., Yamashita, Y., Ueda, K.* Dimensional Reduction and Odd-Frequency Pairing of the Checkerboard-Lattice Hubbard Model at 1/4-Filling // *J. Phys. Soc. Jpn.* — 2012. — Vol. 81. — P. 123701.
83. *Hoshino, S., Kuramoto, Y.* Superconductivity of Composite Particles in a Two-Channel Kondo Lattice // *Phys. Rev. Lett.* — 2014. — Vol. 112. — P. 167204.
84. *Eschrig, M., Löfwander, T., Champel, T., Cuevas, J. C., Kopu, J., Schön, G.* Symmetries of Pairing Correlations in Superconductor-Ferromagnet Nanostructures // *J. Low Temp. Phys.* — 2007. — Vol. 147. — P. 457.
85. *Tanaka, Y., Golubov, A. A., Kashiwaya, S., Ueda, M.* Anomalous josephson effect between even- and odd-frequency superconductors // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 99. — P. 037005.
86. *Tanaka, Y., Sato, M., Nagaosa, N.* Symmetry and Topology in Superconductors — Odd-Frequency Pairing and Edge States — // *J. Phys. Soc. Jpn.* — 2012. — Vol. 81. — P. 011013.
87. *Tanaka, Y., Kashiwaya, S.* Anomalous charge transport in triplet superconductor junctions // *Phys. Rev. B.* — 2004. — Vol. 70. — P. 012507.
88. *Asano, Y., Tanaka, Y., Kashiwaya, S.* Anomalous Josephson effect in p-wave dirty junctions // *Phys. Rev. Lett.* — 2006. — Vol. 96. — P. 097007.
89. *Asano, Y., Tanaka, Y., Golubov, A. A., Kashiwaya, S.* Conductance spectroscopy of spin-triplet superconductors // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 99. — P. 067005.
90. *Linder, J., Yokoyama, T., Sudbø, A., Eschrig, M.* Pairing Symmetry Conversion by Spin-Active Interfaces in Magnetic Normal-Metal-Superconductor Junctions // *Phys. Rev. Lett.* — 2009. — Vol. 102. — P. 107008.

91. *Linder, J., Sudbø, A., Yokoyama, T., Grein, R., Eschrig, M.* Pairing Symmetry Conversion by Spin-Active Interfaces in Magnetic Normal-Metal-Superconductor Junctions // Phys. Rev. B. — 2010. — Vol. 81. — P. 214504.
92. *Eschrig, M., Kopu, J., Cuevas, J. C., Schön, G.* Theory of Half-Metal/Superconductor Heterostructures // Phys. Rev. Lett. — 2003. — Vol. 90. — P. 137003.
93. *Eschrig, M.* Scattering problem in non-equilibrium quasiclassical theory of metals and superconductors: general boundary conditions and applications // Phys. Rev. B. — 2009. — Vol. 80. — P. 134511.
94. *Yokoyama, T., Tanaka, Y., Nagaosa, N.* Anomalous Meissner Effect in a Normal-Metal-Superconductor Junction with a Spin-Active Interface // Phys. Rev. Lett. — 2011. — Vol. 106. — P. 246601.
95. *Higashitani, S., Takeuchi, H., Matsuo, S., Nagato, Y., Nagai, K.* Magnetic Response of Odd-Frequency s-Wave Cooper Pairs in a Superfluid Proximity System // Phys. Rev. Lett. — 2013. — Vol. 110. — P. 175301.
96. *Heid, R., Bazaliy, Y. B., Martisovits, V., Cox, D. L.* Staggered superconductivity in UPt<sub>3</sub> — a new phenomenological approach // Phys. Rev. Lett. — 1995. — Vol. 74. — P. 2571.
97. *Coleman, P., Miranda, E., Tsvelik, A.* Odd-frequency pairing in the Kondo-lattice // Phys. Rev. B. — 1994. — Vol. 49. — P. 8955.
98. *Coleman, P., Georges, A., Tsvelik, A. M.* Reflections on the one-dimensional realization of odd-frequency pairing // J. Phys.: Condens. Matter. — 1997. — Vol. 9. — P. 345.
99. *Cox, D. L., Zawadowski, A.* Exotic Kondo effects in metals: magnetic ions in a crystalline electric field and tunnelling centres // Adv. Phys. — 1998. — Vol. 47. — P. 599.
100. *Mironov, S., Mel'nikov, A., Buzdin, A.* Vanishing Meissner effect as a Hallmark of in-Plane Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov Instability in Superconductor-Ferromagnet Layered Systems // Phys. Rev. Lett. — 2012. — Vol. 109. — P. 237002.
101. *Higashitani, S.* Mechanism of paramagnetic Meissner effect in high-temperature superconductors // J. Phys. Soc. Jpn. — 1997. — Vol. 66. — P. 2556.
102. *Barash, Y. S., Kalenkov, M. S., Kurkijärvi, J.* Low-temperature magnetic penetration depth in d-wave superconductors: Zero-energy bound state and impurity effects // Phys. Rev. B. — 2000. — Vol. 62. — P. 6665.
103. *Higashitani, S.* Odd-frequency pairing effect on the superfluid density and the Pauli spin susceptibility in spatially nonuniform spin-singlet superconductors // Phys. Rev. B. — 2014. — Vol. 89. — P. 184505.
104. *Абрикосов, А. А., Горьков, Л. П., Дзялошинский, И. Е.* Методы квантовой теории поля в статистической физике. — М. : Добросвет, 2014.
105. *Higashitani, S., Nagato, Y., Nagai, K.* Proximity Effect between a Dirty Fermi Liquid and Superfluid He-3 // J. Low Temp. Phys. — 2009. — Vol. 155. — P. 83.

106. *Asano, Y., Tanaka, Y., Golubov, A. A.* Josephson effect due to odd-frequency pairs in diffusive half metals // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 98. — P. 107002.
107. *Asano, Y., Sawa, Y., Tanaka, Y., Golubov, A. A.* Odd-frequency pairs and Josephson current through a strong ferromagnet // *Phys. Rev. B.* — 2007. — Vol. 76. — P. 224525.
108. *Braude, V., Nazarov, Y. V.* Fully developed triplet proximity effect // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 98. — P. 077003.
109. *Eschrig, M., Löfwander, T.* Triplet supercurrents in clean and disordered half-metallic ferromagnets // *Nature Phys.* — 2008. — Vol. 4. — P. 138.
110. *Nazarov, Y. V.* Novel circuit theory of Andreev reflection // *Superlattices Microstruct.* — 1999. — Vol. 25. — P. 1221.
111. *Tanaka, Y., Nazarov, Y. V., Kashiwaya, S.* Circuit theory of unconventional superconductor junctions // *Phys. Rev. Lett.* — 2003. — Vol. 90. — P. 167003.
112. *Kusunose, H., Matsumoto, M., Koga, M.* Strong-coupling superconductivity with mixed even- and odd-frequency pairing // *Phys. Rev. B.* — 2012. — Vol. 85. — P. 174528.
113. *Matsumoto, M., Koga, M., Kusunose, H.* Coexistence of Even- and Odd-Frequency Superconductivities Under Broken Time-Reversal Symmetry // *J. Phys. Soc. Jpn.* — 2012. — Vol. 81. — P. 033702.
114. *Mackenzie, A. P., Scaffidi, T., Hicks, C. W., Maeno, Y.* Even odder after twenty-three years: the superconducting order parameter puzzle of  $\text{Sr}_2\text{RuO}_4$  // *npj Quantum Materials.* — 2017. — Vol. 2. — P. 40.
115. *Gough, C. E., Ormeno, R. J., Hein, M. A., Sibley, A., Wingfield, J. J., Powell, J., Porch, A., Yang, G., Maeno, Y., Mao, Z. Q.* The Low Temperature Microwave Properties of  $\text{GdBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$  and  $\text{Sr}_2\text{RuO}_4$  // *J. Supercond.* — 2001. — Vol. 14. — P. 73.
116. *Ormeno, R. J., Hein, M. A., Barraclough, T. L., Sibley, A., Gough, C. E., Mao, Z. Q., Nishizaki, S., Maeno, Y.* Electrodynamical response of  $\text{Sr}_2\text{RuO}_4$  // *Phys. Rev. B.* — 2006. — Vol. 74. — P. 092504.
117. *Baker, P. J., Ormeno, R. J., Gough, C. E., Mao, Z. Q., Nishizaki, S., Maeno, Y.* Microwave surface impedance measurements of  $\text{Sr}_2\text{RuO}_4$ : The effect of impurities // *Phys. Rev. B.* — 2009. — Vol. 80. — P. 115126.
118. *Mattis, D. C., Bardeen, J.* Theory of the Anomalous Skin Effect in Normal and Superconducting Metals // *Phys. Rev.* — 1958. — Vol. 111. — P. 412.
119. *Nam, S. B.* Theory of Electromagnetic Properties of Superconducting and Normal Systems. I // *Phys. Rev.* — 1967. — Vol. 156. — P. 470.
120. *Nazarov, Y. V.* Circuit-theory of andreev conductance // *Phys. Rev. Lett.* — 1994. — Vol. 73. — P. 1420.
121. *Tanaka, Y., Kashiwaya, S.* Theory of tunneling spectroscopy of d-wave superconductors // *Phys. Rev. Lett.* — 1995. — Vol. 74. — P. 3451.

122. *Asano, Y.* Disappearance of ensemble-averaged Josephson current in dirty superconductor-normal-superconductor junctions of d-wave superconductors // *Phys. Rev. B.* — 2001. — Vol. 64. — P. 014511.
123. *Tinkham, M.* Introduction to Superconductivity (2nd edition). — New York : Dover, 2004.
124. *Eilenberger, G.* Transformation of Gorkov's Equation for Type II Superconductors into Transport-Like Equations // *Z. Phys.* — 1968. — Vol. 214. — P. 195.
125. *Ларкин, А. И., Овчинников, Ю. Н.* О квазиклассическом методе в теории сверхпроводимости // *ЖЭТФ.* — 1968. — Т. 55. — С. 2262.
126. *Bakurskiy, S. V., Golubov, A. A., Kupriyanov, M. Y., Yada, K., Tanaka, Y.* Anomalous surface states at interfaces in p-wave superconductors // *Phys. Rev. B.* — 2014. — Vol. 90. — P. 064513.
127. *Bakurskiy, S. V., Klenov, N. V., Soloviev, I. I., Kupriyanov, M. Y., Golubov, A. A.* Observability of surface currents in p-wave superconductors // *Supercond. Sci. Technol.* — 2017. — Vol. 30. — P. 044005.
128. *Овчинников, Ю. Н.* Критический ток тонких пленок при диффузном отражении от стенок // *ЖЭТФ.* — 1969. — Т. 56. — С. 1590.
129. *Nagai, K., Nagato, Y., Yamamoto, M., Higashitani, S.* Surface Bound States in Superfluid  $^3\text{He}$  // *J. Phys. Soc. Jpn.* — 2008. — Vol. 77. — P. 111003.
130. *Aoki, Y., Wada, Y., Saitoh, M., Nomura, R., Okuda, Y., Nagato, Y., Yamamoto, M., Higashitani, S., Nagai, K.* Observation of surface Andreev bound states of superfluid He-3 by transverse acoustic impedance measurements // *Phys. Rev. Lett.* — 2005. — Vol. 95. — P. 075301.
131. *Yokoyama, T., Tanaka, Y., Golubov, A. A.* Theory of pairing symmetry inside the Abrikosov vortex core // *Phys. Rev. B.* — 2008. — Vol. 78. — P. 012508.
132. *Walter, H., Prusseit, W., Semerad, R., Kinder, H., Assmann, W., Huber, H., Burkhardt, H., Rainer, D., Sauls, J. A.* Low-temperature anomaly in the penetration depth of  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  films: Evidence for Andreev bound states at surfaces // *Phys. Rev. Lett.* — 1998. — Vol. 80. — P. 3598.
133. *Suzuki, S.-I., Asano, Y.* Paramagnetic instability of small topological superconductors // *Phys. Rev. B.* — 2014. — Vol. 89. — P. 184508.
134. *Suzuki, S.-I., Asano, Y.* Effects of surface roughness on the paramagnetic response of small unconventional superconductors // *Phys. Rev. B.* — 2015. — Vol. 91. — P. 214510.
135. *Suzuki, S.-I., Asano, Y.* Spontaneous edge current in a small chiral superconductor with a rough surface // *Phys. Rev. B.* — 2016. — Vol. 94. — P. 155302.
136. *Fominov, Y. V., Golubov, A. A., Kupriyanov, M. Y.* Triplet proximity effect in FSF trilayers // *Письма в ЖЭТФ.* — 2003. — Т. 77. — С. 609.

137. *Moraru, I. C., Pratt, Jr., W. P., Birge, N. O.* Observation of standard spin-switch effects in ferromagnet/superconductor/ferromagnet trilayers with a strong ferromagnet // *Phys. Rev. B.* — 2006. — Vol. 74. — 220507(R).
138. *Gu, J. Y., You, C.-Y., Jiang, J. S., Pearson, J., Bazaliy, Y. B., Bader, S. D.* Magnetization-Orientation Dependence of the Superconducting Transition Temperature in the Ferromagnet-Superconductor-Ferromagnet System: CuNi/Nb/CuNi // *Phys. Rev. Lett.* — 2002. — Vol. 89. — P. 267001.
139. *Potenza, A., Marrows, C. H.* Superconductor-ferromagnet CuNi/Nb/CuNi trilayers as superconducting spin-valve core structures // *Phys. Rev. B.* — 2005. — Vol. 71. — 180503(R).
140. *Moraru, I. C., Pratt, Jr., W. P., Birge, N. O.* Magnetization-dependent T-c shift in ferromagnet/superconductor/ferromagnet trilayers with a strong ferromagnet // *Phys. Rev. Lett.* — 2006. — Vol. 96. — P. 037004.
141. *Nowak, G., Zabel, H., Westerholt, K., Garifullin, I., Marcellini, M., Liebig, A., Hjörvarsson, B.* Superconducting spin valves based on epitaxial Fe/V superlattices // *Phys. Rev. B.* — 2008. — Vol. 78. — P. 134520.
142. *Rusanov, A. Y., Habraken, S., Aarts, J.* Inverse spin switch effects in ferromagnet-superconductor-ferromagnet trilayers with strong ferromagnets // *Phys. Rev. B.* — 2006. — Vol. 73. — 060505(R).
143. *Steiner, R., Ziemann, P.* Magnetic switching of the superconducting transition temperature in layered ferromagnetic/superconducting hybrids: Spin switch versus stray field effects // *Phys. Rev. B.* — 2006. — Vol. 74. — P. 094504.
144. *Singh, A., Sürgers, C., v. Löhneysen, H.* Superconducting spin switch with perpendicular magnetic anisotropy // *Phys. Rev. B.* — 2007. — Vol. 75. — P. 024513.
145. *Kim, D. H., Hwang, T. J.* Domain stability effect on magneto resistance in ferromagnet/superconductor/ferromagnet trilayers // *Physica C.* — 2007. — Vol. 455. — P. 58.
146. *Leksin, P. V., Salikhov, R. I., Garifullin, I. A., Vinzelberg, K. H., Kataev, V., Klingeler, R., Tagirov, L. R., Büchner, B.* Observation of the ‘inverse’ spin valve effect in a Ni/V/Ni trilayer system // *Письма в ЖЭТФ.* — 2009. — Т. 90. — С. 64.
147. *Linder, J., Zareyan, M., Sudbø, A.* Proximity effect in ferromagnet/superconductor hybrids: From diffusive to ballistic motion // *Phys. Rev. B.* — 2009. — Vol. 79. — P. 064514.
148. *Oh, S., Youm, D., Beasley, M. R.* A superconductive magnetoresistive memory element using controlled exchange interaction // *Appl. Phys. Lett.* — 1997. — Vol. 71. — P. 2376.
149. *Westerholt, K., Sprungmann, D., Zabel, H., Brucas, R., Hjörvarsson, B., Tikhonov, D. A., Garifullin, I. A.* Superconducting spin valve effect of a V layer coupled to an antiferromagnetic [Fe/V] superlattice // *Phys. Rev. Lett.* — 2005. — Vol. 95. — P. 097003.
150. *Fominov, Y. V., Chtchelkatchev, N. M., Golubov, A. A.* Critical temperature of superconductor/ferromagnet bilayers // *Письма в ЖЭТФ.* — 2001. — Т. 74. — С. 101.

151. *Fominov, Y. V., Chtchelkatchev, N. M., Golubov, A. A.* Nonmonotonic critical temperature in superconductor/ferromagnet bilayers // *Phys. Rev. B.* — 2002. — Vol. 66. — P. 014507.
152. *Löfwander, T., Champel, T., Eschrig, M.* Phase diagrams of ferromagnet-superconductor multilayers with misaligned exchange fields // *Phys. Rev. B.* — 2007. — Vol. 75. — P. 014512.
153. *Zhu, J., Krivorotov, I. N., Halterman, K., Valls, O. T.* Angular Dependence of the Superconducting Transition Temperature in Ferromagnet-Superconductor-Ferromagnet Trilayers // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — Vol. 105. — P. 207002.
154. *Leksin, P. V., Garif'yanov, N. N., Garifullin, I. A., Schumann, J., Kataev, V., Schmidt, O. G., Büchner, B.* Oscillation behavior of the Spin Valve Effect for Supercurrent in a Superconductor/Ferromagnet Thin Film Heterostructures // *Phys. Rev. Lett.* — 2011. — Vol. 106. — P. 067005.
155. *Leksin, P. V., Garif'yanov, N. N., Garifullin, I. A., Schumann, J., Kataev, V., Schmidt, O. G., Büchner, B.* Physical properties of the superconducting spin-valve Fe/Cu/Fe/In heterostructure // *Phys. Rev. B.* — 2012. — Vol. 85. — P. 024502.
156. *Lazar, L., Westerholt, K., Zabel, H., Tagirov, L. R., Goryunov, Y. V., Garif'yanov, N. N., Garifullin, I. A.* Superconductor/ferromagnet proximity effect in Fe/Pb/Fe trilayers // *Phys. Rev. B.* — 2000. — Vol. 61. — P. 3711.
157. *Linder, J., Robinson, J. W. A.* Superconducting spintronics // *Nature Phys.* — 2015. — Vol. 11. — P. 307.
158. *Flokstra, M. G., Cunningham, T. C., Kim, J., Satchell, N., Burnell, G., Curran, P. J., Bending, S. J., Kinane, C. J., Cooper, J. F. K., Langridge, S., Isidori, A., Pugach, N., Eschrig, M., Lee, S. L.* Controlled Suppression of Superconductivity by the Generation of Polarized Cooper Pairs in Spin Valve Structures // *Phys. Rev. B.* — 2015. — Vol. 91. — P. 060501(R).
159. *Alidoust, M., Halterman, K., Valls, O. T.* Zero-energy peak and triplet correlations in nanoscale superconductor/ferromagnet/ferromagnet spin valves // *Phys. Rev. B.* — 2015. — Vol. 92. — P. 014508.
160. *Mironov, S., Buzdin, A.* Triplet proximity effect in superconducting heterostructures with a half-metallic layer // *Phys. Rev. B.* — 2015. — Vol. 92. — P. 184506.
161. *Flokstra, M. G., Satchell, N., Kim, J., Burnell, G., Curran, P. J., Bending, S. J., Cooper, J. F. K., Kinane, C. J., Langridge, S., Isidori, A., Pugach, N., Eschrig, M., Luetkens, H., Suter, A., Prokscha, T., Lee, S. L.* Remotely induced magnetism in a normal metal using a superconducting spin-valve // *Nature Phys.* — 2016. — Vol. 12. — P. 57.
162. *Halterman, K., Alidoust, M.* Half-metallic superconducting triplet spin valve // *Phys. Rev. B.* — 2016. — Vol. 94. — P. 064503.

163. *Srivastava, A., Olde Olthof, L. A. B., Di Bernardo, A., Komori, S., Amado, M., Palomares-Garcia, C., Alidoust, M., Halterman, K., Blamire, M. G., Robinson, J. W. A.* Magnetization Control and Transfer of Spin-Polarized Cooper Pairs into a Half-Metal Manganite // *Phys. Rev. Appl.* — 2017. — Vol. 8. — P. 044008.
164. *Kamashev, A. A., Leksin, P. V., Schumann, J., Kataev, V., Thomas, J., Gemming, T., Büchner, B., Garifullin, I. A.* Proximity effect between a superconductor and a partially spin-polarized ferromagnet: Case study of the Pb/Cu/Co<sub>2</sub>Cr<sub>1-x</sub>Fe<sub>x</sub>Al trilayer // *Phys. Rev. B.* — 2017. — Vol. 96. — P. 024512.
165. *Barone, A., Paterno, G.* Physics and Applications of the Josephson Effect. — New York : Wiley, 1982.
166. *Choi, M. S., Bruder, C., Loss, D.* Spin-dependent Josephson current through double quantum dots and measurement of entangled electron states // *Phys. Rev. B.* — 2000. — Vol. 62. — P. 13569.
167. *Wang, Z., Hu, X.* Interference and Switching of Josephson Current Carried by Nonlocal Spin-Entangled Electrons in a SQUID-Like System with Quantum Dots // *Phys. Rev. Lett.* — 2011. — Vol. 106. — P. 037002.
168. *Jacquet, R., Rech, J., Jonckheere, T., Zazunov, A., Martin, T.* Cooper pair splitting and recombination in a nanoSQUID geometry at high transparency // *Phys. Rev. B.* — 2015. — Vol. 92. — P. 235429.
169. *Mironov, S. V., Mel'nikov, A. S., Buzdin, A. I.* Double Path Interference and Magnetic Oscillations in Cooper Pair Transport through a Single Nanowire // *Phys. Rev. Lett.* — 2015. — Vol. 114. — P. 227001.
170. *Recher, P., Sukhorukov, E. V., Loss, D.* Andreev tunneling, Coulomb blockade, and resonant transport of nonlocal spin-entangled electrons // *Phys. Rev. B.* — 2001. — Vol. 63. — P. 165314.
171. *Lesovik, G. B., Martin, T., Blatter, G.* Electronic entanglement in the vicinity of a superconductor // *Eur. Phys. J. B.* — 2001. — Vol. 24. — P. 287.
172. *Börlin, J., Belzig, W., Bruder, C.* Full counting statistics of a superconducting beam splitter // *Phys. Rev. Lett.* — 2002. — Vol. 88. — P. 197001.
173. *Chtchelkatchev, N. M., Blatter, G., Lesovik, G. B., Martin, T.* Bell inequalities and entanglement in solid-state devices // *Phys. Rev. B.* — 2002. — Vol. 66. — 161320(R).
174. *Hofstetter, L., Csonka, S., Nygård, J., Schönenberger, C.* Cooper pair splitter realized in a two-quantum-dot Y-junction // *Nature (London).* — 2009. — Vol. 461. — P. 960.
175. *Herrmann, L. G., Portier, F., Roche, P., Levy Yeyati, A., Kontos, T., Strunk, C.* Carbon Nanotubes as Cooper-Pair Beam Splitters // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — Vol. 104. — P. 026801.
176. *Schindele, J., Baumgartner, A., Schönenberger, C.* Near-Unity Cooper Pair Splitting Efficiency // *Phys. Rev. Lett.* — 2012. — Vol. 109. — P. 157002.

177. *Das, A., Ronen, Y., Heiblum, M., Mahalu, D., Kretinin, A. V., Shtrikman, H.* High-efficiency Cooper pair splitting demonstrated by two-particle conductance resonance and positive noise cross-correlation // *Nature Commun.* — 2012. — Vol. 3. — P. 1165.
178. *Probst, B., Dominguez, F., Schroer, A., Levy Yeyati, A., Recher, P.* Signatures of nonlocal Cooper-pair transport and of a singlet-triplet transition in the critical current of a double-quantum-dot Josephson junction // *Phys. Rev. B.* — 2016. — Vol. 94. — P. 155445.
179. *Deacon, R. S., Oiwa, A., Sailer, J., Baba, S., Kanai, Y., Shibata, K., Hirakawa, K., Tarucha, S.* Cooper pair splitting in parallel quantum dot Josephson junctions // *Nature Commun.* — 2015. — Vol. 6. — P. 7446.
180. *Anwar, M. S., Czeschka, F., Hesselberth, M., Porcuc, M., Aarts, J.* Long-range supercurrents through half-metallic ferromagnetic  $\text{CrO}_2$  // *Phys. Rev. B.* — 2010. — Vol. 82. — P. 100501(R).
181. *Singh, A., Voltan, S., Lahabi, K., Aarts, J.* Colossal Proximity Effect in a Superconducting Triplet Spin Valve Based on the Half-Metallic Ferromagnet  $\text{CrO}_2$  // *Phys. Rev. X.* — 2015. — Vol. 5. — P. 021019.
182. *Leksin, P. V., Garif'yanov, N. N., Garifullin, I. A., Fominov, Y. V., Schumann, J., Krupskaya, Y., Kataev, V., Schmidt, O. G., Büchner, B.* Evidence for Triplet Superconductivity in a Superconductor-Ferromagnet Spin Valve // *Phys. Rev. Lett.* — 2012. — Vol. 109. — P. 057005.
183. *Beckmann, D., Weber, H. B., v. Löhneysen, H.* Evidence for crossed Andreev reflection in superconductor-ferromagnet hybrid structures // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Vol. 93. — P. 197003.
184. *Beckmann, D., v. Löhneysen, H.* Experimental evidence for crossed Andreev reflection // *AIP Conf. Proc.* — 2006. — Vol. 850. — P. 875.
185. *Mélin, R.* Long-range statistical fluctuations of the crossed Josephson current // *Phys. Rev. B.* — 2005. — Vol. 72. — P. 134508.
186. *Ioselevich, P. A., Ostrovsky, P. M., Fominov, Y. V., Feigel'man, M. V.* Cooper pair splitting in diffusive magnetic SQUIDS // *Phys. Rev. B.* — 2017. — Vol. 95. — P. 094508.
187. *Mélin, R., Peysson, S.* Crossed Andreev reflection at ferromagnetic domain walls // *Phys. Rev. B.* — 2003. — Vol. 68. — P. 174515.
188. *Beenakker, C. W. J.* Universal limit of critical-current fluctuations in mesoscopic Josephson-junctions // *Phys. Rev. Lett.* — 1991. — Vol. 67. — P. 3836.
189. *Nazarov, Y. V., Blanter, Y. M.* Quantum Transport: Introduction to Nanoscience. — Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2009.
190. *Gefen, Y., Imry, Y., Azbel, M. Y.* Quantum oscillations and the Aharonov-Bohm effect for parallel resistors // *Phys. Rev. Lett.* — 1984. — Vol. 52. — P. 129.

191. *Datta, S., Melloch, M. R., Bandyopadhyay, S., Noren, R., Vaziri, M., Miller, M., Reifenger, R.* Novel interference effects between parallel quantum wells // *Phys. Rev. Lett.* — 1985. — Vol. 55. — P. 2344.
192. *Barash, Y. S., Bobkova, I. V., Kopp, T.* Josephson current in S-FIF-S junctions: Non-monotonic dependence on misorientation angle // *Phys. Rev. B.* — 2002. — Vol. 66. — 140503(R).
193. *Eroms, J., Weiss, D., De Boeck, J., Borghs, G., Zülicke, U.* Andreev Reflection at High Magnetic Fields: Evidence for Electron and Hole Transport in Edge States // *Phys. Rev. Lett.* — 2005. — Vol. 95. — P. 107001.
194. *Batov, I. E., Schäpers, T., Chtchelkatchev, N. M., Hardtdegen, H., Ustinov, A. V.* Andreev reflection and strongly enhanced magnetoresistance oscillations in  $\text{Ga}_x\text{In}_{1-x}\text{As}/\text{InP}$  heterostructures with superconducting contacts // *Phys. Rev. B.* — 2007. — Vol. 76. — P. 115313.
195. *Kononov, A., Egorov, S. V., Kvon, Z. D., Mikhailov, N. N., Dvoretzky, S. A., Deviatov, E. V.* Andreev reflection at the edge of a two-dimensional semimetal // *Phys. Rev. B.* — 2016. — Vol. 93. — 041303(R).
196. *Spiesser, A., Saito, H., Fujita, Y., Yamada, S., Hamaya, K., Yuasa, S., Jansen, R.* Giant Spin Accumulation in Silicon Nonlocal Spin-Transport Devices // *Phys. Rev. Appl.* — 2017. — Vol. 8. — P. 064023.
197. *Zollner, K., Gmitra, M., Fabian, J.* Electrically tunable exchange splitting in bilayer graphene on monolayer  $\text{Cr}_2\text{X}_2\text{Te}_6$  with  $\text{X} = \text{Ge}, \text{Si}, \text{and Sn}$  // *New J. Phys.* — 2018. — Vol. 20. — P. 073007.
198. *Skryabina, O. V., Egorov, S. V., Goncharova, A. S., Klimenko, A. A., Kozlov, S. N., Ryazanov, V. V., Bakurskiy, S. V., Kupriyanov, M. Y., Golubov, A. A., Napolskii, K. S., Stolyarov, V. S.* Josephson coupling across a long single-crystalline Cu nanowire // *Appl. Phys. Lett.* — 2017. — Vol. 110. — P. 222605.
199. *Stolyarov, V. S.* — 2016. — RU Patent 2 599 904 C1.
200. *Pickett, W. E., Moodera, J. S.* Half Metallic Magnets // *Phys. Today.* — 2001. — Vol. 54. — P. 39.
201. *Coey, J. M. D., Venkatesan, M.* Half-metallic ferromagnetism: Example of  $\text{CrO}_2$  // *J. Appl. Phys.* — 2002. — Vol. 91. — P. 8345.
202. *Zou, X., Xiao, G.* Half-metallic chromium dioxide ( $\text{CrO}_2$ ) nanostructures and field-dependent magnetic domain evolution // *J. Appl. Phys.* — 2008. — Vol. 103. — P. 07D701.
203. *Zhao, Q., Wen, G., Liu, Z., Fan, Y., Zou, G., Li, L., Zheng, R., Ringer, S. P., Mao, H.-K.* Synthesis of dense, single-crystalline  $\text{CrO}_2$  nanowire arrays using AAO template-assisted chemical vapor deposition // *Nanotechnology.* — 2011. — Vol. 22. — P. 125603.
204. *Singh, A., Jansen, C., Lahabi, K., Aarts, J.* Growth of half-metallic  $\text{CrO}_2$  nanostructures for superconducting spintronic applications. — 2016. — eprint: [arXiv:1603.02675](https://arxiv.org/abs/1603.02675).

205. *Jung, M., Noh, H., Doh, Y.-J., Song, W., Chong, Y., Choi, M.-S., Yoo, Y., Seo, K., Kim, N., Woo, B.-C., Kim, B., Kim, J.* Superconducting Junction of a Single-Crystalline Au Nanowire for an Ideal Josephson Device // ACS Nano. — 2011. — Vol. 5. — P. 2271.
206. *Голубов, А. А., Куприянов, М. Ю.* Эффект Джозефсона в туннельных SNINS и SNIS структурах с конечной прозрачностью SN границ // ЖЭТФ. — 1989. — Т. 96. — С. 1420.
207. *Moussy, N., Courtois, H., Pannetier, B.* Local spectroscopy of a proximity superconductor at very low temperature // Europhys. Lett. — 2001. — Vol. 55. — P. 861.
208. *Fazio, R., Lucheroni, C.* Local density of states in superconductor-ferromagnetic hybrid systems // Europhys. Lett. — 1999. — Vol. 45. — P. 707.
209. *Sellier, H., Baraduc, C., Leftoch, F., Calemczuk, R.* Temperature-induced crossover between 0 and  $\pi$  states in S/F/S junctions // Phys. Rev. B. — 2003. — Vol. 68. — P. 054531.
210. *Kontos, T., Aprili, M., Lesueur, J., Grison, X., Dumoulin, L.* Superconducting proximity effect at the paramagnetic-ferromagnetic transition // Phys. Rev. Lett. — 2004. — Vol. 93. — P. 137001.
211. *Ryazanov, V. V., Obozнов, V. A., Prokofiev, A. S., Bolginov, V. V., Feofanov, A. K.* Superconductor-Ferromagnet-Superconductor  $\pi$ -junctions // J. Low Temp. Phys. — 2004. — Vol. 136. — P. 385.
212. *Горьков, Л. П., Русинов, А. И.* Ферромагнетизм в сверхпроводящих сплавах // ЖЭТФ. — 1964. — Т. 46. — С. 1363.
213. *Fulde, P., Maki, K.* Theory of Superconductors Containing Magnetic Impurities // Phys. Rev. — 1966. — Vol. 141. — P. 275.
214. *Houzet, M., Vinokur, V., Pistolessi, F.* Superharmonic Josephson relation at 0- $\pi$ -junction transition // Phys. Rev. B. — 2005. — Vol. 72. — 220506(R).
215. *Efetov, K. B.* Supersymmetry in Disorder and Chaos. — Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1996.
216. *Lamacraft, A., Simons, B. D.* Superconductors with magnetic impurities: Instantons and subgap states // Phys. Rev. B. — 2001. — Vol. 64. — P. 014514.
217. *Bulaevskii, L. N., Buzdin, A. I., Panjukov, S. V., Kulić, M. L.* Theory of magnetic-structure in reentrant magnetic superconductors HoMo<sub>6</sub>S<sub>8</sub> and ErRh<sub>4</sub>B<sub>4</sub> // Phys. Rev. B. — 1983. — Vol. 28. — P. 1370.
218. *Буздин, А. И.* Поверхностная сверхпроводимость в ферромагнетиках // Письма в ЖЭТФ. — 1985. — Т. 42. — С. 283.
219. *Altland, A., Simons, B. D., Taras-Semchuk, D.* Field theory of mesoscopic fluctuations in superconductor-normal-metal systems // Adv. Phys. — 2000. — Vol. 49. — P. 321.
220. *Finkel'stein, A. M.* Electron Liquid in Disordered Conductors // Soviet Scientific Reviews / ed. by I. M. Khalatnikov. — London : Harwood Academic, 1990. — Vol. 14.

221. *Mirlin, A. D.* Statistics of energy levels and eigenfunctions in disordered systems // Phys. Rep. — 2000. — Vol. 326. — P. 259.
222. *Larkin, A. I., Ovchinnikov, Y. N.* Vortex Motion in Superconductors // Nonequilibrium Superconductivity / ed. by D. N. Langenberg, A. I. Larkin. — New York : Elsevier, 1986. — P. 530.
223. *Rammer, J., Smith, H.* Quantum field-theoretical methods in transport-theory of metals // Rev. Mod. Phys. — 1986. — Vol. 58. — P. 323.
224. *Veshchunov, I. S., Oboznov, V. A., Rossolenko, A. N., Prokofiev, A. S., Vinnikov, L. Y., Rusanov, A. Y., Matveev, D. V.* Observation of the magnetic domain structure in  $\text{Cu}_{0.47}\text{Ni}_{0.53}$  thin films at low temperatures // Письма в ЖЭТФ. — 2008. — Т. 88. — С. 873.
225. *Hicks, T. J., Rainford, B., Kouvel, J. S., Low, G. G., Comly, J. B.* Giant Moments in Ni-Cu Alloys Near the Critical Composition // Phys. Rev. Lett. — 1969. — Vol. 22. — P. 531.
226. *Levin, K., Mills, D. L.* Contribution of giant spin clusters to the resistivity, neutron-scattering cross section, and specific heat in alloys: Application to Ni-Cu // Phys. Rev. B. — 1974. — Vol. 9. — P. 2354.
227. *Bergeret, F. S., Volkov, A. F., Efetov, K. B.* Josephson current in superconductor-ferromagnet structures with a nonhomogeneous magnetization // Phys. Rev. B. — 2001. — Vol. 64. — P. 134506.
228. *Woolf, M. A., Reif, F.* Effect of Magnetic Impurities on the Density of States of Superconductors // Phys. Rev. — 1965. — Vol. 137. — A557.
229. *Edelstein, A. S.* Anomalous Gapless Superconductivity Due to Scattering from Localized Noninteracting Spins // Phys. Rev. Lett. — 1967. — Vol. 19. — P. 1184.
230. *Yu, L.* Bound state in superconductors with paramagnetic impurities // Acta Phys. Sin. — 1965. — Vol. 21. — P. 75.
231. *Soda, T., Matsuura, T., Nagaoka, Y.* *s-d* Exchange Interaction in a Superconductor // Prog. Theor. Phys. — 1967. — Vol. 38. — P. 551.
232. *Balatsky, A. V., Vekhter, I., Zhu, J.-X.* Impurity-induced states in conventional and unconventional superconductors // Rev. Mod. Phys. — 2006. — Vol. 78. — P. 373.
233. *Bauriedl, W., Ziemann, P., Buckel, W.* Electron-tunneling observation of impurity bands in superconducting manganese-implanted lead // Phys. Rev. Lett. — 1981. — Vol. 47. — P. 1163.
234. *Dumoulin, L., Guyon, E., Nedellec, P.* Tunneling study of impurity bands in Kondo superconducting systems — Cu alloys backed by Pb // Phys. Rev. Lett. — 1975. — Vol. 34. — P. 264.
235. *Dumoulin, L., Guyon, E., Nedellec, P.* Tunneling study of localized bands in superconductors with magnetic-impurities (normal Kondo alloys in superconducting proximity) // Phys. Rev. B. — 1977. — Vol. 16. — P. 1086.

236. *Przybyasz, J. X., Ginsberg, D. M.* Electronic thermal-conductivity of superconducting lead-manganese and indium-manganese alloy-films // *Phys. Rev. B.* — 1976. — Vol. 14. — P. 1039.
237. *Yazdani, A., Jones, B. A., Lutz, C. P., Crommie, M. F., Eigler, D. M.* Probing the Local Effects of Magnetic Impurities on Superconductivity // *Science.* — 1997. — Vol. 275. — P. 1767.
238. *Ji, S.-H., Zhang, T., Fu, Y.-S., Chen, X., Ma, X.-C., Li, J., Duan, W.-H., Jia, J.-F., Xue, Q.-K.* High-Resolution Scanning Tunneling Spectroscopy of Magnetic Impurity Induced Bound States in the Superconducting Gap of Pb Thin Films // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 100. — P. 226801.
239. *Franke, K. J., Schulze, G., Pascual, J. I.* Competition of Superconducting Phenomena and Kondo Screening at the Nanoscale // *Science.* — 2011. — Vol. 332. — P. 940.
240. *Ménard, G. C., Guissart, S., Brun, C., Pons, S., Stolyarov, V. S., Debontridder, F., Leclerc, M. V., Janod, E., Cario, L., Roditchev, D., Simon, P., Cren, T.* Coherent long-range magnetic bound states in a superconductor // *Nature Phys.* — 2015. — Vol. 11. — P. 1013.
241. *Choi, S. K., Lee, D.-H., Louie, S. G., Clarke, J.* Localization of Metal-Induced Gap States at the Metal-Insulator Interface: Origin of Flux Noise in SQUIDS and Superconducting Qubits // *Phys. Rev. Lett.* — 2009. — Vol. 103. — P. 197001.
242. *Barends, R., van Vliet, S., Baselmans, J. J. A., Yates, S. J. C., Gao, J. R., Klapwijk, T. M.* Enhancement of quasiparticle recombination in Ta and Al superconductors by implantation of magnetic and nonmagnetic atoms // *Phys. Rev. B.* — 2009. — Vol. 79. — P. 020509.
243. *Palomba, F., Andreone, A., Pica, G., Saluzzo, M., Attanasio, C., Di Luccio, T., Maritato, L., Russo, R.* Surface impedance measurements of Nb/(Cu-Mn) artificial multilayers // *Physica B.* — 2000. — Vol. 284–288. — P. 955.
244. *Srikanth, H., Sridhar, S., Gajewski, D. A., Maple, M. B.* Microwave properties of  $(\text{Pr}_x\text{Y}_{1-x})\text{Ba}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ : influence of magnetic scattering // *Physica C.* — 1997. — Vol. 291. — P. 235.
245. *Prokhorov, V., Lee, Y. P., Kaminsky, G.* Peculiarity of surface microwave resistance in overdoped YBCO films // *IEEE Trans. on Magnetics.* — 1999. — Vol. 35. — P. 3166.
246. *Hein, M., Kaiser, T., Müller, G.* Surface resistance of epitaxial  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$  films on various substrates: Effects of pair condensation and quasiparticle scattering // *Phys. Rev. B.* — 2000. — Vol. 61. — P. 640.
247. *Абрикосов, А. А., Горьков, Л. П., Халатников, И. М.* Сверхпроводник в высокочастотном поле // *ЖЭТФ.* — 1958. — Т. 35. — С. 265.
248. *Абрикосов, А. А., Горьков, Л. П., Халатников, И. М.* Анализ экспериментальных данных о поверхностном импедансе сверхпроводников // *ЖЭТФ.* — 1959. — Т. 37. — С. 187.

249. *Nam, S. B.* Theory of Electromagnetic Properties of Strong-Coupling and Impure Superconductors. II // *Phys. Rev.* — 1967. — Vol. 156. — P. 487.
250. *Skalski, S., Betbeder-Matibet, O., Weiss, P. R.* Properties of Superconducting Alloys Containing Paramagnetic Impurities // *Phys. Rev.* — 1964. — Vol. 136. — A1500.
251. *Ларкин, А. И., Овчинников, Ю. Н.* Плотность состояний в неоднородных сверхпроводниках // *ЖЭТФ.* — 1971. — Т. 61. — С. 2147.
252. *Marchetti, F. M., Simons, B. D.* Tail states in disordered superconductors with magnetic impurities: the unitarity limit // *J. Phys. A.* — 2002. — Vol. 35. — P. 4201.
253. *Maki, K.* Gapless Superconductivity // *Superconductivity* / ed. by R. D. Parks. — New York : Marcel Dekker, 1969. — Chapter 18.
254. *Абрикосов, А. А.* Основы теории металлов. — М. : Физматлит, 2009.
255. *Aumentado, J., Keller, M. W., Martinis, J. M., Devoret, M. H.* Nonequilibrium quasiparticles and 2e periodicity in single-Cooper-pair transistors // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Vol. 92. — P. 066802.
256. *Lamacraft, A., Simons, B. D.* Tail states in a superconductor with magnetic impurities // *Phys. Rev. Lett.* — 2000. — Vol. 85. — P. 4783.
257. *Абрикосов, А. А., Горьков, Л. П.* К теории сверхпроводящих сплавов. I. Электродинамика сплавов при абсолютном нуле // *ЖЭТФ.* — 1958. — Т. 35. — С. 1558.
258. *Абрикосов, А. А., Горьков, Л. П.* Сверхпроводящие сплавы при температурах выше абсолютного нуля // *ЖЭТФ.* — 1959. — Т. 36. — С. 319.
259. *Anderson, P. W.* Theory of dirty superconductors // *J. Phys. Chem. Sol.* — 1959. — Vol. 11. — P. 26.
260. *Лифшиц, И. М., Гредескул, С. А., Пастур, Л. А.* Введение в теорию неупорядоченных систем. — М. : Наука, 1982.
261. *Meyer, J. S., Simons, B. D.* Gap fluctuations in inhomogeneous superconductors // *Phys. Rev. B.* — 2001. — Vol. 64. — P. 134516.
262. *Ostrovsky, P. M., Skvortsov, M. A., Feigel'man, M. V.* Density of states below the Thouless gap in a mesoscopic SNS junction // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Vol. 87. — P. 027002.
263. *Tracy, C. A., Widom, H.* Level-spacing distributions and the Airy kernel // *Commun. Math. Phys.* — 1994. — Vol. 159. — P. 151.
264. *Tracy, C. A., Widom, H.* On orthogonal and symplectic matrix ensembles // *Commun. Math. Phys.* — 1996. — Vol. 177. — P. 727.
265. *Beloborodov, I. S., Narozhny, B. N., Aleiner, I. L.* Effect of Time Reversal Symmetry Breaking on the Density of States in Small Superconducting Grains // *Phys. Rev. Lett.* — 2000. — Vol. 85. — P. 816.

266. *Vavilov, M. G., Brouwer, P. W., Ambegaokar, V., Beenakker, C. W. J.* Universal gap fluctuations in the superconductor proximity effect // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Vol. 86. — P. 874.
267. *Skvortsov, M. A., Feigel'man, M. V.* Subgap states in disordered superconductors // *ЖЭТФ.* — 2013. — Т. 144. — С. 560.
268. *Silva, A., Ioffe, L. B.* Subgap states in dirty superconductors and their effect on dephasing in Josephson qubits // *Phys. Rev. B.* — 2005. — Vol. 71. — P. 104502.
269. *Sakurai, A.* Comments on Superconductors with Magnetic Impurities // *Prog. Theor. Phys.* — 1970. — Vol. 44. — P. 1472.
270. *Bespalov, A., Houzet, M., Meyer, J. S., Nazarov, Y. V.* Density of states in gapped superconductors with pairing-potential impurities // *Phys. Rev. B.* — 2016. — Vol. 93. — P. 104521.
271. *Stepanov, N. A., Tikhonov, K. S., Skvortsov, M. A.* — in preparation.
272. *Feigel'man, M. V., Skvortsov, M. A.* Universal Broadening of the Bardeen-Cooper-Schrieffer Coherence Peak of Disordered Superconducting Films // *Phys. Rev. Lett.* — 2012. — Vol. 109. — P. 147002.
273. *Альтшулер, Б. Л.* Флуктуации остаточной проводимости неупорядоченных проводников // *Письма в ЖЭТФ.* — 1985. — Т. 41. — С. 530.
274. *Lee, P. A., Stone, A. D.* Universal conductance fluctuations in metals // *Phys. Rev. Lett.* — 1985. — Vol. 55. — P. 1622.
275. *Belitz, D., Kirkpatrick, T. R.* The Anderson-Mott transition // *Rev. Mod. Phys.* — 1994. — Vol. 66. — P. 261.
276. *Houzet, M., Skvortsov, M. A.* Mesoscopic fluctuations of the supercurrent in diffusive Josephson junctions // *Phys. Rev. B.* — 2008. — Vol. 77. — P. 024525.
277. *Altland, A., Simons, B.* *Condensed Matter Field Theory.* — Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2010.
278. *Brézin, E., Gross, D. J., Itzykson, C.* Density of states in the presence of a strong magnetic-field and random impurities // *Nucl. Phys. B.* — 1984. — Vol. 235. — P. 24.
279. *Ostrovsky, P. M., Protopopov, I. V., König, E. J., Gornyi, I. V., Mirlin, A. D., Skvortsov, M. A.* Density of States in a Two-Dimensional Chiral Metal with Vacancies // *Phys. Rev. Lett.* — 2014. — Vol. 113. — P. 186803.
280. *Kamenev, A., Mézard, M.* Wigner-Dyson statistics from the replica method // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1999. — Vol. 32. — P. 4373.
281. *Altland, A., Kamenev, A.* Wigner-Dyson statistics from the Keldysh sigma-model // *Phys. Rev. Lett.* — 2000. — Vol. 85. — P. 5615.
282. *Sambandamurthy, G., Engel, L. W., Johansson, A., Shahar, D.* Superconductivity-related insulating behavior // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Vol. 92. — P. 107005.

283. *Gantmakher, V. F., Golubkov, M. V., Dolgoplov, V. T., Shashkin, A. A., Tsydynzhapov, G. E.* Observation of the parallel-magnetic-field-induced superconductor-insulator transition in thin amorphous InO films // Письма в ЖЭТФ. — 2000. — Т. 71. — С. 693.
284. *Steiner, M., Boebinger, G., Kapitulnik, A.* Possible field-tuned superconductor-insulator transition in high- $T_c$  superconductors: Implications for pairing at high magnetic fields // Phys. Rev. Lett. — 2005. — Vol. 94. — P. 107008.
285. *Goldman, A. M., Markovic, N.* Superconductor-insulator transitions in the two-dimensional limit // Phys. Today. — 1998. — Vol. 51. — P. 39.
286. *Skvortsov, M. A., Feigel'man, M. V.* Superconductivity in disordered thin films: Giant mesoscopic fluctuations // Phys. Rev. Lett. — 2005. — Vol. 95. — P. 057002.
287. *Feigel'man, M. V., Ioffe, L. B., Yuzbashyan, E. A.* Theory of superconducting pairing near the mobility edge. — 2005. — eprint: [arXiv:cond-mat/0504766](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0504766).
288. *Dubi, Y., Meir, Y., Avishai, Y.* Theory of the magnetoresistance of disordered superconducting films // Phys. Rev. B. — 2006. — Vol. 73. — P. 054509.
289. *Ефетов, К. Б.* Фазовый переход в гранулированных сверхпроводниках // ЖЭТФ. — 1980. — Т. 78. — С. 2017.
290. *Simanek, E.* Effect of charging energy on transition-temperature of granular superconductors // Solid State Commun. — 1979. — Vol. 31. — P. 419.
291. *Larkin, A. I., Ovchinnikov, Y. N.* Decay of the supercurrent in tunnel-junctions // Phys. Rev. B. — 1983. — Vol. 28. — P. 6281.
292. *Chakravarty, S., Ingold, G.-L., Kivelson, S., Luther, A.* Onset of global phase coherence in Josephson-junction arrays — a dissipative phase-transition // Phys. Rev. Lett. — 1986. — Vol. 56. — P. 2303.
293. *Chakravarty, S., Kivelson, S., Zimanyi, G. T., Halperin, B. I.* Effect of quasi-particle tunneling on quantum-phase fluctuations and the onset of superconductivity in antigranulocytes films // Phys. Rev. B. — 1987. — Vol. 35. — P. 7256.
294. *Clogston, A. M.* Upper Limit for the Critical Field in Hard Superconductors // Phys. Rev. Lett. — 1962. — Vol. 9. — P. 266.
295. *Ларкин, А. И.* Сверхпроводник малых размеров в сильном магнитном поле // ЖЭТФ. — 1965. — Т. 48. — С. 232.
296. *Isichenko, M. B.* Percolation, statistical topography, and transport in random-media // Rev. Mod. Phys. — 1992. — Vol. 64. — P. 961.
297. *Beloborodov, I. S., Efetov, K. B., Lopatin, A. V., Vinokur, V. M.* Transport properties of granular metals at low temperatures // Phys. Rev. Lett. — 2003. — Vol. 91. — P. 246801.
298. *Beloborodov, I. S., Lopatin, A. V., Vinokur, V. M.* Coulomb effects and hopping transport in granular metals // Phys. Rev. B. — 2005. — Vol. 72. — P. 125121.

299. *Beloborodov, I. S., Efetov, K. B., Larkin, A. I.* Magnetoresistance of granular superconducting metals in a strong magnetic field // *Phys. Rev. B.* — 2000. — Vol. 61. — P. 9145.
300. *Ambegaokar, V., Eckern, U., Schön, G.* Quantum dynamics of tunneling between superconductors // *Phys. Rev. Lett.* — 1982. — Vol. 48. — P. 1745.
301. *Averin, D. V., Nazarov, Y. V.* Single-electron charging of a superconducting island // *Phys. Rev. Lett.* — 1992. — Vol. 69. — P. 1993.
302. *Sachdev, S.* Quantum Phase Transitions. — Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2001.
303. *Fisher, M. P. A.* Quantum phase-transitions in disordered 2-dimensional superconductors // *Phys. Rev. Lett.* — 1990. — Vol. 65. — P. 923.
304. *Wang, X., Grabert, H.* Coulomb charging at large conduction // *Phys. Rev. B.* — 1996. — Vol. 53. — P. 12621.
305. *Ostrovsky, P. M., Skvortsov, M. A., Feigel'man, M. V.* Coulomb blockade of proximity effect at large conductance // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Vol. 92. — P. 176805.
306. *Ambegaokar, V., Baratoff, A.* Tunneling Between Superconductors // *Phys. Rev. Lett.* — 1963. — Vol. 10. — P. 486.
307. *Negele, J. W., Orland, H.* Quantum Many-Particle Systems. — Boulder, CO : Perseus Books, 1988.
308. *Kamenev, A., Andreev, A.* Electron-electron interactions in disordered metals: Keldysh formalism // *Phys. Rev. B.* — 1999. — Vol. 60. — P. 2218.
309. *Averin, D. V., Nazarov, Y. V.* Parity effect in a small superconducting island // *Physica B.* — 1994. — Vol. 203. — P. 310.
310. *Efetov, K. B., Tschersich, A.* Coulomb effects in granular materials at not very low temperatures // *Phys. Rev. B.* — 2003. — Vol. 67. — P. 174205.
311. *Belzig, W., Wilhelm, F. K., Bruder, C., Schön, G., Zaikin, A. D.* Quasiclassical Green's function approach to mesoscopic superconductivity // *Superlattices Microstruct.* — 1999. — Vol. 25. — P. 1251.
312. *Ostrovsky, P. M., Feigel'man, M. V.* Josephson Effect in a Coulomb-blockaded SINIS Junction // *Письма в ЖЭТФ.* — 2005. — Т. 82. — С. 863.
313. *Chandrasekhar, B. S.* A note on the maximum critical field of high-field superconductors // *Appl. Phys. Lett.* — 1962. — Vol. 1. — P. 7.
314. *Kee, H.-Y., Aleiner, I. L., Altshuler, B. L.* Theory of tunneling anomalies in superconductors above the paramagnetic limit // *Phys. Rev. B.* — 1998. — Vol. 58. — P. 5757.

## Приложение А

### Квазиклассические уравнения и комплексная проводимость

Выведем выражение для локальной комплексной проводимости через квазиклассические узаделевские функции Грина. Вывод будет применим для произвольной спиновой структуры сверхпроводящего состояния.

Простейшим примером являются синглетные сверхпроводники. В то же время с точки зрения приложений к системам с киральными  $p$ -волновым сверхпроводникам нас будет также интересовать триплетное сверхпроводящее состояние. Нетривиальная особенность этого состояния в том, что  $p$ -волновая сверхпроводимость не может существовать в диффузной области, в то время как в результате эффекта близости в ней могут наводиться  $s$ -волновые триплетные сверхпроводящие корреляции ( $\omega$ -нечётное сверхпроводящее состояние [59; 85; 86]). Поскольку в этом случае объёмным источником сверхпроводимости является чистый  $p$ -волновой сверхпроводник, мы начнём рассмотрение с квазиклассических уравнений Эйленбергера-Ларкина-Овчинникова, что позволит проследить переход от чистого к грязному пределу.

#### А.1 Общий вид парного потенциала

Уравнение Эйленбергера-Ларкина-Овчинникова [124; 125] для запаздывающей функции Грина (в представлении вещественной энергии) имеет вид

$$iv\hat{\mathbf{k}}\nabla_{\mathbf{r}}\check{g}^R + [\check{\mathcal{H}}^R, \check{g}^R] = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\check{\mathcal{H}}^R = \begin{pmatrix} (E + i0)\hat{\sigma}_0 & \hat{\Delta}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, E) \\ \hat{\underline{\Delta}}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, E) & -(E + i0)\hat{\sigma}_0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2\tau} \langle \check{g}^R(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, E) \rangle_{\hat{\mathbf{k}}}, \quad (\text{A.2})$$

$$\check{g}^R(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, E) = \begin{pmatrix} \hat{g}^R(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, E) & \hat{f}^R(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, E) \\ -\hat{\underline{f}}^R(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, E) & -\hat{\underline{g}}^R(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, E) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Матрицы Паули в спиновом пространстве обозначены  $\hat{\sigma}_\nu$ , при  $\nu = 0, 1, 2, 3$ , где  $\hat{\sigma}_0$  — единичная матрица. Единичный вектор в направлении волнового вектора обозначен  $\hat{\mathbf{k}}$ . Во всех иных случаях «шляпка» ( $\hat{\phantom{x}}$ ) означает матрицы  $2 \times 2$ , а «галочка» ( $\check{\phantom{x}}$ ) — матрицы  $4 \times 4$  (в прямом произведении спинового пространства и пространства Горькова-Намбу). Операция «тильда-подчёркивание» определена как

$$\check{\underline{X}}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, E) = X^*(\mathbf{r}, -\hat{\mathbf{k}}, -E). \quad (\text{A.4})$$

Функция Грина подчиняется условию нормировки  $(\check{g}^R)^2 = \check{1}$ .

В общем случае парный потенциал может быть разложен на спиновые компоненты:

$$\hat{\Delta}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, E) = \sum_{\nu} i \Delta_{\nu}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, E) \hat{\sigma}_{\nu} \hat{\sigma}_2, \quad (\text{A.5})$$

с одной синглетной компонентой ( $\nu = 0$ ) и тремя триплетными ( $\nu = 1, 2, 3$ ). Компоненты  $\Delta_{\nu}$ , вообще говоря, комплексны. Мы рассматриваем только парные потенциалы, относящиеся к классу чётных по частоте,

$$\Delta_{\nu}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, -E) = \Delta_{\nu}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, E). \quad (\text{A.6})$$

В отсутствие спин-зависящих потенциалов и спин-орбитального взаимодействия нормальная часть функции Грина тривиальна в спиновом пространстве, в то время как аномальная часть имеет те же компоненты, что и парный потенциал:

$$\hat{g}^R(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, E) = g^R(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, E) \hat{\sigma}_0, \quad (\text{A.7})$$

$$\hat{f}^R(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, E) = \sum_{\nu} i_s f_{\nu}^R(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, E) \hat{\sigma}_{\nu} \hat{\sigma}_2, \quad (\text{A.8})$$

где

$$i_s = \begin{cases} 1, & \text{синглет } (\nu = 0) \\ i, & \text{триплет } (\nu = 1, 2, 3). \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Здесь введён спин-зависящий множитель  $i_s$ , который различает разные спиновые компоненты в разложении (A.8). Такая запись мотивирована тем, что окончательно получится выражение для проводимости на частоте (A.37), которое имеет одинаковый вид в синглетном и триплетном случаях [см. также формулы (A.35) и (A.36), который также имеют совпадающий вид в двух случаях].

В диффузном пределе уравнения Эйленбергера-Ларкина-Овчинникова сводятся к уравнению Узаделя [65] на  $\check{\mathcal{G}}^R(\mathbf{r}, E)$ , изотропную часть функции Грина:

$$D \nabla_{\mathbf{r}} (\check{\mathcal{G}}^R(\mathbf{r}, E) \nabla_{\mathbf{r}} \check{\mathcal{G}}^R(\mathbf{r}, E)) + i [\check{\mathcal{H}}_0^R, \check{\mathcal{G}}^R(\mathbf{r}, E)] = 0, \quad (\text{A.10})$$

$$\check{\mathcal{H}}_0^R = \begin{pmatrix} (E + i0) \hat{\sigma}_0 & i \Delta_0(\mathbf{r}, E) \hat{\sigma}_2 \\ i \Delta_0^*(\mathbf{r}, E) \hat{\sigma}_2 & -(E + i0) \hat{\sigma}_0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

$$\check{\mathcal{G}}^R(\mathbf{r}, E) = \langle \check{g}^R(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, E) \rangle_{\hat{\mathbf{k}}}, \quad (\text{A.12})$$

где  $D$  — коэффициент диффузии. Обратим внимание, что в диффузном пределе в уравнениях (A.10)-(A.12) может выжить только  $s$ -волновая (следовательно, синглетная) компонента парного потенциала. В то же время симметрия функции Грина также может соответствовать  $s$ -волновым триплетным  $\omega$ -нечётным сверхпроводящим корреляциям. В этом случае (который реализуется, например, в диффузной области  $p$ -волнового сверхпроводника [59; 85; 86]) синглетный парный потенциал  $\Delta_0$  в уравнениях (A.10)-(A.12) обращается в ноль, а сверхпроводящие корреляции наведены из чистой области триплетного сверхпроводника.

Для нахождения проводимости (определяющей отклик тока на внешнее поле) можно обобщить уравнения Узаделя (A.10)-(A.12), включив в них векторный потенциал  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  и

рассмотреть линейный отклик на такое возмущение. Комплексная проводимость тогда можно выразить через невозмущённые функции Грина как

$$\frac{\sigma(\mathbf{r}, \omega)}{\sigma_0} = -\frac{\pi}{8\omega} \int \frac{dE}{2\pi} \text{Tr} \{ \check{\mathcal{T}}_3 \check{\mathcal{G}}^R(\mathbf{r}, E + \omega) \check{\mathcal{T}}_3 \check{\mathcal{G}}^K(\mathbf{r}, E) + \check{\mathcal{T}}_3 \check{\mathcal{G}}^K(\mathbf{r}, E + \omega) \check{\mathcal{T}}_3 \check{\mathcal{G}}^A(\mathbf{r}, E) \}, \quad (\text{A.13})$$

где

$$\check{\mathcal{T}}_3 = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_0 & 0 \\ 0 & -\hat{\sigma}_0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

Опережающую ( $\check{\mathcal{G}}^A$ ) и келдышевскую ( $\check{\mathcal{G}}^K$ ) функции Грина можно записать через запаздывающую:

$$\check{\mathcal{G}}^A(\mathbf{r}, E) = -\check{\mathcal{T}}_3 (\check{\mathcal{G}}^R(\mathbf{r}, E))^\dagger \check{\mathcal{T}}_3, \quad (\text{A.15})$$

$$\check{\mathcal{G}}^K(\mathbf{r}, E) = (\check{\mathcal{G}}^R(\mathbf{r}, E) - \check{\mathcal{G}}^A(\mathbf{r}, E)) \tanh\left(\frac{E}{2T}\right). \quad (\text{A.16})$$

Ниже мы будем иметь дело только с запаздывающей функцией Грина, и индекс  $R$  для краткости писать не будет. Формулу (A.13) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(\mathbf{r}, \omega)}{\sigma_0} = \frac{1}{16\omega} \int dE \text{Tr} \{ & (\check{\mathcal{G}}^\dagger(\mathbf{r}, E) \check{\mathcal{G}}(\mathbf{r}, E + \omega) + \check{\mathcal{G}}^\dagger(\mathbf{r}, E) \check{\mathcal{T}}_3 \check{\mathcal{G}}^\dagger(\mathbf{r}, E + \omega) \check{\mathcal{T}}_3) \tanh\left(\frac{E + \omega}{2T}\right) - \\ & - (\check{\mathcal{G}}^\dagger(\mathbf{r}, E) \check{\mathcal{G}}(\mathbf{r}, E + \omega) + \check{\mathcal{G}}(\mathbf{r}, E) \check{\mathcal{T}}_3 \check{\mathcal{G}}(\mathbf{r}, E + \omega) \check{\mathcal{T}}_3) \tanh\left(\frac{E}{2T}\right) \}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

## A.2 Парный потенциал с одной спиновой компонентой

Написанные выше формулы подразумевают произвольную (смешанную) спиновую структуру парного потенциала (A.5) и функции Грина  $4 \times 4$ . Их можно упростить до записи  $2 \times 2$ , если рассматривать только какую-либо одну компоненту парного потенциала, т.е. если предположить, что  $\hat{\Delta}$  имеет только одну спиновую компоненту  $\nu$ :

$$\hat{\Delta}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, E) = i\Delta(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, E) \hat{\sigma}_\nu \hat{\sigma}_2, \quad (\text{A.18})$$

где у скалярного парного потенциала (в правой части) индекс  $\nu$  опущен. По определению (A.4) получаем соотношения

$$\hat{\Delta}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, E) = -i s_s s_p s_f \Delta^*(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, E) \hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_\nu = i \Delta^*(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, E) \hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_\nu, \quad (\text{A.19})$$

где  $s_s, s_p, s_f$  равны  $\pm 1$  в зависимости от спиной симметрии  $\Delta$ , её пространственной чётности и частотной (энергетической) симметрии соответственно. В последнем равенстве учтён принцип Паули (фермионная антисимметрия куперовского спаривания), который приводит к требованию  $s_s s_p s_f = -1$ .

В случае однокомпонентного парного потенциала аномальная часть функции Грина также имеет только одну компоненту

$$\check{g}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, E) = \begin{pmatrix} g \hat{\sigma}_0 & i_s f \hat{\sigma}_\nu \hat{\sigma}_2 \\ i_s f \hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_\nu & -g \hat{\sigma}_0 \end{pmatrix}_{(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, E)}, \quad (\text{A.20})$$

и мы можем явно учесть спиновую структуру этой матрицы  $4 \times 4$  с помощью следующего унитарного преобразования:

$$\check{g} = \check{\Gamma}_\nu \check{g} \check{\Gamma}_\nu^{-1}, \quad \check{\Gamma}_\nu = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_0 & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_\nu \hat{\sigma}_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.21})$$

Получающаяся функция Грина  $\check{g}$  становится бесспиновой (пропорциональной  $\hat{\sigma}_0$ ). Поэтому уравнения можно свести к виду  $2 \times 2$  в пространстве Горькова-Намбу, и (запаздывающая) матрица  $\hat{g}$  размера  $2 \times 2$  подчиняется следующим уравнениям:

$$iv\hat{\mathbf{k}}\nabla_{\mathbf{r}}\hat{g} + [\hat{H}, \hat{g}] = 0, \quad (\text{A.22})$$

$$\hat{H}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, E) = \begin{pmatrix} E + i0 & i\Delta(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, E) \\ i\Delta^*(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, E) & -E - i0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2\tau} \langle \hat{g}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, E) \rangle_{\hat{\mathbf{k}}}, \quad (\text{A.23})$$

$$\hat{g}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, E) = \begin{pmatrix} g & i_s f \\ i_s \underline{f} & -g \end{pmatrix}_{(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, E)}, \quad (\text{A.24})$$

которые являются редуцированной формой уравнений (A.1)-(A.3). Из условия нормировки получаем

$$g^2 + i_s^2 f \underline{f} = 1, \quad g = \underline{g}. \quad (\text{A.25})$$

В мацубаровском представлении ( $E = i\omega_n$ ) уравнения (A.22)-(A.25) для триплетного случая ( $i_s = i$ ) приводят к уравнениям Эйленбергера-Ларкина-Овчинникова (1.187)-(1.188) и (1.192)-(1.193) после смены обозначений  $\underline{f} = -f^+$ .

В диффузном пределе получаем уравнение Узаделя на функцию  $\hat{G}(\mathbf{r}, E) = \langle \hat{g}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, E) \rangle_{\hat{\mathbf{k}}}$ , изотропную часть функции Грина  $2 \times 2$ :

$$D\nabla_{\mathbf{r}} \left( \hat{G}\nabla_{\mathbf{r}}\hat{G} \right) + i[\hat{H}_0, \hat{G}] = 0, \quad (\text{A.26})$$

$$\hat{H}_0(\mathbf{r}, E) = \begin{pmatrix} E + i0 & i\Delta_0(\mathbf{r}, E) \\ i\Delta_0^*(\mathbf{r}, E) & -E - i0 \end{pmatrix}, \quad \hat{G}(\mathbf{r}, E) = \begin{pmatrix} G & i_s F \\ i_s \underline{F} & -G \end{pmatrix}_{(\mathbf{r}, E)}, \quad (\text{A.27})$$

что является редуцированной формой уравнений (A.10)-(A.12). В формуле (A.27) учтено, что в диффузном пределе может выжить только  $s$ -волновая (следовательно, синглетная) компонента парного потенциала. Поэтому восстановлен индекс  $\nu = 0$  у компоненты  $\Delta$ . Эта запись справедлива и триплетном случае, когда  $\Delta_0 = 0$  и уравнения (A.26)-(A.27) описывают  $s$ -волновые триплетные  $\omega$ -нечётные корреляции, наведённые в результате эффекта близости. Условие нормировки принимает вид

$$G^2 + i_s^2 F \underline{F} = 1. \quad (\text{A.28})$$

### A.3 Однокомпонентный парный потенциал с $\varphi = 0$

В отсутствие внешних источников фазы (магнитные поля, контакт со сверхпроводниками с разностью фаз) сверхпроводящая фаза  $\varphi$  является константой, что позволяет упростить

уравнения. Полагая эту константу равной нулю, получаем вещественную  $\Delta_0$  в синглетном  $s$ -волновом случае ( $\nu = 0$ ,  $s_s = -1$ ). Можно убедиться, что уравнение Узаделя для  $\hat{G}^*(\mathbf{r}, -E)$  тогда имеет точно такой же вид, как и исходное для  $\hat{G}(\mathbf{r}, E)$ , см. формулу (A.26), что означает симметрию

$$\hat{G}^*(\mathbf{r}, -E) = \hat{G}(\mathbf{r}, E). \quad (\text{A.29})$$

На первый взгляд такое же рассуждение годится и в триплетном случае, поскольку он соответствует  $\Delta_0 = 0$  (так что  $\Delta_0$  можно считать вещественной). Однако этот случай требует осторожности. Дело в том, что уравнение Узаделя с  $\Delta_0 = 0$  не содержит информации об остальной части структуры. Сверхпроводимость в диффузной области наводится из чистой области с ненулевой  $\Delta_\nu$  (где  $\nu = 1, 2$  или  $3$ ), и необходимо либо рассматривать симметрии в диффузной части, учитывая граничные условия на границе с чистой областью, либо использовать более общий подход и рассматривать симметрии системы в целом. Мы будем использовать этот последний способ, что требует сделать шаг назад и рассмотреть уравнения Эйленбергера-Ларкина-Овчинникова (применимые ко всем частям структуры).

Другая сложность триплетного случая связана с тем, что в дополнение к общей сверхпроводящей фазе возможна зависящая от геометрии внутренняя фаза из-за анизотропии исходного сверхпроводящего состояния. Именно такой случай имеет место в интересующей нас системе с киральным  $p$ -волновым сверхпроводником. Взаимодействие вида

$$V(\theta, \theta') = V_0 (\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta') \quad (\text{A.30})$$

приводит к парному потенциалу, который может быть записан как

$$\Delta(\mathbf{r}, \theta) = e^{i\varphi(\mathbf{r})} (\Delta_x(\mathbf{r}) \cos \theta + i\Delta_y(\mathbf{r}) \sin \theta) \quad (\text{A.31})$$

с вещественными  $\Delta_x$ ,  $\Delta_y$  и  $\varphi$ . В отсутствие внешних источников фазы фаза  $\varphi$  — константа, и мы можем положить её равной нулю. Однако имеется также внутренняя фаза парного потенциала (из-за коэффициента  $i$  у одного из членов), роль которой зависит от геометрии задачи. Поэтому фиксация фазы требует фиксации геометрии задачи.

Нас интересует квазиодномерная задача, в которой  $\Delta$  зависит только от  $x$  (координата вдоль оси, нормальной к границе); тогда

$$\Delta(x, \theta) = \Delta_x(x) \cos \theta + i\Delta_y(x) \sin \theta. \quad (\text{A.32})$$

В этом случае можно напрямую убедиться в том, что уравнение Эйленбергера-Ларкина-Овчинникова для функции  $\hat{g}^*(x, -\theta, -E)$  имеет точно такой же вид, как исходное уравнение для  $\hat{g}(x, \theta, E)$ , см. формулу (A.22), что означает симметрию

$$\hat{g}^*(x, -\theta, -E) = \hat{g}(x, \theta, E). \quad (\text{A.33})$$

Усреднение по  $\theta$  в диффузной области в конце концов приводит к такому же соотношению симметрии (A.29), как и в синглетном случае.

В результате формула (A.29) (справедливая как в синглетном, так и в триплетном случае) означает, что случай  $\varphi = 0$  приводит к дополнительной симметрии:

$$i_s \underline{F}(x, E) = i_s^* F(x, E). \quad (\text{A.34})$$

Условие нормировки (A.28) тогда упрощается:

$$G^2 + F^2 = 1, \quad (\text{A.35})$$

что позволяет использовать стандартную  $\Theta$ -параметризацию,  $G = \cos \Theta$  и  $F = \sin \Theta$ . Таким образом получается уравнение Узаделя в известной записи

$$D\nabla^2 \Theta + 2iE \sin \Theta + 2\Delta_0 \cos \Theta = 0 \quad (\text{A.36})$$

(в триплетном случае это уравнение может описывать только  $s$ -волновую триплетную  $\omega$ -нечётную сверхпроводимость, наведённую в диффузную область за счёт эффекта близости; при этом  $\Delta_0 = 0$ ).

Обозначая  $E_{\pm} = E \pm \omega/2$ , может записать общее выражение (A.17) для проводимости на частоте в виде

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(\mathbf{r}, \omega)}{\sigma_0} = \frac{1}{2\omega} \int_{-\infty}^{\infty} dE \left\{ \tanh\left(\frac{E_+}{2T}\right) [G^*(E_-) \operatorname{Re} G(E_+) + iF^*(E_-) \operatorname{Im} F(E_+)] \right. \\ \left. - \tanh\left(\frac{E_-}{2T}\right) [G(E_+) \operatorname{Re} G(E_-) - iF(E_+) \operatorname{Im} F(E_-)] \right\}. \quad (\text{A.37}) \end{aligned}$$

Именно это выражение для комплексной проводимости используется в основном тексте. Если выделить вещественную и мнимую части, получаются формулы (1.195) и (1.198).

В синглетном случае отличие полученного выражения от результатов для ядра отклика, полученных в работах [104; 118; 119; 247–250] состоит в том, что наше выражение записано через *квазиклассические* функции Грина (в грязном пределе), которые могут быть непосредственно найдены из уравнения Узаделя. Похожее выражение использовалось в работе [251], однако оно было записано с помощью контурных интегралов в плоскости комплексной энергии  $E$  с разрезами от точек  $\pm E_g$ , т.е. рассматривался режим Абрикосова-Горькова для плотности состояний с одной щелью. Наше выражение (A.37) — более общее; в частности, оно применимо в случае более сложной структуры плотности состояний с несколькими краями спектра и в случае бесщелевой сверхпроводимости.

## Приложение Б

### Общее решение задачи о вычислении $T_c$ спинового клапана S/F1/F2

Здесь мы рассмотрим вычисление функции  $W$ , определяющей эффективное граничное условие и решение задачи о критической температуре в спиновом клапане S/F1/F2 (см. разделы 2.1 и 2.2). Рассматриваем наиболее общую ситуацию, которая описывается уравнениями Узаледа. Все слои предполагаются конечными, ферромагнетики разными, границы имеют произвольные параметра Куприянова-Лукичева [55]. Координаты границ слоев:  $-d_S$ ,  $0$ ,  $d_{F1}$ ,  $d_{F1} + d_{F2}$ . Площади всех границ  $\mathcal{A}$  одинаковы.

Определяем характерные длины

$$\xi_S = \sqrt{\frac{D_S}{2\pi T_{cS}}}, \quad \xi_{F1} = \sqrt{\frac{D_{F1}}{2\pi T_{cS}}}, \quad \xi_{F2} = \sqrt{\frac{D_{F2}}{2\pi T_{cS}}}. \quad (\text{Б.1})$$

Параметры S/F1 границы:

$$\gamma = \frac{\rho_S \xi_S}{\rho_{F1} \xi_{F1}}, \quad \gamma^{(b)} = \frac{R^{(b)} \mathcal{A}}{\rho_{F1} \xi_{F1}}. \quad (\text{Б.2})$$

Параметры F1/F2 границы:

$$\gamma_{FF} = \frac{\rho_{F1} \xi_{F1}}{\rho_{F2} \xi_{F2}}, \quad \gamma_{FF}^{(b)} = \frac{R_{FF}^{(b)} \mathcal{A}}{\rho_{F2} \xi_{F2}}. \quad (\text{Б.3})$$

Граничные условия при  $x = 0$  имеют вид

$$\hat{f}_S = \hat{f}_{F1} - \gamma^{(b)} \xi_{F1} \frac{d\hat{f}_{F1}}{dx}, \quad (\text{Б.4})$$

$$\xi_S \frac{d\hat{f}_S}{dx} = \gamma \xi_{F1} \frac{d\hat{f}_{F1}}{dx}. \quad (\text{Б.5})$$

Граничные условия при  $x = d_{F1}$  имеют вид

$$\hat{f}_{F1} = \hat{f}_{F2} - \gamma_{FF}^{(b)} \xi_{F2} \frac{d\hat{f}_{F2}}{dx}, \quad (\text{Б.6})$$

$$\xi_{F1} \frac{d\hat{f}_{F1}}{dx} = \gamma_{FF} \xi_{F2} \frac{d\hat{f}_{F2}}{dx}. \quad (\text{Б.7})$$

Волновые векторы:

$$k_\omega = \sqrt{\frac{2\omega}{D_S}}, \quad k_{\omega 1} = \sqrt{\frac{2\omega}{D_{F2}}}, \quad k_{\omega 2} = \sqrt{\frac{2\omega}{D_{F1}}}, \quad (\text{Б.8})$$

$$k_{h1} = \sqrt{\frac{h_1}{D_{F2}}}, \quad \tilde{k}_{h1} = \sqrt{k_{\omega 1}^2 + 2ik_{h1}^2}, \quad (\text{Б.9})$$

$$k_{h2} = \sqrt{\frac{h_2}{D_{F1}}}, \quad \tilde{k}_{h2} = \sqrt{k_{\omega 2}^2 + 2ik_{h2}^2}. \quad (\text{Б.10})$$

Решение в S слое ( $A$  и  $B$  — чисто мнимые):

$$\begin{pmatrix} f_0(x) \\ f_3(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ A \\ B \end{pmatrix} \frac{\cosh(k_\omega(x + d_S))}{\cosh(k_\omega d_S)}. \quad (\text{Б.11})$$

Решение в слое F1 ( $C_1$  и  $S_1$  — чисто мнимые,  $C_3 = -C_2^*$ ,  $S_3 = -S_2^*$ ):

$$\begin{pmatrix} f_0(x) \\ f_3(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cosh(k_{\omega_2} x) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cosh(\tilde{k}_{h_2} x) + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cosh(\tilde{k}_{h_2}^* x) + \\ + S_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sinh(k_{\omega_2} x) + S_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sinh(\tilde{k}_{h_2} x) + S_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sinh(\tilde{k}_{h_2}^* x). \quad (\text{Б.12})$$

Решение в слое F2 ( $E_1$  — чисто мнимое,  $E_3 = -E_2^*$ ):

$$\begin{pmatrix} f_0(x) \\ f_3(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = E_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \frac{\cosh(k_{\omega_1}(x - d_{F1} - d_{F2}))}{\cosh(k_{\omega_1} d_{F2})} + \\ + E_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \frac{\cosh(\tilde{k}_{h1}(x - d_{F1} - d_{F2}))}{\cosh(\tilde{k}_{h1} d_{F2})} + E_3 \begin{pmatrix} -1 \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \frac{\cosh(\tilde{k}_{h1}^*(x - d_{F1} - d_{F2}))}{\cosh(\tilde{k}_{h1}^* d_{F2})}. \quad (\text{Б.13})$$

Граничные условия на границах SF и FF в целом дают 12 уравнений. Одно из них содержит  $f_0$ , еще одно —  $df_0/dx$  на SF границе ( $x = 0$ ). То, которое содержит производную, может быть записано в виде

$$-\xi_s \frac{df_0}{dx} \Big|_{x=0} = -\gamma \xi_{F1} (\tilde{k}_{h1} S_2 - \tilde{k}_{h1}^* S_3) = -2\gamma \xi_{F1} \operatorname{Re}(\tilde{k}_{h1} S_2). \quad (\text{Б.14})$$



## Приложение В

### Сильные магнитные примеси: края спектра в теории среднего поля

Рассмотрим края спектра в рамках теории среднего поля для сверхпроводника с магнитными примесями. Как показано на рисунках 3.7 и 3.8, при определённых параметрах одновременно может существовать до трёх краёв. В случае, показанном на рисунке 3.7(d), обозначаем нижний и верхний края примесной зоны как  $E_{g1}$  и  $E_{g2}$  соответственно, а нижний край континуума обозначаем  $E_{g3}$ . Слияние примесной зоны и континуума, как в случае рисунка 3.7(b), означает слияние  $E_{g2}$  и  $E_{g3}$ , поэтому остаётся только один край спектра,  $E_{g1}$  (режим АГ). В бесщелевом режиме 3.7(a),  $E_{g1}$  обращается в ноль, и этот край спектра также пропадает. С другой стороны ближе к унитарному пределу ( $\mu \rightarrow 1$ ),  $E_{g1}$  может обратиться в ноль при том, что примесная зона по-прежнему существует [случай 3.7(c)], и тогда есть два края спектра: верхний край примесной зоны  $E_{g2}$  и нижний край континуума  $E_{g3}$ .

Чтобы найти края спектра  $E_g$  (здесь  $E_g$  — любой из краёв спектра), отталкиваясь от уравнения (3.155), выразим  $E(\psi)$ . Далее, меняя  $\psi$  от 0 до  $\infty$  вдоль вещественной оси и рассматривая только физические решения [растущие участки кривой  $E(\psi)$ ], можем определить интервалы энергии, соответствующие нулевой плотности состояний (это именно те интервалы, которые соответствуют вещественным  $\psi$ ) [24; 25]. Требуя  $E'(\psi_g) = 0$ , находим неявное уравнение на угол  $\psi_g$ :

$$\frac{1 + \mu(\cosh 2\psi_g - 2)}{(1 - \mu \cosh 2\psi_g)^2} \cosh^3 \psi_g = \frac{1}{\eta}, \quad (\text{B.1})$$

которое определяет спектральные края  $E_g$ :

$$\frac{E_g}{\Delta} = \tanh \psi_g - \eta \frac{\sinh \psi_g}{1 - \mu \cosh 2\psi_g}. \quad (\text{B.2})$$

В зависимости от значений параметров  $\eta$  и  $\mu$  число решений уравнения (B.1) меняется от 0 до 3, что соответствует режимам (a)–(d) на рисунке 3.7.

Сплошная синяя линия на рисунке 3.7 соответствует появлению конечной плотности состояний при  $E = 0$  (т.е. исчезновению  $E_{g1}$ ). Это означает  $\psi_g = 0$ , и формула (B.1) даёт простой результат для этой линии:  $\mu = 1 - \eta$ .

Штриховая красная линия соответствует моменту слияния примесной зоны и континуума. Два края спектра [соответствующие решениям уравнения (B.1)],  $E_{g2}$  и  $E_{g3}$ , одновременно пропадают, и эта ситуация описывается уравнением  $E'(\psi_g) = E''(\psi_g) = 0$ , которое приводит к следующему аналитическому выражению:

$$\eta = \frac{2(2\mu)^{3/2}(1 + \sqrt{3 - 2\mu^2})^2}{(3 + \mu + 2\sqrt{3 - 2\mu^2})^{3/2}(2 - \mu + \sqrt{3 - 2\mu^2})}. \quad (\text{B.3})$$

При малых  $\eta$  и  $\mu$ , соответствующих нижнему левому углу диаграммы, эта линия, разделяющая режимы (b) и (d), ведёт себя как  $\mu \propto \eta^{2/3}$ . В верхнем правом углу она заканчивается в точке  $(\eta, \mu) = (4/3^{3/2}, 1)$ .

## Приложение Г

### Флуктуации параметра порядка, вызванные магнитными примесями

#### Г.1 Общее выражение для $C_\Delta(q)$

Образование связанного состояния на одиночной магнитной примеси сопровождается подавлением параметра порядка в окрестности примеси [25]. Пространственный масштаб этого подавления определяется длиной когерентности (грязной или чистой, см. раздел Г.2). В случае многих примесей  $\Delta(\mathbf{r})$  становится случайным полем, связанным с концентрацией магнитных примесей  $n_s(\mathbf{r})$  соотношением (3.190). Соответствующее ядро  $C_\Delta(q)$  будет вычислено в данном разделе.

Начнём с действия (3.181), в котором магнитный вклад  $\mathcal{S}_{\text{mag}}$  [формула (3.185)] нужно разложить на среднее  $\mathcal{S}_{\text{mag}}^{(1)}$  [формула (3.196)] и флуктуирующую компоненту  $\delta\mathcal{S}_{\text{mag}} = \mathcal{S}_{\text{mag}} - \mathcal{S}_{\text{mag}}^{(1)}$ , пропорциональную  $\delta n_s$ :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_\Delta + \mathcal{S}_D + \mathcal{S}_{\text{mag}}^{(1)} + \delta\mathcal{S}_{\text{mag}}[\delta n_s(\mathbf{r})]. \quad (\text{Г.1})$$

Первые три члена имеют однородное седловое решение  $\theta_{0\varepsilon}$ ,  $\Delta_0$ . Определяя флуктуации  $\theta_{1\varepsilon}$  и  $\Delta_1$  вблизи седлового решения как

$$\theta_\varepsilon^a(\mathbf{r}) = \theta_{0\varepsilon} + \theta_{1\varepsilon}^a(\mathbf{r}), \quad \Delta^a(\mathbf{r}) = \Delta_0 + \Delta_1^a(\mathbf{r}), \quad (\text{Г.2})$$

хотим изучить отклик параметра порядка на конкретную конфигурацию  $\delta n_s(\mathbf{r})$ . Неоднородный отклик  $\Delta_1^a(\mathbf{r})$  возникает из-за последнего члена в формуле (Г.1). «Затравочное» действие  $\mathcal{S}_\Delta + \mathcal{S}_D + \mathcal{S}_{\text{mag}}^{(1)}$ , будучи разложенным по флуктуациям, даёт седловое значение и следующий вклад второго порядка (в дальнейшем для краткости индекс 0 у  $\theta_0$  и  $\Delta_0$  не пишем):

$$\mathcal{S}_0^{(2)} = \frac{\nu}{T} \sum_a \int d\mathbf{r} \frac{(\Delta_1^a(\mathbf{r}))^2}{\lambda} + \frac{\pi\nu}{2} \sum_{\varepsilon,a} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \theta_{1\varepsilon}^a(\mathbf{r}) (\Pi_\varepsilon)^{-1} \theta_{1\varepsilon}^a(\mathbf{r}') - 2\pi\nu \sum_{\varepsilon,a} \int d\mathbf{r} \Delta_1^a(\mathbf{r}) \theta_{1\varepsilon}^a(\mathbf{r}) \cos \theta_\varepsilon. \quad (\text{Г.3})$$

Здесь  $\Pi_\varepsilon$  — куперонный пропагатор (соответствующий вариациям спектрального угла  $\theta$ ) на фоне сверхпроводящего состояния с магнитными примесями. В импульсном представлении он имеет вид

$$\Pi_\varepsilon(q) = \frac{1}{Dq^2 + 2\mathfrak{E}(\varepsilon)}, \quad (\text{Г.4})$$

где

$$\mathfrak{E}(\varepsilon) = \varepsilon \cos \theta_\varepsilon + \Delta \sin \theta_\varepsilon + \Delta \eta \frac{\mu + \cos 2\theta_\varepsilon}{(1 + \mu \cos 2\theta_\varepsilon)^2}. \quad (\text{Г.5})$$

Однородное седловое уравнение на спектральный угол  $\theta_\varepsilon$  имеет вид

$$-\frac{\varepsilon}{\Delta} \sin \theta_\varepsilon + \cos \theta_\varepsilon - \frac{\eta}{2} \frac{\sin 2\theta_\varepsilon}{1 + \mu \cos 2\theta_\varepsilon} = 0 \quad (\text{Г.6})$$

[это уравнение (3.155), записанное на мацубаровской частоте через  $\theta = \pi/2 + i\psi$ ].

Чтобы найти отклик  $\Delta_1(\mathbf{r})$  на поле  $\delta n_s(\mathbf{r})$ , раскладываем член  $\delta \mathcal{S}_{\text{mag}}$  до первого порядка по  $\theta_1$  и получаем

$$\Delta_1^a(\mathbf{r}) = - \sum_{\varepsilon, b} \frac{\mu \sin 2\theta_\varepsilon}{1 + \mu \cos 2\theta_\varepsilon} \int d\mathbf{r}' \langle \Delta_1^a(\mathbf{r}) \theta_{1\varepsilon}^b(\mathbf{r}') \rangle_0 \delta n_s(\mathbf{r}'). \quad (\text{Г.7})$$

Гауссово среднее с действием (Г.3) имеет вид

$$\langle \Delta_1^a \theta_{1\varepsilon}^b \rangle_{0\mathbf{q}} = \delta_{ab} \frac{T}{\nu} L(q) \Pi_\varepsilon(q) \cos \theta_\varepsilon, \quad (\text{Г.8})$$

где  $L(q)$  — статический пропагатор сверхпроводящих флуктуаций:

$$L^{-1}(q) = \pi T \sum_\varepsilon \left[ \frac{\sin \theta_\varepsilon}{\Delta} - \frac{2 \cos^2 \theta_\varepsilon}{Dq^2 + 2\mathfrak{E}(\varepsilon)} \right]. \quad (\text{Г.9})$$

Формула (Г.7) тогда даёт реплично-симметричный отклик (3.190) с ядром

$$C_\Delta(q) = \frac{\mu}{\nu} L(q) T \sum_\varepsilon \frac{\sin 2\theta_\varepsilon \cos \theta_\varepsilon}{1 + \mu \cos 2\theta_\varepsilon} \Pi_\varepsilon(q). \quad (\text{Г.10})$$

## Г.2 Подавление $\Delta(\mathbf{r})$ вблизи одиночной магнитной примеси

В качестве побочного результата нашего вывода можем найти подавление  $\Delta$  вблизи одиночной магнитной примеси. Для этого в формуле (Г.10) нужно взять  $L(q)$  и  $\Pi_\varepsilon(q)$  на фоне чисто потенциального рассеяния ( $\bar{n}_s = 0$ ,  $\eta = 0$ ) с  $\cos \theta_\varepsilon = \varepsilon/\mathfrak{E}(\varepsilon)$ ,  $\sin \theta_\varepsilon = \Delta/\mathfrak{E}(\varepsilon)$ ,  $\mathfrak{E}(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2}$  [как это следует из уравнения (Г.6)]. Одиночной магнитной примеси (в точке  $\mathbf{r} = 0$ ) соответствует  $\delta n_s(\mathbf{q}) = 1$ , и мы получаем

$$\Delta_1(q) = -C_\Delta(q). \quad (\text{Г.11})$$

В координатном пространстве параметр порядка подавляется в окрестности магнитной примеси на масштабе длины порядка  $\xi_0$ .

Результат (Г.11), полученный в диффузном пределе, может быть легко обобщён на случай произвольной длины свободного пробега  $l$  — для этого в формуле (Г.10) нужно использовать более общее выражение для куперонного пропагатора [251]:

$$\Pi_\varepsilon^{(l)}(q) = \frac{\tau \arctan \left( \frac{ql}{2\tau\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2} + 1} \right) / ql}{1 - \arctan \left( \frac{ql}{2\tau\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2} + 1} \right) / ql}. \quad (\text{Г.12})$$

В частности, в баллистическом пределе на мацубаровских энергиях и вещественном  $q$ ,

$$\Pi_\varepsilon^{(l=\infty)}(q) = \frac{1}{v_F q} \arctan \left( \frac{v_F q}{2\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2}} \right), \quad (\text{Г.13})$$

где  $v_F$  — скорость Ферми, и таким образом воспроизводится результат Русина [25]. Пространственным масштабом для параметра порядка тогда становится чистая длина когерентности  $v_F/\Delta$ .